ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI ÜZERİNE

Mehmet SOLGUN
Doktora

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

BİLECİK, 2016

Ref.No: 10120255

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI ÜZERİNE

Mehmet SOLGUN
Doktora

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

BİLECİK, 2016

ANADOLU UNIVERSITY

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ
UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

ON THE CLASSIFICATION OF ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

Mehmet SOLGUN
Doctoral Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

BiLECiK, 2016

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 29/06/2016 tarih ve 35 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21/07/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Mehmet SOLGUN'un, "Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldların Sınıflandırılması Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ÜYE : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

ÜYE : Prof. Dr. Ayşe Bayar KORKMAZOĞLU

ÜYE : Doç. Dr. Sıddıka Ö. KARAKUŞ

ÜYE : Doç. Dr. Hakan CEBECİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI: Doç. Dr. Sıddıka Ö. KARAKUŞ

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …./…./…..... tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmalarım sırasında bilgisini ve kıymetli vaktini benden esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR' e ve tezimin her aşamasında gösterdiği yardım ve büyük destekten dolayı Yrd. Doç. Dr. Şirin AKTAY' a tüm içtenliğimle teşekkür ederim. Doktora çalışmalarım boyunca yanımda olan ve beni destekleyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca hayatım boyunca, maddi ve manevi açıdan her türlü desteklerini esirgemeyen, sıkıntılarıma sonsuz sabırla katlanan canım anneme, babama, kız kardeşime ve sevgili eşim Zeynep' e tüm kalbimle teşekkür ederim.

Mehmet SOLGUN

Temmuz 2016

ÖZET

Bu çalışmada genel olarak hemen hemen kontak metrik manifoldlar ele alınmıştır. İlk olarak hemen hemen kontak metrik manifoldların sınıfları ile bu manifoldların çarpımıyla elde edilen hemen hemen Hermityen manifoldların sınıfları arasındaki ilişkiler incelenerek yeni sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra yapı grubu G_2 olan manifoldlar ve bu manifoldların temel 3-formları kullanılarak elde edilen hemen hemen kontak metrik yapılar arasındaki ilişkiler, bu yapının karakteristik vektör alanının sağladığı özelliklere göre incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, paralel ve yaklaşık-paralel G_2 yapılardan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapılara örnekler verilmiştir. Tezin son kısmında ise 5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapılar çalışılmıştır. Hemen hemen kontak metrik yapıların paralel, yaklaşık-paralel, α-Sasakian, β-Kenmotsu, hemen hemen-paralel ve yarı-paralel sınıfları ele alınarak, 5-boyutlu nilpotent Lie gruplar üzerindeki sol-invaryant yapıların bu sınıflardan hangilerinde olabileceği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler

Hemen hemen kontak metrik yapılar; Hemen hemen Hermityen yapılar; G_2 yapıya sahip manifoldlar; Beş boyutlu nilpotent Lie cebirleri.

ABSTRACT

In this thesis, almost contact metric manifolds are examined in general terms. Firstly, some certain relations between the classes of almost contact metric manifolds and the almost Hermitian structures on the product of two almost contact metric manifolds are investigated and some new results are obtained. Secondly, the classes of almost contact metric structures, induced by the fundamental 3- forms of manifolds with G_2 structures, are studied and some results are gained by considering some certain properties of the characteristic vector fields of these structures. Furthermore, some examples about almost contact metric manifolds, induced by parallel and nearly-parallel G_2 structures, are given. In the final section, almost contact metric structures on five dimensional nilpotent Lie algebras studied. Also, left invariant almost contact metric structures on five dimensional nilpotent Lie groups are investigated by inquiring whether these structures are cosymplectic, nearly-cosymplectic, α-Sasakian, β-Kenmotsu, almost-cosymplectic and semi-cosymplectic.

Keywords

Almost contact metric structures; Almost Hermitian structures; Manifolds with G_2 structures; Five dimensional nilpotent Lie algebras.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(ϕ, ξ, η)	: Hemen hemen kontak yapı
(M, ϕ, ξ, η)	: Hemen hemen kontak manifold
(ϕ, ξ, η, g)	: Hemen hemen kontak metrik yapı
(M, ϕ, ξ, η, g)	: Hemen hemen kontak metrik manifold
Φ	: Hemen hemen kontak metrik yapının temel 2-formu
$\mathfrak{S}$	: Devirsel toplam
$\otimes$	: Tensör çarpımı
$\wedge$	: Dış çarpım
∇	: Levi-Civita kovaryant türevi
d	: Dış türev
δ	: Ko-türev
J	: Hemen hemen kompleks yapı
(M, g, J)	: Hemen hemen Hermityen manifold
F	: Kähler formu
d_{vol}	: Hacim formu
P	: 2-katlı vektör çarpımı
φ	: G_2 yapının temel 3-formu
G	: Lie grubu
$[,]$	: Lie braket operatörü
$\mathfrak{g}$	: Lie cebiri

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

1 GİRİŞ

Günümüzde birçok matematikçi ve fizikçi tarafından çalışılan konulardan birisi $(2n+1)$- boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldlar üzerinde tanımlı olan hemen hemen kontak metrik yapılardır. Bu yapılar J. W. Gray (1959) tarafından tanımlanmıştır. Sasaki ve Hatakeyama aynı tarihlerde bu yapıların denk tanımlarını vermişlerdir. Literatürde hemen hemen kontak metrik yapıların "paralel", "Sasakian", "normal" gibi birçok sınıfları ele alınmıştır. Chinea ve Gonzales (1990), bu yapıları 2^{12} sınıfa ayırmışlardır. Aynı sınıflandırma eş zamanlı olarak Alexiev ve Ganchev tarafından da yapılmıştır (Alexiev ve Ganchev, 1986). Bu çalışmada Chinea ve Gonzales' in sınıflandırma notasyonları esas alınmıştır.

Hemen hemen Hermityen yapılar, $2n$-boyutlu, diferensiyellenebilir Riemann manifoldları üzerinde tanımlı olup, hemen hemen kontak metrik yapılarda olduğu gibi, bu yapıların da çeşitli sınıfları üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu yapıların sınıflandırması Gray ve Hervella (1978), tarafından yapılmış olup, hemen hemen Hermityen yapılar 16 sınıfa ayrılmıştır.

Geometride son zamanlarda çalışılan alanlardan birisi de G_2 yapıya sahip manifoldlar ile hemen hemen kontak metrik manifoldlar arasındaki ilişkilerdir. Literatürde G_2 Lie grubunun $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri ilk kez Killing' in (1887) çalışmasında yer almıştır. Engel (1900), G_2 Lie grubunu bir pozitif 3-formun izotropi alt grubu olarak ifade etmiştir. Herhangi bir φ pozitif 3-formunun izotropi cebiri Reichel (1907) tarafından ifade edilmiştir. Gray (1960), manifoldlar üzerinde katlı vektör çarpımını tanımlayarak bazı geometrik özelliklerini incelemiştir. Yapı grubu G_2 olan manifoldların sınıflandırılması Fernández ve Gray (1982) tarafından yapılmıştır. Bu sınıflandırma için öncelikle manifold üzerindeki temel 3-formun kovaryant türevinin de elemanı olduğu bir $\mathcal{W}$ vektör uzayı tanımlanıp, bu uzay

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$$

şeklinde dört indirgenmez G_2 invaryant alt uzayın direkt toplamı şeklinde yazılmıştır ve böylece $2^4 = 16$ farklı sınıf elde edilmiştir (Fernández ve Gray, 1982). 2002' de Matzeu ve Munteanu tarafından G_2 yapıya sahip manifoldların üzerinde tanımlı olan 2-katlı vektör çarpımı kullanılarak hemen hemen kontak metrik yapı inşa edilmiştir. Arıkan ve arkadaşları ise G_2 yapıya sahip manifoldların üzerinde bir hemen hemen kontak yapı olduğunu ispatlamışlardır (Arikan vd., 2013).

G boyutu $2n + 1$ olan bağlantılı bir Lie grubu olsun. Bu durumda G Lie grubu sol-invaryant bir hemen hemen kontak metrik yapıya sahiptir. Bu yapıya bağlı olarak, G Lie grubuna karşılık gelen $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı mevcuttur (Morimoto, 1963). Literatürde bu yapıların bazı sınıfları ve özellikleri çalışılmıştır. Andrada ve arkadaşları 5-boyutlu Lie cebirleri üzerindeki Sasakian yapıları ele almışlardır ve Sasakian yapıya sahip $(2n+1)-$boyutlu bir nilpotent Lie cebirinin, reel Heisenberg gruba izomorf olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca, 5-boyutlu Sasakian Lie cebirlerinin bir sınıflandırmasını elde etmişlerdir (Andrada vd., 2009). Calvaruso ve Fino, 5-boyutlu Lie grupları üzerindeki sol-invaryant K-kontak yapıları incelemişlerdir (Calvaruso ve Fino, 2012). Bir diğer çalışmada ise 3-boyutlu Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapılar ele alınmıştır (Calvaruso, 2013).

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup, ikinci bölümde temel kavramlar ve tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Oubina'nın sınıflandırması da dikkate alınarak, iki hemen hemen kontak metrik manifoldun çarpımından elde edilen hemen hemen Hermityen manifoldun hangi sınıfa ait olduğu bazı sınıflar için belirlenmiştir. Dördüncü bölümde yapı grubu G_2 olan manifoldlar ve bu manifoldların temel 3-formları kullanılarak elde edilen hemen hemen kontak metrik yapılar arasındaki ilişki incelenmiştir ve keyfi G_2 yapılar ve yaklaşık-paralel G_2 yapılardan elde edilen hemen hemen kontak metrik manifoldların sınıflandırılması ele alınıp örnekler verilmiştir.

Tezin son bölümünde, Dixmier'in nilpotent Lie cebirleri için verdiği sınıflandırma kullanılarak, beş boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapılar incelenmiştir. Özel olarak, paralel, yaklaşık-paralel, α-Sasakian, β-Kenmotsu, hemen hemen-paralel ve yarı-paralel hemen hemen kontak metrik yapılar ele alınmıştır.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Hemen hemen Kontak Metrik Manifoldlar

Tanım 2.1. *M^{2n+1}, 2n+1 boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde ϕ (1,1) tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1- form olmak üzere,*

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1 \tag{2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen (almost) kontak yapı, (M, ϕ, ξ, η) veya kısaca M' ye bir hemen hemen almost kontak manifold denir.

Bu manifold üzerinde

$$\phi(\xi) = 0 \text{ ve } \eta \circ \phi = 0$$

eşitlikleri sağlanır (Blair, 2002). Buna ek olarak,

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \; \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlayan bir g Riemann metriği varsa, (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *hemen hemen kontak metrik yapı* denir. Bu yapıyla birlikte M manifolduna hemen hemen kontak metrik manifold denir ve (M, ϕ, ξ, η, g) ile gösterilir. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ keyfi vektör alanları olmak üzere M üzerindeki,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi(Y)),$$

ile tanımlı 2- forma, hemen hemen kontak metrik manifoldunun *temel 2-formu* denir.

∇, g Riemann metriğinin konneksiyonu (Levi-Civita kovaryant türevi), X, Y, Z keyfi vektör alanları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Chinea ve Gonzales, 1990) :

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z), \tag{2.3}$$

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z, \tag{2.4}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y). \tag{2.5}$$

X, Y, Z keyfi vektör alanları, $\mathfrak{S}$ devirsel toplam olmak üzere Φ ve η' nın dış türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X, \tag{2.6}$$

$$3d\Phi(X, Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}(\nabla_X)(Y, Z). \tag{2.7}$$

U, M^{2n+1} hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir koordinat komşuluğu olsun. e_1, U'da ξ vektör alanlarına ortogonal bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda $\phi(e_1)$ vektör alanı e_1 ve ξ ile ortogonal bir birim vektör alanıdır. e_2 vektör alanını $e_1, \phi(e_1), \xi$ ile ortogonal bir birim vektör alanı seçersek, benzer şekilde $\phi(e_2)$ vektör alanı $e_1, \phi(e_1), \xi, e_2$ ile ortogonal bir birim vektör alanıdır. $i = 1, ..., n$ için bu seçime devam edilirse, $\{e_i, \phi(e_i), \xi\}$, M' nin bir ortonormal çatısı olur (Blair, 2002). Böylece η ve Φ' nin ko-türevleri (coderivative) aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{e_i} \Phi)(e_i, X) + \nabla_{\phi(e_i)} \Phi)(\phi(e_i), X)\} - (\nabla_\xi \Phi)(\xi, X), \tag{2.8}$$

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{e_i} \eta)e_i + (\nabla_{\phi(e_i)} \eta)(\phi(e_i))\}. \tag{2.9}$$

Φ temel 2-formunun kovaryant türevi $\nabla\Phi$,

$$(\nabla_x \Phi)(y, z) = -(\nabla_x \Phi)(z, y)$$

ve

$$(\nabla_x\Phi)(y,z) = -(\nabla_x\Phi)(\phi(y),\phi(z)) + \eta(y)(\nabla_x\Phi)(\xi,z) + \eta(z)(\nabla_x\Phi)(y,\xi)$$

eşitliklerini sağlar. Bu özellikler göz önüne alındığında, her $p \in M$ noktasında $\nabla\Phi|_p$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{\alpha \in \otimes_3^0 T_pM | \alpha(x,y,z) = -\alpha(x,z,y) = -\alpha(x,\phi y,\phi z) \\ + \eta(y)\alpha(x,\xi,z) + \eta(z)\alpha(x,y,\xi)\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

sonlu boyutlu vektör uzayının bir elemanıdır. $\mathcal{C}$ sonlu boyutlu vektör uzayı $U(n) \times 1$ grubunun etkileri (action) kullanılarak, bu etkiye göre invaryant ve ortogonal 12 alt uzaya ayrılmıştır. Bu alt uzaylar $\mathcal{C}_i$, $(i = 1, \ldots, 12)$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{12}$$

şeklindedir (Chinea ve Gonzales, 1990). Bu uzayların tanımlama bağıntıları şu şekildedir:

Çizelge 2.1: $\mathcal{C}_i$ uzaylarının tanımlama bağıntıları

$\mathcal{C}_1$	$(\nabla_X \Phi)(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla\eta = 0$
$\mathcal{C}_2$	$d\Phi = \nabla\eta = 0$
$\mathcal{C}_3$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\phi X} \Phi)(\phi Y, Z) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta\Phi = 0$
$\mathcal{C}_4$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -\frac{1}{2(n-1)}[g(\phi X, \phi Y)\delta\Phi(Z) - g(\phi X, \phi Z)\delta\Phi(Y) - \Phi(X, Y)\delta\Phi(\phi Z) + \Phi(X, Z)\delta\Phi(\phi Y)] \quad \text{ve} \quad \delta\Phi(\xi) = 0$
$\mathcal{C}_5$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \frac{1}{2n}[\Phi(X, Z)\eta(Y) - \Phi(X, Y)\eta(Z)]\delta\eta$
$\mathcal{C}_6$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \frac{1}{2n}[g(X, Z)\eta(Y) - g(X, Y)\eta(Z)]\delta\Phi(\xi)$
$\mathcal{C}_7$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \eta(Z)(\nabla_Y \eta)\phi X + \eta(Y)(\nabla_{\phi X}\eta)Z \quad \text{ve} \quad \delta\Phi = 0$
$\mathcal{C}_8$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -\eta(Z)(\nabla_Y \eta)\phi X + \eta(Y)(\nabla_{\phi X}\eta)Z \quad \text{ve} \quad \delta\eta = 0$
$\mathcal{C}_9$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \eta(Z)(\nabla_Y \eta)\phi X - \eta(Y)(\nabla_{\phi X}\eta)Z$
$\mathcal{C}_{10}$	$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -\eta(Z)(\nabla_Y \eta)\phi X - \eta(Y)(\nabla_{\phi X}\eta)Z$
$\mathcal{C}_{11}$	$\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -\eta(X)(\nabla_\xi \Phi)(\phi Y, \phi Z)$
$\mathcal{C}_{12}$	$\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi \eta)\phi Y - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi \eta)\phi Z$

$\mathcal{C}_i$ uzayları yardımıyla, Φ temel 2-formunun kovaryant türevinin bulunduğu uzaylar ele alınarak hemen hemen kontak metrik manifoldlar 2^{12} sınıfa ayrılmıştır (Chinea ve Gonzales, 1990). Bu sınıflardan bazıları şunlardır:

- hemen hemen-paralel (almost-cosymplectic): $\mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_9$
- Sasakian-sı (Quasi-Sasakian): $\mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_7$
- β-Kenmotsu: $\mathcal{C}_5$
- α-Sasakian: $\mathcal{C}_6$

- Yaklaşık-K-paralel (Nearly-K-parallel): $\mathcal{C}_1$
- Yarı-paralel (Semi-parallel): $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11}$
- Hemen hemen-K-kontak (Almost-K-contact): $\mathcal{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{10}$
- Normal: $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_8$.

Tanım 2.2. *(ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı ve Φ de bu yapının temel 2-form olsun. Her X, Y, Z vektör alanları için, bu yapıya*

1. *$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = 0$ ise paralel (cosymplectic),*
2. *$(\nabla_X \Phi)(X, Y) = 0$ ise yaklaşık-paralel,*
3. *$\delta\Phi = 0$ ve $\delta\eta = 0$ ise yarı-paralel ,*
4. *$d\Phi = 0$ ve $d\eta = 0$ ise hemen hemen-paralel ,*
5. *$\nabla_\xi \phi = 0$ ise hemen hemen-K-kontak,*
6. *$(\nabla_X \phi)(Y) = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$ ise α-Sasakian ,*
7. *$(\nabla_X \phi)(Y) = \beta(g(\phi(X), Y)\xi - \eta(Y)\phi(X))$ ise β-Kenmotsu*

denir.

2.2 Hemen hemen Hermityen Manifoldlar

Tanım 2.3. *(M, g) çift boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir J $(1,1)$- tensör alanı $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa, J' ye M üzerinde bir hemen hemen kompleks (almost complex) yapı denir. Her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $g(JX, JY) = g(X, Y)$ eşitliğini sağlayan bir J hemen hemen complex yapıyla birlikte, (M, g) manifolduna bir hemen hemen Hermityen manifold denir ve (M, g, J) ile gösterilir.*

Bir hemen hemen Hermityen manifoldu üzerindeki temel 2-form (Kähler formu), her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$F(X,Y) = g(JX,Y) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlıdır. Gray ve Hervella hemen hemen Hermityen manifoldları, F temel 2-formunun kovaryant türevlerini esas alarak 16 sınıfa ayırmıştır (Gray ve Hervella, 1980). Bu sınıfların tanımlama bağıntıları şu şekildedir:

Çizelge 2.2: Hemen hemen Hermityen Manifoldların Sınıflarının Tanımlama Bağıntıları

$\mathcal{K}$	$\nabla F = 0$
$\mathcal{W}_1 = \mathcal{NK}$	$\nabla_X(F)(X,Y) = 0$ veya $3\nabla F = dF$
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{AK}$	$dF = 0$
$\mathcal{W}_3 = \mathcal{SK} \cap \mathcal{K}$	$\delta F = S = 0$ (veya $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \delta F = 0$)
$\mathcal{W}_4$	$\nabla_X(F)(Y,Z) = \frac{-1}{2(n-1)}\{< X,Y > \delta F(Z) - < X,Z > \delta F(Y)$ $- < X,JY > \delta F(JZ) + < X,JZ > \delta F(JY)\}$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{H}$	$S = 0$ (or$\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$)
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = \delta F = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\mathfrak{S}\{\nabla_X(F)(Y,Z) - \frac{1}{n-1}F(X,Y)\delta F(JZ)\} = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}\{\lvert\lvert X\rvert\rvert^2 \delta F(Y) - < X,Y > \delta F(X)$ $- < JX,Z > \delta F(JX)\}$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\mathfrak{S}\{\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)\} = \delta F = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathcal{SK}$	$\delta F = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \frac{-1}{n-1}\{< X,Y > \delta F(Z)$ $- < X,Z > \delta F(Y) - < X,JY > \delta F(JZ) + < X,JZ > \delta F(JY)\}$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_1$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_2$	$\mathfrak{S}\{\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)\} = 0$
$\mathcal{W}$	Koşul yok

2.3 G_2 Yapıya Sahip Manifoldlar

$\{e_1, \cdots, e_7\}$ kümesi $\mathbb{R}^7$ uzayının standart tabanı ve $\{e^1, \cdots, e^7\}$ bu tabana karşılık gelen dual taban olsun. $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$ olmak üzere,

$$\varphi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan 3-forma $\mathbb{R}^7$ üzerinde temel 3-form denir.

$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) | g^*\varphi = \varphi\}$ kümesi $GL(7, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun 14-boyutlu bir alt grubu olup kompakt, bağlantılı ve basit bağlantılıdır (Bryant, 1987). Ayrıca G_2 grubu $GL(7, \mathbb{R})$ manifoldunun bir kapalı alt manifoldudur (Harvey, 1990). O halde G_2 bir Lie grubudur (Baker, 2002).
Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{1}{6}(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi$$

7-formu ele alındığında, $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ için,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6(x_1 y_1 + \ldots x_7 y_7) e^{1234567}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\mathbb{R}^7$ üzerindeki standart iç çarpım $< x, y >= \sum x_i y_i$ ve hacim formu $d_{vol} = e^{1234567}$ elde edilir (Bryant, 1987).

Tanım 2.4. *Herhangi bir $(V, <,>)$ iç çarpım uzayı üzerinde, her $x, y \in V$ için,*

i) $< P(x, y), x >=< P(x, y), y >= 0,$

ii) $< P(x, y), P(x, y) >=< x, x >< y, y > - < x, y >^2$

özelliklerini sağlayan bir $P : V \times V \to V$ bilineer dönüşümü varsa, bu dönüşüme V üzerinde 2-katlı vektör çarpımı denir.

φ temel 3-formu kullanılarak

$$(P(x, y))^\sharp := y \lrcorner x \lrcorner \varphi$$

olarak tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^7$ üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımıdır.
O halde Her $x, y, z \in \mathbb{R}^7$ için,

$$(P(x,y))^\sharp(z) =< P(x,y), z >= (y \lrcorner x \lrcorner \varphi)(z) = \varphi(x,y,z)$$

olur. Yani,

$$< P(x,y), z >= \varphi(x,y,z) \tag{2.13}$$

eşitliği elde edilir (Karigiannis, 2005).

Yardımcı Teorem 2.5. *Her $x, y, z \in V$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Fernández ve Gray, 1982):*

$$< P(x,y), P(x,z) >=< x,x >< y,z > - < x,z >< x,y >, \tag{2.14}$$

$$P(x, P(x,y)) = - < x,x > y + < x,y > x, \tag{2.15}$$

$$P(x, P(y,z)) + P(y, P(x,z)) = -2 < x,y > z + < x,z > y + < y,z > x. \tag{2.16}$$

(M, g) 7-boyutlu bir Riemann manifoldu ve TM bu manifold üzerindeki tanjant demeti olmak üzere, $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlı φ temel 3-formu, lokal trivilizasyondan bağımsız olarak TM üzerine taşınabiliyorsa (M, g) manifolduna G_2 yapıya sahiptir denir ve φ 3- formuna da M üzerinde bir G_2 yapı denir. G_2 yapıya sahip manifoldlar 1982 yılında Fernández ve Gray tarafından φ 3- formunun kovaryant türevinin sağladığı özellikler açısından ele alınarak 16 sınıfa ayrılmıştır (Fernández ve Gray, 1982). Bu sınıflardan bazılarının tanımlama bağıntısı dördüncü bölümde verilecektir.

2.4 Lie Grubu ve Lie Cebiri

Tanım 2.6. *G bir grup ve diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer,*

i) $G \times G \to G, \qquad (g,h) \mapsto gh,$

ii) $G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1}$

dönüşümleri diferensiyellenebilir ise G grubuna bir Lie grubu denir.

Bazı kaynaklarda bu tanım $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ dönüşümünün diferensiyellebilir olmasıyla verilmektedir. Lie grupları ve özellikleri ile ilgili (Lee, 2003), (Brickell ve Clark, 1970), (O'neill, 1983) gibi bir çok kaynak mevcut olup, konu ile ilgili detaylar ve aşağıdaki önermelerin ispatları için bu kaynaklar yeterli olacaktır.

Önerme 2.7. *a) İki Lie grubunun çarpımı da bir Lie grubudur.*

b) Lie grubunun kapalı alt grubu da Lie grubudur.

c) Lie grubunun kapalı normal alt grubu ile oluşturulan bölüm grubu bir Lie grubudur.

Örnek 2.8. *1) $\mathbb{R}^n$ bir diferensiyellenebilir manifold ve $(x,y) \mapsto x-y$ dönüşümü diferensiyellenebilir olduğundan $\mathbb{R}^n$ bir Lie grubudur.*

2) $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$ matris grupları birer Lie grubudur.

G bir Lie grubu, $g \in G$ olsun.

$$\begin{aligned} L_g :& G \to G \\ & h \mapsto L_g(h) := gh \end{aligned}$$

dönüşümüne sol-öteleme (left-translation) denir. m_G grup işlemi ve

$$i_g : G \to G \times G, \quad h \mapsto (g,h)$$

dönüşümü diferensiyellenebilir olup, L_g dönüşümü, bu iki dönüşümün bileşkesi,

$$G \xrightarrow{i_g} G \times G \xrightarrow{m_G} G$$

şeklinde yazılabildiğinden, L_g sol-öteleme dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Ayrıca bu dönüşüm birebir ve örten olup, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ dönüşümü de diferensiyelenebilir olduğundan L_g dönüşümü G üzerinde bir diffeomorfizmdir.

Tanım 2.9. *G bir Lie grubu, $X \in \mathfrak{X}(G)$ keyfi bir vektör alanı olmak üzere,*

$$d(L_g)_h(X_h) = X_{gh}, \quad \forall g, h \in G$$

eşitliği sağlanıyorsa, X vektör alanına sol-invaryanttır denir.

L_g bir diffeomorfizm olduğundan yukarıdaki eşitlik yerine $(L_g)_*X = X$ eşitliği kullanılabilir.

Önerme 2.10. *G bir Lie grubu, $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ sol-invaryant vektör alanları ise, bu vektör alanlarının braketi $[X, Y]$ de sol-invaryanttır (Lee, 2003).*

Tanım 2.11. *$\mathfrak{g}$ bir (reel) vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan işlem (Lie braketi)*

$$\begin{aligned} [,] : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ & (x, y) \mapsto [x, y] \end{aligned}$$

ile birlikte $\mathfrak{g}$ vektör uzayına bir Lie cebiri denir;

i) Bilineerlik: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

ii) Antisimetri: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

iii) Jacobi-Özdeşliği: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

$\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ alt vektör uzayı olsun. $\mathfrak{h}$ uzayı $[,]$ braket işlemine göre kapalı ise, $\mathfrak{h}$ uzayına $\mathfrak{g}$' nin Lie alt cebiri denir. Bu durumda $\mathfrak{h}$, $[,]|_{\mathfrak{h}}$ işlemi ile bir Lie cebiridir.

Örnek 2.12. *1) Bir M manifoldunun vektör alanlarının uzayı $\mathfrak{X}(M)$,*

$$[X,Y] = XY - YX$$

Lie braketi ile bir Lie cebiridir.

2) G bir Lie grubu olsun. G manifoldunun sol-invaryant vektör alanlarının kümesi $Lie(G)$ ile gösterilir ve bu küme $\mathfrak{X}(G)$ Lie cebirinin bir Lie alt cebiridir. Bu cebire G Lie grubunun Lie cebiri denir. G nin birim elemanı e, $dim(G) = n$ olmak üzere, $Lie(G) \cong T_e G$ dir. Böylece $Lie(G)$ cebiri n-boyutlu bir (reel) vektör uzayıdır.

3) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri olsun.

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[x,y] | x, y \in \mathfrak{g}\}$$

kümesi $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir Lie alt cebiri olup, bu cebire $\mathfrak{g}$' nin türetilmiş (derived) Lie cebiri denir.

Tanım 2.13. *$\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri olsun.*

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \supseteq \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] \supseteq \ldots$$

zincirine $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin alt merkez serisi (lower central series) denir.

Tanım 2.14. *$\mathfrak{g}^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\mathfrak{g}$ Lie cebirine nilpotent denir.*

Tanım 2.15. *G bağlantılı bir Lie grubu olsun. G Lie grubunun Lie cebiri $Lie(G) = \mathfrak{g}$ nilpotent ise G Lie grubuna nilpotent denir.*

3 HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLAR

$(M_1^{2n+1}, \phi_1, \xi_1, \eta_1,)$ ve $(M_2^{2m+1}, \phi_2, \xi_2, \eta_2,)$ iki hemen hemen kontak manifold olsun. Bu takdirde,

$$J(X_1, X_2) := (\phi_1(X_1) - \eta_2(X_2)\xi_1, \phi_2(X_2) + \eta_1(X_1)\xi_2),\ \forall (X_1, X_2) \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$$

şeklinde tanımlı endomorfizma $M := M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı verir. Bu yapıya $(M_i, \phi_i, \xi_i, \eta_i,),\ i = 1, 2$ manifoldlarından elde edilen hemen hemen kompleks yapı denir. Ayrıca, M nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartın, M_1 ve M_2 manifoldlarının normal olması gerektiği Morimoto tarafından gösterilmiştir (Morimoto, 1963).

M_1 ve M_2, sırasıyla g_1 ve g_2 metrikleri ile hemen hemen kontak metrik manifold ise, bu durumda $M = M_1 \times M_2$ çaprım manifoldu, $g := g_1 + g_2$ şeklinde tanımlı metrik ile (J, g) hemen hemen Hermityen yapısına sahiptir (Capursi, 1984). M_1 ve M_2 gibi iki hemen hemen kontak metrik manifoldun çarpımıyla elde edilen M hemen hemen Hermityen manifoldunun sırasıyla Kähler , hemen hemen Kähler, yaklaşık-Kähler, Hermityen olması için gerek ve yeter şartın M_1, M_2 manifoldlarının paralel, hemen hemen-paralel, yaklaşık-paralel, normal olmaları gerektiğini Capursi tarafından gösterilmiştir (Capursi, 1984). Ayrıca iki hemen hemen kontak metrik manifoldun çarpımıyla elde edilen hemen hemen Hermityen yapıların konformal (conformal) deformasyonları Blair ve Oubina tarafından incelenmiştir (Blair ve Oubina, 1990a).

Öncelikle iki hemen hemen kontak metrik manifoldun çarpımıyla elde edilen hemen hemen Hermityen manifoldun F temel 2-formunun kovaryant türev ∇F, dış türev dF ve ko-türev δF' yi hesaplanmıştır. $(M_1, \varphi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ ve $(M_2, \varphi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$ iki hemen hemen kontak metrik manifold ve bu manifoldların çarpımı $M = M_1 \times M_2$ olsun. Keyfi $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathfrak{X}(M)$ için, M manifoldunun F temel 2- formunun tanımı gereği,

$$\begin{aligned}
F((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) &= g(J(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) \\
&= g((\varphi_1(X_1)-\eta_2(X_2)\xi_1, \varphi_2(X_2)+\eta_1(X_1)\xi_2),(Y_1,Y_2)) \\
&= g_1(\varphi_1(X_1)-\eta_2(X_2)\xi_1, Y_1)+g_2(\varphi_2(X_2)+\eta_1(X_1)\xi_2, Y_2) \\
&= -\Phi_1(X_1,Y_1)-\eta_2(X_2)\eta_1(Y_1)-\Phi_2(X_2,Y_2)+\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklindedir.

Keyfi $(X_1,X_2),(Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2) \in \mathfrak{X}(M)$ elemanları için ∇F,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{(X_1,X_2)}F)((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) \\
&= (\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) + \nabla_{(0,X_2)}F)((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) \\
&= (\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,0),(Z_1,0)) + \nabla_{(X_1,0)}F)((0,Y_2),(0,Z_2)) \\
&\quad + (\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,0),(0,Z_2)) + \nabla_{(X_1,0)}F)((0,Y_2),(Z_1,0)) \\
&\quad + (\nabla_{(0,X_2)}F)((Y_1,0),(Z_1,0)) + \nabla_{(0,X_2)}F)((0,Y_2),(0,Z_2)) \\
&\quad + (\nabla_{(0,X_2)}F)((Y_1,0),(0,Z_2)) + \nabla_{(0,X_2)}F)((0,Y_2),(Z_1,0))
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. Bu sekiz ifade ayrı ayrı ele alındığında,

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,0),(Z_1,0)) &= (X_1,0)[F((Y_1,0),(Z_1,0))] - F(\nabla_{(X_1,0)}(Y_1,0),(Z_1,0)) \\
&\quad - F((Y_1,0),(\nabla_{(X_1,0)}(Z_1,0)) \\
&= X_1[\Phi_1(Z_1,Y_1)] - \Phi_1(Z_1,\nabla^1_{X_1}Y_1) - \Phi_1(\nabla^1_{X_1}Z_1,Y_1) \\
&= (\nabla^1_{X_1}\Phi_1)(Z_1,Y_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,0),(0,Z_2)) &= (X_1,0)[F((Y_1,0),(0,Z_2))] - F(\nabla_{(X_1,0)}(Y_1,0),(0,Z_2))\\ &\quad - F((Y_1,0),(\nabla_{(X_1,0)}(0,Z_2))\\ &= (X_1,0)[\eta_1(Y_1)\eta_2(Z_2)] - \eta_1(\nabla^1_{X_1}Y_1)\eta_2(Z_2)\\ &= \eta_2(Z_2)(X_1[\eta_1(Y_1)] - \eta_1(\nabla^1_{X_1}Y_1))\\ &= \eta_2(Z_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X_1,0)}F)((0,Y_2),(Z_1,0)) &= (X_1,0)[F((0,Y_2),(Z_1,0))] - F(\nabla_{(X_1,0)}(0,Y_2),(Z_1,0))\\ &\quad - F((0,Y_2),(\nabla_{(X_1,0)}(Z_1,0))\\ &= (X_1,0)[-\eta_2(Y_2)\eta_1(Z_1)] + \eta_2(Y_2)\eta_1(\nabla^1_{X_1}Z_1)\\ &= -\eta_2(Y_2)(X_1[\eta_1(Z_1)] - \eta_1(\nabla^1_{X_1}Z_1))\\ &= -\eta_2(Y_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Z_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X_1,0)}F)((0,Y_2),(0,Z_2)) &= (X_1,0)[F((0,Y_2),(0,Z_2))] - F(\nabla_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2))\\ &\quad - F((0,Y_2),(\nabla_{(X_1,0)}(0,Z_2))\\ &= (X_1,0)[\Phi_2(Z_2,Y_2)]\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(0,X_2)}F)((Y_1,0),(Z_1,0)) &= (0,X_2)[F((Y_1,0),(Z_1,0))] - F(\nabla_{(0,X_2)}(Y_1,0),(Z_1,0))\\ &\quad - F((Y_1,0),(\nabla_{(0,X_2)}(Z_1,0))\\ &= (0,X_2)[\Phi_1(Z_1,Y_1)]\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(0,X_2)}F)((Y_1,0),(0,Z_2)) &= (0,X_2)[F((Y_1,0),(0,Z_2))] - F(\nabla_{(0,X_2)}(Y_1,0),(0,Z_2)) \\ &\quad - F((Y_1,0),(\nabla_{(0,X_2)}(0,Z_2)) \\ &= \eta_1(Y_1)(X_2[\eta_2(Z_2)] - \eta_2(\nabla^2_{X_2}Z_2)) \\ &= \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Z_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{(0,X_2)}F)((0,Y_2),(Z_1,0)) &= (0,X_2)[F((0,Y_2),(Z_1,0))] - F(\nabla_{(0,X_2)}(0,Y_2),(Z_1,0)) \\ &- F((0,Y_2),(\nabla_{(0,X_2)}(Z_1,0)) \\ &= -\eta_1(Z_1)(X_2[\eta_2(Y_2)] - \eta_2(\nabla^2_{X_2}(Y_2)) \\ &= -\eta_1(Z_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Y_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_{(0,X_2)}F)((0,Y_2),(0,Z_2)) &= (0,X_2)[F((0,Y_2),(0,Z_2))] - F(\nabla_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,Z_2)) \\ &\quad - F((0,Y_2),(\nabla_{(0,X_2)}(0,Z_2)) \\ &= X_2[\Phi_2(Z_2,Y_2)] - \Phi_2(Z_2,\nabla^2_{X_2}Y_2) - \Phi_2(\nabla^2_{X_2}Z_2,Y_2) \\ &= (\nabla^2_{X_2}\Phi_2)(Z_2,Y_2)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.18) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X_1,X_2)}F)((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) &= -(\nabla^1_{X_1}\Phi_1)(Y_1,Z_1) - (\nabla^2_{X_2}\Phi_2)(Y_2,Z_2) \\ &\quad - \eta_2(Y_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Z_1) + \eta_2(Z_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Y_1) \\ &\quad + \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Z_2) - \eta_1(Z_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Y_2) \qquad (3.19)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde;

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{J(X_1,X_2)}F)(J(Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) \\
&= -(\nabla^1_{\varphi_1(X_1)}\Phi_1)(\varphi_1(Y_1),Z_1) + \eta_2(Y_2)(\nabla^1_{\varphi_1(X_1)}\Phi_1)(\xi_1,Z_1) \\
&- (\nabla^2_{\varphi_2(X_2)}\Phi_2)(\varphi_2(Y_2),Z_2) - \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{\varphi_2(X_2)}\Phi_2)(\xi_2,Z_2) \\
&- \eta_1(Y_1)(\nabla^1_{\varphi_1(X_1)}\eta_1)(Z_1) + \eta_1(Y_1)\eta_2(X_2)(\nabla^1_{\xi_1}\eta_1)(Z_1) \\
&+ \eta_2(Z_2)(\nabla^1_{\varphi_1(X_1)}\eta_1)(\varphi_1(Y_1)) - \eta_2(Z_2)\eta_2(X_2)(\nabla^1_{\xi_1}\eta_1)(\varphi_1(Y_1)) \\
&- \eta_2(Y_2)(\nabla^2_{\varphi_2(X_2)}\eta_2)(Z_2) - \eta_2(Y_2)\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\xi_2}\eta_2)(Z_2) \\
&- \eta_1(Z_1)(\nabla^2_{\varphi_2(X_2)}\eta_2)(\varphi_2(Y_2)) - \eta_1(Z_1)\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\xi_2}\eta_2)(\varphi_2(Y_2)) \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Bu adımda F Kähler formunun dış türevi dF;

$$
\begin{aligned}
&(dF)((X_1,X_2),(Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) \\
&= (\nabla_{(X_1,X_2)}F)((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2)) - (\nabla_{(Y_1,Y_2)}F)((X_1,X_2),(Z_1,Z_2)) \\
&+ (\nabla_{(Z_1,Z_2)}F)((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))
\end{aligned}
$$

olduğundan $d\Phi$ ve $d\eta$ tanımları kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&(dF)((X_1,X_2),(Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2))\\
&= -(\nabla^1_{X_1}\Phi_1)(y_1,Z_1) - (\nabla^2_{X_2}\Phi_2)(Y_2,Z_2) - \eta_2(Y_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Z_1)\\
&+ \eta_2(Z_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(Y_1) + \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Z_2) - \eta_1(Z_1)(\nabla^2_{X_2}\eta_2)(Y_2)\\
&+ (\nabla^1_{Y_1}\Phi_1)(X_1,Z_1) + (\nabla^2_{Y_2}\Phi_2)(X_2,Z_2) + \eta_2(X_2)(\nabla^1_{Y_1}\eta_1)(Z_1)\\
&- \eta_2(Z_2)(\nabla^1_{Y_1}\eta_1)(X_1) - \eta_1(X_1)(\nabla^2_{Y_2}\eta_2)(Z_2) + \eta_1(Z_1)(\nabla^2_{Y_2}\eta_2)(X_2)\\
&- (\nabla^1_{Z_1}\Phi_1)(X_1,Y_1) - (\nabla^2_{Z_2}\Phi_2)(X_2,Y_2) - \eta_2(X_2)(\nabla^1_{Z_1}\eta_1)(Y_1)\\
&+ \eta_2(Y_2)(\nabla^1_{Z_1}\eta_1)(X_1) + \eta_1(X_1)(\nabla^2_{Z_2}\eta_2)(Y_2) - \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{Z_2}\eta_2)(X_2)\\
&= -(d\Phi_1)(X_1,Y_1,Z_1) - (d\Phi_2)(X_2,Y_2,Z_2) - \eta_1(Z_1)d\eta_2(X_2,Y_2)\\
&- \eta_2(Y_2)d\eta_1(X_1,Z_1) + \eta_1(Y_1)d\eta_2(X_2,Z_2) + \eta_2(Z_2)d\eta_1(X_1,Y_1)\\
&- \eta_1(X_1)d\eta_2(Y_2,Z_2) + \eta_2(X_2)d\eta_1(Y_1,Z_1) \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\{e_i,\varphi_1(e_i),\xi_1\}$ ve $\{f_j,\varphi_2(f_j),\xi_2\}$ sırasıyla M_1^{2n+1} ve M_2^{2m+1} için lokal çatılar olsunlar. Bu takdirde

$$\{(e_i,0),(\varphi_1(e_i),0),(\xi_1,0),(0,f_j),(0,\varphi_2(f_j)),(0,\xi_2)\}$$

$M = M_1 \times M_2$ için bir çatıdır. Bu çatıya göre F' nin ko-türevi δF, keyfi $(X_1,X_2) \in \mathfrak{X}(M)$ için şu şekilde hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
&(\delta F)(X_1,X_2)\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\big\{(\nabla_{(e_i,0)}F)((e_i,0),(X_1,X_2)) + (\nabla_{(\varphi_1(e_i),0)}F)((\varphi_1(e_i),0),(X_1,X_2))\big\}\\
&- \sum_{j=1}^{m}\big\{(\nabla_{(0,f_j)}F)((0,f_j),(X_1,X_2)) + (\nabla_{(0,\varphi_2(f_j))}F)((0,\varphi_2(f_j)),(X_1,X_2))\big\}\\
&- (\nabla_{(\xi_1,0)}F)((\xi_1,0),(X_1,X_2)) - (\nabla_{(0,\xi_2)}F)((0,\xi_2),(X_1,X_2)). \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{(e_i,0)}F)((e_i,0),(X_1,X_2)) \\
&= (e_i,0)[F((e_i,0),(X_1,X_2)) - F(\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0),(X_1,X_2)) \\
&\quad - F((e_i,0),\nabla_{(e_i,0)}(X_1,X_2)) \\
&= (e_i,0)[\Phi_1(X_1,e_i) + \eta_1(e_i)\eta_2(X_2)] - \Phi_1(X_1,\nabla^1_{e_i}e_i) \\
&\quad + \eta_1(\nabla^1_{e_i}e_i)\eta_2(X_2) - \Phi_1(\nabla^1_{e_i}X_1,e_i) \\
&= e_i[\Phi_1(X_1,e_i)] - \Phi_1(X_1,\nabla^1_{e_i}e_i) - \Phi_1(\nabla^1_{e_i}X_1,e_i) \\
&\quad - \eta_1(\nabla^1_{e_i}e_i)\eta_2(X_2) \\
&= (\nabla^1_{e_i}\Phi_1)(X_1,e_i) + \eta_2(X_2)(\nabla^1_{e_i}\eta_1)(e_i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{(\varphi_1(e_i),0)}F)((\varphi_1(e_i),0),(X_1,X_2)) \\
&= (\nabla^1_{\varphi_1(e_i)}\Phi_1)(X_1,\varphi_1(e_i)) + \eta_2(X_2)(\nabla^1_{\varphi_1(e_i)}\eta_1)(\varphi_1(e_i)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{(0,f_j)}F)((0,f_j),(X_1,X_2)) \\
&= (\nabla^2_{f_j}\Phi_2)(X_2,f_j) - \eta_1(X_1)(\nabla^2_{f_j}\eta_2)(f_j),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{(0,\varphi_2(f_j))}F)((0,\varphi_2(f_j)),(X_1,X_2)) \\
&= (\nabla^2_{\varphi_2(f_j)}\Phi_2)(X_2,\varphi_2(f_j)) - \eta_1(X_1)(\nabla^2_{\varphi_2(f_j)}\eta_2)(\varphi_2(f_j)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{(\xi_1,0)}F)((\xi_1,0),(X_1,X_2))\\
&=(\xi_1,0)[F(\xi_1,0),(X_1,X_2))]-F(\nabla_{(\xi_1,0)}(\xi_1,0),(X_1,X_2))\\
&\quad -F((\xi_1,0),(\nabla_{(\xi_1,0)}(X_1,X_2))\\
&=\xi_1[\Phi_1(X_1,\xi_1)]+\xi_1[\eta_1(\xi_1)]\eta_2(X_2)-\Phi_1(X_1,\nabla^1_{\xi_1}\xi_1)\\
&\quad -\eta_1(\nabla^1_{\xi_1}\xi_1)\eta_2(X_2)-\Phi_1(\nabla^1_{\xi_1}X_1,\xi_1)\\
&=(\nabla^1_{\xi_1}\Phi_1)(X_1,\xi_1)+\eta_2(X_2)(\nabla^1_{\xi_1}\eta_1)(\xi_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
(\nabla_{(0,\xi_2)}F)((0,\xi_2),(X_1,X_2))=(\nabla^2_{\xi_2}\Phi_2)(X_2,\xi_2)-\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\xi_2}\eta_2)(\xi_2),
$$

şeklindedir. Bu eşitlikler (3.22) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
&(\delta F)(X_1,X_2)\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla^1_{e_i}\Phi_1)(X_1,e_i)+\eta_2(X_2)(\nabla^1_{e_i}\eta_1)(e_i)+(\nabla^1_{\varphi_1(e_i)}\Phi_1)(X_1,\varphi_1(e_i))\\
&+\eta_2(X_2)(\nabla^1_{\varphi_1(e_i)}\eta_1)(\varphi_1(e_i))\}-\sum_{j=1}^{m}\{(\nabla^2_{f_j}\Phi_2)(X_2,f_j)-\eta_1(X_1)(\nabla^2_{f_j}\eta_2)(f_j)\\
&+(\nabla^2_{\varphi_2(f_j)}\Phi_2)(X_2,\varphi_2(f_j))-\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\varphi_2(f_j)}\eta_2)(\varphi_2(f_j))\}+(\nabla^1_{\xi_1}\Phi_1)(X_1,\xi_1)\\
&+\eta_2(X_2)(\nabla^1_{\xi_1}\eta_1)(\xi_1)+(\nabla^2_{\xi_2}\Phi_2)(X_2,\xi_2)-\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\xi_2}\eta_2)(\xi_2)\\
&=\delta\Phi_1(X_1)+\delta\Phi_2(X_2)-\eta_2(X_2)\delta\eta_1-\eta_1(X_1)\delta\eta_2 \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

bulunur.

İki hemen hemen kontak metrik manifoldun dahil oldukları sınıflar ile, manifoldların çarpımıyla elde edilen hemen hemen Hermityen manifoldun sınıfı arasındaki ilişki (Chinea ve Gonzales, 1990) ve (Gray ve Hervella, 1980)' deki notasyonlar kullanılarak incelenecektir. Aksi belirtilmedikçe M_i ile $(M_i,\varphi_i,\xi_i,\eta_i,g_i)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu, M ile de çarpım sonucu elde edilen hemen hemen Hermityen manifoldu belirtilecektir.

Teorem 3.1. *M_1 ve M_2 yarı-paralel hemen hemen kontak metrik manifoldlar ise $M = M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu yarı-Kählerdir. Yani $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathcal{SK}$ sınıfındadır.*

Kanıt. Bir yarı-Kähler manifoldu olmanın tanımlama bağıntısı $\delta F = 0$ dır. M_1 ve M_2 yarı-paralel olduğundan $\delta\eta_i = \delta\Phi_i = 0,\ i = 1, 2$ dir. O halde,

$$(\delta F)(X_1, X_2) = \delta\Phi_1(X_1) + \delta\Phi_2(X_2) - \eta_2(X_2)\delta\eta_1 - \eta_1(X_1)\delta\eta_2$$

olduğundan $(\delta F) = 0$ bulunur. □

Bu teoremin tersi doğru olmak zorunda değildir. Kabul edelim ki $\delta F = 0$ olsun. Bu durumda, $(X_1, 0), (0, X_2) \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\delta F(X_1, 0) = \delta\Phi_1(X_1) - \eta_1(X_1)\delta\eta_2 = 0$$

ve

$$\delta F(0, X_2) = \delta\Phi_2(X_2) - \eta_2(X_2)\delta\eta_1 = 0$$

olur. Dolayısıyla $\delta\Phi_1 = \delta\eta_2\eta_1$ ve $\delta\Phi_2 = \delta\eta_1\eta_2$ dir. Yani M_1 ve M_2, sırasıyla $\delta\Phi_1 = \delta\eta_2\eta_1$ ve $\delta\Phi_2 = \delta\eta_1\eta_2$ koşullarının sağlanması, M' nin yarı-Kähler olması için yeterlidir.

Teorem 3.2. *M_1 ve M_2 yarı-paralel normal hemen hemen kontak metrik manifoldlar olsunlar. Bu durumda $M = M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu $\mathcal{W}_3 = \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$ sınıfındadır.*

Kanıt. $\mathcal{W}_3$ sınıfının tanımlama bağıntısı,

$$\nabla_X(F)(Y, Z) - \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = \delta F = 0$$

şeklindedir. Ayrıca, M üzerinde $\nabla_X(F)(Y, Z) - \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = 0$ olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2' nin normal olmasıdır (Capursi, 1984). Ayrıca, M_1 ve M_2 yarı-paralel olduklarından, teorem (3.1) gereği $\delta F = 0$ dır. Böylece M manifoldu $\mathcal{W}_3$ sınıfındadır. □

Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik manifoldu, her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_{\phi(X)} \Phi)(\phi(Y), Z) = -\eta(Y)(\nabla_{\phi(X)} \eta)(Z), \tag{3.24}$$

koşulunu sağlıyorsa, M manifolduna K-paralelimsi (quasi-K-cosymplectic) manifold denir (Chinea ve Gonzales, 1990).

Bir M hemen hemen Hermityen manifoldu için $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{QK}$ sınıfının tanımlama bağıntısı

$$\nabla_X(F)(Y, Z) + \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = 0, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

şeklindedir (Gray ve Hervella, 1980).

Teorem 3.3. *$M = M_1 \times M_2$ çarpım manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{QK}$ (Kähler-si) sınıfından olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2' nin K-paralelimsi olmasıdır.*

Kanıt. (M, ϕ, ξ, η, g) K-paralelimsi hemen hemen kontak metrik manifold olsun. (3.24) denkleminde $x = \xi$ için $\nabla_\xi \Phi = 0$ elde edilir. Ayrıca, aynı denklemde X yerine $\phi(X)$, Y yerine ξ yazıldığında,

$$(\nabla_X \eta)(Z) = (\nabla_{\phi(X)} \Phi)(\xi, Z) + \eta(X)(\nabla_\xi \eta)(Z). \tag{3.25}$$

eşitliğini elde edilir. Bu denklemde X yerine $\phi(X)$, Z yerine $\phi(Y)$ yazılırsa, her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(\nabla_{\phi(X)} \eta)(\phi(Y)) = -(\nabla_X \Phi)(\xi, \phi(Y)) = -(\nabla_X \eta)(Y),$$

eşitliğini elde ederiz. O halde $\nabla_\xi \Phi = 0$ ve $(\nabla_{\phi(X)} \eta)(\phi(Y)) = -(\nabla_X \eta)(Y)$ özelliklerini $(\phi_i, \xi_i, \eta_i, g_i)$, $i = 1, 2$ yapılarında ve (3.17), (3.19) denklemlerinde kullanırsak, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfının tanımlama bağıntısı olan,

$$\nabla_X(F)(Y, Z) + \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = 0, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

eşitliğini elde ederiz. Yani, çarpım manifoldu $M_1 \times M_2$, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ sınıfındadır.

Tersine, çarpım manifoldu üzerinde $\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$ olsun. Özel olarak $X = (X_1, 0)$, $Y = (Y_1, 0)$ ve $Z = (Z_1, 0)$, seçersek, M_1 manifoldunun K-paralelimsi olduğu açıkça görülür. Benzer yaklaşımla M_2 manifoldu da K-paralelimsi sınıfındadır. $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ ve $Z = (Z_1, Z_2)$ gibi keyfi seçimler için ekstra bir koşul gerekmediğinden, istenilen gösterilmiş olur. $\square$

M^{2n+1} bir hemen hemen kontak metrik manifold ise $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı vardır (Oubina, 1980). Hemen hemen kontak metrik manifoldların, temel 2-formun türevine göre sınıflandırması yapılmadan önce, Oubina M hemen hemen kontak metrik manifoldunun sınıflandırmasını, $M \times \mathbb{R}$' nin yapısına göre inceleyerek farklı bir sınıflandırma elde etmiş (Oubina, 1980) ve örnekler vermiştir (Oubina, 1981).

M, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Keyfi $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(\nabla_X \Phi)(X, Y) - (\nabla_{\phi(X)} \Phi)(\phi(X), Y) = \eta(X)(\nabla_{\phi(X)} \eta)(Y), \tag{3.26}$$

ise M manifolduna $\mathcal{G}_1 - \mathit{Sasakian}$ manifold denir (Oubina, 1980).

Teorem 3.4. *M_1 ve M_2 $\mathcal{G}_1$-Sasakian manifold olup $i = 1, 2$ için*

$$\nabla^i_{\xi_i} \Phi_i(X_i, \phi_i(X_i)) = 0 \tag{3.27}$$

eşitliğini sağlasınlar. Bu durumda çarpım manifoldu $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{G}_1 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfındandır. Bu önermenin tersi de doğrudur.

Kanıt. $\mathcal{G}_1$-Sasakian manifoldların tanımlama bağıntısında (3.26) X yerine ξ yazılırsa,

$$(\nabla_\xi \Phi)(\xi, Z) = 0. \tag{3.28}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (3.26) denklemi polarize edilip X yerine ξ yazılırsa;

$$\nabla_\xi \Phi(Y,Z) + (\nabla_Y \Phi)(\xi, Z) = (\nabla_{\phi(Y)}\eta)(Z) \tag{3.29}$$

denklemi elde edilir. (3.29) eşitliğinde Y ve Z yerine sırasıyla ξ ve $\phi(Y)$ yazılırsa,

$$(\nabla_\xi \eta)(Y) = 0. \tag{3.30}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (3.29) denkleminde $Y = \phi(X)$ ve $Z = Y$ için,

$$(\nabla_\xi \Phi)(\phi(X), Y) + (\nabla_{\phi(X)}\Phi)(\xi, Y) = -(\nabla_X \eta)(Y) \tag{3.31}$$

olur. Son olarak (3.29) denkleminde $Z = \phi(Z)$ için,

$$(\nabla_{\phi(Y)}\eta)(\phi(Z)) - (\nabla_Y \eta)(Z) = (\nabla_\xi \Phi)(Y, \phi(Z)) \tag{3.32}$$

olur. Burada $Y = Z$ için,

$$(\nabla_{\phi(Y)}\eta)(\phi(Y)) - (\nabla_Y \eta)(Y) = (\nabla_\xi \Phi)(Y, \phi(Y)). \tag{3.33}$$

olur. M_1 ve M_2 $\mathcal{G}_1$-Sasakian manifoldlar ise, aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) &= \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{\phi_2(X_2)}\eta_2)(\phi_2(X_2)) - \eta_1(Y_1)\nabla^2_{X_2}\eta_2(X_2) \\
&\quad -\eta_2(Y_2)(\nabla^1_{\phi_1(X_1)}\eta_1)(\phi_1(X_1)) + \eta_2(Y_2)\nabla^1_{X_1}\eta_1(X_1) \\
&= \eta_1(Y_1)(\nabla^2_{\xi_2}\Phi_2)(X_2, \phi_2(X_2)) \\
&\quad -\eta_2(Y_2)(\nabla^1_{\xi_1}\Phi_1)(X_1, \phi_1(X_1)).
\end{aligned}$$

Ayrıca hipotez gereği M_1 ve M_2 manifoladları (3.27) özelliğini sağladığından, $\mathcal{G}_1$ sınıfındaki hemen hemen Hermityen manifoldların bağıntısı olan

$$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Z) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Tersine,

$$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0$$

ise, $X = (X_1, 0)$, $Y = (Y_1, 0)$ için, M_1 manifoldu $\mathcal{G}_1$-Sasakian dır. $X = (0, X_2)$, $Y = (0, Y_2)$ seçersek aynı sonuç M_2 için de geçerlidir. $X = (X_1, 0)$, $Y = (0, Y_2)$ seçersek,

$$\begin{aligned}\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0 &\\ &= \eta_2(Y_2)(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(X_1) + \eta_1(X_1)\eta_1(X_1)(\nabla^2_{\xi_2}\Phi_2)(\xi_2, Y_2)\\ &- -\eta_2(Y_2)(\nabla^1_{\phi_1(X_1)})(\phi_1(X_1))\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, denklem (3.32) gereği,

$$(\nabla^1_{X_1}\eta_1)(X_1) - (\nabla^1_{\phi_1(X_1)})(\phi_1(X_1)) = 0$$

olur. O halde (3.32) yardımıyla $\nabla^1_{\xi_1}\Phi_1(X, \phi_1(X)) = 0$ olur. Benzer işlemler M_2 için de yapılabilir. Sonuç olarak M_1 ve M_2 manifoldları $\mathcal{G}_1$-Sasakian olup (3.27)eşitliğini sağlarlar. □

Teorem 3.5. *M_1 ve M_2, (3.27) denklemini sağlayan yarı-paralel $\mathcal{G}_1$-Sasakian manifoldlar ise çarpım manifoldu $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfındadır.*

Kanıt. Teorem (3.1) ve Teorem (3.4)' den ispatı açıktır. □

Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik manifoldu, her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z) - (\nabla_{\phi(X)}\Phi)(\phi(Y),Z) - \eta(Y)(\nabla_{\phi(X)}\eta)(Z)\} = 0 \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanıyorsa, M' ye $\mathcal{G}_2$-Sasakian manifold denir (Oubina, 1980).

Teorem 3.6. *M_1 ve M_2 manifoldları $\mathcal{G}_2$-Sasakian ise, çaprım manifoldları $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfındandır.*

Kanıt. Denklem (3.34)' de X yerine ξ, Z yerine $\phi(Z)$ yazıldığında,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \Phi)(Y, \phi(Z)) + (\nabla_Y \Phi)(\phi(Z), \xi) + (\nabla_{\phi(Z)} \Phi(\xi, Y)) \\ +(\nabla_{\phi(Y)} \Phi(Z, \xi)) + (\nabla_Z \eta)(Y) - \eta(Z)(\nabla_\xi \eta)(Y) = 0\end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitliği elde edilir. M_1 ve M_2, $\mathcal{G}_2$-Sasakian manifoldlar olup, (3.35) ve (3.19) denklemlerinden, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfının tanımlama bağıntısı olan

$$\mathfrak{S}\{\nabla_X F(Y, Z) - \nabla_{JX} F(JY, Z)\} = 0$$

eşitliği elde edilmiş olur. Önermenin tersinin doğruluğu da benzer bir hesaplamayla gösterilebilir.

□

Teorem 3.7. *M_1 ve M_2 manifoldları $\mathcal{G}_2$-Sasakian ve yarı-paralel olsunlar. Bu durumda çarpım manifoldu $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfındandır.*

Kanıt. Teorem (3.1) ve Teorem (3.6)' nın sonucu olup, ispatı açıktır. □

Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik manifoldu için $\mathcal{C}_{12}$ sınıfının tanımlama bağıntısı,

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi \eta)(\phi(Y)) - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi \eta)(\phi(Z))$$

şeklindedir (Chinea ve Gonzales, 1990). $\{e_1, \ldots, e_n, \phi(e_1), \ldots, \phi(e_n), \xi\}$, M'nin bir açık alt kümesi üzerindeki ortonormal çatı olmak üzere, $i = 1, 2, ..., n$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(\nabla_{e_i} \Phi)(e_i, X) = (\nabla_{\phi(e_i)})(\phi(e_i), X) = 0$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(\delta\Phi)(X) &= -\sum\{\nabla_{e_i}\Phi(e_i,X)+\nabla_{\phi(e_i)}\Phi(\phi(e_i),X)\}-\nabla_\xi\Phi(\xi,X)\\ &= -\nabla_\xi\Phi(\xi,X)\end{aligned}$$

dir. O halde $\mathcal{C}_{12}$ sınıfının tanımlama bağıntısından

$$\nabla_\xi\Phi(\xi,X)=-(\nabla_\xi\eta)(\phi(X)),$$

elde edilir ki bu ifade sıfır olmak zorunda değildir. Gerçekten, keyfi bir X vektör alanı için

$$(\nabla_\xi\eta)(\phi(X))=0$$

olsun. O halde X yerine özel olarak $\phi(X)$ yazarsak, $(\nabla_\xi\eta)(X)=0$ olur ve $\mathcal{C}_{12}$ sınıfının tanımlama bağıntısından her $X\in\mathfrak{X}(M)$ için $\nabla_X\Phi=0$ olur, yani $\mathcal{C}_{12}$ sınıfının elemanlarının trivial sınıfta olması gerekir. O halde M üzerinde en az bir X_0 vektör alanı vardır öyle ki,

$$(\delta\Phi)(X_0)=-\nabla_\xi\Phi(\xi,X_0)=(\nabla_\xi\eta)(\phi(X_0))\neq 0$$

dır. Böylece $\mathcal{C}_{12}$ sınıfı yarı-paralel değildir.

$(M_1,\phi_1,\xi_1,\eta_1,g_1)$ ve $(M_2,\phi_2,\xi_2,\eta_2,g_2)$ manifoldları $\mathcal{C}_{12}$ sınıfında olsun. Bu manifoldların çarpımıyla elde edilen $(M=M_1\times M_2,J,g)$ hemen hemen Hermityen manifoldu ele alındığında (3.19) denklemi yardımıyla

$$(\nabla_{(X_1,0)}F)((Y_1,0),(Z_1,0))=-(\nabla^1_{X_1}\Phi_1)(Y_1,Z_1)\neq 0$$

elde edilir. Böylece M manifoldu trivial sınıfta değildir. Ayrıca, (3.23) denkleminde X_1 ve X_2 yerine sırasıyla $\phi_1(X_1)$ ve 0 alındığında

$$(\delta F)(\phi_1(X_1),0)=\delta\Phi_1(X_1)$$

olur ve bu ifade sıfır olmak zorunda değildir. Böylece, M manifoldu $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ sınıfında değildir. Sonuç olarak Teorem (3.1) gereği M_1 ve M_2 yarı-paralel değillerdir. Bu adımda C_{12} sınıfında olup yarı-paralel olmayan yapılara bir örnek verilecektir:

Örnek: $\mathbb{R}^3$ üzerinde lineer bağımsız

$$e_1 = e^Z \partial/\partial X, \quad e_1 = e^{-Z} \partial/\partial Y, \quad e_3 = \partial/\partial Z$$

vektör alanlarını ele alalım öyle ki Lie bracketleri,

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2$$

olsun. Bu vektör alanları

$$g = e^{-2Z} dX \otimes dX + e^{2Z} dY \otimes dY + dZ \otimes dZ$$

metriği ile birlikte bir ortonormal çatı oluşturur. Koszul formülü yardımıyla kovaryant türevler şu şekildedir:

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -e_1, \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -e_3,$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = e_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_3} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0,$$

$$\xi = e_1$$

$$\phi(e_1) = 0, \quad \phi(e_2) = e_3, \quad \phi(e_3) = -e_2$$

alındığında, (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapıdır.

$$\nabla_{e_1} \Phi(e_1, e_2) = -1 \neq 0$$

olduğundan, bu yapı paralel sınıfta değildir. Ayrıca,

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = X_1Y_2Z_1 - X_1Y_1Z_2 = \eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi \eta)(\phi(Y)) - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi \eta)(\phi(Z))$$

eşitliği sağlanır. Böylece (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathcal{C}_{12}$ sınıfından olup,

$$\delta\Phi(X) = -g(X, e_2) \neq 0$$

olduğundan yarı-paralel değildir.

4 G_2 YAPIYA SAHİP MANİFOLDLAR

Teorem 4.1. *(M, g) bir Riemann manifoldu, φ, M üzerinde bir G_2 yapı ve ξ sıfırdan farklı bir (birim boylu) vektör alanı olsun. Keyfi bir X vektör alanı için*

$$\phi(X) := \xi \times X$$

endomorfizması ve

$$\eta(X) := g(\xi, X)$$

1- formu ile (ϕ, ξ, η, g), M üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapıdır (Matzeu ve M.I.Munteanu, 2002).

Kanıt. Verilen dörtlünün (2.1) ve (2.2) koşullarını sağlamaktadır. Gerçekten, denklem (2.15) yardımıyla görülebilir ki, keyfi bir X vektör alanı için,

$$\begin{aligned}\phi^2(X) &= \phi(\xi \times X) = \xi \times (\xi \times X) \\ &= -g(\xi, \xi)X + g(\xi, X)\xi \\ &= -X + \eta(X)\xi\end{aligned}$$

ve

$$\eta(\xi) = g(\xi, \xi) = 1$$

bulunur. Ayrıca denklem (2.14) yardımıyla görülebilir ki, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}g(\phi(X), \phi(Y)) &= g(\xi \times X, \xi \times Y) \\ &= g(\xi, \xi)g(X, Y) - g(\xi, X)g(\xi, Y) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü M üzerinde bir hemen hemen kontak yapıdır. $\square$

Bu yapının temel 2- formu Φ' nin kovaryant türevi şu şekildedir:

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y, \nabla_X(\xi \times Z)) + g(\nabla_X Z, \xi \times Y). \tag{4.36}$$

(M, ϕ, ξ, η, g) 7- boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold $p \in M$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_6, \xi\}$ bir lokal ortonormal çatı olsun. İkinci bölümde verilen

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{\alpha \in \otimes_3^0 T_pM | \alpha(X,Y,Z) = -\alpha(X,Z,Y) = -\alpha(X, \phi Y, \phi Z) \\ + \eta(Y)\alpha(X,\xi,Z) + \eta(Z)\alpha(X,Y,\xi)\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

uzayının 12 alt uzaya ayrışımında aşağıdaki kuadratik formlar kullanılmıştır (Chinea ve Gonzales, 1990):

$$\begin{array}{ll}
i_1(\alpha) = \sum\limits_{i,j,k} \alpha(e_i, e_j, e_k)^2 & i_2(\alpha) = \sum\limits_{i,j,k} \alpha(e_i, e_j, e_k)\alpha(e_j, e_i, e_k) \\
i_3(\alpha) = \sum\limits_{i,j,k} \alpha(e_i, e_j, e_k)\alpha(\phi e_i, \phi e_j, e_k) & i_4(\alpha) = \sum\limits_{i,j,k} \alpha(e_i, e_i, e_k)\alpha(e_j, e_j, e_k) \\
i_5(\alpha) = \sum\limits_{j,k} \alpha(\xi, e_j, e_k)^2 & i_6(\alpha) = \sum\limits_{i,k} \alpha(e_i, \xi, e_k)^2 \\
i_7(\alpha) = \sum\limits_{j,k} \alpha(\xi, e_j, e_k)\alpha(e_j, \xi, e_k) & i_8(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, e_j, \xi)\alpha(e_j, e_i, \xi) \\
i_9(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, e_j, \xi)\alpha(\phi e_i, \phi e_j, \xi) & i_{10}(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, e_i, \xi)\alpha(e_j, e_j, \xi) \\
i_{11}(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, e_j, \xi)\alpha(e_j, \phi e_i, \xi) & i_{12}(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, e_j, \xi)\alpha(\phi e_j, \phi e_i, \xi) \\
i_{13}(\alpha) = \sum\limits_{j,k} \alpha(\xi, e_j, e_k)\alpha(\phi e_j, \xi, e_k) & i_{14}(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, \phi e_i, \xi)\alpha(e_j, \phi e_j, \xi) \\
i_{15}(\alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i, \phi e_i, \xi)\alpha(e_j, e_j, \xi) & i_{16}(\alpha) = \sum\limits_{k} \alpha(\xi, \xi, e_k)^2 \\
i_{17}(\alpha) = \sum\limits_{i,k} \alpha(e_i, e_i, e_k)\alpha(\xi, \xi, e_k) & i_{18}(\alpha) = \sum\limits_{i,k} \alpha(e_i, e_i, \phi e_k)\alpha(\xi, \xi, e_k)
\end{array}$$

Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\nabla_X(Y \times Z) = (\nabla_X Y \times Z) + (Y \times \nabla_X Z)$$

eşitliği sağlanıyorsa φ' ye paralel G_2 yapı,

$$\nabla_X(X \times Y) = (\nabla_X X \times Y) + (X \times \nabla_X Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa φ' ye yaklaşık-paralel (nearly-parallel) G_2 yapı denir.
φ paralel ise,

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -g(\nabla_X \xi, Y \times Z) \tag{4.38}$$

eşitliği sağlanır. $\nabla\Phi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi = 0$ olmasıdır (Aktay, 2015; Todd, 2015).
G_2 yapıya sahip manifoldlar için $i_k(\nabla\Phi), (k = 1, ..., 18)$ hesaplanarak, $\nabla\Phi$' nin hangi sınıflarda olup olamayacağı incelenmiştir.

Önerme 4.2. *φ, bir M^7 manifoldu üzerinde keyfi bir G_2 yapı ve (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü de φ formundan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı olsun. Φ bu yapının temel 2-formu olmak üzere;*

a. $i_6(\nabla\Phi) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_{e_i}\xi = 0$, $i = 1, \cdots, 6$ olmasıdır (Dikkat edilecek olursa $\nabla_\xi \xi$ sıfır olmak zorunda değildir).

b. $i_{16}(\nabla\Phi) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi \xi = 0$ olur.

Kanıt. Keyfi $i, k \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}\Phi)(\xi, e_k) &= g(\xi, \nabla_{e_i}(\xi \times e_k)) + g(\nabla_{e_i} e_k, \xi \times \xi)\\ &= g(\xi, \nabla_{e_i}(\xi \times e_k))\\ &= -g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_k)\end{aligned}$$

olduğundan

$$i_6(\nabla\Phi) = \sum_{i,k} ((\nabla_{e_i}\Phi)(\xi, e_k))^2 = \sum_{i,k} g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_k)^2.$$

eşitliği elde edilir. $\xi \times e_k$ ifadesi de ortonormal tabanın bir elemanı olduğundan $i_6(\nabla\Phi) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_{e_i}\xi = 0$ olmasıdır.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \Phi)(\xi, e_k) &= g(\xi, \nabla_\xi(\xi \times e_k)) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times \xi)\\ &= g(\xi, \nabla_\xi \xi \times e_k) + g(\xi, \xi \times \nabla_\xi e_k)\\ &= g(e_k, \xi \times (\nabla_\xi \xi))\\ &= -g(\nabla_\xi \xi, \xi \times e_k)\end{aligned}$$

bulunur. Keyfi $k \in \{1, 2, ..., 6\}$ için ,

$$i_{16}(\nabla\Phi) = \sum_k (\nabla_\xi \Phi)(\xi, e_k)^2 = \sum_k g(\nabla_\xi \xi, \xi \times e_k)^2$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $i_{16}(\nabla\Phi) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi \xi = 0$ olmasıdır. □

Önerme 4.3. *(ϕ, η, ξ, g) , φ G_2- yapısından elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı, Φ de bu yapının temel 2-formu olsun.*

a. $i_{14}(\nabla\Phi) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $div(\xi) = 0$ olmasıdır.

b. $v = \sum\limits_{j=1}^{6} e_j \times (\nabla_{e_j}\xi)$ olmak üzere, $i_{15}(\nabla\Phi) = -div(\xi)g(\xi, v)$ dır.

Kanıt. Keyfi $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}\Phi)(\phi e_i, \xi) &= g(\xi \times e_i, \nabla_{e_i}(\xi \times \xi)) + g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times (\xi \times e_i))\\ &= -g(\nabla_{e_i}\xi, e_i)\\ &= g(\xi, \nabla_{e_i} e_i).\end{aligned}$$

Böylece,

$$i_{14}(\nabla\Phi) = \sum_{i,j} (\nabla_{e_i}\Phi)(\phi e_i, \xi)(\nabla_{e_j}\Phi)(\phi e_j, \xi) = \Big(g(\xi, \sum_i \nabla_{e_i} e_i)\Big)\Big(g(\xi, \sum_j \nabla_{e_j} e_j)\Big).$$

Diğer yandan,

$$\sum_i \nabla_{e_i} e_i = -\sum_i div(e_i)e_i - div(\xi)\xi - \nabla_\xi \xi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(\xi, \sum_i \nabla_{e_i} e_i) &= -g(\xi, \sum_i div(e_i)e_i) - g(\xi, div(\xi)\xi) - g(\xi, \nabla_\xi \xi) \\ &= -div(\xi) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, $i_{14}(\nabla\Phi) = (div(\xi))^2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $div(\xi) = 0$ olmasıdır.
Benzer şekilde,

$$(\nabla_{e_i}\Phi)(\phi e_i, \xi) = -g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) \text{ ve } (\nabla_{e_j}\Phi)(e_j, \xi) = g(\nabla_{e_j}\xi, \xi \times e_j)$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} i_{15}(\nabla\Phi) &= \sum_{i,j} (\nabla_{e_i}\Phi)(\phi e_i, \xi)\ (\nabla_{e_j}\Phi)(e_j, \xi) \\ &= \sum_{i,j} g(\xi, \nabla_{e_i} e_i) g(\nabla_{e_j}\xi, \xi \times e_j) \\ &= \Big(g(\xi, \sum_i \nabla_{e_i} e_i)\Big)\Big(\sum_j g(\xi, \nabla_{e_j}(e_j \times \xi))\Big) \\ &= \Big(g(\xi, -div(\xi)\xi) - g(\xi, \sum_i div(e_i)e_i)\Big)\Big(\sum_j g(\xi, e_j \times \nabla_{e_j}\xi)\Big) \\ &= -div(\xi).g(\xi, v) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

□

Ayrıca bu önermeden kolayca görülebilir ki, $\nabla\xi = 0$ ise $i_{15}(\nabla\Phi) = 0$ dır.

Önerme 4.4. (ϕ, η, ξ, g) , φ *yaklaşık-paralel* G_2*- yapısından elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı,* Φ *de bu yapının temel 2-formu olsun. Bu takdirde,*

a. $i_5(\nabla\Phi) = 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\nabla_\xi \xi = 0$ *olmasıdır.*

b. $\nabla_\xi \xi = 0$ *ise* $i_{17}(\nabla\Phi) = i_{18}(\nabla\Phi) = 0$ *dır.*

Kanıt. φ yaklaşık-paralel olduğundan, keyfi $j, k \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \Phi)(e_j, e_k) &= g(e_j, \nabla_\xi(\xi \times e_k)) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times e_j) \\ &= g(e_j, \nabla_\xi \xi \times e_k) + g(e_j, \xi \times \nabla_\xi e_k) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times e_j) \\ &= -g(\nabla_\xi \xi, e_j \times e_k)\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$i_5(\nabla\Phi) = \sum_{j,k} ((\nabla_\xi \Phi)(e_j, e_k))^2 = \sum_{j,k} (g(\nabla_\xi \xi, e_j \times e_k))^2$$

olup bu ifadenin sıfır olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi \xi$' nin sıfır olmasıdır. Burada $e_j \times e_k$ ifadesi de taban elemanıdır.

Benzer şekilde, Keyfi $i, k \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i} \Phi)(e_i, \phi e_k) &= g(e_i, \nabla_{e_i}(\xi \times (\xi \times e_k)) + g(\nabla_{e_i}(\xi \times e_k), \xi \times e_i) \\ &= g(e_i, \nabla_{e_i}(-e_k)) + g(\nabla_{e_i}(\xi \times e_k), \xi \times e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i} e_i, e_k) + g(\nabla_{e_i}(\xi \times e_k), \xi \times e_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \Phi)(\xi, e_k) &= g(\xi, \nabla_\xi(\xi \times e_k)) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times \xi) \\ &= g(\xi, \nabla_\xi \xi \times e_k) + g(\xi, \xi \times \nabla_\xi e_k) \\ &= -g(e_k, (\nabla_\xi \xi) \times \xi).\end{aligned}$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
i_{18}(\nabla\Phi) &= \sum_{i,k}((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,\phi e_k))((\nabla_\xi\Phi)(\xi,e_k)) \\
&= -\sum_{i,k}\Big(g(\nabla_{e_i}e_i,e_k)+g(\nabla_{e_i}(\xi\times e_k),\xi\times e_i)\Big)\Big(g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi)\Big) \\
&= -\sum_{i,k}\Big(g(\nabla_{e_i}e_i,e_k)g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi)\Big) \\
&\quad -\sum_{i,k}\Big(g(\nabla_{e_i}(\xi\times e_k),\xi\times e_i)g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi)\Big) \\
&= -\sum_{i,k}\Big(g(\nabla_{e_i}e_i,e_k)g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi)\Big) \\
&\quad +\sum_{i,k}\Big(g(\nabla_{e_i}e_i,e_k)g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi)\Big) \\
&\quad -\sum_{i,k}\Big(g(\xi\times e_k,e_i\times\nabla_{e_i}\xi)g(e_k,(\nabla_\xi\xi)\times\xi\Big) \\
&= -\sum_{i}g(\xi\times(\sum_k g((\nabla_\xi\xi)\times\xi,e_k)e_k+g((\nabla_\xi\xi)\times\xi,\xi)\xi),e_i\times\nabla_{e_i}\xi) \\
&= -\sum_{i}g(\xi\times((\nabla_\xi\xi)\times\xi),e_i\times\nabla_{e_i}\xi) \\
&= -g(\nabla_\xi\xi,\sum_i(e_i\times\nabla_{e_i}\xi)).
\end{aligned}
$$

Yani, $\nabla_\xi\xi$ sıfır ise, $i_{18}(\nabla\Phi)$ ifadesi de sıfıra eşit olur.

Ayrıca i_{17} 'nın tanımından,

$$i_{17}(\nabla\Phi) = \sum_{i,k}((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,e_k))((\nabla_\xi\Phi)(\xi,e_k))$$

olup keyfi $i,k\in\{1,2,...,6\}$ için,

$$(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,e_k) = g(e_i,\nabla_{e_i}(\xi\times e_k))+g(\nabla_{e_i}e_k,\xi\times e_i)$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\xi \Phi)(\xi, e_k) &= g(\xi, \nabla_\xi(\xi \times e_k)) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times \xi) \\
&= -g(\nabla_\xi \xi, \xi \times e_k) \\
&= g(e_k, \xi \times (\nabla_\xi \xi)).
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
i_{17}(\nabla\Phi) &= \sum_{i,k} \Big(- g(\nabla_{e_i} e_i, \xi \times e_k) - g(e_k, \nabla_{e_i}(\xi \times e_i)\Big)\Big(g(e_k, \xi \times (\nabla_\xi \xi)\Big) \\
&= \sum_{i,k} g(e_k, \xi \times (\nabla_{e_i} e_i) g(e_k, \xi \times \nabla_\xi \xi) - \sum_{i,k} g(e_k, \xi \times (\nabla_{e_i} e_i) g(e_k, \xi \times \nabla_\xi \xi) \\
&+ \sum_{i,k} g(e_k, e_i \times \nabla_{e_i} \xi) g(e_k, \xi \times \nabla_\xi \xi) \\
&= \sum_{i,k} g(e_k, e_i \times \nabla_{e_i} \xi) g(e_k, \xi \times \nabla_\xi \xi) \\
&= g(\xi \times (\nabla_\xi \xi), \sum_i e_i \times (\nabla_{e_i} \xi))
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\nabla_\xi \xi = 0 \Rightarrow i_{17}(\nabla\Phi) = 0$ dır. $\square$

Geriye kalan invaryantlar için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- $(i_{13})(\nabla\Phi) = \sum\limits_{j,k} (\nabla_\xi \Phi)(e_j, e_k)(\nabla_{\phi e_j} \Phi)(\xi, e_k)$.
  φ yaklaşık paralel olmak üzere keyfi $j, k \in \{1, 2, ..., 6\}$için,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\xi \Phi)(e_j, e_k) &= g(e_j, \nabla_\xi(\xi \times e_k)) + g(\nabla_\xi e_k, \xi \times e_j) \\
&= g(e_j, \nabla_\xi \xi \times e_k) + g(e_j, \xi \times \nabla_\xi e_k) \\
&+ g(\nabla_\xi e_k, \xi \times e_j) \\
&= g(e_j, \nabla_\xi \xi \times e_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\phi e_j} \Phi)(\xi, e_k) &= g(\xi, \nabla_{\xi \times e_j}(\xi \times e_k)) + g(\nabla_{\xi \times e_j} e_k, \xi \times \xi) \\
&= -g(\nabla_{\xi \times e_j} \xi, \xi \times e_k).
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
(i_{13})(\nabla\Phi) &= \sum_{j,k} g(\nabla_\xi \xi, e_j \times e_k) g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, \xi \times e_k) \\
&= -\sum_{j,k} g(e_k, e_j \times \nabla_\xi \xi)) g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, \xi \times e_k) \\
&= -\sum_{j} g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, \xi \times (\sum_k g(e_k, e_j \times (\nabla_\xi \xi)) e_k) \\
&= \sum_{j} g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, e_j \times (\xi \times \nabla_\xi \xi)) \\
&- \sum_{j} g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, \xi) g(e_j, \nabla_\xi \xi) \\
&= -g(\xi \times \nabla_\xi \xi, \sum_j (e_j \times (\nabla_{\xi\times e_j}\xi)))
\end{aligned}
$$

- $i_{12}(\nabla\Phi) = \sum_{i,j} (\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi)(\nabla_{\phi e_j}\Phi)(\phi e_i, \xi)$.
  Keyfi $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi) &= g(e_j, \nabla_{e_i}(\xi \times \xi)) + g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j) \\
&= g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\phi e_j}\Phi)(\phi e_i, \xi) &= g(\xi \times e_i, \nabla_{\xi\times e_j}(\xi \times \xi)) + g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, \xi \times (\xi \times e_i) \\
&= -g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, e_i).
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
i_{12}(\nabla\Phi) &= -\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j) g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, e_i)) \\
&= \sum_{i,j} g(e_j, \xi \times \nabla_{e_i}\xi) g(\nabla_{\xi\times e_j}\xi, e_i) \\
&= \sum_{i} g(\nabla_{\xi\times(\xi\times\nabla_{e_i}\xi)}\xi, e_i) \\
&= \sum_{i} g(\nabla_{(-\nabla_{e_i}\xi)}\xi, e_i) \\
&= g(\xi, \sum_{i} \nabla_{(\nabla_{e_i}\xi)} e_i)
\end{aligned}
$$

- $i_{11}(\nabla\Phi) = \sum_{i,j}(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi)(\nabla_{e_j}\Phi)(\phi e_i, \xi)$.
  Keyfi $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi) &= g(e_j, \nabla_{e_i}(\xi \times \xi)) + g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j) \\
&= g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j)
\end{aligned}
$$

ve

$$
(\nabla_{e_j}\Phi)(\phi e_i, \xi) = -g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)
$$

hesaplanır. Böylece,

$$
i_{11}(\nabla\Phi) = -\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j) g(\nabla_{e_j}\xi, e_i).
$$

- $v = \sum_{i}(e_i \times \nabla_{e_i}\xi)$ olmak üzere $i_{10}(\nabla\Phi) = g(\xi, v)^2$ dir.
  Keyfi $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$
(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, \xi) = g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_i)
$$

olur. Dolayısıyla,

$$i_{10}(\nabla\Phi) = g(\xi, v)^2. \tag{4.39}$$

- $i_9(\nabla\Phi) = \sum_{i,j}(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi)(\nabla_{\phi e_i}\Phi)(\phi e_j, \xi)$.
  Keyfi $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$ için,

$$(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi) = g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j)$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_{\phi e_i}\Phi)(\phi e_j, \xi) &= g(\xi \times e_j, \nabla_{\xi\times e_i}(\xi \times \xi)) + g(\nabla_{\xi\times e_i}\xi, -e_j) \\ &= -g(\nabla_{\xi\times e_i}\xi, e_j).\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}i_9(\nabla\Phi) &= -\sum_{i,j}(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j)g(\nabla_{\xi\times e_i}\xi, e_j) \\ &= -\sum_{i} g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times (\nabla_{\xi\times e_i}\xi))\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}i_8(\nabla\Phi) &= \sum_{i,j}(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, \xi)(\nabla_{e_j}\Phi)(e_i, \xi) \\ &= \sum_{i,j} g(\nabla_{e_i}\xi, \xi \times e_j)g(\nabla_{e_j}\xi, \xi \times e_i) \\ &= -\sum_{i} g(\nabla_{(\xi\times\nabla_{e_i}\xi)}\xi, \xi \times e_i).\end{aligned}$$

Dikkat edilirse $\delta\eta = -div(\xi)$ olduğu görülür. Bu eşitliği görmek için

$$\{e_1, \cdots, e_6, \xi\}$$

ortonormal taban olmak üzere divergens (divergence) tanımından,

$$\begin{aligned} div(\xi) &= \sum_{i=1}^{6} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) + g(\nabla_\xi \xi, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^{6} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i}\eta)(e_i) &= e_i[\eta(e_i)] - \eta(\nabla_{e_i}e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) + g(\xi, \nabla_{e_i}e_i) - g(\xi, \nabla_{e_i}e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}\xi, e_i), \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{6}(\nabla_{e_i}\eta)(e_i) = -\sum_{i=1}^{6} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i)$$

eşitliği elde edilir .

Teorem 4.5. *(M, φ), G_2 yapıya sahip ve (ϕ, ξ, η, g) bu yapıdan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı olsun. Bu takdirde,*

a. $\nabla_\xi \xi \neq 0$ ise, (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathfrak{D}_2, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_{11}$ sınıflarından herhangi birinde olamaz.

b. $div(\xi) \neq 0$ ise, (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathfrak{D}_1$, $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, \cdots, 12$ sınıflarından birinde olamaz. Ayrıca bu yapı yarı-paralel ($\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11}$) de değildir.

Kanıt. a. $\nabla_\xi \xi \neq 0$ olsun. Bu durumda önerme (4.2) gereği, açıkça görülebilir ki

$i_{16}(\nabla\Phi) \neq 0$ dır. Böylece Chinea' nın sınıflandırmasına göre (Chinea ve Gonzales, 1990), $\nabla\Phi$ hipotezde bahsi geçen sınıflarda olamaz.

b. $div(\xi) \neq 0$ olsun. Önerme (4.3)'den görülebilir ki $i_{14}(\nabla\Phi) = (div(\xi))^2 \neq 0$ dır. Böylece (ϕ, ξ, η, g) yapısı

$$\mathfrak{D}_1 = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4,$$

$$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6, \cdots, \mathcal{C}_{12}$$

sınıflarının tanımlama bağıntılarını sağlamaz. Ayrıca $\delta\eta = -div(\xi)$ olduğundan $\delta\eta \neq 0$ dır ve böylece yarı-paralel manifoldların tanımlama bağıntısı da sağlanmaz. □

Özel olarak görülebilir ki, $\nabla\Phi$ yarı-paralel manifoldların alt sınıflarına da ait olamaz. Yani $\nabla\Phi$, hemen hemen-paralel $(\mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_9)$, yaklaşık-K-paralel $(\mathcal{C}_1)$, K-paralelimsi $(\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10})$ sınıflarında da değildir.

Teorem 4.6. *φ yapısı yaklaşık-paralel sınıfta olmak üzere $\nabla_\xi \xi \neq 0$ ise, $\nabla\Phi$ $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathcal{C}_{12}$ sınıflarından herhangi birinden olamaz. (Bir diğer deyişle sadece $\mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_1 \oplus \mathcal{C}_{12}, \mathfrak{D}_2 \oplus \mathcal{C}_{12}, \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2 \oplus \mathcal{C}_{12}$ sınıflarından birine dahil olabilir.*

Kanıt. $\nabla_\xi \xi \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Önerme (4.4) gereği $i_5(\nabla\Phi) \neq 0$ dır. O halde $\nabla(\Phi)$, $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathcal{C}_{12}$ sınıflarında olamaz. Ayrıca önerme (4.2) gereği $i_{16}(\nabla_\Phi) \neq 0$ olduğundan $\nabla(\Phi)$ $\mathfrak{D}_2$ sınıfında olamaz. □

Teorem 4.7. *φ yapısı yaklaşık-paralel olsun. Bu takdirde $\nabla_\xi \xi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla(\Phi)$' nin hemen hemen K-kontak sınıfta olmasıdır.*

Kanıt. Hemen hemen-K kontak manifoldların tanımlama bağıntısı $\nabla_\xi \phi = 0$ dır. φ yaklaşık-paralel olduğundan, keyfi X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi \phi)(X) = \nabla_\xi(\phi X) - \phi(\nabla_\xi X) = \nabla_\xi(\xi \times X) - \xi \times \nabla_\xi X$$
$$= (\nabla_\xi \xi \times X) + (\xi \times \nabla_\xi X) - (\xi \times \nabla_\xi X) = \nabla_\xi \xi \times X,$$

olur. Bu ifadenin sıfır olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi \xi$' nin sıfır olmasıdır.

□

Teorem 4.8. *M manifoldu φ G_2 yapıya sahip ve (ϕ, ξ, η, g) bu yapıdan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı ve $v = \sum_i (e_i, \nabla_{e_i}\xi)$ şeklinde tanımlansın. Şayet $g(\xi, v) \neq 0$ ise $\nabla\Phi$, $\mathfrak{D}_1, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}$ sınıflarından herhangi birinde olamaz.*

Kanıt. $v = \sum_i (e_i, \nabla_{e_i}\xi)$ olmak üzere $g(\xi, v) \neq 0$ olsun. O halde (4.39) denkleminden görülebilir ki $i_{10}(\nabla\Phi) = g(\xi, v)^2 \neq 0$. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

□

Sonuç 4.9. *$v = \sum_i (e_i, \nabla_{e_i}\xi)$ olmak üzere $g(\xi, v) \neq 0$ $div(\xi) \neq 0$ olursa, $\nabla\Phi$, $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \cdots, 12$ sınıflarından birinde olamaz.*

Bu adımda paralel ve yaklaşık-paralel G_2 yapıdan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapıların sınıfları ile ilgili örnekler verilecektir:

Örnek 4.10. *(K, g_K) bir 4-boyutlu Kähler manifold ve bu manifoldun temel 2-formu $\Omega = d\lambda$ şeklinde bir tam 2-form olsun. (x_1, x_2, x_3), $\mathbb{R}^3$ ün koordinatları ve*

$$h = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

Öklidyen metrik olsun. Bu durumda $(M = \mathbb{R}^3 \times K, g = h \times g_K)$ çarpım manifoldu,

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge \Omega + dx_2 \wedge Re\theta - dx_3 \wedge Im\theta$$

paralel G_2 yapıya sahiptir (Joyce, 2000). Burada θ bir hacim formdur. Her $p \in K$ için,

$$g_K = |dz_1|^2 + |dz_2|^2, \quad \Omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2), \quad \theta = dz_1 \wedge dz_2$$

koşullarını sağlayan p noktasının bir (z_1, z_2) *koordinat kartı vardır.*

$z_1 = x_4 + ix_5$, $z_2 = x_6 + ix_7$ *alındığında,*

$$g_K = dx_4^2 + \dots dx_7^2, \quad \Omega = dx_4 \wedge dx_5 + dx_6 \wedge dx_7,$$

$$Re\theta = dx_4 \wedge dx_6 - dx_5 \wedge dx_7, \quad Im\theta = dx_4 \wedge dx_7 + dx_5 \wedge dx_6$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $g = h \times g_K = dx_1^2 + \dots dx_7^2$ *ve*

$$\begin{aligned}\varphi =& dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge (dx_4 \wedge dx_5 + dx_6 \wedge dx_7) \\ &+ dx_2 \wedge (dx_4 \wedge dx_6 - dx_5 \wedge dx_7) - dx_3 \wedge (dx_4 \wedge dx_7 + dx_5 \wedge dx_6)\end{aligned}$$

elde edilir (Joyce, 2000). $\xi = x_2\partial x_1$ *ve* $\phi(x) = \xi \times x$ *olmak üzere* M *çarpım manifoldu üzerindeki* φ G_2 *yapısı ile elde edilen* (ϕ, ξ, η, g) *hemen hemen kontak metrik yapısı ele alınırsa (Blair ve Oubina, 1990b);*

$$\begin{aligned}(\nabla_{\partial x_2}\Phi)(\partial x_2, \partial x_3) &= g(\partial x_2, \nabla_{\partial x_2}(x_2\partial x_1 \times \partial x_3)) + g(\nabla_{\partial x_2}\partial x_3, x_2\partial x_1 \times \partial x_2) \\ &= -g(\partial x_2, \nabla_{\partial x_2}(x_2\partial x_2)) \\ &= -g(\partial x_2, \partial x_2[x_2]\partial x_2) \\ &= -1\end{aligned}$$

olduğundan yapı paralel değildir. Diğer yandan bu yapı $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4$ *sınıfındadır. Gerçekten,* $\nabla_\xi \xi = x_2\partial x_1[x_2]\partial x_1 = 0$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi\Phi)(y, z) &= g(y, \nabla_\xi(\xi \times z)) + g(\nabla_\xi z, \xi \times y) \\ &= g(y, (\nabla_\xi\xi) \times z) + g(y, \xi \times \nabla_\xi z) + g(\nabla_\xi z, \xi \times y) \\ &= g(y, (\nabla_\xi\xi) \times z) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Keyfi bir $x \in M = \mathbb{R}^3 \times K$ *elemanı için* $\nabla_x \partial x_1 = 0$ *olduğundan,*

$$\nabla_x \xi = x[x_2]\partial x_1 + x_2 \nabla_x \partial x_1 = x[x_2]\partial x_1$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}(\nabla_x \Phi)(\xi, y) &= g(\xi, \nabla_x(\xi \times y)) + g(\nabla_x y, \xi \times \xi) \\ &= g(\xi, (\nabla_x \xi) \times y) + g(\xi, \xi \times \nabla_x y) \\ &= -g((\nabla_x \xi) \times \xi, y) \\ &= -x[x_2]x_2 g(\partial x_1 \times \partial x_1, y) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\nabla \Phi \in \mathcal{D}_1$ *dir.*

Örnek 4.11. (M, g) *bir Riemann manifoldu,* (ϕ, ξ, η, g), M *üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı olsun. Şayet, keyfi* X, Y *vektör alanları için,*

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

eşitliği sağlanırsa (ϕ, ξ, η, g)*' ye* M *üzerinde bir Sasaki yapı,* (M, g)*' ye bir Sasaki manifold denir.* $(\phi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$, M *üzerinde Sasaki yapılar olsunlar. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa* M*' ye 3-Sasaki manifoldu denir (Blair, 2002)*

$$[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2$$

ve

$$\phi_3 \circ \phi_2 = -\phi_1 + \eta_2 \otimes \eta_3, \quad \phi_2 \circ \phi_3 = \phi_1 + \eta_3 \otimes \eta_2,$$

$$\phi_1 \circ \phi_3 = -\phi_2 + \eta_3 \otimes \eta_1, \quad \phi_3 \circ \phi_1 = \phi_2 + \eta_1 \otimes \eta_3,$$

$$\phi_2 \circ \phi_1 = -\phi_3 + \eta_1 \otimes \eta_2, \quad \phi_1 \circ \phi_2 = \phi_3 + \eta_2 \otimes \eta_1.$$

M manifoldunun bir açık kümesi üzerinde $e_1 = \xi_1$, $e_2 = \xi_2$ ve $e_3 = \xi_3$ olacak şekilde $\{e_1, \cdots, e_7\}$ ortonormal çatısı vardır. Bu çatıya karşılık gelen 1-formların kümesi $\{\eta_1, \cdots, \eta_7\}$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, 3$ için $d\eta_i$ dış türevleri şu şekilde hesaplanmıştır:

$$d\eta_1 = -2(\eta_{23} + \eta_{45} + \eta_{67}), \quad d\eta_2 = 2(\eta_{13} - \eta_{46} + \eta_{57}), \quad d\eta_3 = -2(\eta_{12} + \eta_{47} + \eta_{56}).$$

Aşağıdaki şekilde tanımlanan φ 3-formu M üzerinde bir yaklaşık-paralel G_2 yapıdır (Agricola ve Friedrich, 2010).

$$\varphi = \frac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3$$

$d\eta_i$ dış türevleri ve $d\eta(x, y) = -\eta([x, y])$ denklemi yardımıyla $e_1, \cdots, e_7$ elemanlarının braketleri şu şekilde hesaplanır:

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_2, e_3] = 2e_1, \quad [e_3, e_1] = 2e_2,$$

$$[e_4, e_5] = 2e_1, \quad [e_6, e_7] = 2e_1, \quad [e_4, e_6] = 2e_2,$$

$$[e_5, e_7] = -2e_2, \quad [e_4, e_7] = 2e_3, \quad [e_5, e_6] = 2e_3.$$

Diğer yandan Kozsul formülü yardımıyla $\nabla_{e_i} e_i = 0$ ve

$$\nabla_{e_1} e_2 = e_3, \nabla_{e_1} e_3 = -e_2, \nabla_{e_1} e_4 = -e_5, \nabla_{e_1} e_5 = e_4, \nabla_{e_1} e_6 = -e_7, \nabla_{e_1} e_7 = e_6,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -e_3, \nabla_{e_2} e_3 = e_1, \nabla_{e_2} e_4 = -e_6, \nabla_{e_2} e_5 = e_7, \nabla_{e_2} e_6 = e_4, \nabla_{e_2} e_7 = -e_5,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = e_2, \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, \nabla_{e_3} e_4 = -e_7, \nabla_{e_3} e_5 = -e_6, \nabla_{e_3} e_6 = e_5, \nabla_{e_3} e_7 = e_4,$$

$$\nabla_{e_4} e_1 = -e_5, \nabla_{e_4} e_2 = -e_6, \nabla_{e_4} e_3 = -e_7, \nabla_{e_4} e_5 = e_1, \nabla_{e_4} e_6 = e_2, \nabla_{e_4} e_7 = e_3,$$

$$\nabla_{e_5} e_1 = e_4, \nabla_{e_5} e_2 = e_7, \nabla_{e_5} e_3 = -e_6, \nabla_{e_5} e_4 = -e_1, \nabla_{e_5} e_6 = e_3, \nabla_{e_5} e_7 = -e_2,$$

$$\nabla_{e_6}e_1 = -e_7, \nabla_{e_6}e_2 = e_4, \nabla_{e_6}e_3 = e_5, \nabla_{e_6}e_4 = -e_2, \nabla_{e_6}e_5 = -e_3, \nabla_{e_6}e_7 = e_1,$$

$$\nabla_{e_7}e_1 = e_6, \nabla_{e_7}e_2 = -e_5, \nabla_{e_7}e_3 = e_4, \nabla_{e_7}e_4 = -e_3, \nabla_{e_7}e_5 = e_2, \nabla_{e_7}e_6 = -e_1.$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\varphi &= \tfrac{1}{2}\eta_1 \wedge d\eta_1 - \tfrac{1}{2}\eta_2 \wedge d\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_3 \wedge d\eta_3 \\ &= \eta_{123} - \eta_{145} - \eta_{167} + \eta_{246} - \eta_{257} + \eta_{347} + \eta_{356},\end{aligned}$$

lokal gösterimi yardımıyla, çatı elemanlarının 2-katlı vektör çarpımı şu şekildedir:

$$e_1 \times e_2 = e_3, e_1 \times e_3 = -e_2, e_1 \times e_4 = -e_5, e_1 \times e_5 = e_4, e_1 \times e_6 = -e_7, e_1 \times e_7 = e_6,$$

$$e_2 \times e_3 = e_1, e_2 \times e_4 = e_6, e_2 \times e_5 = -e_7, e_2 \times e_6 = -e_4, e_2 \times e_7 = e_5,$$

$$e_3 \times e_4 = e_7, e_3 \times e_5 = e_6, e_3 \times e_6 = -e_5, e_3 \times e_7 = -e_4,$$

$$e_4 \times e_5 = -e_1, e_4 \times e_6 = e_2, e_4 \times e_7 = e_3, e_5 \times e_6 = e_3, e_5 \times e_7 = -e_2, e_6 \times e_7 = -e_1.$$

Şimdi, M üzerindeki yaklaşık-paralel φ G_2 yapısının 2-katlı vektör çarpımından elde edilen (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapıyı ele alalım, öyle ki $\xi = e_1 = \xi_1$, $\eta = d\eta_1$ ve $\phi(X) = \xi \times X$ olsun. Öncelikle,

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, \nabla_X(e_1 \times Z)) + g(\nabla_X Z, e_1 \times Y),$$

olduğundan

$$(\nabla_{e_2}\Phi)(e_1, e_2) = 1 \neq 0$$

elde edilir. Böylece yapı paralel değildir. Ayrıca,

$$\nabla_{e_2}\Phi(\xi, e_2) = \nabla_{e_2}\Phi(e_1, e_2) = 1,$$

olduğundan $\nabla\Phi \notin \mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4$ *dir. Diğer yandan,*

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi\Phi)(X,Y) &= g(X,\nabla_{e_1}(e_1\times Y)) + g(\nabla_{e_1}Y, e_1\times X)\\ &= g(X,(\nabla_{e_1}e_1)\times Y) + g(X, e_1\times\nabla_{e_1}Y) + g(\nabla_{e_1}Y, e_1\times X)\\ &= \varphi(e_1,\nabla_{e_1}Y,X) + \varphi(e_1,X,\nabla_{e_1}Y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

eşitliği bize yapının hemen hemen-K-kontak olduğunu yani,

$$\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{C}_5 \oplus \mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10}$$

sınıfında olduğunu söyler. Ayrıca,

$$\delta\Phi(e_1) = -\sum_{i=2}^{7}(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,e_1) - (\nabla_{e_1}\Phi)(e_1,e_1) = -2$$

olduğundan yapı yarı- paralel ($\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11}$) *ve trans-Sasakian* ($\mathcal{C}_5 \oplus \mathcal{C}_6$) *sınıflarında değildir. Şöyle ki,*

$$(\nabla_{e_2}\Phi)(e_1,e_2) = 1$$

iken,

$$\frac{1}{3}\{g(e_2,e_1)\eta(e_2) - g(e_2,e_2)\eta(e_1)\} = -\frac{1}{3}$$

dir. Yani, trans-Sasakian sınıfının tanımlama bağıntısı sağlanmaz. Böylece örnekte bir Sasakian manifold üzerindeki yaklaşık-paralel G_2 *yapıdan elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı Sasakian değildir.*

5 BEŞ BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ

Tanım 5.1. *G bağlantılı bir Lie grubu ve (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü de G üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı olsun. Her $a \in G$ için,*

i) g metriği sol-invaryant, (yani, $\forall a, p \in G, g_p(X_p, Y_p) = g_{ap}(X_{ap}, Y_{ap})$)

ii) Her $a \in G$ için $L_a : G \to G,\ L_a(x) = a.x$ sol-öteleme dönüşümü olmak üzere,

$$\phi \circ L_a = L_a \circ \phi, \quad L_a(\xi) = \xi.$$

koşulları sağlanıyorsa, (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne G üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen kontak metrik yapı denir.

Tanım 5.2. *$\mathfrak{g}$ boyutu $2n + 1$ olan bir Lie cebiri olsun. η 1-form, $\phi \in End(\mathfrak{g})$, $\xi \in \mathfrak{g}$, g pozitif tanımlı iç çarpım olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için*

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

koşulları sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı denir.

Bu yapının temel 2-formu yine $\Phi(X, Y) = g(X, \phi(Y))$ şeklinde tanımlıdır.
Bu durumda Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapıların sınıfları da benzer biçimde tanımlanabilir. Örneğin bir $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki (ϕ, ξ, η, g) yapısı , her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için $(\nabla_X \Phi)(X, Y) = 0$ şartını sağlıyorsa, bu yapıya yaklaşık-paralel denir. G Lie grubu bağlantılı ve bir (ϕ, ξ, η, g) sol-invariant hemen hemen kontak metrik yapıya sahip ve $\mathfrak{g} \cong T_eG$, G' nin Lie cebiri olsun. Bu durumda (ϕ, ξ, η, g) yapısı, $\mathfrak{g}$ üzerinde bir tek hemen hemen kontak metrik yapı belirler. Kolaylık olması açısından $\mathfrak{g}$ üzerindeki yapı yine (ϕ, ξ, η, g) ile gösterilecektir. Boyutu ≤ 5 olan nilpotent Lie cebirlerinin sınıflandırılması Dixmier tarafından yapılmıştır (Dixmier, 1958). Ayrıca Gong

ve Graaf tarafından da bu cebirlerin farklı boyutlardaki sınıflandırılması çalışılmıştır (Gong, 1998; De Graaf, 2007). 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, 9$ şeklinde dokuz sınıfa ayrılmıştır. $\{e_1, \ldots, e_5\}$, $\mathfrak{g}_i$ Lie cebri için bir taban olmak üzere, her bir $\mathfrak{g}_i$ Lie cebiri için braketler şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &: [e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_2 &: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_3 &: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5 \\
\mathfrak{g}_4 &: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_5 &: [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5 \\
\mathfrak{g}_6 &: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_8, \mathfrak{g}_9$ sınıfları ise abelyen olup, braketleri sıfırdır.

Öncelikle her bir $\mathfrak{g}_i$ cebiri üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapıların, ikinci bölümde tanımlanan sınıflarda olup olamayacağı belirlenecektir. Bu cebirler üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapı (ϕ, ξ, η, g) incelenirken, $\{e_1, \ldots, e_5\}$ tabanı g-ortonormal alınacaktır. Her bir sınıfı tanımlayan braketler ve Kozsul formülü yardımıyla taban elemanları için kovaryant türevler hesaplanmıştır.

5.1 $\mathfrak{g}_1$ Lie Cebiri

Koszul formülü yardımıyla, bu cebir üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\nabla_{e_1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_2}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = \tfrac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_3}e_4 = \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_4}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_4}e_5 = \tfrac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_5}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_5}e_2 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \tfrac{1}{2}e_3.$$

- $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde paralel yapı yoktur.

$\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$, $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde bir 2-form olup $\nabla\Phi = 0$ sağlansın. Keyfi e_i, e_j, e_k taban elemanları için

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, e_k) &= e_i[\Phi(e_j, e_k)] - \Phi(\nabla_{e_i}e_j, e_k) - \Phi(e_j, \nabla_{e_i}e_k) \\ &= -\Phi(\nabla_{e_i}e_j, e_k) - \Phi(e_j, \nabla_{e_i}e_k) = 0\end{aligned} \tag{5.40}$$

olur. Bu durumda $\nabla\Phi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her i, j için $b_{ij} = 0$ olmasıdır. Bir hemen hemen kontak metrik yapının temel 2-formu sıfırdan farklı olduğundan, bu Lie cebri üzerinde paralel yapı olmadığı görülür.

- $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde yaklaşık-paralel yapı $((\nabla_X\Phi)(X, Y) = 0)$ vardır.

$\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı yaklaşık-paralel olsun. O halde keyfi X, Y vektör alanları için $(\nabla_X\Phi)(X, Y) = 0$ dır. Özel olarak taban elemanları ele alındığında,

$$(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_2) = -\Phi(e_1, \nabla_{e_1}e_2) = 0 \Rightarrow b_{15} = 0$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1,e_5)=0 \Rightarrow b_{12}=0, \quad (\nabla_{e_2}\Phi)(e_2,e_1)=0 \Rightarrow b_{25}=0\\
&(\nabla_{e_3}\Phi)(e_3,e_4)=0 \Rightarrow b_{35}=0, \quad (\nabla_{e_3}\Phi)(e_3,e_5)=0 \Rightarrow b_{34}=0\\
&(\nabla_{e_4}\Phi)(e_4,e_3)=0 \Rightarrow b_{45}=0
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla temel 2-form Φ,

$$\Phi = b_{13}e^{13} + b_{14}e^{14} + b_{23}e^{23} + b_{24}e^{24}$$

şeklindedir. Diğer yandan (ϕ,ξ,η,g) yapısı $\phi^2 = -I + \eta\otimes\xi$ şartına sahip olduğundan

$$b_{13}b_{23} + b_{14}b_{24} = b_{13}b_{14} + b_{23}b_{24} = 0,\; b_{14}^2 = b_{23}^2,\; b_{13}^2 = b_{24}^2$$

koşulları elde edilir. O halde özel olarak, $\Phi = e^{14}+e^{23}$, $\xi = e_5$ ve $\eta = e^5$ alındığında (ϕ,ξ,η,g) yapısı yaklaşık-paralel olur.

- $\mathfrak{g}_1$ üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanı yoktur.

  Kabul edelim ki sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı paralel yani her X için $\nabla_X\xi = 0$ olsun. Bu durumda, yukarıda listelenen kovaryant türevler yardımıyla kolaylıkla görülebilir ki $a_i = 0,\ i = 1,\ldots,5$ dır, yani $\nabla\xi \neq 0$ dır. Diğer yandan bu eşitsizlik $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerindeki bir (ϕ,ξ,η,g) yapısı için $\nabla\eta \neq 0$ olduğunu da gösterir. Ayrıca $\nabla\eta \neq 0$ olduğundan $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel) veya $\mathcal{C}_2$' ye ait bir yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_1$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_5\rangle$ olmasıdır.

$\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Keyfi e_i, e_j taban elemanları için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) =$

$-g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ sağlanır. O halde,

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_5) = -\frac{1}{2}a_1 \text{ve}\, g(\nabla_{e_5}\xi, e_2) = -\frac{1}{2}a_1$$

olduğundan $a_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $g(\nabla_{e_1}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_1)$ olduğundan $a_2 = 0$, $g(\nabla_{e_4}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_4)$ olduğundan $a_3 = 0$ ve $g(\nabla_{e_3}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_3)$ olduğundan $a_4 = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\xi = a_5e_5$ olur. Yani, ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_5e_5$ formunda olmasıdır.

- $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde α- Sasakian yapı vardır ve $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ dir. Kabul edelim ki $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı α- Sasakian olsun. Bu durumda $\xi = e_5$ dir. Ayrıca α- Sasakian yapılar hemen hemen-K-kontak olduklarından $\nabla_\xi\Phi = 0$ eşitliği sağlanır. $(\nabla_\xi\Phi)(e_i, e_j) = 0$ denklemi tüm taban elemanları için çözülerek kolaylıkla görülebilir ki, $b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2 = 1$, $b_{13}(b_{12} + b_{34}) = b_{14}(b_{12} + b_{34} = 0$ olmak üzere,

$$\Phi = b_{12}e^{12} + b_{13}e^{13} + b_{14}e^{14} - b_{14}e^{23} + b_{13}e^{24} + b_{34}e^{34}$$

formundadır. Ayrıca α- Sasakian yapılar her X için, $\nabla_X\xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlik yardımıyla ϕ endomorfizmasını belirleyip, $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ koşulunu sağlatırsak, $b_{12}^2 = b_{34}^2 = 1$, $b_{13} = b_{14} = 0$, $b_{12} = b_{34}$ ve $\alpha = -\frac{1}{2}b_{12}$ bulunur. Bu durumda

$$b_{12} = b_{34} = -1 \text{ ve } \alpha = 1/2$$

veya

$$b_{12} = b_{34} = 1 \text{ ve } \alpha = -1/2$$

için yapı α- Sasakian olur. Örneğin $\Phi = -e^{12} - e^{34}$ ve $\xi = e_5$ seçildiğinde $\eta = e^5$ ve ϕ endomorfizması,

$$\phi(e_1) = e_2,\ \phi(e_2) = -e_1,\ \phi(e_3) = e_4,\ \phi(e_4) = -e_3,\ \phi(e_5) = 0$$

olmak üzere, (ϕ, ξ, η, g) yapısı 1/2- Sasakiandır. Bu yapıyı Andrada ve arkadaşları Sasakian olarak vermişlerdir ($\alpha = 1$). Bunun sebebi, çalışmalarında verdikleri Sasakian yapıların tanımlama bağıntısındaki "2" katsayısı ile alakalıdır (Andrada vd., 2009). Bu yapının aynı zamanda Sasakian-sı ($\mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_7$) olduğu da görülebilir.

- $\mathfrak{g}_1$ üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

  $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı β-Kenmotsu olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j taban elemanları için

  $$g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$$

  eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin sağlanması için $\xi = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$, $\eta = b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3 + b_4e^4$ biçiminde olmalıdır. Diğer yandan, β-Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısında $X = e_1$, $Y = e_1$, $Z = e_2$ ve $X = e_1$, $Y = e_1$, $Z = e_5$ yazılırsa , sırasıyla $b_{15} = 2\beta b_1 b_{12}$ ve $b_{12} = -2\beta b_1 b_{15}$ eşitlikleri elde edilir ve dolayısıyla $b_{12} = b_{15} = 0$ olur. Benzer şekilde tanımlama bağıntısında X, Y, Z yerine bütün taban elemanları yazıldığı taktirde her i, j için $b_{ij} = 0$, yani $\Phi = 0$ olur. Böylece, $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde β-Kenmotsu yapı olmadığı görülmüş olur.

- $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde yarı-paralel yapı vardır.

  Gerçekten bu cebir üzerinde $\Phi = e^{12} - e^{34}$ 2-formu yarmıdıyla elde edilen,

  $$\phi(e_1) = -e_2,\ \phi(e_2) = e_1,\ \phi(e_3) = e_4,\ \phi(e_4) = -e_3,\ \phi(e_5) = 0$$

  endomorfizması ve $\xi = e_5$, $\eta = e^5$ alınırsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsünün bir yarı-paralel hemen hemen kontak metrik yapı olduğu görülür.

- $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde hemen hemen-paralel yapı yoktur.

  $\mathfrak{g}_1$ cebiri üzerinde $de^5 = -e^{12} - e^{34}$ ve $de^i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ dır. O halde $\eta = \sum b_ie^i$

ve $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ sırasıyla 1-form ve 2-form olsunlar. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d\Phi = \sum b_{ij}d(e^{ij}) &= b_{15}(-e^1 \wedge (-e^{34})) + b_{25}(-e^2 \wedge (-e^{34})) \\ &+ b_{35}(-e^3 \wedge (-e^{12})) + b_{45}(-e^4 \wedge (-e^{12})) \\ &= b_{15}e^{134} + b_{25}e^{234} + b_{35}e^{123} + b_{45}e^{124} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$d\Phi = 0 \Leftrightarrow b_{15} = b_{25} = b_{35} = b_{45} = 0$$

olur. Benzer şekilde,

$$d\eta = -b_5e^{12} - b_5e^{34}$$

olup,

$$d\eta = 0 \Leftrightarrow b_5 = 0$$

koşulu elde edilir. O halde $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) yapısını hemen hemen-paralel sınıfta kabul edilirse, $d\Phi = 0$ ve $d\eta = 0$ olup, bu durumda

$$\Phi \wedge \Phi = (2b_{12}b_{34} + 2b_{14}b_{23} - 2b_{13}b_{24})e^{1234}$$

olacağından,

$$\eta \wedge \Phi \wedge \Phi = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik yapının hemen hemen-paralel olamayacağını gösterir.

5.2 $\mathfrak{g}_2$ Lie Cebiri

Koszul formülü yardımıyla, bu cebir üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\nabla_{e_1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_2 + \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_4 = \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_5,$$

$$\nabla_{e_3}e_2 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_2 = -\tfrac{1}{2}e_5\ , \quad \nabla_{e_4}e_5 = \tfrac{1}{2}e_2,$$

$$\nabla_{e_5}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_2 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \tfrac{1}{2}e_2.$$

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde yaklaşık-paralel yapı yoktur.

  $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı yaklaşık-paralel olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j taban elemanları için,

$$(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, e_j) = -\Phi(e_i, \nabla_{e_i}e_j) = 0$$

eşitliği sağlanır. O halde özel olarak,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow b_{13} = 0, \quad (\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{15},\\
&(\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_1) = 0 \Rightarrow b_{23} = 0, \quad (\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = 0,\\
&(\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_4) = 0 \Rightarrow b_{25} = 0, \quad (\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_5) = 0 \Rightarrow b_{24} = 0,\\
&(\nabla_{e_3}\Phi)(e_3, e_1) = 0 \Rightarrow b_{35} = 0, \quad (\nabla_{e_4}\Phi)(e_4, e_2) = 0 \Rightarrow b_{45} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\Phi = b_{14}e^{14} + b_{34}e^{34}$ şeklindedir. Buradan ϕ endomorfizmi,

$$\phi(e_1) = -b_{14}e_4,\ \phi(e_2) = 0,\ \phi(e_3) = -b_{34}e_4,\ \phi(e_4) = b_{14}e_1 + b_{34}e_3,\ \phi(e_5) = 0$$

şeklinde bulunur. Ayrıca $\xi = \sum\limits_{i=1}^{5} a_i e_i$ ve $\eta = \sum\limits_{i=1}^{5} b_i e^i$ olmak üzere,

$$\phi^2(e_2) = 0 = -e_2 + \eta(e_2)\xi \Rightarrow b_2 a_2 = 1, b_2 a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

dır. Diğer yandan,

$$\phi^2(e_5) = 0 = -e_5 + \eta(e_5) \Rightarrow b_5 a_5 = 1 \Rightarrow a_5 \neq 0$$

olduğundan $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla yapı yaklaşık-paralel değildir.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde paralel yapı yoktur.
  Bu cebir üzerinde yaklaşık-paralel yapı olmadığından, paralel yapı da bulunamaz.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanı yoktur.

  Sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı paralel, yani her X için $\nabla_X \xi = 0$ olsun. Bu durumda, $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, 5$ dır, yani $\nabla \xi \neq 0$ dır. Ayrıca bu eşitsizlik $\mathfrak{g}_2$ üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\nabla \eta \neq 0$ olduğunu da gösterir. Diğer yandan $\nabla \eta \neq 0$ olduğundan $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri üzerinde $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel) veya $\mathcal{C}_2$ sınıflarına ait bir yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_5 \rangle$ olmasıdır.
  $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Keyfi e_i, e_j taban elemanları için $g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) = -g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)$ sağlanır. O halde,

$$g(\nabla_{e_2} \xi, e_3) = -\frac{1}{2} a_1, \; g(\nabla_{e_3} \xi, e_2) = -\frac{1}{2} a_1$$

  olduğundan $a_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $g(\nabla_{e_4} \xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5} \xi, e_4)$ eşitliğinden $a_2 = 0$, $g(\nabla_{e_1} \xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5} \xi, e_1)$ eşitliğinden $a_3 = 0$ ve $g(\nabla_{e_2} \xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5} \xi, e_2)$ eşitliğinden $a_4 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\xi = a_5 e_5$ olur. Yani, ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_5 e_5$ formunda olmasıdır.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde α- Sasakian yapı yoktur.
  $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı α- Sasakian olsun. ξ Killing olduğundan

$\xi \in \langle e_5 \rangle$ dir. Ayrıca $\nabla_X \xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliği yardımıyla ϕ,

$$\phi(e_1) = \frac{a_5}{2\alpha}e_3,\ \phi(e_2) = \frac{a_5}{2\alpha}e_4,\ \phi(e_3) = -\frac{a_5}{2\alpha}e_1,\ \phi(e_4) = -\frac{a_5}{2\alpha}e_2$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer yandan α- Sasakian yapıların tanımlama bağıntısı

$$(\nabla_X \phi)(Y) = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X)$$

sağlanmalıdır. Halbuki bu bağıntı özel olarak $X = Y = e_1$ için sağlanmaz. Dolayısıyla yapı α- Sasakian değildir.

- $\mathfrak{g}_2$ cebiri üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

(ϕ, ξ, η, g) yapısı β-Kenmotsu olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j için,

$$g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$$

eşitliği sağlanmalıdır. O halde,

$$g(\nabla_{e_1}\xi, e_2) = -\frac{a_3}{2},\ g(\nabla_{e_2}\xi, e_1) = \frac{a_3}{2}$$

ve

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_4) = -\frac{a_5}{2},\ g(\nabla_{e_4}\xi, e_2) = \frac{a_5}{2}$$

ifadelerinden sırasıyla $a_3 = 0$ ve $a_5 = 0$ elde edilir. Böylece $\xi = a_1e_1 + a_2e_2 + a_4e_4$ ve $\eta = b_1e^1 + b_2e^2 + b_4e^4$ şeklindedir. Diğer yandan $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-form olmak üzere, β-Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısında örneğin $X = e_1$, $Y = e_3$, $Z = e_5$ ve $X = e_3$, $Y = e_3$, $Z = e_5$ alınırsa, sırasıyla $b_{25} = 0$ ve $b_{13} = 0$ elde edilir. Benzer argümanlar X, Y, Z yerine diğer taban elemanlarının yazılmasıyla da elde edilir. Sonuç olarak her i, j için $b_{ij} = 0$ dır. Böylece $\mathfrak{g}_2$ üzerinde β-Kenmotsu yapı olmadığı gösterilmiş olur.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.

Taban elemanlarının verilen kovaryant türevleri üzerinden görülebilir ki keyfi bir η 1- formu için $\delta\eta = 0$ dır. Ayrıca bir $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ 2-formu için

$$\delta\Phi = 0 \Leftrightarrow b_{12} = 0,\ b_{13} = -b_{24}$$

olduğu görülür. O halde özel olarak $\Phi = e^{13} - e^{24}$ seçilirse, Φ' yi temel 2-form kabul eden yapı için,

$$\phi(e_1) = -e_3,\ \phi(e_2) = e_4,\ \phi(e_3) = e_1,\ \phi(e_4) = -e_2,\ \phi(e_5) = 0$$

olur. Böylece $\xi = e_5$ ve $\eta = e^5$ seçimiyle birlikte, (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri üzerinde bir yarı-paralel hemen hemen kontak metrik yapıdır.

- $\mathfrak{g}_2$ üzerinde hemen hemen-paralel yapı mevcuttur.

  $\mathfrak{g}_2$ Lie cebiri üzerinde $\Phi = e^{15} + e^{34}$ ve $\eta = e^2$ sırasıyla 2-form ve 1-form olsunlar. Bu durumda $d\Phi = d\eta = 0$ dır. O halde

$$\phi(e_1) = -e_5,\ \phi(e_2) = 0,\ \phi(e_3) = -e_4,\ \phi(e_4) = e_3,\ \phi(e_5) = e_1,$$

$\xi = e_2$ olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü $\mathfrak{g}_2$ cebiri üzerinde bir hemen hemen-paralel kontak metrik yapıdır.

5.3 $\mathfrak{g}_3$ Lie Cebiri

Bu cebir üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\nabla_{e_1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_2 + \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\tfrac{1}{2}e_3 + \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_4,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_3}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_3}e_2 = \tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \tfrac{1}{2}e_2$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3 - \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_5 = \tfrac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_5}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_2 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \tfrac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \tfrac{1}{2}e_1.$$

- $\mathfrak{g}_3$ cebiri üzerinde yaklaşık-paralel yapı yoktur.

$\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formuna sahip bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı $\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri üzerinde yaklaşık-paralel olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j taban elemanları için

$$(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, e_j) = -\Phi(e_i, \nabla_{e_i}e_j) = 0$$

eşitliği sağlanır. O halde özel olarak,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow b_{13} = 0, && (\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{14},\\
&(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_4) = 0 \Rightarrow b_{13} = b_{15}, && (\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_5) = 0 \Rightarrow b_{14} = 0,\\
&(\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_1) = 0 \Rightarrow b_{23} = 0, && (\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{25},\\
&(\nabla_{e_3}\Phi)(e_3, e_1) = 0 \Rightarrow b_{23} = b_{34}, && (\nabla_{e_3}\Phi)(e_3, e_2) = 0 \Rightarrow b_{13} = -b_{35},\\
&(\nabla_{e_4}\Phi)(e_4, e_1) = 0 \Rightarrow b_{34} = b_{45}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\Phi = b_{24}e^{24}$ şeklinde olup $\Phi \wedge \Phi = 0$ dır. Halbuki bir hemen hemen kontak metrik yapının Φ temel 2-formu için $\Phi \wedge \Phi \neq 0$ dır. Dolayısıyla yapı yaklaşık-paralel değildir.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde paralel yapı yoktur.

Bu cebir üzerinde yaklaşık-paralel yapı olmadığından, paralel yapı da yoktur.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanı yoktur.

Sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı için $\nabla\xi \neq 0$ olduğu kovaryant türevler yardımıyla görülebilir. Ayrıca bu eşitsizlik $\mathfrak{g}_3$ üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\nabla\eta \neq 0$ olduğunu da gösterir. Üstelik $\nabla\eta \neq 0$ olduğundan $\mathfrak{g}_3$ Lie cebiri üzerinde $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel) veya $\mathcal{C}_2$ sınıflarına ait bir yapı da yoktur.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_5 \rangle$ olmasıdır.

$\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Keyfi e_i, e_j taban elemanları için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = -g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ sağlanır. O halde,

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_3) = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_5,\ g(\nabla_{e_3}\xi, e_2) = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_5$$

olduğundan $a_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) = -g(\nabla_{e_3}\xi, e_1)$ olduğundan $a_2 = 0$, $g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) = -g(\nabla_{e_4}\xi, e_1)$ eşitliğinden $a_3 = 0$ ve $g(\nabla_{e_1}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_1)$ eşitliğinden $a_4 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\xi = a_5 e_5$ olur. Yani, ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_5 e_5$ formunda olmasıdır.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde α- Sasakian yapı yoktur.

(ϕ, ξ, η, g) yapısı α- Sasakian olsun. ξ Killing olduğundan $\xi \in \langle e_5 \rangle$ dir. Ayrıca $\nabla_X\xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliği yardımıyla ϕ endomorfizmi,

$$\phi(e_1) = \frac{a_5}{2\alpha}e_4,\ \phi(e_2) = \frac{a_5}{2\alpha}e_3,\ \phi(e_3) = -\frac{a_5}{2\alpha}e_2,\ \phi(e_4) = -\frac{a_5}{2\alpha}e_1$$

olur. Halbuki bu yapı özel olarak $X = Y = e_1$ için,

$$(\nabla_X \phi)(Y) = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X)$$

eşitliğini sağlamaz. Dolayısıyla α- Sasakian değildir.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

  Farzedelim ki (ϕ, ξ, η, g) yapısı β-Kenmotsu olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j taban elemanları için, $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ sağlanmalıdır. Kolaylıkla görülebilir ki bu eşitliğin sağlanması için $\xi = a_1e_1 + a_2e_2$ ($\eta = b_1e^1 + b_2e^2$) biçiminde olmalıdır. Halbuki $\eta = b_1e^1 + b_2e^2$ olmak üzere β- Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter koşul Φ temel 2-formunun sıfır olmasıdır. Dolayısıyla $\mathfrak{g}_3$ cebiri üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.

  $\Phi = e^{14} - e^{23}$ ve $\eta = e^5$ $\mathfrak{g}_3$ cebiri üzerinde tanımlı 2-form ve 1-form olsunlar. Böylece $\delta\Phi = \delta\eta = 0$ dır. O halde $\xi = e_5$, $\eta = e^5$ ve Φ 2-formundan elde ettiğimiz

$$\phi(e_1) = -e_4,\ \phi(e_2) = e_3,\ \phi(e_3) = -e_2,\ \phi(e_4) = e_1,\ \phi(e_5) = 0$$

  ile tanımlı ϕ endomorfizması ile (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü hemen hemen kontak metrik yapı olup, yarı-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_3$ üzerinde hemen hemen-paralel yapı mevcuttur.

  $\Phi = e^{25} - e^{34}$ ve $\eta = e^1$ $\mathfrak{g}_3$ cebiri üzerinde tanımlı 2-form ve 1-form olsunlar. Böylece $d\Phi = d\eta = 0$ dır. O halde $\xi = e_1$, $\eta = e^1$ ve Φ 2-formundan elde ettiğimiz

$$\phi(e_1) = 0,\ \phi(e_2) = -e_5,\ \phi(e_3) = e_4,\ \phi(e_4) = -e_3,\ \phi(e_5) = e_2$$

  ile tanımlı ϕ endomorfizması ile (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü hemen hemen kontak metrik yapı olup, hemen hemen-paraleldir.

5.4 $\mathfrak{g}_4$ Lie Cebiri

Bu cebir üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\nabla_{e_1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_2 + \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\tfrac{1}{2}e_3 + \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_4,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_3}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_3}e_2 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \tfrac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3 - \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_5 = \tfrac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_5}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \tfrac{1}{2}e_1.$$

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde paralel yapı yoktur.

  $\mathfrak{g}_4$ cebiri üzerinde bir $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ 2-formu paralel olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j, e_k taban elemanları için $(\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, e_k) = 0$ dır. Bu eşitlik ancak ve ancak her i, j için $b_{ij} = 0$ olmasıyla mümkün olur . Halbuki bir hemen hemen kontak metrik yapının temel 2-formu sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri üzerinde paralel yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde yaklaşık-paralel yapı mevcuttur.

  (ϕ, ξ, η, g) bir yaklaşık-paralel hemen hemen kontak metrik yapı ve bu yapının temel iki formu $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ olsun. Bu durumda keyfi X, Y vektör alanları için $(\nabla_X\Phi)(X, Y) = 0$ olur. Bu bağıntıda X, Y yerine özel olarak e_1, e_2 taban elemanları yazılırsa

  $$(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_2) = -\frac{1}{2}b_{13} = 0$$

  bulunur. Benzer metod diğer taban elemanları için de uygulanırsa b_{24}, b_{25} ve b_{35}

haricindeki katsayıların sıfır olduğu görülür. Böylece

$$\Phi = b_{24}e^{24} + b_{25}e^{25} + b_{35}e^{35}$$

formundadır. Diğer yandan $\Phi(X,Y) = g(X,\phi(Y))$ olduğundan

$$\phi(e_1) = 0,$$

$$\phi(e_2) = -b_{24}e_4 - b_{25}e_5,$$

$$\phi(e_3) = -b_{35}e_5,$$

$$\phi(e_4) = b_{24}e_2,$$

$$\phi(e_5) = b_{25}e_2 + b_{35}e_3$$

elde edilir. O halde $\xi = e_1$, $\eta = e^1$ şeklindedir. Ayrıca $\phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi$ koşulundan $b_{25} = 0$ ve $b_{24}^2 = b_{35}^2 = 1$ elde edilir. O halde $\Phi = e^{24} + e^{35}$, $\xi = e^1$, $\eta = e^1$ ile elde edilen yapı yaklaşık-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanı yoktur.
  Sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı paralel olsun ($\nabla\xi = 0$). Her bir taban elemanı için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j)$ ifadesi hesaplanırsa $a_i = 0$, $i = 1, \cdots, 5$ olduğu görülür. Yani ξ paralel olamaz. Bu sonuç yardımıyla, $\mathfrak{g}_4$ cebiri üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\nabla\eta \neq 0$ olduğu ve dolayısıyla yapının $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel)veya $\mathcal{C}_2$ sınıflarında olamayacağı sonucu elde edilir.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_5 \rangle$ olmasıdır.

Sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Bu durumda her bir e_i, e_j taban elemanı için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = -g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ dir. Halbuki

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_3) = -g(\nabla_{e_3}\xi, e_2) \Rightarrow a_1 = 0,\ g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) = -g(\nabla_{e_3}\xi, e_1) \Rightarrow a_2 = 0$$

$$g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) = -g(\nabla_{e_4}\xi, e_1) \Rightarrow a_3 = 0,\ g(\nabla_{e_1}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_1) \Rightarrow a_4 = 0$$

bulunurken a_5 katsayısı için bir koşul yoktur. Yani, ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_5 e_5$ olmasıdır.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde α- Sasakian yapı yoktur.

(ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı α- Sasakian olsun. Bu durumda ξ birim boylu ve Killing olduğundan $\xi = e_5$ dir. Ayrıca $\nabla_X \xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliğinden

$$\phi(e_2) = -\frac{1}{2\alpha}\nabla_{e_2} e_5 = 0$$

elde edilir. Halbuki bu durumda

$$g(\phi(e_2), \phi(e_2)) \neq g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2)$$

olur. Dolayısıyla yapı α- Sasakian değildir.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

$\xi = \sum a_i e_i$, $\eta = \sum b_i e^i$ olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri üzerinde β-Kenmotsu ve bu yapının temel 2-formu $\Phi = \sum b_{ij} e^{ij}$ olsun. Bu durumda her bir taban elemanı e_i, e_j için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ olacağından $\xi = a_1 e_1 + a_2 e_2$ ve $\eta = b_1 e^1 + b_2 e^2$ formundadır. Halbuki bu durumda β-Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısının sağlanması, her bir i, j için $b_{ij} = 0$ olmasıyla mümkün olur. Sonuç olarak, Φ sıfırdan farklı olduğundan, yapı β-Kenmotsu değildir.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.

$\mathfrak{g}_4$ Lie cebiri üzerindeki keyfi bir $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ 2-formu ve $X = \sum X_i e_i$ elemanı için,

$$\delta\Phi(X) = -\sum(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) = -\{X_3 b_{12} + X_4 b_{13} + X_5 b_{14}\}$$

bulunur. Dolayısıyla $\delta\Phi(X) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0$ olmasıdır. Ayrıca keyfi bir $\eta = \sum b_i e^i$ 1-formu için,

$$\delta\eta = -\sum(\nabla_{e_i}\eta)(e_i) = -\sum g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) = 0$$

bulunur. O halde özel olarak $\xi = e_1$, $\eta = e^1$ ve $\Phi = e^{23} + e^{45}$ seçilirse, elde edilen hemen hemen kontak metrik yapı yarı-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_4$ üzerinde hemen hemen-paralel yapı yoktur.

Keyfi bir η 1- formu için

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}\{(\nabla_X\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(X)\}$$

olduğundan, $d\eta(X, Y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $(\nabla_X\eta)(Y) = (\nabla_Y\eta)(X)$ olmasıdır. (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontak metrik yapı olmak üzere, bu eşitlik yerine $g(\nabla_X\xi, Y) = g(\nabla_Y\xi, X)$ alınabilir. Bu eşitlikte X, Y yerine taban elemanlarını yazarak

$$d\eta = 0 \iff \xi = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

elde edilir. Diğer yandan hemen hemen-paralel yapılar, hemen hemen-K-kontak sınıfında olduğundan $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-formu için $\nabla_\xi\Phi = 0$ olmalıdır. Halbuki bu eşitlik ancak ve ancak $\Phi = 0$ olmasıyla mümkün olur. Dolayısıyla $\mathfrak{g}_4$ cebiri üzerinde hemen hemen-paralel yapı yoktur.

5.5 $\mathfrak{g}_5$ Lie Cebiri

Bu cebir üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri şu şekildedir:

$$\nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_3 = \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_2}e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 \quad \nabla_{e_4}e_2 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_1.$$

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde paralel yapı yoktur.
  Gerçekten, diğer sınıflarda olduğu gibi bu cebir üzerinde de paralel yapı olmadığı kolaylıkla görülebilir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde yaklaşık-paralel yapı mevcuttur.
  (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri üzerinde yaklaşık-paralel ve $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ bu yapının temel 2-formu olsun. O halde keyfi taban elemanları e_i, e_j için $(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, e_j) = 0$ olur. Bu eşitlik yardımıyla b_{23}, b_{25}, b_{34} ve b_{45} haricindeki tüm katsayıların sıfır olduğu görülür. O halde özel olarak $\Phi = e^{25} + e^{34}$, $\xi = e^1$, $\eta = e^1$ seçilirse, elde edilen yapı yaklaşık-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde paralel vektör alanı yoktur.
  $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri üzerinde keyfi bir $\xi \neq 0$ vektör alanının paralel olamayacağı diğer sınıflarda olduğu gibi gösterilebilir. Ayrıca bu cebir üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\nabla\eta \neq 0$ olduğundan, yapı $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel)veya $\mathcal{C}_2$ sınıflarında olamaz.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_4, e_5\rangle$ olmasıdır.
  $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri üzerinde sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j taban elemanları için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = -g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ eşitliği

sağlanır. O halde,

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_4) = -g(\nabla_{e_4}\xi, e_2),\ g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) = -g(\nabla_{e_4}\xi, e_1)$$

, ve $g(\nabla_{e_1}\xi, e_5) = -g(\nabla_{e_5}\xi, e_1)$ eşitliklerinden sırasıyla $a_1 = 0,\ a_2 = 0,$ ve $a_3 = 0$ elde edilirken, a_4 ve a_5 katsayıları için herhangi bir koşul bulunamaz. Dolayısıyla ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_4e_4 + a_5e_5$ formunda olmasıdır. Yani, $\xi \in \langle e_4, e_5\rangle$ dir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde α- Sasakian yapı yoktur.

  $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı α- Sasakian olsun. Bu durumda $\xi = a_4e_4 + a_5e_5$ olup, ξ birim boylu olduğundan $a_4^2 + a_5^2 = 1$ olur. Ayrıca $\eta = b_4e_4 + b_5e_5$ formundadır. Diğer yandan $\nabla_X\xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliğinden

$$\phi(e_2) = -\frac{a_4}{2\alpha}e_1 \text{ ve } \phi(e_3) = -\frac{a_5}{2\alpha}e_1$$

  elde edilir. Halbuki,

$$g(\phi(e_2), \phi(e_3)) = g(e_2, e_3) - \eta(e_2)\eta(e_3)$$

  olduğundan $a_4.a_5 = 0$ olur. Böylece $\phi(e_2) = 0$, veya $\phi(e_3) = 0$ dir. Genelliği bozmayacağından $\phi(e_2) = 0$ olsun. Böylece

$$g(\phi(e_2), \phi(e_2)) \neq g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2)$$

  elde edilir. Dolayısıyla yapı α- Sasakian değildir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

  $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij},\ \xi = \sum a_ie_i,\ \eta = \sum b_ie^i$ ile birlikte $\mathfrak{g}_5$ Lie cebiri üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı β-Kenmotsu olsun. Bu durumda keyfi taban elemanları e_i, e_j için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ olur. Bu eşitlik yardımıyla

$\xi = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ve $\eta = b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3$ olduğu görülür. Bu durumda β-Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısında X, Y, Z yerine keyfi taban elemanları yazılırsa $\Phi = 0$ elde edilir. Sonuç olarak yapı β-Kenmotsu değildir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.

Keyfi bir $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ 2-formu ve $X = \sum x_ie_i \in \mathfrak{g}_5$ elemanı için,

$$\delta\Phi(X) = -\sum(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) = -\{x_4b_{12} + x_5b_{13}\}$$

olduğu $\delta\Phi$' nin tanımı yardımıyla hesaplanabilir. Böylece $\delta\Phi(X)$' nin sıfır olması için gerek ve yeter koşul b_{12} ve b_{13} katsayılarının sıfır olmasıdır. Diğer yandan keyfi bir $\eta = \sum b_ie^i$ 1-formu için

$$\delta\eta = -\sum(\nabla_{e_i}\eta)(e_i) = -\sum g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) = 0$$

olduğu kovaryant türevler yardımıyla görülür. O halde, özel olarak $\xi = e_5$, $\eta = e^5$ ve $\Phi = e^{14} + e^{23}$ seçilirse, elde edilen yapı hemen hemen kontak metrik olup $\delta\Phi = \delta\eta = 0$ olacağından, yarı-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_5$ üzerinde hemen hemen-paralel yapı mevcuttur.
  Kolaylıkla görülebilir ki $\xi = e_1$, $\xi = e_1$ ve $\Phi = e^{25} + e^{34}$ temel 2-form seçimiyle elde edilen yapı hemen hemen-paralel sınıftadır.

5.6 $\mathfrak{g}_6$ Lie Cebiri

$\mathfrak{g}_6$ üzerinde taban elemanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\nabla_{e_1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_3, \qquad \nabla_{e_1}e_3 = -\tfrac{1}{2}e_2 + \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\tfrac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3, \qquad \nabla_{e_2}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\tfrac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_3}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_3}e_2 = \tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \tfrac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \tfrac{1}{2}e_2,$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3, \qquad \nabla_{e_4}e_3 = \tfrac{1}{2}e_1, \qquad \nabla_{e_5}e_2 = -\tfrac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \tfrac{1}{2}e_2.$$

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde yaklaşık-paralel yapı mevcuttur.

$\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri üzerinde $\Phi = \sum b_{ij}e^{ij}$ temel 2-forma sahip bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı yaklaşık-paralel olsun. O halde keyfi X, Y elemanları için $(\nabla_X \Phi)(X, Y) = 0$ dır. X, Y yerine e_1, e_2 taban elemanları yazılırsa,

$$(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_2) = -\Phi(e_1, \nabla_{e_1}e_2) = 0 \Rightarrow b_{13} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{array}{ll}
(\nabla_{e_1}\Phi)(e_1, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{14}, & (\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_1) = 0 \Rightarrow b_{23} = 0, \\
(\nabla_{e_2}\Phi)(e_2, e_3) = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{25}, & (\nabla_{e_3}\Phi)(e_3, e_1) = 0 \Rightarrow b_{23} = b_{34} = 0, \\
(\nabla_{e_3}\Phi)(e_3, e_2) = 0 \Rightarrow b_{13} = b_{35} = 0 & (\nabla_{e_4}\Phi)(e_4, e_3) = 0 \Rightarrow b_{14} = 0
\end{array}$$

bulunur. Dolayısıyla Φ temel 2-formu ,

$$\Phi = b_{15}e^{15} + b_{24}e^{24} + b_{45}e^{45}$$

şeklindedir. Diğer yandan (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ şartını sağladığından

$$b_{15}^2 = 1, \; b_{15}b_{45} = 0$$

koşulları elde edilir. O halde, özel olarak $\Phi = e^{15} + e^{24}$, $\xi = e_3$ ve $\eta = e^3$ seçimiyle birlikte (ϕ, ξ, η, g) yapısı yaklaşık-paralel sınıftadır.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde paralel yapı yoktur.

  Diğer sınıflardakine benzer şekilde $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri üzerindeki bir Φ 2-formu için, $\nabla\Phi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi = 0$ olmasıdır. Böylece bu cebir üzerinde paralel yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde sıfırdan farklı paralel vektör alanı yoktur.

  Diğer sınıflarda olduğu gibi $\mathfrak{g}_6$ cebiri üzerinde de keyfi bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı için $\nabla\xi \neq 0$ olduğu kovaryant türevler yardımıyla görülür. Ayrıca bu eşitsizlik bize $\mathfrak{g}_6$ üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\nabla\eta \neq 0$ olduğunu da gösterir. O halde $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri üzerinde $\mathcal{C}_1$ (yaklaşık-K-paralel) veya $\mathcal{C}_2$ sınıflarına ait bir yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in \langle e_4, e_5 \rangle$ olmasıdır.

  Sıfırdan farklı bir $\xi = \sum a_i e_i$ vektör alanı Killing olsun. Keyfi e_i, e_j taban elemanları için $g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = -g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$ sağlanır. O halde,

$$g(\nabla_{e_2}\xi, e_3) = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_5 \text{ ve } g(\nabla_{e_3}\xi, e_2) = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_5$$

  eşitliklerinden $a_1 = 0$, benzer şekilde $g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) = -g(\nabla_{e_3}\xi, e_1)$ ve $g(\nabla_{e_1}\xi, e_4) = -g(\nabla_{e_4}\xi, e_1) \Rightarrow$ eşitliklerinden sırasıyla $a_2 = 0$ ve $a_3 = 0$ elde edilir. Diğer taban elemanlarının a_4 ve a_5 katsayıları için herhangi bir bağıntı elde edilemez. Dolayısıyla ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi = a_4 e_5 + a_5 e_5$ formunda olmasıdır.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde α- Sasakian yapı yoktur.

  $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri üzerindeki bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı α- Sasakian olsun. ξ Killing olduğundan $\xi \in \langle e_4, e_5 \rangle$ dir. Ayrıca $\nabla_X \xi = -\alpha\phi(X)$ eşitliği yardımıyla ϕ,

$$\phi(e_1) = \frac{a_4}{2\alpha}e_3,\ \phi(e_2) = \frac{a_5}{2\alpha}e_3,\ \phi(e_3) = -\frac{a_4}{2\alpha}e_1 - \frac{a_5}{2\alpha}e_2,\ \phi(e_4) = 0,\ \phi(e_5) = 0$$

olur. Diğer yandan $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ koşulundan,

$$\phi^2(e_4) = 0 = (a_4^2 - 1)e_4 + a_4a_5e_5 \Rightarrow a_4^2 = 1,\ a_4a_5 = 0$$

ve

$$\phi^2(e_5) = 0 = a_5a_4e_4 + (a_5^2 - 1)e_5 \Rightarrow a_5^2 = 1,\ a_4a_5 = 0$$

bulunur. Halbuki $a_5^2 = a_4^2 = 1$ olduğundan $a_4a_5 \neq 0$ dır. Bu çelişki ile $\mathfrak{g}_6$ Lie cebiri üzerinde α- Sasakian yapı olamayacağı gösterilmiş olur.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

(ϕ, ξ, η, g) yapısı β-Kenmotsu olsun. Bu durumda keyfi e_i, e_j için,

$$g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) = g(\nabla_{e_j}\xi, e_i)$$

sağlanmalıdır. O halde $g(\nabla_{e_1}\xi, e_2) = g(\nabla_{e_2}\xi, e_1)$, $g(\nabla_{e_1}\xi, e_3) = g(\nabla_{e_3}\xi, e_1)$ ve $g(\nabla_{e_2}\xi, e_3) = g(\nabla_{e_3}\xi, e_2)$ eşitliklerinden sırasıyla $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ ve $a_5 = 0$ olduğundan $\xi = a_1e_1 + a_2e_2$ ($\eta = b_1e^1 + b_2e^2$) biçimindedir. Diğer yandan $\eta = b_1e^1 + b_2e^2$ için β- Kenmotsu yapıların tanımlama bağıntısı yalnızca $\Phi = b_{12}e^{12}$ için sağlanır. Böylece $\Phi \wedge \Phi = 0$ olur. Dolayısıyla $\mathfrak{g}_6$ cebiri üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.

- $\mathfrak{g}_6$ cebiri üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.

$\Phi = e^{14} + e^{25}$ ve $\eta = e^3$ $\mathfrak{g}_6$ cebiri üzerinde tanımlı 2-form ve 1-form olsunlar. Açıkça görülür ki $\delta\Phi = \delta\eta = 0$ dır. O halde $\xi = e_3$, $\eta = e^3$ ve Φ 2-formundan elde edilen

$$\phi(e_1) = -e_4,\ \phi(e_2) = -e_5,\ \phi(e_3) = 0,\ \phi(e_4) = e_1,\ \phi(e_5) = e_2$$

ile tanımla ϕ endomorfizması ile (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü hemen hemen kontak metrik yapı olup, yarı-paraleldir.

- $\mathfrak{g}_6$ üzerinde hemen hemen-paralel yapı yoktur.

  $\mathfrak{g}_6$ Lie cebirinin braketleri ile görülebilir ki,

$$de^1 = 0,\ de^2 = 0,\ de^3 = -e^{12},\ de^4 = -e^{13},\ de^5 = -e^{23}$$

şeklindedir. O halde $\eta = \sum b_i e^i$ ve $\Phi = \sum b_{ij} e^{ij}$ sırasıyla 1-form ve 2-form olmak üzere,

$$d\Phi = 0 \iff b_{15} = b_{24},\ b_{34} = b_{35} = b_{45} = 0$$

ve

$$d\eta = 0 \iff b_3 = b_4 = b_5 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Phi = b_{12}e^{12} + b_{13}e^{13} + b_{14}e^{14} + b_{15}e^{15} + b_{23}e^{23} + b_{15}e^{24} + b_{25}e^{25}$$

ve $\eta = b_1e^1 + b_2e^2$ formundadırlar. Halbuki bu durumda $\eta \wedge \Phi \wedge \Phi = 0$ olur. Sonuç olarak Φ formunu temel 2-form kabul eden bir (ϕ, ξ, η, g) yapısı hemen hemen-paralel olamaz.

Bulunan bu sonuçlar aşağıdaki tablo ile özetlenmiştir:

	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_3$	$\mathfrak{g}_4$	$\mathfrak{g}_5$	$\mathfrak{g}_6$
Paralel Yapı	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Yaklaşık-Par. Yapı	Var	Yok	Yok	Var	Var	Var
α- Sasakian Yapı	Var	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
β- Kenmotsu Yapı	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
yarı-Par. Yapı	Var	Var	Var	Var	Var	Var
Hemen hemen-Par. Yapı	Yok	Var	Var	Yok	Var	Yok
Par. Vektör Alanı	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Killing Vektör Alanı	$\xi \in < e_5 >$	$\xi \in < e_5 >$	$\xi \in < e_5 >$	$\xi \in < e_5 >$	$\xi \in < e_4, e_5 >$	$\xi \in < e_4, e_5 >$

Yukarıda incelenen sınıflar için elde edilen sonuçlar yardımıyla aşağıdaki teoremler ifade edilebilir:

Teorem 5.3. *Beş boyutlu bir nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{g}$' nin üzerindeki hemen hemen kontak metrik yapının paralel olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{g}$' nin abelyen olmasıdır.*

Bu teoremin sonucu şu şekilde verilebilir:

Sonuç 5.4. *Nilpotent Lie cebirine sahip bir 5-boyutlu, bağlantılı Lie grubu üzerindeki herhangi bir sol-invaryant yapı paralel sınıfta olamaz.*

Teorem 5.5. *Beş boyutlu bir nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{g}$ yaklaşık-paralel yapıya sahip ise, bu cebir $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_5$ veya $\mathfrak{g}_6$ cebirlerinden birisine izomorftur.*

Teorem 5.6. *Beş boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde sıfırdan farklı, paralel vektör alanı yoktur.*

Her bir $\mathfrak{g}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cebirinde Killing vektör alanı mevcuttur.

Teorem 5.7. *$\mathfrak{g}$ cebiri, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ veya $\mathfrak{g}_4$ cebirlerinden birisine izomorf olsun. Bu durumda $\mathfrak{g}$ üzerindeki bir ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in < e_5 >$ olmasıdır. Benzer şekilde $\mathfrak{g}$ cebiri $\mathfrak{g}_5$ veya $\mathfrak{g}_6$ cebirlerinden birine izomorf ise, ξ vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter koşul $\xi \in < e_4, e_5 >$ olmasıdır.*

Teorem 5.8. *Beş boyutlu bir nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{g}$ α-Sasakian yapıya sahip olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{g}$ cebirinin $\mathfrak{g}_1$' e izomorf olmasıdır.*

Teorem 5.9. *Hiç bir 5 boyutlu nilpotent Lie cebiri üzerinde β-Kenmotsu yapı yoktur.*

Bu teoremin sonucu şöyle ifade edilebilir:

Sonuç 5.10. *Nilpotent Lie cebirine sahip bir 5-boyutlu, bağlantılı Lie grubu üzerinde β-Kenmotsu sınıfında sol-invaryant hemen hemen kontak yapı yoktur.*

Teorem 5.11. *Her bir $\mathfrak{g}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cebiri üzerinde yarı-paralel yapı mevcuttur.*

Teorem 5.12. *Beş boyutlu bir nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{g}$ hemen hemen-paralel yapıya sahip olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{g}$ cebirinin, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ veya $\mathfrak{g}_5$ cebirlerinden birine izomorf olmasıdır.*

KAYNAKLAR

Agricola, I. ve Friedrich, T., "3-Sasakian Manifolds In Dimension Seven, Their Spinors And G_2 Structures", ***Journal of Geometry and Physics***, 60:326-332 (2010).

Aktay, Ş., "On Deformations of Parallel G_2 Structures and Almost Contact Metric Structures ", ***Preprint*** (2015).

Alexiev, V. ve Ganchev, G., "On The Classification Of The Almost Contact Metric Manifolds", ***Math. and Educ. in Math.***, *Proc. of the XV Spring Conf. of UBM Sunny Beach*, 155-161 (1986).

Andrada, A., Fino, A., ve Vezzoni, L., "A Class Of Sasakian 5-Manifolds", ***Transformation Groups***, 14:493-512 (2009).

Arikan, M., Cho., H., ve Salur, S., "Existence Of Compatible Contact Structures On G_2-Manifolds", ***Asian J. Math***, 17:321-333 (2013).

Baker, A., "Matrix Groups", ***Springer-Verlag London Limited***, London (2002).

Blair, D., "Riemannian Geometry Of Contact And Symplectic Manifolds", ***Birkhäuser***, Switzerland (2002).

Blair, D. ve Oubina, J., "Conformal And Related Changes Of Metric On The Product Of Two Almost Contact Metric Manifolds", ***Publ. Math. Debrecen***, 34:199-207 (1990).

Brickell, F. ve Clark, R., "Differetiable Manifolds", ***Van Nostrand Company***, London (1970).

Bryant, R., "Metrics With Exceptional Holonomy", ***Ann. of Math.***, 126:525-576 (1987).

Calvaruso, G., "Three-Dimensional Homogeneous Almost Contact Metric Structures", ***J. Geom. Phys.***, 69:60-73 (2013).

Calvaruso, G. ve Fino, A., "Five-Dimensional K-Contact Lie Algebras", ***Monatsh Math***, 167:35-59 (2012).

Capursi, M., "Some Remarks On The Product Of Two Almost Contact Manifolds",***An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi***, 30:75-79 (1984).

Chinea, D. ve Gonzales, C., "A Classification Of Almost Contact Metric Manifolds", ***Ann. Mat. Pura Appl.***, 156:15-36 (1990).

de Graaf, W. A., "Classification Of 6-Dimensional Nilpotent Lie Algebras Over Fields Of Characteristic Not 2", ***Journal of Algebra***, 309:640-653 (2007).

Dixmier, J., "Sur Les Repr_esentations Unitaires Des Groupes De Lie Nilpotentes III", ***Canadian Journal of Mathematics***, 10:321-348 (1958).

Fernández, M., Fino, M., ve Manero, V., "G_2 Structures on Einstein Solvmanifolds", Preprint (2013), (arXiv:1207.3616v3).

Fernández, M. ve Gray, A., "Riemannian Manifolds With Structure Group G_2 ", ***Ann. Mat. Pura Appl.***, 4 (1982).

Gong, M. (1998), "Classification Of Nilpotent Lie Algebras Of Dimension 7", PhD thesis, University of Waterloo, Canada.

Gray, A. ve Hervella, L. M., "The Sixteen Classes Of Almost Hermitian Manifolds And Their Linear Invariants", ***Ann. Mat. Pura. Appl.***, 123:35-58 (1980).

Harvey, F., "Spinors And Calibrations", ***Academic Press, INC***, California (1990).

Joyce, D., "Compact Manifolds With Special Holonomy", ***Oxford University Press***, New York (2000).

Karigiannis, S., "Deformations Of G_2 And Spin(7) Structures On Manifolds", ***Can. J. Math.***, 57:1012-1055 (2005).

Lee, J., "Introduction to Smooth Manifolds", ***Springer***, New York (2003).

Matzeu, P. ve M.I.Munteanu, "Vector Cross Products And Almost Contact Structures", ***Rend. Mat. Appl.***, 22:359-376 (2002).

Morimoto, A., "On Normal Almost Contact Structures", ***J. Math. Soc. Japan***, 15:420-436 (1963).

O'neill, B., "Semi- Riemannian Geometry", ***Academic Press***, San Diego (1983).

Oubina, J. A., "A Classification For Almost Contact Structures", ***Preprint*** (1980).

Oubina, J. A., " A Classification For Almost Contact Structures, II, Examples", ***Preprint*** (1981).

Todd, A., "On An Almost Contact Structures On G_2 Manifolds", ***Preprint*** (2015), (arXiv:1501.06966).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mehmet Solgun

Doğum Yeri ve Tarihi : Ordu / 28.10.1985

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü (2010)

Y. Lisans Öğrenimi : Durham University School of Mathematics (2012)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü (2013-)

İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü

Tel : 0506 244 04 11

E-Posta Adresi : mehmet.solgun@bilecik.edu.tr

Tarih: 31/06/2016