ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK
ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

BAZI ÜSTEL DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Seda Nur Akkuş
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2019
Ref.No: 10295581

ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK
ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

BAZI ÜSTEL DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Seda Nur AKKUŞ
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2019

ESKISEHIR
ANADOLU UNIVERSİTY

BILECIK
SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

ON SOME EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

Seda Nur AKKUŞ
Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Ilker INAM

BILECIK, 2019

BBİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 31.07.2019 tarih ve 41/13 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 20.08.2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Seda Nur AKKUŞ'un "Bazı Üstel Diophantine Denklemleri Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. İlker İNAM

ÜYE : Prof. Dr. Nilüfer ÖZDEMİR

ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …./…./…..... tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyen, bana çok değerli vaktini ayıran danışmanım Doç.Dr. İlker İnam'a, ilimi irfanı her şeyin üstünde tutan bu yolda çocukları için her türlü fedakarlığı yapan Canım babam Sadettin Sevindik'e ve Canım annem Hatice Sevindik'e, Motivasyon desteği ve ümit verici konuşmaları ile beni hep rahatlatan hiç yalnız bırakmayan kalbi güzel kardeşim, meslektaşım Elanur Sevindik'e, yoğun çalışmalarım sırasında sabır gösterdiği ve bana katlandığı için biricik eşim, neşe kaynağım Mustafa Akkuş'a, dualarıyla güç bulduğum babaannem Yaşar Sevindik'e, anneannem Saliha Andiç ve Dedem Turan Andiç'e , haklarını asla ödeyemeyeceğim teyzem Ayşe Daş ve dayım Mehmet Rıza Andiç'e, yüksek lisans süresi boyunca emeği geçen bütün Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, Prof.Dr. Gökhan Soydan ve Prof.Dr. Maohua Le ile çalışmam sırasında küçük veya büyük yardımını esirgemeyen herkese teşekkür ederim.

Seda Nur AKKUŞ

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

…/…./2019

Seda Nur AKKUŞ

BAZI ÜSTEL DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmada sayılar teorisinin insanlık tarihi kadar eski sayılabilecek problemlerinden birisi olan Diophantine denklemlerinin özel bir durumu ele alınmıştır. Daha kesin olarak üstel Diophantine denklemleri için literatürde açık problem olarak yer alan Jeśmanowicz Sanısı çalışılmıştır. 2500 yıllık Pisagor Teoremi'ne farklı bir bakış açısıyla bakıp, üsler değişken haline getiren Sierpinski 1955-56'de $3^x + 4^y = 5^z$ üstel Diophantine denkleminin tek çözümünün (2, 2, 2) olduğunu ispatlamıştır. Buradan hareketle Jeśmanowicz aynı yıl $a^2 + b^2 = c^2$ olmak üzere $a^x + b^y = c^z$ üstel Diophantine denkleminin tek çözümünün (2, 2, 2) olduğunu iddia etmiştir. Bu sanı birçok durum için doğrulanmış olup, tam çözümü henüz bilinmemektedir. İlk bölümde üstel Diophantine denklemleri tanıtılmış, ikinci bölümde ise bu sanı çalışılmıştır. Literatürde yeniden eskiye doğru geniş çaplı bir tarama yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise Jeśmanowicz Sanısının özel bir durumu olan $(20k)^x + (99k)^y = (101k)^z$ üstel Diophantine denkleminin elementer metotlar kullanılarak tek çözümünün (2, 2, 2) olduğu görülmüştür. Çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Diophantine Denklemleri; Üstel Diophantine Denklemleri; Jeśmanowicz Sanısı.

ON SOME EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

ABSTRACT

In this three-part study, a special case of Diophantine equations, which is one of the problems of the number theory as old as human history, is discussed. More precisely, for the exponential Diophantine equations, Jeśmanowicz's Conjecture, which is an open problem in the literature, is studied. Sierpinski proved that the exponential Diophantine equation (2, 2, 2) is $3^x + 4^y = 5^z$ by looking at in a different perspective to the 2500-years old Pythagorean Theorem. In the same year, Jeśmanowicz claimed that there was only one solution (2, 2, 2) of the exponential Diophantine equation, $a^x + b^y = c^z$ with $a^2 + b^2 = c^2$. This assumption has been confirmed in many cases and the exact solution is not yet known. In the first part, exponential Diophantine equations are introduced and in the second part, this assumption is studied. A large-scale survey was carried out in the literature. In the third chapter, it is seen that the only solution (2, 2, 2) of the exponential Diophantine equation $(20k)^x + (99k)^y = (101k)^z$, which is a special case of Jesmanowicz's conjecture by elementer methods. The study is compilation.

Keywords: Diophantine Equations; Exponential Diophantine Equations, Jeśmanowicz Conjecture.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR..
BEYANNAME...
ÖZET... I
ABSTRACT II
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ IV
1. ÜÇLÜ TAMAMEN ÜSTEL DİOPHANTİNE DENKLEMİ ÜZERİNE...............1
1.1. Giriş ve Ön Bilgiler...1
1.2. Literatür Taraması...2
2. JESMANOWİCZ SANISI...6
2.1 İlkel Olan Durumlar 7
2.2 İlkel Olmayan Durumlar 9
2.3 Jeśmanowicz Sanısının Değişik Bir Versiyonu...11
3. JESMANOWICZ SANISININ ÖZEL BİR DURUMUNUN TAM BİR ÇÖZÜMÜ...13
3.1 Yardımcı Sonuçlar..14
3.2 Teorem 3.1'in İspatı 14
KAYNAKLAR...25
ÖZ GEÇMİŞ..

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar

1. ÜÇLÜ TAMAMEN ÜSTEL DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

1.1. Giriş ve Ön Bilgiler.

Tamsayı katsayılı bir polinomun tamsayı köklerini bilmek matematiğin gündelik hayat problemlerinin çözümlerini içeren önemli ilgi alanlarından birisidir. Bu tip denklemlere *Diophantine denklemleri* adı verilir. Aşağıda sabit tabanlı ve değişken üslü özel Diophantine denklemlerinin tanımı verilmiştir.

Tanım 1.1. $min\{a,b,c\} > 1$ olmak üzere a,b,c aralarında asal belirli pozitif tamsayılar olsun. $x,y,z \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a^x + b^y = c^z \tag{1.1}$$

biçimindeki denklemlere *üçlü tamamen üstel Diophantine denklemi* denir (Shorey ve Tijdeman, 1986).

Bu bölümde a,b ve c aralarında asal ve $min\{a,b,c\} > 1$ özelliğinde sayılar olmak üzere

$$a^x + b^y = c^z$$

üçlü tamamen üstel Diophantine denklemleri üzerinde durulacaktır. Literatürde yer alan sonuçlar ile açık problemler ele alınacaktır, ana kaynak olarak (Le vd. 2018) kaynağı esas alınmıştır.

Doğal olarak burada $a^x + b^y = c^z$ üçlü tamamen üstel Diophantine denkleminin (x,y,z) pozitif tamsayı çözümleri ile ilgilenilecektir. Sonra x,y,z değişken üsleri için belirli sınırlar verilecektir. Daha sonra bu sınırlar üzerinden (1.1) için (x,y,z) çözüm sayıları verilecektir.

2.Bölüm'de Jeśmanowicz Sanısı ile ilgilenilecektir. Bu sanı (a,b,c) bir Pisagor üçlüsü ise bu durumda (1.1) denkleminin tek çözümünün $(2,2,2)$ olduğunu iddia eder. Bu sanı üzerinde literatürde birçok farklı özel durumlar çalışılmaktadır. Bu çalışmanın kapsamında yer almayan durumlar şöyle sıralanabilir: öncelikle Terai-Jeśmanowicz Sanısı ele alınmamıştır. İkinci olarak eğer x veya y'den biri sabit ise (1.1) eşitliği Pillai Denklemi'ne dönüşür. Bu da Michel Waldschmidt'in 2009 yılındaki çalışmasında ele alınmıştır. Dolayısıyla burada x,y ve z'nin değişken olduğu tüm durumlar göz önüne alınacaktır.

Hatırlanacağı üzere K bir sayı cismi ve R bu cismin bir tamsayı halkası ve S, R'nin asal ideallerinin sonlu bir kümesi olmak üzere herhangi $x \in K$ elemanı eğer (x) temel kesirli ideali S'deki asalların çarpımı ise bu $x \in K$ elemanı S-birim olarak adlandırılır. Değişkenleri S-birimler olan denkleme ise S-birim denklemi denir. Bu nedenle ikinci olarak aslında (1.1) denklemi S-birim denkleminin özel bir durumu olarak ele alınır. Üçüncü olarak a, b, c tabanlarından en az birini değişken olarak buraya eklenir. Son olarak bu problemle ilgili mümkün oldukça yeni sonuçların incelenmesine çalışılmıştır.

1.2. Literatür Taraması.

(1.1) denklemine geri dönülecek olunursa, 1933 yılında Mahler (Mahler, 1933), bu denkleminin sadece sonlu sayıda (x, y, z) çözümü olduğunu göstermek için Thue-Siegel'in Diophantine yaklaşım metodunun p-adik versiyonunu kullanarak göstermiştir. Metot sadece çözümün sonlu çoklukta olduğunu göstermeye yaramış olup, çözümlerin ne olduğunu bulma konusunda etkili değildi. (1.1) denkleminin çözümleri için etkili bir sonuç A.O. Gel'fond tarafından, 1940 yılında verilmiştir (Gel'fond, 1940). 1999'da M.-H. Le bazı basit metotlar yardımıyla eğer c tek sayı ise, bu (1.1) denkleminin (x, y, z) çözümlerinin

$$z < \frac{2}{\pi} a.b. \log(2eab)$$

özelliğinde olduğunu ispatlamıştır. (Le, 1999). Bu ise z üzerinde c'den bağımsız bir sınır vermek işine yarar. Güncel bir sonuç olarak, R. Scott ve R. Styer, 2016 yılında, eğer c sayısı tek ise,

$$z < \frac{1}{2} ab$$

olduğunu ispatlamıştır (Scott ve Styer, 2016). Bazı özel durumlarda c'den bağımsız olarak z üzerindeki bir sınırı bulmak daha ileri gitmeyi sağlar. Örneğin; a'yı bölen her bir asal sayı, verilen asalların sonlu bir S-kümesinde olduğunu söyler. Dolayısıyla (1.1) denkleminin bazen $z = 1$ dışındaki istisnalara sahip olduğunu gerektirir. Yani $S = \{2,3,5\}$ haricinde bunun üzerinde bu problemi çalışmak yeterli olacaktır. Ancak genel olarak bu geçerli değildir. Özellikle de $2 \notin S$ durumu geçerli değildir. Bennett ve

Billerey, 2017 de $S = \{3,5,7\}$ durumunu incelemişler ve sadece (1.1) eşitliğini değil ancak A ve B, S-birimleri olmak üzere

$$A + B = C^z\ , z > 1$$

denklemi ile de ilgilenmişlerdir. (Bennett ve Billerey, 2017).

Şimdi $max\{x, y, z\}$ için üst sınır bulunmaya çalışılacaktır. N.Hirata-Kohno, 2006'da eğer *c* tek ise,

$$\max\{x, y, z\} < 2^{288}.\sqrt{abc}(\log(abc))^3$$

olduğunu göstermiştir. (Hirata-Kohno, 2006). Daha genel olarak a, b, c sayıları için iki logaritmadaki lineer formlar için alt sınır ile p-adik logaritma için üst sınır birleştirilerek Y.-Z. Hu ve M.-H. Le, 2015'de

$$\max\{x, y, z\} < 155000(\log(\max\{x, y, z\}))^3 \tag{1.2}$$

eşitliğinin doğru olduğunu ispatlamıştır (Hu ve Le, 2015). Oldukça güncel bir sonuç olarak (1.2)'deki sonuç iyileştirilerek Y.-Z. Hu ve M.-H. Le. 2018'de

$$\max\{x, y, z\} < 6500(\log(\max\{x, y, z\}))^3 \tag{1.3}$$

sonucunu elde etmişlerdir. (Hu ve Le, 2018).

(1.1) denkleminin (x, y, z) çözümlerinin sayısı $N(a, b, c)$ ile gösterilsin. İkili S-birim denklemlerinin çözüm sayıları için bir üst sınırının uygun hesaplamasının bir sonucu olarak F. Beukers ve H. P. Schlickewei, 1996'da

$$N(a, b, c) \leq 2^{36}$$

olduğunu ispatlamışlardır. (Beukers ve Schlickewei, 1996).

(1.1) denkleminin (x, y, z) gibi tüm çözümleri x ve y'nin durumlarına göre 4 durumda incelenebilir.

1.Durum: x ve y'nin çift olma durumu,

2.Durum: x in tek y'nin çift olma durumu,

3.Durum: x in çift y'nin tek olma durumu,

4.Durum: x ve y'nin tek olma durumu.

Bu yaklaşım kullanılarak M. H. Le. 1999'da eğer, c tek sayı ve eğer $a < b$ ise her bir durum için $(a, b, c) = (3,10,13)$ durumu hariç, $w(c)$, c nin farklı asal bölenlerinin sayısı olmak üzere her bir durumda (x, y, z) çözümleri için en fazla $2^{w(c)-1}$ çözüm olduğunu ispatlamıştır. (Le, 1999). Bu durum

$$N(a, b, c) \leq 2^{w(c)-1} \leq 2^{w(c)+1}$$

olmasını gerektirir.

Güncel olarak, R. Scott ve R. Styer 2016'da bu sonucu daha da geliştirmiştir. (Scott ve Styer, 2016).

Eğer c tek sayı ise (1.1) denkleminin tüm (x, y, z) çözümleri en fazla iki farklı sınıfta ve her bir sınıfta en fazla bir çözüm, aksi halde en fazla iki çözüm olduğunu göstermişlerdir. Bu yüzden eğer c tek sayı ise $N(a, b, c) \leq 2$ olur.

Daha da güncel olarak (1.3) denklemindeki üst sınırı bazı basit metotlarla birleştirerek Y.Z. Hu ve M.H. Le, 2018'de

$$\max\{a, b, c\} > 5\times 10^{27} \Rightarrow N(a, b, c) \leq 3$$

olduğunu ispatlamışlardır. (Hu ve Le, 2018). Üstelik eğer c çift sayı ise

$$\max\{a, b, c\} > 10^{62} \Rightarrow N(a, b, c) \leq 2$$

olduğunu ispatlamışlardır.

Dikkat edilirse $k \geq 2$ olmak üzere herhangi bir k pozitif tamsayısı için eğer

$$(a, b, c) = (2, 2^k - 1, 2^k + 1)$$

ise (1.1) denkleminin $(x, y, z) = (1,1,1)$ ve $(k + 2,2,2)$ şeklinde iki çözümü vardır.

Böylece R.Scott ve R.Styer' in gözlemlediği gibi $N(a, b, c) = 2$ olacak şekilde sonsuz çoklukta (a, b, c) üçlüsü vardır. (Scott ve Styer 2016) ve (Scott ve Styer 2018). O halde genel olarak $N(a, b, c) \leq 2$'nin $N(a, b, c)$ için en iyi üst sınır olduğu sonucuna ulaşılır.

R.Scott ve R.Styer'in gözlemlediği sonuçları birleştirerek $N(a, b, c) > 2$ özelliğindeki çözümleri bulma problemi aslında sonlu adıma indirgenir. (Scott ve Styer 2016).

Bilgisayar hesaplamaları bilinen iki çözüm hariç $N(a,b,c) \leq 1$ olduğunu gözlemlemeyi öneriyor, yani ispatları henüz yapılamasa da bilgisayar hesaplamaları $N(a,b,c) \leq 1$ olduğuna dair önemli işaretler vermektedir. $N(a,b,c)$ için net üst sınırlar bulma ile ilgili birçok sanı ortaya atılmıştır. Bunlardan ilki Jeśmanowicz Sanısı olup sıradaki bölümün konusunu oluşturmaktadır.

2. JESMANOWICZ SANISI

2500 yıllık Pisagor Teoremi'ne 1955-56'da farklı bir bakış açısı getiren Sierpinski, Pisagor Teoremi'ndeki üslü ifadeleri değişkene çevirmiş $x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $3^x + 4^y = 5^z$ üstel Diophantine denkleminin tek çözümünün (2, 2, 2) olduğunu ispatlamıştır. Buradan hareketle Jeśmanowicz aynı yıllarda Sierpinski'nin sonucunu n = 2, 3, 4 ve 5 olmak üzere $2n$+1, $2n(n$+1) ve $2n(n$+1)+1 gibi 4 farklı Pisagor üçlüsüne genişletmiş ve tabanlar Pisagor Teoremi'ni sağlayan doğal sayılar olmak üzere bu tip üstel Diophantine denklemlerinin tek çözümünün yine (2, 2, 2) olduğu iddiasını ortaya atmıştır. Literatürde yer alan birçok çalışma bu iddiayı doğrular nitelikte olup, tam ispatı henüz yapılmamıştır.

Tanım 2.1. Eğer,

$$A^2 + B^2 = C^2 \tag{2.1}$$

ise bu durumda (A, B, C) pozitif tamsayı üçlüsü *Pisagor Üçlüsü* olarak isimlendirilir. Özel olarak eğer $Obeb(A, B) = 1$ ise (A, B, C) ye *İlkel Pisagor Üçlüsü* adı verilir.

(2.1) gereği her bir (A, B, C) Pisagor Üçlüsü $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A = A_1 n\,, \quad B = B_1 n\,, \quad C = C_1 n \tag{2.2}$$

olarak ifade edilebilir. Burada (A_1, B_1, C_1) bir Pisagor Üçlüsüdür. Dikkat edilmelidir ki her bir (A_1, B_1, C_1) İlkel Pisagor Üçlüsü, C_1tek sayı ve A_1 ile B_1 farklı tek veya çift sayı olma durumuna göre, yani A_1 tek iken B_1 çift, A_1 çift iken B_1 tek olma özelliklerine sahiptir. Böylece genelliği bozmadan A_1'in tek , B_1'in çift olduğu kabul edilebilir. O halde f ve g den biri çift olmak üzere $Obeb(f, g)$=1'dir ve $f > g$ olmak üzere $f, g \in \mathbb{N}$ için

$$A_1 = f^2 - g^2, B_1 = 2fg\,, C_1 = f^2 + g^2 \tag{2.3}$$

olduğu elde edilir. (Mordell, 1969).

Sanı 2.2 (Jeśmanowicz Sanısı). Eğer (A, B, C) bir Pisagor üçlüsü ise

$$A^x + B^y = C^z \tag{2.4}$$

denkleminin tek çözümü (x, y, z) =(2, 2, 2)'dir. (Jeśmanowicz, 1955).

$(2.2), (2.3)$ ve (2.4) eşitlikleri gereği Jeśmanowicz Sanısı aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

Sanı 2.3. $x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere, herhangi bir pozitif n sayısı için

$$\left((f^2 - g^2)n\right)^x + (2fgn)^y = \left((f^2 + g^2)n\right)^z \tag{2.5}$$

eşitliğinin $(x, y, z) = (2,2,2)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır. Burada f ve g,(2.3)'ü sağlayan pozitif tam sayılardır (Scott ve Styer, 2018).

Jeśmanowicz sanısının doğru olduğu birçok özel durum için kanıtlanmıştır. Ancak problemin genel çözümü literatürde hala bir açık problemdir.

2.1 İlkel Durumlar.

Bu kısımda $n = 1$ için Sanı 2.2 göz önüne alınacaktır. Bu sanı üzerindeki eski çalışmaların birçoğu (2.5) denkleminin

$$n = 1, f = g + 1 \tag{2.6}$$

durumu ile ilgilidir.

(2.6) sağlandığı zaman aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması halinde Sanı 2.2 doğrudur:

(i) $g = 1.$ (Sierpinski, 1956).

(ii) $2 \leq g \leq 5.$ (Jeśmanowicz, 1955).

(iii) $g \equiv 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11 \; mod \; 12, g \equiv 2 \; mod \; 5, g \equiv 3 \; mod \; 7, g \equiv 4 \; mod \; 9, g \equiv 5 \; mod \; 11, \; g \equiv 6 \; mod \; 13 \; veya \; g \equiv 7 \; mod \; 15.$ (Ke, 1958).

(iv) $g \equiv 2, 6 \; mod 12.$ (Rao, 1960).

(v) $g \leq 6144.$ (Ke, 1959, 1963, 1964); (Ke ve Sun, 1964).

V. A. Dem'janenko 1965 yılında (2.6)'nın bütün çözümlerini bulmuştur. (Dem'janenko, 1965). Kırk beş yıl sonra Y.-Z. Hu ve P.-Z. Yuan, Dem'janenko'nun sonucunun yeni bir ispatını vermiştir. (Hu ve Yuan, 2010). Üstelik Z. Ke, T. Jozefiak, J.-R. Chen, V. D. Podyspanin, Z.-F. Cao, W.-J. Chen, A. Grytczuk ve A. Grelak $n = 1$ için Sanı 2.1'in daha özel durumlarını başarı ile ele almışlardır. Yukarıdaki ispatların sonuçları oldukça elementerdir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgiler (Ke ve Sun 1980)'nin Bölüm 7.1'de, (Cao, 1989)'da Bölüm 9.2'de ve (Soydan vd. 2017)'de bulunabilir.

Herhangi bir t pozitif tamsayısı için, $P(t)$, t nin farklı asal bölenlerinin çarpımının sayısını göstersin.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar haricinde $n = 1$ için Sanı 2.1 hakkında var olan sonuçlar aşağıdaki gibi 3 durumda incelenebilir.

Durum 1.

(2.5) denkleminin $(x, y, z) \neq (2,2,2)$ için bir çözümüne *istisnai çözüm* denir. Eğer $n = 1$ ise (2.5) denkleminin istisnai çözümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Eğer $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \; mod \; 2$ ise $x \equiv y \equiv z \equiv 2 \; mod \; 4$ dir. (Li, 2003).

(ii) Eğer $y \equiv z \equiv 0 \; mod \; 2$ ise $y \equiv z \equiv 2 \; mod \; 4$ dir. (Miyazaki, 2011).

(iii) Eğer $f \equiv 2 \; mod \; 4, g \equiv 3 \; mod \; 4,$ ve $f + g \equiv 1 \; mod \; 16$ ise $y = 1$ dir. (Deng ve Huang, 2017).

(iv) Eğer $fg \equiv 2mod4,$ ise ise $y = 1$ dir. (Ma ve Chen, 2017).

Durum 2.

Eğer f ve g aşağıdaki değerleri alıyorsa bu $n = 1$ için Sanı 2.1 doğrudur:

(i) $g = 1$ dir. (Lu, 1959).

(ii) $g = 2$ ve f, tek asal kuvvettir. (Liu, 2017), (An, 2015).

(iii) $g = 2$ dir. (Terai, 2014).

(iv) $g = 6$ ve f, tek asal kuvvettir. (Fu, 2016).

(v) $f^2 - 2fg - g^2 = \pm 1$ dir. (Miyazaki, 2013).

Durum 3.

Eğer f ve g aşağıdaki denklik ve bölünebilirlik koşullarını sağlıyorsa $n = 1$ için Sanı 2.2 doğrudur:

(i) $f \equiv 2 \; mod \; 4$ ve $g \in \{3,7,11,15\}$ dir. (Takakuwa, 1996).

(ii) $fg \equiv 2 \; mod \; 4$ ve $f^2 + g^2$, tek asal kuvvettir. (Le, 1996).

(iii) $f \equiv 2 \; mod \; 4,\; g \equiv 3 \; mod 4$ ve $f > 81g$ dir. (Guo ve Le, 1995); (Le, 1996).

(iv) $f \equiv 2 \; mod \; 4$, $g \equiv 3 \; mod \; 4$ özelliğinde bir tek asal sayıdır ve $f^2 - g^2$'nin bölenleri belirli koşulları sağlar. (Takakuwa ve Asaeda, 1993).

(v) $2fg$ ve f^2+g^2 nin bölenleri belirli özelliklerini sağlar. (Deng 1993, 2002), (Wang ve Deng, 1996), (Deng ve Cohen, 2000), (Miyazaki, 2009), (Li , 2011), (An, 2014), (Xing, 2015), (Gou, 2016), (Zheng, 2017).

(vi) $(f,g)=(1{,}6),(2{,}5),(5{,}2),(6{,}1)\ (mod\ 8)$ dir. (Guan, 2011).

(vii) $f^2-g^2\equiv\pm1\ (mod\ 2fg)$ ve $f^2+g^2\equiv 1\ (mod\ 2fg)$'dir. (Miyazaki, 2010).

(viii) $f^2-g^2\equiv\pm1\ (mod\ P(2fg))$ veya $f^2+g^2\equiv\pm1\ (mod\ P(2fg))$'dir. (Miyazaki, Yuan ve Wu, 2014).

(ix) $2fg\equiv 0\ (mod 2^k)$ ve $2fg\equiv\pm2^k\ (mod(f^2-g^2))$'dir.Burada $k\geq 2$ olmak üzere k pozitif bir tamsayıdır. (Fujita ve Miyazaki, 2012).

(x) $2fg,\ d\equiv\pm1\ (mod(f^2-g^2))$ modlu bir bölene sahiptir. (Fujita ve Miyazaki, 2014).

(xi) $fg\equiv 2\ \ (mod\ 4)$ ve $f+g, p\not\equiv 1\ (mod\ 16)$ olmak üzere p ile birlikte bir bölene sahiptir (Han ve Yuan, 2018).

(xii) $g\equiv 2\ (mod\ 4)$ ve $n<600$ dür. (Deng ve Guo, 2017).

(xiii) $f>72, g\equiv 2\ (mod\ 4)$ ve $g/2$ tek bir asal kuvvet veya karedir. (Miyazaki ve Terai, 2015).

(xiv) $fg\equiv 2\ (mod\ 4)$, $f>72g$ ve f,g nin bazı bölenleri için. (Yuan ve Han, 2018)

(xv) $fg\equiv 2\ (mod\ 4), f>30.8g$ dir. (Le, 2018).

(xvi) $f^2+g^2>4\times10^9$ve $obeb\left(f^2+g^2,\left(((f^2-g^2)^l-\curlywedge)/(f^2+g^2\right)\right)=1$

burada l en az bir pozitif tamsayı olmak üzere $(f^2-g^2)^l\equiv\curlywedge\ (mod(f^2+g^2))$, $\curlywedge\in\{1,-1\}$ dir. (Le, 2009).

2.2 İlkel Olmayan Durumlar

Bu bölümde Sanı 2.2'in $n>1$ durumu ile ilgilenilecektir. Bu durum $n=1$ durumuna göre biraz daha zor bir durum olup, 1998 yılına kadar çalışılmamıştır. 1998'de M.-J. Deng ve G.L. Cohen $n>1$, f^2-g^2 bir tek asalın kuvveti veya $n\equiv 0 modP(2fg)$ ye veya $2fg\not\equiv 0 modP(n)$ ise (2.5) denkleminin $(x,y,z)=(2{,}2{,}2)$ şeklinde bir tek çözümünün olduğunu ispatlamışlardır. (Deng ve Cohen, 1998). Bir yıl sonra M.H.Le, 1999 yılında (2.1) denkleminin $n>1$ durumu için daha genel bir sonuç vermiştir. (Le, 1999). Öyle ki $n > 1$ ise (2.5) eşitliğinin her bir (x, y, z) istisnai çözümünün aşağıdaki koşullardan birini sağladığını ispatlamıştır.

(i) $max\{x, y\} > min\{x, y\} > z$, $f^2 + g^2 \equiv 0 \ modP(n)$ ve $P(n) < P(f^2 + g^2)$

(ii) $x > z > y$ ve $2fg \equiv 0 \ mod \ P(n)$ dir.

(iii) $y > z > x$ ve $f^2 - g^2 \equiv 0 \ mod \ P(n)$ dir.

16 yıl sonra yani 2015 de H. Yang ve R.-Q. Fu, Le'nin sonucunu basitleştirerek (i) koşulunun kaldırılabileceğini ispatlamıştır (Yang ve Fu, 2015). $n > 1$ durumu için (2.5) denklemini çözmede yukarıdaki iki sonuç farklı şekillerde kullanılmıştır.

Birçok çalışmada (2.5) denkleminin $k \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ olmak üzere

$$f = 2^k, \quad g = 1 \tag{2.7}$$

durumu araştırılmıştır.

Aşağıda verilen çalışmalarda (2.7)'nin sağlandığı takdirde aşağıdaki k değerleri için Sanı 2.1'in doğru olduğu ispatlanmıştır.

(i) $k = 1$ dir. (Deng ve Cohen, 1998).

(ii) $k = 2$ dir. (Yang ve Tang, 2012).

(iii) $k = 3$ dür.(Gou ve Zhang, 2015).

(iv) $k \in \{1,2,4,8\}$ dir. (Tang ve Yang, 2013).

(v) $k \in \{2,3,4,5\}$ dir. (Deng, 2014).

(vi) $k = 2^s$ dir. Burada s negatif olmayan bir tamsayıdır (Tang ve Weng, 2014).

2014'te X.-W. Zhang ve W.-P. Zhang ve 2015'de T. Miyazaki birbirinden bağımsız olarak (2.7) durumunu tamamen çözmüşlerdir. (Zhang ve Zhang, 2014) ve (Miyazaki, 2015). Yani eğer $n, f \ ve \ g$ (2.7)'yi sağlarsa, Sanı 2.2'in doğru olduğunu ispatlamışlardır.

Sanı 2.2'nin $n > 1$ durumu aşağıdaki özel durumlar içinde doğrulanmıştır.

(i) $(f, g) = (6,1)$ dir. (Yang ve Weng, 2012).

(ii) $(f, g) = (10,1)$ dir. (Soydan vd., 2017).

(iii) $(f, g) = (12,1)$ dir. (Liu, 2017).

(iv) $(f, g) = (14,1)$ dir. (Ling ve Weng, 2013).

(v) $g = 1, n \equiv 0 \, modP(f^2 - 1)$ veya $f = 2p^k$ ve $4p^{2k} - 1 \not\equiv 0 \, modP(n)$, burada p, $p \equiv 3mod4$ ile tek bir asal sayı ve k, pozitif tamsayıdır.(Ma ve Wu 2015), (Sun ve Cheng, 2015).

(vi) $(f, g) = (5,2)$ dir. (Cheng, Sun ve Du, 2013).

(vii) $(f, g) = (7,2)$ dir. (Sun ve Cheng, 2013), (Tang, 2014).

(viii) $(f, g) = (7,2)$ veya $(49,2)$ dir. (Fu ve Deng, 2015).

(ix) $(f, g) = (9,2)$ dir. (Sun ve Cheng, 2014).

(x) $(f, g) = (11,2)$ dir. (Lu, Gao ve Hao, 2014).

(xi) Eğer f tek bir asal ve $g = 2$ ise, o zaman (2.5) denkleminin $x > z > y$ özelliğinde hiçbir (x, y, z) çözümü yoktur.(Yang, Ren ve Fu 2017), (Chen, 2018).

(xii) $(f, g) = (8,3)$ dir. (Li, 2018).

(xiii) $(f, g) = (9,4)$ dir. (Ma, 2015), (Ma ve Wu, 2014).

(xiv) $(f, g) = (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)$ dir. (Deng ve Cohen, 1998).

(xv) $(f, g) = (7,6), (8,7)$ dir. (Deng, 2007).

(xvi) $(f, g) = (11,10)$ dir.(Che, 2011).

(xvii) $(f, g) = (18,17)$ dir. (Sun, 2015).

(xviii) $(f, g) = (20,19)$ dir. (Wang, 2011).

(xix) $(f, g) = (26,25)$ dir. (Lin, 2017).

(xx) $(f, g) = (29,28)$ dir. (Ma, 2013).

(xxi) $(f, g) = (46,45)$ dir. (Lu vd., 2015).

(xxii) $(f, g) = (2^k, 2^k - 1)$ ve $2^k - 1$ tek bir asal, burada k pozitif bir tamsayıdır. (Yang ve Fu, 2015).

(xxiii) $(f, g) = (2^k + 1, 2^k)$ ve $2^k + 1$ tek bir asal, burada k pozitif bir tamsayıdır. (Yang ve Fu, 2017).

(xxiv) Eğer $f = g + 1$ ve $c > 500000$ ise dolayısıyla (2.5) denklemi için $y > z > x$ özelliğinde hiçbir (x, y, z) çözümü yoktur. (Wang, Wang ve Yingzhao, 2018).

2.3 Jesmanowicz Sanısının Değişik Bir Versiyonu

B_1 bir çift sayı olmak üzere (A_1, B_1, C_1) bir ilkel Pisagor üçlüsü olsun. Bu takdirde $A_1, B_1, ve\ C_1$ (2.3)'deki gibi ifade edilebilir. 2011 yılında T. Miyazaki aşağıdaki sanıyı vermiştir.

Sanı 2.3.1. Eğer $f = g + 1$ ise bu takdirde $x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(f^2 + g^2)^x + (2fg)^y = (f^2 - g^2)^z \tag{2.8}$$

Denkleminin $(x, y, z) = (1,1,2)$ şeklinde bir tek çözümü vardır. Bundan başka (2.8) in hiçbir (x, y, z) çözümü yoktur (Miyazaki, 2011).

Bu da çözülmemiş bir problemdir. Şimdiye kadar aşağıdaki durumlarda sanının doğru olduğu gösterilmiştir.

(i) $f^2 + g^2 \equiv 1 \; mod \; 2fg$ dir. (Miyazaki, 2011).

(ii) $f^2 + g^2 \equiv 1 \; mod \; d$ burada d, $2fg$ nin en büyük asal bölenidir. (Rabai, 2017).

(iii) $(f, g) \equiv (0,1), (0,5), (1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (4,5), (5,6), (6,7) \; veya \; (7,0) \; mod \; 8$ dir. (Liu, 2013).

(iv) $(f, g) = (2^k, 1)$ dir. Burada k pozitif tam sayıdır. (Feng, 2015).

(v) $(f, g) = (2^k, p)$ dir. Burada k pozitif tam sayı ve p asal sayıdır. (Wang ve Gou, 2014).

3. JESMANOWICZ SANISININ ÖZEL BİR DURUMUNUN TAM BİR ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde

$$(20k)^x + (99k)^y = (101k)^z \tag{3.1}$$

üstel Diophantine denklemini çözmek için basit bir metodun var olduğu görülecektir.

$(u, v, w) = (4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$ olmak üzere,

$$(k.U)^x + (k.V)^y = (k.W)^z \tag{3.2}$$

eşitliğini $k > 1$, $U^2 + V^2 = W^2$ özelliğindeki çözümlerini aramak birçok bilim insanının amacı olmuştur. Dikkat edilirse (3.2) denklemi Jeśmanowicz Sanısı'nın farklı bir versiyonudur.

Bu bölümde $(u, v, w) = (20,99,101)$ durumu ele alınacaktır. Dikkat edilirse bu soru aslında $(20k)^x + (99k)^y = (101k)^z$ Diophantine denkleminin tamsayı çözümlerini aramak demektir. Bu denklemin elementer metotla çözülebilmesi nedeniyle bu çalışmada yer almaktadır. (Soydan vd., 2017) kaynağı temel kaynak olarak kullanılmıştır ve orijinal sonuç bu makalede yer almaktadır.

İlk olarak (3.2) denklemi için $(u, v, w) = (4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$ olmak üzere $2 \leq n \leq 4$ ve $n = 8$ durumu çalışılmıştır. (Deng, 2014), (Tang ve Weng, 2014), (Yang ve Tang, 2012) ve (Yang ve Weng, 2012).

$n = 1$ durumu ise 1959 da Lu tarafından ispatlanmıştır. (Lu, 1959).

Bu bölümde ise $n = 5$ durumunu ele alınacaktır (Soydan vd., 2017). Bu durumda yukarıdaki (3.1) eşitliği elde edilir. Bu Diophantine denkleminin çözümü aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1. (Soydan vd., 2017) k herhangi bir pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde (3.1) Diophantine denkleminin $(x, y, z) = (2,2,2)$ şeklinde bir tek çözümü vardır

Uyarı 3.2. (3.1) denkleminde $(x, y, z) = (2,2,2)$ yazılırsa,

$$(20k)^2 + (99k)^2 = (101k)^2$$

olduğundan bu değerin (3.1) denkleminin bir çözümü olduğu açıktır. Burada ispatlanması gereken bu çözümden başka (3.1) denkleminin tam sayı çözümünün olmadığıdır.

Dikkat edilirse (3.1) denkleminin $(x, y, z) \neq (2,2,2)$ şeklinde bir çözümü varsa bu takdirde $z < max\{x, y\}$ özelliğini sağlamak zorundadır.

O halde ispat $x < y$ ve $x > y$ durumları için yapılmalıdır.

3.1. Yardımcı Sonuçlar:

Bu bölümde Teorem 3.1'in ispatında kullanılacak iki yardımcı teorem verilecektir.

Lemma 3.1.1.

$$(4n^2 - 1)^x + (4n)^y = (4n^2 + 1)^z$$

Diophantine denkleminin $(x, y, z) = (2,2,2)$ şeklinde bir tek çözümü vardır. (Lu, 1959).

Lemma 3.1.2.

Eğer $z \geq max\{x, y\}$ ise u, v ve w aralarında asal olması gerekmeyen

$$u^x + v^y = w^z$$

diophantine denkleminin, $u^2 + v^2 = w^2$ diophantine denklemine $(x, y, z) = (2,2,2)$ dışında başka bir tamsayı çözümü yoktur. (Deng ve Cohen, 1998).

3.2 Teorem 3.1'in İspatı.

Lemma 3.1.1 gereği

$$20^x + 99^y = 101^z$$

üstel Diophantine denkleminin tek çözümü $(x, y, z) = (2,2,2)$ dir.

Tersine kabul edilsin ki (3.1) denkleminin $(x, y, z) \neq (2,2,2)$ özelliğinde en az bir farklı çözümü olsun. Lemma 3.1.2 gereği $n \geq 2$ ve $z < max\{x, y\}$ olması gerektiği sonucuna varılır. Üstelik M.H. Le'nin, 1999 yılındaki sonuçları gereği $x = y$, $x = z$ ve $y = z$ durumları ile ilgilenilecektir. (Le, 1999).

1.Durum.

$x < y$ olsun. Dikkat edilirse $z < max\{x, y\}$ koşulu gereği iki alt durum ortaya çıkacaktır.

Alt Durum 1.1.

$z < x < y$ olsun. Bu durumda,

$$k^{x-z}(20^x + 99^y k^{y-x}) = 101^z \tag{3.3}$$

dir.

Eğer $obeb(k, 101) = 1$ ise bu durumda (3.3) denklemi $k \geq 2$ için $x = z$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir.

Eğer $obeb(k, 101) = 101$ ise bu takdirde $s \geq 1$ ve $101 \nmid n_1$ olmak üzere $k = 101^s n_1$ yazılabilir. Bu ifade (3.3)'de yerine yazılırsa ,

$$101^{s(x-z)} {n_1}^{x-z} \left(20^x + 99^y 101^{s(y-x)} {n_1}^{y-x}\right) = 101^z \tag{3.4}$$

elde edilir. Bu durumda ${n_1}^{x-z} \mid 101^z$ sonucuna ulaşılır. O halde $n_1 = 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (3.4) denklemi

$$101^{s(x-z)}\left(20^x + 99^y 101^{s(y-x)}\right) = 101^z$$

haline dönüşür.

Bu durumda hipotez gereği

$$s(x - z) < z$$

ve

$$20^x + 99^y 101^{s(y-x)} = 101^{z-s(x-z)}$$

elde edilir.

O halde $101 \mid 20^x$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Alt Durum 1.2.

$x < z < y$ olsun. Bu takdirde,

$$20^x + 99^y k^{y-x} = 101^z k^{z-x} \tag{3.5}$$

denklemi elde edilir.

Eğer $obeb(k, 20) = 1$ ise, (3.5) eşitliği $k > 2$ için $x = z < y$ olmasını gerektirir. Bu ise $x < z$ olması ile çelişkilidir.

O halde $obeb(k, 20) > 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $r + s \geq 1$ ve $obeb(10, n_1) = 1$ olmak üzere $k = 2^r 5^s n_1$ yazabiliriz.
Böylece (3.5) denkleminden,

$$20^x = 2^{r(z-x)} 5^{s(z-x)} n_1^{z-x} \left(101^z - 99^y 2^{r(y-z)} 5^{s(y-z)} n_1^{y-z}\right) \tag{3.6}$$

elde edilir.

(i) Eğer $r \geq 1$ ve $s = 0$ ise $obeb(10, n_1) = 1$ olmak üzere $k = 2^r n_1$ yazılır. Böylece (3.6) denklemi,

$$20^x = 2^{r(z-x)} n_1^{z-x} \left(101^z - 99^y 2^{r(y-z)} n_1^{y-z}\right)$$

şeklini alır.

Buradan $r(z - x) = 2x$ ve $5^x = n_1^{z-x}\left(101^z - 99^y 2^{r(y-z)} n_1^{y-z}\right)$ elde edilir. $obeb(n_1, 10) = 1$ olduğundan bu durumda $n_1 = 1$ ve böylece

$$101^z - 5^x = 99^y 2^{r(y-z)} \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir.

O halde mod 33 göz önüne alındığında $2^z \equiv 5^x (mod 33)$ kongreasının $(z, x) = (8,2), (18,2), (28,2)$ gibi üç çözümü vardır. $x = 2$ ve $z_1 > 0$ olmak üzere $z = 2z_1$ yazılırsa (3.7) gereği,

$$(101^{z_1} - 5)(101^{z_1} + 5) = 99^y 2^{r(y-z)}$$

elde edilir.

$obeb(101^{z_1} - 5, 101^{z_1} + 5) = 2$ olduğunda bu takdirde,

$$11^y \mid (101^{z_1} + 5) \tag{3.8}$$

ve

$$11^y \mid (101^{z_1} - 5) \tag{3.9}$$

elde edilir.

Ancak,

$$11^y > 11^z > (101 + 5)^{z_1} > 101^{z_1} + 5 > 101^{z_1} - 5$$

elde edilir. Bu da (3.8) ve (3.9) ile çelişir.

(ii) Eğer $r = 0$ ve $s \geq 1$ ise $obeb(10, n_1) = 1$ olmak üzere $k = 5^s n_1$ yazılır. (3.6) denklemi kullanılarak

$$20^x = 5^{s(z-x)} n_1^{z-x} \left(101^z - 99^y 5^{s(y-z)} n_1^{y-z}\right)$$

elde edilir. Burada $s(z - x) = x$ dir. Dolayısıyla,

$$2^{2x} = n_1^{z-x} \left(101^z - 99^y 5^{s(y-z)} n_1^{y-z}\right)$$

elde edilir.

$obeb(n_1, 10) = 1$ olduğundan $n_1 = 1$ ve

$$101^z - 2^{2x} = 99^y 5^{s(y-z)} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem modulo11 için $2^z \equiv 4^x (mod 11)$ i verir.Yani $z \equiv 0 (mod 2)$ dir.

$z_1 > 0$ ve (3.9) denkleminden $z = 2z_1$ yazılır. Dolayısıyla

$$(101^{z_1} - 2^x)(101^{z_1} + 2^x) = 99^y 5^{s(y-z)}$$

olur.

$obeb(101^{z_1} - 2^x, 101^{z_1} + 2^x) = 1$ olduğundan bu durumda

$$11^y \mid 101^{z_1} - 2^x \tag{3.11}$$

ve

$$11^y \mid 101^{z_1} + 2^x \tag{3.12}$$

elde edilir.

Ancak,

$$11^y > 11^z > (101+4)^{z_1} > 101^{z_1} + 2^{2z_1} > 101^{z_1} + 2^x > 101^{z_1} - 2^x \tag{3.13}$$

yazılır. Bu da (3.11) ve (3.12) ile çelişir.

(iii) Eğer $r \geq 1$, $s \geq 1$ olsun. O halde $r(z-x) = 2x$, $x = s(z-x)$

elde edilir. (3.6) eşitliğinden ,

$$n_1^{z-x}\left(101^z - 99^y 2^{r(y-z)} 5^{s(y-x)} n_1^{y-z}\right) = 1$$

denklemi elde edilir.

Eğer $x = z$ ise $x = 0$ olduğu açıktır. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $x < z$ ve $n_1 = 1$ olmak zorundadır.

Böylece,

$$99^y 2^{r(y-z)} 5^{s(y-x)} = 101^z - 1 \tag{3.14}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem mod 3'te incelenirse $2^z \equiv 1(mod\ 3)$ ve $z \equiv 0(mod\ 2)$ dir. Yani z nin çift olduğu elde edilir. (3.14) denklemi mod 17 de çalışılırsa,

$$101^z - 1 \equiv (-1)^z - 1 \equiv 0(mod 17)$$

dir ve böylece $17 \mid 101^z - 1$ olur. Bu ise bir çelişkidir. 1.Durum'un ispatı tamamlanmış olur.

2.Durum

$x > y$ olsun. Yine $z < max\{x, y\}$ koşulu gereği iki alt durum ortaya çıkacaktır.

Alt Durum 2.1.

$z < y < x$ olsun. Bu durumda

$$k^{y-z}(20^x k^{x-y} + 99^y) = 101^z \tag{3.15}$$

dir.

Eğer $obeb(k, 101) = 1$ ise $k \geq 2$ ve (3.15) kullanılarak $y = z$ elde edilir. Bu ise $z < y$ olması ile çelişir.

Eğer $obeb(k, 101) = 101$ ise $r \geq 1$ ve $101 \nmid n_1$ olmak üzere $k = 101^r n_1$'i koyulursa (3.15) denklemi,

$$n_1^{y-z} 101^{r(y-z)} \left(20^x n_1^{x-y} 101^{r(x-y)} + 99^y\right) = 101^z$$

olur. Çünkü $r(y-z) = z$ ve $n_1^{y-z}\left(20^x n_1^{x-y} 101^{r(x-y)} + 99^y\right) = 1$ olduğundan $obeb(n_1, 101) = 1$ ve $obeb\left(20^x n_1^{x-y} 101^{r(x-y)} + 99^y, 101\right) = 1$ olduğunu görürüz. Bu da imkansızdır.

Alt Durum 2.2

$y < z < x$ olsun. Daha sonra (3.1) denklemi

$$99^y = k^{z-y}(101^z - 20^x k^{x-z}) \tag{3.16}$$

denklemine dönüşür.

Eğer $obeb(k, 99) = 1$ ise, bu durumda (3.15) denkleminden $k > 2$ den dolayı $y = z$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Eğer $obeb(k, 99) > 1$ ise $r + q \geq 1$ ve $obeb(99, n_1) = 1$ olmak üzere $k = 3^r 11^q n_1$ yazarız. (3.16) denkleminden,

$$99^y = 3^{r(z-y)} 11^{q(z-y)} n_1^{z-y} \left(101^z - 20^x 3^{r(x-z)} 11^{q(x-z)} n_1^{x-z}\right) \tag{3.17}$$

elde edilir.

Tüm olasılıklar çalışılacaktır.

(i) Eğer $r \geq 1$ ve $q = 0$ ise buradan $k = 3^r n_1$ ve (3.16) denkleminden

$$99^y = 3^{r(z-y)} n_1^{z-y} \left(101^z - 20^x 3^{r(x-z)} n_1^{x-z}\right)$$

elde edilir.

Daha sonra $r(z-y)=2y$ ve $obeb(n_1,99)=1$ olmak üzere $n_1=1$ olmasını gerektirir.

$$20^x 3^{2y} = 101^z - 11^y \qquad (3.18)$$

denklemi elde edilir.

Mod 4 dikkate alındığında $y=2y_1,\ y_1>0$ olmak üzere $(-1)^y=1(mod4)$ olur yani y çifttir.

Şimdi mod 6 ile $(-1)^z=(-1)^{2y_1,}(mod6)$ elde edilir. Yani z çift olmalıdır. (3.18) denkleminde $z=2z_1$ ve $z_1>0$ yazılırsa

$$20^x 3^{r(x-2z_1)} = (101^{z_1}-11^{y_1})(101^{z_1}+11^{y_1}) \qquad (3.19)$$

elde edilir. Buradan $101^{z_1}-11^{y_1}\equiv 0(mod5)$ olmak üzere

$obeb(101^{z_1}-11^{y_1},101^{z_1}+11^{y_1})=2$ sonucuna varıldı. Dolayısıyla iki seçenek vardır:

$$5^x 2^{2x-1} \mid 101^{z_1}-11^{y_1} \quad \text{ve} \quad 2 \mid 101^{z_1}+11^{y_1} \qquad (3.20)$$

ve

$$5^x 2 \mid 101^{z_1}-11^{y_1} \quad \text{ve} \quad 2^{2x-1} \mid 101^{z_1}+11^{y_1} \qquad (3.21)$$

olur.

Ancak,

$2^{2x-1}.5^x > 2^{2z-1}.5^z > 2^{3z_1}5^{2z_1} > (101+11)^{z_1} > 101^{z_1}+11^{y_1} > 101^{z_1}-11^{y_1}$

eşitsizliği (3.20) denklemi ile çelişir. Bu nedenle

$101^{z_1}-11^{y_1} \equiv 1-(-1)^{y_1} \equiv 2(mod4)$

olduğunu görmek için (3.21) yi kullanılır. Yani y_1 tektir.

Eğer $3^{r(x-z)} \mid 101^{z_1}-11^{y_1}$ ise burada (3.9) gereği,

$$101^{z_1}-11^{y_1} = 2.5^x 3^{r(x-z)}, \qquad 101^{z_1}+11^{y_1} = 2^{2x-1}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$11^{y_1} = 2^{2x-2} - 5^x 3^{r(x-z)}$$

olur.

Mod 3 dikkate alındığında $(-1)^{y_1} \equiv 1(mod3)$ e sahip oluruz. Bu $y_1$in çift olduğu anlamına gelir. Bu ise $y_1$in tek oluşu ile çelişir.

Yani $3^{r(x-z)} \mid 101^{z_1} + 11^{y_1}$ dir. (3.19) ve (3.21)'den

$$101^{z_1} - 11^{y_1} = 2.5^x, \qquad 101^{z_1} + 11^{y_1} = 2^{2x-1}3^{r(x-z)}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$101^{z_1} = 5^x + 4^{x-1}3^{r(x-z)} \tag{3.22}$$

ve

$$11^{y_1} = 4^{x-1}3^{r(x-z)} - 5^x \tag{3.23}$$

denklemleri elde edilir.

Eğer (3.22) denklemi için mod 12 göz önüne alırsak buradan,

$$5^{z_1} \equiv 5^x(mod12), \qquad 5^{z_1-x} \equiv 1(mod12)$$

olur. O zaman iki olasılık vardır.

A) z_1 ve x Her İkisi de Çift :

(3.21) ve (3.22) den,

$$101^{z_1} - 11^{y_1} = 2.5^x \tag{3.24}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem mod 11 de incelenirse;

$$2^{z_1-1} \equiv 5^x(mod11)$$

elde edilir. 5^x, $1, 3, 4, 5, 9$ mod 11 değerlerini aldığında 2^{z_1-1} de modulo11 değerlerine sahip olmalıdır. Her durumda z_1 asal olmalıdır. Bu ise z_1 in çift olması ile çelişir.

B) z_1 **ve** x **Her İkisi de Tek:**

(3.24) denklemi mod 12'de incelenirse $(-1)^{y_1} \equiv 7 \ (mod\ 12)$ olarak bir çelişki elde edilir.

(ii) Eğer $r = 0$ ve $q \geq 1$ ise buradan $k = 11^q n_1$ dir. Bu nedenle(3.16) denkleminden,

$$99^y = 11^{q(z-y)} {n_1}^{z-y} \left(101^z - 20^x 11^{q(x-z)} {n_1}^{x-z}\right)$$

elde edilir.

Bu durumda $q(z-y) = y$ dir. Buradan $obeb(n_1, 99) = 1$ alınarak $k = 1$ elde ederiz ve

$$20^x 11^{q(x-z)} = 101^z - 3^{2y} \qquad (3.25)$$

denklemini elde ederiz.

(3.25) denklemi mod 11'de incelenirse $2^x \equiv (-2)^y (mod 11)$ bulunur. Buradan y ve z nin ikisinin de çift olduğu görülür. $z = 2z_1$ ve $z_1 > 0$ yerine koyulsun. (3.25) denklemi kullanılarak

$$20^x 11^{q(x-z)} = (101^{z_1} - 3^y)(101^{z_1} + 3^y) \qquad (3.26)$$

denklemi elde edilir.

$obeb(101^{z_1} - 3^y, 101^{z_1} + 3^y) = 2$ olarak $y \equiv 0 (mod 4)$ olduğu $101^{z_1} - 3^y \equiv 0 (mod 5)$ sonucuna vardık. $y = 4y_1$ i yerine koyulsun.

Bu nedenle iki ihtimal vardır:

$$5^x 2^{2x-1} \mid (101^{z_1} - 3^y) \quad \text{ve} \quad 2 \mid (101^{z_1} + 3^y) \qquad (3.27)$$

ve

$$5^x 2 \mid (101^{z_1} - 3^y) \quad \text{ve} \quad 2^{2x-1} \mid (101^{z_1} + 3^y) \qquad (3.28)$$

olur.

Ancak,

$2^{2x-1} 5^x > 2^{2z-1} 5^z > 2^{3z_1} 5^{2z_1} > (101 + 9)^{z_1} > 101^{z_1} + 9^{z_1} = 101^{z_1} + 3^{2z_1} > 101^{z_1} + 3^y > 101^{z_1} - 3^y$

eşitsizliği (3.27) denklemi ile çelişmektedir.

Şimdi eğer $11^{q(x-z)} \mid 101^{z_1} + 3^y$ ise ozaman (3.26) ve (3.28) denklemlerinden

$$101^{z_1} + 3^y = 2^{2x-1} 11^{q(x-z)}$$

ve

$$101^{z_1} - 3^y = 2.5^x$$

denklemlerini alınmamaktadır.

Yukarıdaki denklemlerin farkını alarak,

$$3^y = 2^{2x-2} 11^{q(x-z)} - 5^x$$

denklemi yazılır. Mod 4 dikkate alınırsa $3^y \equiv -1(mod4)$ elde edilir. Bu yüzden y tektir. Bu y nin çift oluşu ile çelişir.

Bu nedenle (3.26) denkleminden $11^{q(x-z)} \mid 101^{z_1} - 3^y$ olur.

Buradan,

$$101^{z_1} - 3^y = 2.5^x 11^{q(x-2z_1)}$$

ve

$$101^{z_1} + 3^y = 2^{2x-1}$$

denklemleri elde edilir.

Dolayısıyla,

$$101^{z_1} = 2^{2x-2} + 5^x 11^{q(x-2z_1)} \tag{3.29}$$

ve

$$3^y = 2^{2x-2} + 5^x 11^{q(x-2z_1)} \tag{3.30}$$

olur.

(3.29) denklemini kullanarak $2^{z_1} \equiv 2^{2x-2} (mod\ 11)$ elde edilir. Bu bize z_1 in çift olduğunu gösterir.

(3.30) denkleminden, $(-1)^{4y_1} \equiv -(-1)^{q(x-2z_1)} (mod 4)$ yazarız. Bu nedenle q ve x tektir.

Son olarak (3.29) denklemi mod 4 için incelenirse,

$$1 \equiv (-1)^{qr} \equiv -1 (mod 4)$$

elde edilir. Burada q ve x tektir. Bu ise bir çelişkidir.

(iii) Eğer $r \geq 1$ ve $q \geq 1$ ise bu durumda (3.17) denkleminden

$$r(z-y) = 2q(z-y)$$

eşitliğini alarak $r = 2q$ eşitliği elde edilir. Bu nedenle

$$1 = {n_1}^{z-y} \left(101^z - 20^x 3^{r(x-z)} 11^{q(x-z)} {n_1}^{x-z}\right)$$

olur. $y < z$ olduğundan $n_1 = 1$ dir. Ve

$$1 = 101^z - 20^x 3^{r(x-z)} 11^{q(x-z)}$$

dir.

Yukarıdaki denklem mod 3'e göre incelendiğinde, z'nin çift olduğu, $1 \equiv 2^z (mod 3)$ den görülür.

Şimdi $101^z - 1 \equiv (-1)^z - 1 \equiv 0 (mod 17)$ dir. Dolayısıyla $17 \mid 101^z - 1$ dir. Ancak $17 \nmid 20^x 3^{r(x-z)} 11^{q(x-z)}$ dir. Bu ise bir çelişkidir ve böylece Teorem 3.1'in ispatı tamamlanır.

KAYNAKLAR

An, X. F. (2015). *On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Chongqing Normal Üniversitesi, Çin.

An, Y. (2014). *On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Bennett, M., & Billerey, N. (2017). Sums of two *S*-units via Frey-Hellegouarch curves. *Mathematics of Computation*, *86* (305), 1375-1401.

Beukers, F., & Schlickewei, H. P. (1996). The equation x+ y = 1 in finitely generated groups. *Acta Arithmetica*, *78*(2), 189-199.

Cao, Z. F. (1989). Introduction to diophantine equations. Harbin Inst. Tech. Press, Harbin.

Che, H. (2011). *On the diophantine equation (21n)x + (220 n)y = (221 n)z*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Chen, F. J. (2018). On the diophantine equation (na)x +(nb)y =(nc)z. Adv. Math. China, 47(3),388–392.

Cheng, Z., Sun, C. F., & Du, X. N. (2013). On the diophantine equation (20n) x+(21n) y=(29n) z. *Math. Appl*, *26*(1), 129-133.

Dem'janenko, V. A. (1965). On Jeśmanowicz' problem for Pythagorean numbers. Izv. Vysˇs Uˇcebn. Zayed. Mat., 48(1),52–56.

Deng, M. J. (1993). On Jeśmanowicz' conjecture. J. Harbin Inst. Tech., 25(2),14–17.

Deng, M. J. (2007). On the Diophantine equation (15n)x+(112n)y=(113n)^z. *J. Nat. Sci. Heilongjiang Univ*, *24*(5), 617-620.

Deng, M. J. (2014). A note on the Diophantine Equation (na)^x + (nb)^y = (nc)^z *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *89*(2), 316-321.

Deng, M. J., & Guo, J. (2017). A note on Jeśmanowicz'conjecture concerning primitive Pythagorean triples. II. *Acta Mathematica Hungarica*, *153*(2), 436-448.

Deng, M. J., & Huang, D. M. (2017). A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *95*(1), 5-13.

Deng, M., & Cohen, G. (2000). A note on a conjecture of Jeśmanowicz. In *Colloquium Mathematicae* (Vol. 86, No. 1, pp. 25-30).

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Deng, M., & Cohen, G. L. (1998). On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *57*(3), 515-524.

Feng, Q. (2015). The shuffle variant of Jeśmanowicz' conjecture on primitive Pythagorean numbers. Math. Pract. Theory, 45(16), 312–315.

Fu, C. Y. (2016). On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. Master's thesis, Haikou: Hainan Univ.

Fu, C. Y., & Deng, M. J. (2015). On the diophantine equation (n(72r −4))x

+(n(4·7r))y =(n(72r +4))z. J. Nat. Sci. Heilongjiang Univ., 32(5),596–599.

Fujita, Y., & Miyazaki, T. (2012). Jeśmanowicz' Conjecture with Congruence Relations. II. *Canadian Mathematical Bulletin*, *57*(3), 495-505.

Fujita, Y., & Miyazaki, T. (2014). Jeśmanowicz' Conjecture with Congruence Relations. Colloq. Math., 128(2), 211–222.

Gel'fond, A. O. (1940). Sur la divisibilité de la différence des puissance de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier. Mat. Sb. (49), 7–25.

Gou, S. S. (2016). *On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers.* Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Gou, S. S., & Zhang, H. (2015). On the diophantine equation (16n)x +(63n)y = (65n)z. J. Southwest China Normal Univ., Nat. Sci., 40(4),4–7.

Guan, W. J. (2011). The Jeśmanowicz conjecture on Pythagorean numbers. Basic Sci. J. Text. Univ., 24(4),557–559.

Guo, Y., & Le, M. (1995). A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi*, *44*(2), 225-228.

Hirata-Kohno, N. (2006). *S*-Unit Equations and Integer Solutions to Exponential Diophantine Equations (Analytic Number Theory and Surrounding Areas).

Hu, Y. Z., & Yuan, P. Z. (2010). Jesmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, *53*, 297-300.

Hu, Y., & Le, M. (2015). A note on ternary purely exponential diophantine equations. *Acta Arithmetica*, *2*(171), 173-182.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Hu, Y., & Le, M. (2018). An upper bound for the number of solutions of ternary purely exponential diophantine equations. *Journal of Number Theory*, *183*, 62-73.

Jesmanowicz, L. (1955). Several remarks on Pythagorean numbers. *Wiadom. Mat*, *1*(2), 196-202.

Ke, Z. (1958). On Jesmanowicz' conjecture. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 4(2),81–90.

Ke, Z. (1958). On Pythagorean numbers. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 4(1),73–80.

Ke, Z. (1959). On the diophantine equation (a2 −b2)x + (2ab)y =(a2 + b2)z. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 5(3),25–34.

Ke, Z. (1963). On the Pythagorean numbers (2n+1), 2n(n+1), 2n(n+1)+1 I. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 9(2),9–14.

Ke, Z. (1964). On the Pythagorean numbers (2n + 1), 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1 III. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 10(4),11–26.

Ke, Z., & Sun, Q. (1964). On the Pythagorean numbers (2n + 1), 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1 II. *J. Sichuan Univ., Nat. Sci.*, 10(3),1–12.

Ke, Z., & Sun, Q. (1980). Diophantine equations. Shanghai Edu. Publ. House, Shanghai.

Le, M. (1996). A note on Jeśmanowicz' conjecture. In *Colloquium Mathematicae* (Vol. 69, No. 1, pp. 47-51).

Le, M. (1999). A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *59*(3), 477-480.

Le, M. (2009). A note on Jesmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triplets. *Acta Arithmetica*, *138*, 137-144.

Le, M. H. (1999). An upper bound for the number of solutions of the exponential diophantine equation ax + by = cz. *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 75A(6),90–91.

Le, M. H. & Soydan, G. (2018). An application of Baker's method to Jesmanowicz' conjecture on primitive Pythagorean triples, *Periodica Mathematica Hungarica*, Yayına kabul edildi.

Li, S. Z. (2011). *On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Li, Y. M. (2018). On the diophantine equation (48n)x + (55n)y = (73 n)z. *J. Chongqing Tech. Busin. Univ., Nat. Ser.*, 2,27–30.

Li, Z. (2003). On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. *J. Nat. Sci. Hailongjiang Univ.*, 20(3), 54–59.

Lin, C. N. (2017). *On the diophantine equation (51n)x + (1300n)y = (1301) z.* Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Ling, D. R., & Weng, J. X. (2013). On the diophantine equation (195n)x + (28n)y = (197 n)z. *Pure Appl. Math.*, 29(4),342–349.

Liu, B. L. (2013). A new conjecture on primitive Pythagorean numbers. *Math.*

Pract. Theory, 43(9), 253–255.

Liu, B. L. (2017). On the diophantine equation (143n)x+(24n)y = (145n)z. *Math. Pract. Theory*, 47(20),178– 182.

Lu, W. T. (1959). On the Pythagorean numbers 4n2− 1, 4n and 4n2+ 1. *Acta Sci. Natur. Univ. Szechuan*, *2*, 39-42.

Liu, H. L. (2017). On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Lu, W. T. (1959). On the Pythagorean numbers 4n2− 1, 4n and 4n2+ 1. *Acta Sci. Natur. Univ. Szechuan*, *2*, 39-42.

Lu, W. Y., Gao, L., & Hao, H. F. (2014). On the integer solutions of the diophantine equation (44n)x + (117n)y = (125n)z. *Pure Appl. Math.*, 30(6),627–633.

Lu, W. Y., Gao, L., Wang, X. H., & Hao, H. F. (2015). On the diophantine equation (91n)x + (4140n)y = (4141n)z. *J. Guizhou Normal Univ., Nat. Sci.*, 33(2),48–53.

Ma, J. (2013). *On the diophantine equation (57n)x + (1624 n)y = (1625 n)z*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Chongqing Southwest Üniversitesi, Çin.

Ma, M. M. (2015). *On Jeśmanowicz' conjecture*. Yüksek Lisans Tezi, Nanjing: Nanjing Normal Üniversitesi, Çin.

Ma, M. M., & Chen, Y. G. (2017). Jeśmanowicz' conjecture on Pythagorean triples. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *96*(1), 30-35.

Ma, M. M., & Wu, J. D. (2014). On the diophantine equation (65n)x +(72n)y = (97n)z. *J. Nanjing Normal Univ., Nat. Sci.*, 37(4), 28–30.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Ma, M. M., & Wu, J. D. (2015). On the Diophantine Equation (an)x^+(bn)y=(cn)^z. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *52*(4), 1133-1138.

Mahler, K., & Zur Approximation algebraischer Zahlen, I. (1933). Uber den grössten Primteiler bin\" arer Formen. *Math. Ann*, *107*, 691-730.

Miyazaki, T. (2009). On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *80*(3), 413-422.

Miyazaki, T. (2010). Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples. In T. Komatsu et al., editor, Diophantine Analysis and Related Fields, volume 1264, pages 41–51, New York, 2010. AIP Conf. Proc.

Miyazaki, T. (2011). Jeśmanowicz' conjecture on exponential Diophantine equations. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, *45*(2), 207-229.

Miyazaki, T. (2011). The shuffle variant of Jeśmanowicz conjecture concerning Pythagorean triples. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *90*(3), 355-370.

Miyazaki, T. (2013). Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples. *Journal of Number Theory*, *133*(2), 583-595.

Miyazaki, T. (2015). A remark on Jeśmanowicz' conjecture for the non-coprimality case. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *31*(8), 1255-1260.

Miyazaki, T., & Terai, N. (2015). On Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples. II. *Acta Mathematica Hungarica*, *147*(2), 286-293.

Miyazaki, T., Yuan, P., & Wu, D. (2014). Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples II. *Journal of Number Theory*, *141*, 184-201.

Mordell, L. J. (1969). *Diophantine equations* (Vol. 30). Academic Press.

Rabai, Z. (2017). A note on the shuffle variant of Jeśmanowicz's conjecture. Tokyo J. Math., 40(1), 153–163.

Rao, D. M. (1960). A note on the diophantine equation (2n+1)^x+(2n(n+1))^y = (2n(n+1)+1)^z. *J. Sichuan Univ. Nat. Sci.*, 6(1),79–80.

Scott, R., & Styer, R. (2016). Number of solutions to ax + by = cz. *Publ. Math. Debrecen*, 88(1–2),131–138.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Shorey, T.N., & Tijdeman, R. (1986). Tijdeman. Exponential Diophantine Equations. Cambridge Univ. Press, Cambridge

Sierpinski, W. (1956). On the equation 3^x +4^y =5^z. *Wiadom. Math.*, 1(2):194–195.

Soydan, G., Demirci, M., Cangul, I. N., & Togbe, A. (2017). On the conjecture of Jesmanowicz. *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, Vol. 56, No.6 (2017), 46-72.

Sun, C. F., & Cheng, Z. (2013). A note on Jeśmanowicz' conjecture. *J. Math. Wuhan*, 33(5), 788–794.

Sun, C. F., & Cheng, Z. (2014). A conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples. *Adv. Math. China*, 43(2),267–275.

Sun, C., & Cheng, Z. (2015). On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples. *Journal of Mathematical Research with Applications*, *35*(2), 143-148.

Sun, H. N. (2015). *On the diophantine equation (35n)^x + (612n)^y = (613 n)^z*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Takakuwa, K. (1996). A remark on Jeśmanowicz' conjecture. *Proc. Japan Acad., Ser. A*, 72A(6),109–110.

Takakuwa, K., & Asaeda, Y. (1993). On a conjecture on Pythagorean numbers. *Proc. Japan Acad., Ser. A*, 69A (7), 252–255.

Tang, G. (2014). On the diophantine equation (45n)^x + (28n)^y = (53 n)z. *J. Southwest Nation. Univ., Nat. Sci.*, 40(1),101–104.

Tang, M., & Weng, J. X. (2014). Jeśmanowicz conjecture with Fermat numbers. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *18*(3), 925-930.

Tang, M., & Yang, Z. J. (2013). Jeśmanowicz' conjecture revisited. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *88*(3), 486-491.

Terai, N. (2014). On Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples. *Journal of Number Theory*, *141*, 316-323.

Tingting, W., Xiaonan, W., & Yingzhao, J. (2018). An application of the Baker method to Jeśmanowicz'conjecture on Pythagorean triples. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, *112*(2), 385-390.

Wang, J. H., & Deng, M. J. (1996). The Diophantine equation (a^2− b^2) x+(2ab) y=(a^2+ b^2) z. *Heilongjiong Daxue Ziran Kexue Xuebao*, *13*, 23-25.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Wang, L. L. (2011). *On the diophantine equation (39n)x + (760n)y = (761 n)z*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Wang, X. H., & Gou, S. (2014). On Miyazaki's conjecture on primitive Pythagorean numbers. *Math. Pract. Theory*, 44(8), 287–290.

Xing, J. J. (2015). *On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers*. Yüksek Lisans Tezi, Chongqing: Southwest Üniversitesi, Çin.

Yang, H., & Fu, R. (2015). A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples. *Journal of Number Theory*, *156*, 183-194.

Yang, H., & Fu, R. Q. (2017). Fermat primes and Jeśmanowicz' conjecture. *Adv. Math. China*, 46(6),857–866.

Yang, H., Ren, R. Z. & Fu, R. Q. (2017). On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. *Math. J. Wuhan*, 37(3),506–512.

Yang, Z. J., & Tang, M. (2012). On the Diophantine equation (8n)^x+(15n)^y=(17n)^z. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *86*(2), 348-352.

Yang, Z. J., & Weng, J. X. (2012). On the Diophantine equation (12n) x+(35n) y=(37n) z. *Pure and App. Math.(Chinese)*, *28*, 698-704.

Yuan, P., & Han, Q. (2018). Jeśmanowicz' conjecture and related equations. *Acta Arith*, *184*(1), 37-49.

Waldschmidt. M. (2009) Perfect powers: Pillai's works and their developments. arXiv:0908:4031v1..

Zhang, X. W., & Zhang, W. P. (2014). The exponential diophantine equation ((22m −1)n)^x + (2m+1n)^y = ((22m + 1)n)^z. *Bull. Math. Soc. Math. Roum., Nouv. Sér.*, 57(3),337–344.

Zheng, C. Y. (2017). A note on coprime cases of Jeśmanowicz' conjecture. *J. Huaihai Engin. College, Nat. Ser.*, 3, 1–3.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seda Nur Akkuş

Doğum Yeri ve Tarihi : Erzurum 10/06/1989

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Atatürk Üniversitesi

İş Deneyimi

Stajlar : Süleyman Çelebi Anadolu Lisesi

Çalıştığı Kurumlar : Necip Fazıl Kısakürek A.İ.H.L, Sınav Koleji, Pınar Koleji

İletişim

Adres :Kayalar Mah. 794. Sok. no:12 Abı Hayat Turkuaz konutlar A Blok Daire:40 Yenimahalle /ANKARA

E-Posta Adresi : ssvndkm@gmail.com

Akademik Çalışmaları

1. "$(17n)^x + (144n)^y = (145n)^z$ Üstel Diophantine Denklemi Üzerine " adlı makale Yayına Sunuldu
2. 14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu "Jesmanowicz Sanısı Üzerine" Poster Sunumu

Tarih: 20/08/2019