

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİ YARDIMIYLA OLUŞTURULAN BAZI
DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELTEM ŞENADIM

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. İLKER İNAM

İKİNCİ DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ ZEYNEP DEMİRKOL ÖZKAYA

BİLECİK, 2026

10773406

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİ YARDIMIYLA OLUŞTURULAN BAZI
DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELTEM ŞENADIM

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. İLKER İNAM

İKİNCİ DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ ZEYNEP DEMİRKOL ÖZKAYA

BİLECİK, 2026

10773406

BEYAN

Fibonacci Ve Benzeri Sayı Dizileri Yardımıyla Oluşturulan Bazı Diophantine Denklemleri Üzerine adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.		
DESTEK ALINMIŞTIR	<input type="checkbox"/>	DESTEK ALINMAMIŞTIR
X		
Destek alındı ise;		
Destekleyen kurum; TÜBİTAK		
Desteğin Türü	Proje Numarası	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)		
2- TÜBİTAK		
Diğer;.....		
ETİK KURUL onayı var ise;		
ETİK KURUL karar tarih/sayı:/.....	

Meltem Şenadım

07/01/2026

İmza

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, bu tez konusunu çalışmamı ve seçmemi sağlayan, çalışmanın yürütülmesinde bilgisi, tecrübesi ve önerileriyle beni yönlendirerek bana yol gösteren ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve her zaman değerli vaktinden bana zaman ayırarak çalışmalarına katkı sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. İlker İNAM'a, yine aynı katkılar için gerekli çabasını desteğini her zaman benimle paylaşan ikinci danışman tez hocam kıymetli Dr. Öğr. Üyesi Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA hocama ve yoğun çalışmalarım sırasında motivasyon desteği, sabrı için ve ders konusunda da çeşitli pratik yöntemleri sayesinde bana katkı sağlayan değerli eşim Sarper ŞENADIM'a, değerli aileme destekleri için ve yazım sırasında oluşan aksaklıklarda destek veren ve işleri yoluna koymaya gayret gösteren Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü personeline teşekkürlerimi sevgiyle sunuyorum.

Meltem ŞENADIM

2026

ÖZET

FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİ YARDIMIYLA OLUŞTURULAN BAZI DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, cebir ve sayılar teorisinin oldukça köklü ancak güncelliğini kaybetmeyen konusu, Diophantine denklemleri ele alınmıştır. Diophantine denklemleri tam olarak çözümleri tam sayı olan denklemlerdir. Bu nedenle günlük hayat problemlerine kolaylıkla uyarlanabilir. Örneğin Fibonacci, Tribonacci ve benzeri sayı dizilerinden oluşan bir denklem göz önüne alındığında, çözüm adayı olan sonsuz tane tam sayı olduğundan bu tarz denklemleri çözmek zor ve hatta bazen imkânsız olabilir. Burada Baker Teorisi'nin önemi ön plana çıkar. Bu teori belli bir sınırdan sonra denklemlerin tam sayı çözümü olmadığını garantiler ve böylece denklemlerin çözüm aralığını sınırlar. Bu çalışmanın ilk bölümünde çalışmanın temel konusunu oluşturan Fibonacci, Tribonacci ve Perrin sayıları tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. 2. bölümde iki Fibonacci sayısının toplamının, 3. bölümde ise iki Fibonacci sayısının sıradaki farkının ne zaman 2'nin bir kuvveti olacağı problemleri literatürde mevcut olan çalışmalar yardımıyla incelenmiştir. Tezin özgün kısmını oluşturan 4. bölümde ise iki Perrin sayısının çarpımının ne zaman bir Tribonacci sayısı olduğu problemi çözüme kavuşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Diophantine denklemleri, Fibonacci sayıları, Tribonacci sayıları, Perrin sayıları, Baker metodu, logaritmalardaki lineer formlar

ABSTRACT
ON SOME DIOPHANTINE EQUATIONS CONSTRUCTED WITH THE HELP OF
FIBONACCI AND SIMILAR NUMBER SEQUENCES

This four-part study examines Diophantine equations, a deeply rooted yet timeless topic in algebra and number theory. Diophantine equations are equations whose solutions are integers. Therefore, they are easily applicable to everyday problems. For example, when considering an equation consisting of Fibonacci, Tribonacci, or similar sequences of numbers, solving such equations can be difficult, and sometimes even impossible, because there are infinite integers available as potential solutions. This is where the importance of Baker's Theory comes to the fore. This theory guarantees that equations have no integer solutions beyond a certain limit, thus limiting the range of solutions. The first part of this study introduces the Fibonacci, Tribonacci, and Perrin numbers, which form the main subject of this study, and provides some of their properties. The second part examines the sum of two Fibonacci numbers, and the third part examines the problem of when the difference of two Fibonacci numbers is a power of 2, using available literature. In the fourth chapter, which constitutes the original part of the thesis, the problem of when the product of two Perrin numbers becomes a Tribonacci number is solved.

Keywords: Diophantine equations, Fibonacci numbers, Tribonacci numbers, Perrin numbers, Baker's method, linear forms in logarithms

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iiv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	v
1. FİBONACCİ, TRİBONACCİ, PERRİN SAYILARI VE MATVEEV TEOREMİ.....	6
2. $F_n + F_m = 2^a$ DIOPHANTINE DENKLEMİ ÜZERİNE.....	6
3. $F_n - F_m = 2^a$ DIOPHANTINE DENKLEMİ ÜZERİNE.....	15
4. İKİ TRİBONACCİ SAYISININ ÇARPIMI OLARAK YAZILABİLEN PERRİN SAYILARI.....	23
KAYNAKÇA.....	31

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

\mathbb{R} : Reel Sayılar

\mathbb{Q} : Rasyonel Sayılar

\mathbb{Z} : Tam Sayılar

1. FİBONACCİ, TRİBONACCİ, PERRİN SAYILARI VE MATVEEV TEOREMİ

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan Fibonacci, Tribonacci ve Perrin sayıları tanıtılacak ve temel özellikleri incelenecektir.

Tam sayı dizileri günlük hayattaki uygulama alanları ve doğada çeşitli şekilde karşımıza çıkışlarıyla insanoğlunun her zaman ilgisini çekmiştir ve keşfinden binlerce yıl geçmesine rağmen hala yaygın olarak çalışılmaya devam etmektedir. Örneğin “Tavşan Problemi” çözümünde kullanılan ve matematikle ilgisi olsun olmasın herkesin yakından bildiği Fibonacci sayıları ilk olarak 1228’de İtalyan Leonardo Pisano’ nun “Liber Abaci” kitabında karşımıza çıkmıştır.

Tanım 1.1. Fibonacci dizisi F_n ile gösterilir ve

$F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

özyinelemeli bağıntısı ile tanımlanır.

Böylece ilk Fibonacci sayıları

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

şeklinindedir.

Tam Sayı Dizilerinin Online Ansiklopedisi¹ (OEIS)’de Fibonacci sayıları A000045 etiketiyle yer almaktadır. Fibonacci sayılarının tanımındaki başlangıç değerleri değiştirilerek farklı sayı dizileri (Örneğin Lucas sayıları) elde edilebilir. Diğer yandan özyinelemeli bağıntıya çeşitli katsayılar eklenerek de (Örneğin Pell sayıları) gibi farklı sayı dizileri elde edilebilir. Fibonacci sayıları ikinci dereceden doğrusal homojen özyinelemeli bir dizinin klasik bir örneğidir. Özyinelemeli bağıntıda terim sayısı artırılarak da yeni sayı dizileri elde edilebilir.

Tanım 1.2. Tribonacci dizisi T_n ile gösterilir ve

$T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 1$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

¹ www.oeis.org

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

özyinelemeli bağıntısı ile tanımlanır.

Böylece ilk Tribonacci sayıları

$$\{T_n\}_{n \geq 0}: 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, \dots$$

şeklindedir. OEIS'de A000073 etiketiyle bulunmaktadır.

Bu çalışmanın konusunu oluşturan bir diğer sayı dizisi Perrin sayıları olup bu sayı dizisi Pell sayıları ile karışmaması adına literatürde R_n ile gösterilir.

Tanım 1.3. Perrin dizisi R_n ile gösterilir ve

$R_0 = 3$, $R_1 = 0$, $R_2 = 2$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$$

ile tanımlanır.

Böylece ilk Perrin sayıları

$$3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, \dots$$

şeklindedir.

Yukarıdaki tanımlarını verdiğimiz sayı dizileri özyinelemeli bağıntılarla tanımlandığında bu haliyle 142. Tribonacci sayısını tespit etmek oldukça zahmetlidir. Bu nedenle bu sayı dizilerinin herhangi bir terimini doğrudan veren formüllere ihtiyaç duyulmuştur. Binet formülleri olarak bilinen bu formüller uygulamada pratiklik sağlar. Aşağıdaki teoremden bu çalışmaya konu olan sayı dizilerine ait Binet formülleri sıralanmıştır.

Teorem 1.4. (Koshy, 2019)

i) Fibonacci sayılarının Binet formülü, karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ 'ın kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

ile verilir. Ayrıca Fibonacci sayıları üzerinde her $n \geq 1$ olmak için $\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$ eşitsizliği sağlanır.

ii) Tribonacci sayılarının Binet formülü karakteristik denklem

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

kökleri α, β ve γ olmak üzere

$$T_n = a \cdot \alpha^n + b \cdot \beta^n + c \cdot \gamma^n$$

şeklindedir.

Bu formülde yer alan a, b ve c değerleri Tribonacci sayılarının tanımında yer alan başlangıç değerler kullanılarak elde edilen üç bilinmeyenli üç denklem sisteminin çözümüyle elde edilir.

iii) Perrin sayılarının Binet formülü karakteristik denklem

$$x^3 - x - 1 = 0$$

kökleri α, β ve γ olmak üzere

$$P_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

biçimindedir.

Bir başka deyişle Perrin sayıları karakteristik denklemin doğrudan üstten toplamıyla elde edilir.

Şimdi ise çalışmanın tamamında kullanılacak olan Baker teorisine dair ön hazırlıklar yapılacak ve Matveev teoremi ifade edilecektir.

η_1, \dots, η_n bir \mathbb{K} reel cebirsel sayı cismi üzerinde pozitif reel cebirsel sayılar olsun. Burada bu sayıların \mathbb{Z} üzerindeki minimal polinomları

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^D (x - \eta_i)$$

şeklinde olsun.

η 'nın alışılmış logaritmik mutlak yüksekliği $h(\eta)$ ile gösterilir ve bu değer

$$h(\eta) = \frac{1}{D} (\log|a_0| + \sum_{i=1}^D \log(\max\{|\eta^{(i)}|, 1\})) \quad (2.1)$$

formülü ile hesaplanır. Eğer burada $(a, b) = 1$ ve $b \geq 1$ olmak üzere $\eta = \frac{a}{b}$ bir rasyonel sayı ise bu takdirde

$$h(\eta) = \log(\max\{|a|, b\})$$

olur. Tanım kullanılarak logaritmik yüksekliği bazı özellikleri aşağıda sıralanmıştır:

$$(1) h(\eta \pm \gamma) \leq h(\eta) + h(\gamma) + \log 2$$

$$(2) h(\eta\gamma^{\pm 1}) \leq h(\eta) + h(\gamma)$$

$$(3) h(\eta^s) = |s|h(\eta)$$

Burada s herhangi bir tamsayıdır.

Şimdi ise Baker teorisinin Matveev Teoremi adı verilen en önemli sonucu verilecektir.

Teorem 2.1. (Matveev, 2000)

$b_1, \dots, b_t \in \mathbb{Z}^+$ olsun ve $\mathbb{Q}(\eta_1, \dots, \eta_t)$ sayı cisminin \mathbb{Q} üzerindeki derecesini $d_{\mathbb{K}}$ ile gösterir.

$\Lambda := \eta_1^{b_1} \dots \eta_t^{b_t} - 1$ değerinin sıfırdan farklı olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\log|\Lambda| > -1.4 \cdot 30^{t+3} \cdot t^{4,5} \cdot d_{\mathbb{K}}^2 \cdot (1 + \log d_{\mathbb{K}})(1 + \log B) \cdot A_1 \dots A_t$$

olur. Burada her $i = 1, \dots, n$ için

$$B := \max\{|b_1|, \dots, |b_t|\} \quad (2.2)$$

ve

$$A_i \geq \max\{d_{\mathbb{K}} \cdot h(\eta_i), |\log \eta_i|, 0.16\} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Lemma 2.2. (Sanchez ve Luca, 2014) Eğer $l \geq 1$, $H > (4l^2)^l$ ve $H > \frac{L}{(\log L)^l}$ ise bu durumda

$$L < 2^l H (\log H)^l$$

olur.

Aşağıdaki Lemma Baker-Davenport Teoremi olarak bilinir.

Lemma 2.3. (Bravo, vd, 2016) M bir pozitif tamsayı, $q > 6M$ olmak üzere $\frac{p}{q}$, τ irrasyonel sayısının sürekli kesrini yakınsayanı olsun. Diğer yandan A, B ve μ reel sayıları A pozitif ve $B \geq 1$ olarak seçilsin. ϵ sayısı

$$\epsilon := \|\mu q\| - M\|\tau q\|$$

olarak tanımlansın.

Eğer $\epsilon > 0$ ise bu takdirde $u \leq M$ ve $w \geq \frac{\log(\frac{Aq}{\epsilon})}{\log B}$ olmak üzere

$$0 < |u \cdot \tau - v + \mu| < A \cdot B^{-w}$$

eşitsizliğinin u, v ve w tamsayıları üzerinde bir çözümü yoktur.

Lemma 2.3. (Odjoumani ve Ziegler, 2023) x bir pozitif reel sayı olmak üzere $|x - 1| < 0.5$ ise bu takdirde

$$|\log x| < 1.5 \cdot |x - 1|$$

olur.

2. $F_n + F_m = 2^a$ DIOPHANTINE DENKLEMİ ÜZERİNE

Bu bölümde (Bravo ve Luca, 2016) çalışmasında yer alan

$$F_n + F_m = 2^a \quad (2.1)$$

Diophantine denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri bulunacaktır. Bu sonucun ispatında esas olarak Baker metodu kullanılmaktadır. 2'nin kuvvetleri çeşitli Fibonacci sayılarında karşımıza çıkmaktadır. Kolayca gösterilebilir ki Fibonacci dizisinde 2'nin kuvvetlerinden sadece 1, 2 ve 8 Fibonacci sayıları olarak karşımıza çıkar.

$n > 12$ olmak üzere F_n 'nin daha önceki herhangi bir Fibonacci sayısının çarpanı olmayan en az bir asal çarpanı vardır (Carmichael, 1913). F_n için bu özelliği sağlayan asal çarpanlar “ilkel” olarak adlandırılırlar. Bu çarpanların $\text{mod } n$ 'de ± 1 'e denk oldukları gösterilebilir. Bu ifadenin daha genel bir hali (Bilu, vd., 2001) de bulunabilir. Böylece bu değerler arasında 2'nin tüm kuvvetlerini bulmak için Fibonacci dizisinin ilk 12 terimini kontrol etmek yeterlidir.

Benzer tartışma ve problemler Lucas sayıları için de yazılabilir. Fibonacci ve Lucas dizilerindeki tüm tam kuvvetleri bulma problemi literatürde uzun süre açık kalmış olan bir problem olup nihayet (Bugeaud, vd., 2006) çalışmasında tüm çözüm tamamıyla verilmiştir.

Teorem 2.1. (Bugeaud, vd., 2006) Tüm Fibonacci sayıları arasında tam kuvvet olanlar sadece $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$ sayılarıdır. Lucas sayıları içindeki tam kuvvetler ise $L_1 = 1$, $L_3 = 4$ dir.

Tanım 2.2. (Bravo ve Luca, 2016) $i = 1, \dots, t - 1$ için $m_i - m_{i+1} \geq 2$ olmak üzere N pozitif tam sayısının Zeckendorf temsili

$$N = F_{m_1} + F_{m_2} + \dots + F_{m_t}$$

olarak tanımlanabilir.

Literatürde Zeckendorf temsilleriyle ilişkili birçok sonuç bulunmaktadır. Bu bölümün konusunu oluşturan çalışmada ise Zeckendorf temsilinin uzunluğu 2 iken uzunluğu 1 olan tüm pozitif tam sayılar bulunmuştur. Bu ise esas olarak $n \geq m$ olmak üzere

$$F_n + F_m = 2^a$$

Diophantine denkleminin n, m ve a negatif olmayan tam sayılar üzerinde çözümlerini aramaya eşdeğerdir. (Pethő ve Tichy, 1993) sonucu gereği bu denklemin sadece sonlu sayıda çözümü vardır. $F_m = 0$ olması durumundan kaçınmak için genellik bozulmadan $m \geq 1$ kabul edilebilir.

Teorem 2.3. (Bravo ve Luca, 2016: 392) $n \geq m$ olmak üzere (2.1) Diophantine denkleminin n, m ve a pozitif tam sayılarındaki tüm çözümleri

$$(n, m, a) \in \{(1, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 2), (6, 6, 4), (2, 1, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 2), (5, 4, 3), (7, 4, 4),\}$$

şeklindedir. Daha açık olarak

$$2F_1 = 2, 2F_2 = 2, 2F_3 = 2^2, 2F_6 = 2^4$$

ve

$$F_2 + F_1 = 2, F_4 + F_1 = 2^2, F_4 + F_2 = 2^2, F_5 + F_4 = 2^3, F_7 + F_4 = 2^4$$

olur.

İspat. $n = m$ olsun. O halde (2.1) denklemini $F_n = 2^{a-1}$ halini alır. Bu durumda Teorem 2.1'de elde edilen sonuçlar bulunmuş olur ki bu çözümler

$$(n, a) \in \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (6, 4)\}$$

şeklindedir.

O halde bundan böyle $n > m$ olduğu kabul edilecektir. Gerçekten de $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ olduğundan $n > m + 1$ olduğu ve özel olarak $n - m \geq 2$ olduğu kabul edilecektir.

Eğer $n \leq 200$ ise uygun bir bilgisayar programı yardımıyla $1 \leq m < n \leq 200$ aralığındaki tüm çözümler

$$(n, m, a) \in \{(2, 1, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 2), (5, 4, 3), (7, 4, 4)\}$$

şeklindedir.

İspatın geriye kalan kısmında $n > 200$ olduğu kabul edilip bir çelişki elde edilecektir. İspatın bu aşamasında n ile a arasında bir ilişki elde edilmeye çalışılacaktır.

$$\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1} \quad (2.2)$$

eşitsizliği ile (2.1) birleştirilerek

$$2^a < \alpha^{n-1} + \alpha^{m-1} \leq \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = \alpha^n < 2^n$$

elde edilir.

Bu ise $a < n$ olmasını gerektirir.

Diğer yandan (2.1) denklemini aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 2^a = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} - F_m.$$

Mutlak değer alınarak

$$\left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 2^a \right| \leq \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} + F_m < \frac{1}{2} + \alpha^m,$$

Bu son eşitsizlikte (2.2) numaralı eşitsizliğin sağ tarafı kullanılmıştır. Bu son eşitsizlikte $n > m$ olduğu dikkate alınarak eşitsizliğin her iki yanını $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ ile bölünerek

$$\left| 1 - 2^a \cdot \alpha^{-n} \cdot \sqrt{5} \right| < \frac{4}{\alpha^{n-m}} \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir.

Matveev teoreminde

$$t := 3, \gamma_1 := 2, \gamma_2 := \alpha, \quad \gamma_3 := \sqrt{5}$$

$$b_1 := a, b_2 := -n, b_3 := 1$$

alınacaktır.

Dikkat edilirse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ değerleri pozitif reel sayılar olup $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cismine aittir. Böylece $D := 2$ alınabilir. (2.3) eşitsizliğinin sol tarafı sıfırdan farklıdır. Gerçekten de eğer bu değer sıfır olsaydı $2^a = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ ve böylece $\alpha^{2n} \in \mathbb{Z}$ tam sayı olurdu ki bu imkansızdır.

$$h(\gamma_1) = \log 2 = 0.6931 \dots$$

olduğundan

$$A_1 := 1.4 > Dh(\gamma_1)$$

seçilebilir. Üstelik

$$h(\gamma_2) = \frac{\log \alpha}{2} = \frac{(0.4812 \dots)}{2}$$

ve

$$h(\gamma_3) = \log \sqrt{5} = 0.8047 \dots$$

olduğundan

$$A_2 := 0.5 > Dh(\gamma_2)$$

ve

$$A_3 := 1.7 > Dh(\gamma_3)$$

alnabilir.

Son olarak $a < n$ olduğu hatırlanırsa

$$\max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = n$$

olur ki böylece $B := n$ seçilebilir. Bu takdirde Matveev teoremi gereği

$$C_1 := 1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2) < 9.7 \cdot 10^{11}$$

olmak üzere (2.3) eşitsizliğinde logaritmaları alınarak ve

$$|1 - 2^\alpha \cdot \alpha^{-n} \cdot \sqrt{5}| > \exp(-C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot 1.4 \cdot 0.5 \cdot 1.7) \quad (2.4)$$

eşitsizliği ile kıyaslama yapıldığında $n \geq 3$ değerleri için

$$1 + \log n < 2 \log n$$

olduğu dikkate alınarak

$$(n - m) \log \alpha - \log 4 < 2.31 \cdot 10^{12} \log n \quad (2.5)$$

ifadesine ulaşılabilir. Böylece

$$(n - m) \log \alpha < 2.4 \cdot 10^{12} \log n$$

elde edilir.

O halde şimdi logaritmalarda ikinci bir lineer formu dikkate alalım. Bunu yapabilmek için (2.1) denklemini aşağıdaki gibi tekrar yazalım.

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} - 2^a = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^m}{\sqrt{5}}$$

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değeri yerine yazılarak mutlak değer alındıktan sonra gerekli işlemler yapıldığında $n \geq 5$ ve $m \geq 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} (1 + \alpha^{m-n}) - 2^a \right| \leq \frac{|\beta|^n + |\beta|^m}{\sqrt{5}} < \frac{1}{3}$$

bu eşitsizliğin her iki yanını sol taraftaki ilk terim ile bölerek

$$\left| 1 - 2^a \cdot \alpha^{-n} \cdot \sqrt{5} (1 + \alpha^{m-n})^{-1} \right| < \frac{1}{\alpha^n} \quad (2.6)$$

elde edilir.

Matveev teoremini ikinci kez uygulamak için

$$t := 3 \text{ ve } \gamma_1 := 2, \gamma_2 := \alpha, \gamma_3 := \sqrt{5} (1 + \alpha^{m-n})^{-1}$$

ve

$$b_1 := a, b_2 := -n \text{ ve } b_3 := 1$$

parametreleri alınsın.

Daha önce olduğu gibi $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cismi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ elemanlarını bulundurur ve $D := [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2$ 'dir.

(2.6) eşitsizliğinin sol tarafı sıfır olamaz. Aksi takdirde

$$2^a \sqrt{5} = \alpha^n + \alpha^m \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 'te eşleniği alınarak

$$-2^a \sqrt{5} = \beta^n + \beta^m \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8) birleştirilerek

$$\alpha^n < \alpha^n + \alpha^m = |\beta^n + \beta^m| \leq |\beta|^n + |\beta|^m < 1$$

elde edilir ki herhangi bir pozitif n sayısı için bu imkansızdır. O halde (2.6) eşitsizliğinin sol tarafı sıfırdan farklıdır.

Matveev teoreminin uygulanması için daha önce yapıldığı gibi

$$A_1 := 1.4, A_2 := 0.5 \text{ ve } B := n$$

alınsın. Şimdi $h(\gamma_3)$ ' ü kestirmeye çalışalım. İlk olarak $\gamma_3 < \sqrt{5}$ ve $\gamma_3^{-1} < \frac{2}{\sqrt{5}}$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa $|\log \gamma_3| < 1$ olur.

Dikkat edilirse

$$h(\gamma_3) \leq \log \sqrt{5} + |m - n| \left(\frac{\log \alpha}{2} \right) + \log 2 = \log(2\sqrt{5}) + (n - m) \left(\frac{\log \alpha}{2} \right);$$

ve böylece

$$A_3 := 3 + (n - m) \log \alpha > \max\{2h(\gamma_3), |\log \gamma_3|, 0.16\}$$

olur. O halde Matveev Teoremi (2.6) eşitsizliğinin sol tarafı için

$$C_2 := 1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2) < 9.7 \cdot 10^{11}$$

olmak üzere

$$\exp(-C_2 \cdot (1 + \log n) \cdot 1.4 \cdot 0.5 \cdot (3 + (n - m) \log \alpha))$$

şeklinde bir alt sınır verir.

O halde (2.6) eşitsizliği

$$n \log \alpha < 1.4 \cdot 10^{12} \log n \cdot (3 + (n - m) \log \alpha) \quad (2.9)$$

olmasını gerektirir.

Gerekli işlemler yapılarak

$$n < 7.1 \cdot 10^{24} \log^2 n$$

ve böylece

$$n < 3.1 \cdot 10^{28}$$

eşitsizliği elde edilir. Tüm bu yapılan işlemler yardımıyla aşağıdaki lemma ispatlanmış olur.

Lemma 2.4. (Bravo ve Luca, 2015) Eğer (n, m, a) sayıları (2.1) eşitliğinin pozitif tam sayılardaki $n > m$ özelliğinin bir çözümü ise bu takdirde $a < n < 3.1 \cdot 10^{28}$ dır.

Matveev teoremi yardımıyla elde edilen bu üst sınır modern bilgisayar programları kullanılsa dahi çok yüksek bir sayı olduğundan n üzerinde bir indirgeme yapılmalıdır. Bunu yapabilmek için (Bravo ve Luca, 2016: 394)'te yer alan Lemma 1 kullanılacaktır. İlk olarak

$$z_1 := a \log 2 - n \log \alpha + \log \sqrt{5} \quad (2.10)$$

olsun. Kolayca görülebilir ki (2.3) eşitsizliği

$$|1 - e^{z_1}| < \frac{4}{\alpha^{n-m}} \quad (2.11)$$

gibi tekrar yazılabilir. Fibonacci sayılarının Binet formülü kullanılarak (2.1) eşitliği yardımıyla

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = F_n + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} < F_n + 1 \leq F_n + F_m = 2^a$$

olur. Bunun sonucu olarak

$$1 < 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5}$$

ve

$$z_1 > 0$$

elde edilir. Bu sonuç (2.11) ile birleştirilerek

$$0 < z_1 \leq e^{z_1} - 1 < \frac{4}{\alpha^{n-m}}$$

olur.

Bu z_1 değerini yukarıdaki eşitsizlikte (2.10)'da verilen formüldekiyle yer değiştirerek ve elde edilen son eşitsizliğe her iki taraf $\log \alpha$ ile bölünerek

$$0 < a \left(\frac{\log 2}{\log \alpha} \right) - n + \left(\frac{\log \sqrt{5}}{\log \alpha} \right) < 9 \cdot \alpha^{-(n-m)} \quad (2.12)$$

elde edilir.

Şimdi

$$\gamma := \frac{\log 2}{\log \alpha}, \mu := \frac{\log \sqrt{5}}{\log \alpha}, A := 9, B := \alpha$$

olsun. Dikkat edilirse γ_1 irrasyonel sayıdır. Burada Lemma 2.2 tarafından verilen a üzerindeki üst sınır olan $M := 3.1 \cdot 10^{28}$ olsun. O halde (Bravo ve Luca, 2016: 394)'te yer alan Lemma 1, (2.12) numaralı eşitsizliğe uygulanarak

$$n - m < \frac{\log\left(\frac{Aq}{\epsilon}\right)}{\log B}$$

elde edilir. Burada $q > 6M$, γ 'nın

$$\epsilon = \|\mu q\| - M\|\tau q\| > 0$$

özelliğindeki sürekli kesrinin yakınsağının paydasıdır. Uygun bir bilgisayar programı yardımıyla eğer (n, m, a) sayıları (2.1) denkleminin muhtemel çözümü ise bu takdirde

$$n - m \in [1, 150]$$

olduğu bulunur. $n - m$ için verilen bu üst sınır (2.9)'da yerine yazıldığında

$$a < n < 9 \cdot 10^{15}$$

elde edilir. n üzerindeki daha iyi bir üst sınır elde edebilmek için (2.6) üzerinde biraz daha çalışılacaktır.

$$z_2 := a \log 2 - n \log \alpha + \log \varphi(n - m)$$

olarak tanımlansın. Burada $\varphi(t) := \sqrt{5}(1 + \alpha^{-t})^{-1}$ şeklindedir. Böylece (2.6) gereği

$$|1 - e^{z_2}| < \frac{1}{\alpha^n} \tag{2.13}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse $z_2 \neq 0$ dır. Böylece z_2 'nin 2 durumu söz konusudur. Eğer $z_2 > 0$ ise

$$e^{z_2} - 1 > 0$$

olur ve böylece (2.13) gereği

$$0 < z_2 < \frac{1}{\alpha^n}$$

elde edilir.

$z_2 < 0$ olduğunu kabul edelim. Kolayca gösterilebilir ki $n > 200$ için

$$\frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{2}$$

olur. Bu takdirde (2.13) kullanılarak

$$|e^{z_2} - 1| < \frac{1}{2}$$

ve böylece

$$e^{|z_2|} < 2$$

elde edilir. $z_2 < 0$ olduğundan

$$0 < |z_2| \leq e^{|z_2|} - 1 = e^{|z_2|} |e^{z_2} - 1| < \frac{2}{\alpha^n}$$

olur.

İki durumda da

$$0 < |z_2| < \frac{2}{\alpha^n}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik tüm $n > 200$ değerleri için doğrudur. z_2 değerleri gerekli yerlerde yerine yazılırsa

$$0 < \left| a \left(\frac{\log 2}{\log \alpha} \right) - n + \frac{\log \varphi(n-m)}{\log \alpha} \right| < 5 \cdot \alpha^{-n} \quad (2.14)$$

elde edilir.

Burada α üzerindeki üst sınır için

$$M := 9 \cdot 10^{15}$$

alınır. Aynı prosedür yapıldığında $n - m = 2,6$ hariç $n - m \in \{1, \dots, 150\}$ için uygulandığında $n \leq 100$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise teoremin başında kabul olan $n > 200$ olması ile çelişir. Bu da ispatı bitirir.

Teoremdeki geriye kalan $n - m = 2$ ve 6 durumları için (Bravo ve Luca, 2016)'ya bakılabilir.

3. $F_n - F_m = 2^a$ DIOPHANTINE DENKLEMİ ÜZERİNE

Bu bölümde (Şiar ve Keskin, 2017)'de yer alan

$$F_n - F_m = 2^a \quad (3.1)$$

Diophantine denkleminin çözümü incelenecektir. Bu makalede logaritmalarda lineer formlar yardımıyla ilgili denklemin tüm çözümleri bulunmuştur.

Teorem 3.1. (Şiar ve Keskin, 2017) $m < n$ ve a negatif olmayan tam sayılar olmak üzere (3.1) Diophantine denkleminin tüm çözümleri

$$(n, m, a) \in \{(1,0,0), (2,0,0), (3,0,1), (6,0,3), (3,1,0), (4,1,1), (5,1,2), (3,2,0)\}$$

ve

$$(n, m, a) \in \{(4, 3, 0), (4, 2, 1), (5, 2, 2), (9, 3, 5), (5, 4, 1), (7, 5, 3), (8, 5, 4), (8, 7, 3)\}$$

şeklindedir.

İspat. Verilen denklemin sağlandığını kabul edelim. Uygun bir bilgisayar programı yardımıyla $1 \leq m < n \leq 200$ için teoremin ifadesinde verilen tüm çözümler elde edilebilir. Aksi belirtilmediği sürece $n > 200$ ve $n - m \geq 3$ olarak kabul edeceğiz. Fibonacci sayıları için

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere

$$\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$2^a = F_n - F_m < F_n < \alpha^n < 2^n$$

ve böylece $a < n$ olduğu görülür.

Diğer yandan (3.1) denklemini yeniden düzenlenirse

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 2^a = -F_m - \frac{\beta^n}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Ardından mutlak değer alınarak ve Fibonacci sayılarının özellikleri kullanılarak

$$\left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 2^a \right| = \left| F_m + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| \leq F_m + \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \alpha^m + \frac{1}{2}$$

$\alpha^{-m} < 1$ ve $n > m$ olduğu dikkate alınıp yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanını $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ ile bölünürse

$$\left| 1 - 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5} \right| < \frac{4}{\alpha^{n-m}} \quad (3.2)$$

olur.

Matveev teoremini aşağıdaki parametreler için uygulayalım.

$$\gamma_1 := 2, \gamma_2 := \alpha, \gamma_3 := \sqrt{5}$$

$$b_1 := a, b_2 := -n, b_3 := 1$$

Dikkat edilirse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ pozitif reel sayılar olup $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanıdır. O halde $D = 2$ olur.

$$\Lambda_1 := 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5} - 1$$

değerinin sıfırdan farklı olduğunu iddia ediyoruz. Tersini kabul edelim. Eğer $\Lambda_1 = 0$ olsaydı

$$2^a = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = F_n + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} > F_n - 1 > F_n - F_m = 2^a$$

olurdu. Ancak bu bir çelişkidir. O halde Λ_1 değeri sıfırdan farklıdır. Üstelik

$$h(\gamma_1) = \log 2 = 0.6931 \dots,$$

$$h(\gamma_2) = \frac{\log \alpha}{2} = \frac{0.4812 \dots}{2},$$

$$h(\gamma_3) = \log \sqrt{5} = 0.8047 \dots$$

olduğundan $A_1 := 1.4, A_2 := 0.5, A_3 := 1.7$ alınabilir.

Diğer yandan $a < n$ olduğundan

$$B := \max\{|a|, |-n|, 1\} = n$$

olur.

Böylece artık Matveev teoremini uygulayabiliriz. O halde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\frac{4}{\alpha^{n-m}} > |A_1| > \exp(-1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 2^2(1 + \log 2)(1 + \log n)(1.4)(0.5)(1.7))$$

ve böylece

$$(n - m) \log \alpha - \log 4 < 1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 2^2(1 + \log 2)(1 + \log n)(1.4)(0.5)(1.7)$$

olur.

Uygun bir bilgisayar programı yardımıyla yukarıdaki eşitsizlikten

$$(n - m) \log \alpha < 2.4 \cdot 10^{12} \log n \quad (3.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bir kez daha Matveev teoremi kullanılacaktır. (3.1) denklemi yeniden düzenlenerek

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} - 2^a = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Burada mutlak değer alınarak

$$\left| \frac{\alpha^n(1 - \alpha^{m-n})}{\sqrt{5}} - 2^a \right| = \left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} \right| \leq \frac{|\beta|^n + |\beta|^m}{\sqrt{5}} < \frac{1}{3}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikte $n > 200$ için $|\beta|^n + |\beta|^m < \frac{2}{3}$ olduğu kullanılmıştır.

Bu son eşitsizliğin her iki tarafı

$$\frac{\alpha^n(1 - \alpha^{n-m})}{\sqrt{5}}$$

ile bölünerek

$$\left| 1 - 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5} (1 - \alpha^{m-n})^{-1} \right| < \frac{\sqrt{5} \alpha^{-n} (1 - \alpha^{m-n})^{-1}}{3} \quad (3.4)$$

elde edilir.

$$\alpha^{m-n} = \frac{1}{\alpha^{n-m}} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3}$$

olduğundan

$$1 - \alpha^{m-n} > 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\frac{1}{1 - \alpha^{m-n}} < 3$$

elde edilir. (3.4) eşitsizliği yardımıyla

$$|1 - 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5} (1 - \alpha^{m-n})^{-1}| < \frac{3}{\alpha^n} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Matveev teoremini bir kez daha kullanmak için

$$\gamma_1 := 2, \gamma_2 := \alpha, \gamma_3 := \sqrt{5} (1 - \alpha^{m-n})^{-1}$$

$$b_1 := a, b_2 := -n, b_3 := 1$$

bir kez daha benzer gerekçeyle $D = 2$ olur.

$$\Lambda_2 := 2^a \alpha^{-n} \sqrt{5} (1 - \alpha^{m-n})^{-1} - 1$$

değerinin sıfırdan farklı olduğu kolayca görülebilir. Önceki duruma benzer olarak

$$h(\gamma_1) = \log 2 = 0.6931 \dots,$$

$$h(\gamma_2) = \frac{\log \alpha}{2} = \frac{0.4812 \dots}{2},$$

$$A_1 := 1.4, A_2 := 0.5 \text{ ve } A_3 := \log 20 + (n - m) \log \alpha$$

seçilebilir. Üstelik $a < n$ olduğundan

$$B := \max\{|a|, |-n|, 1\} = n$$

olur.

Bu değerler (3.5) numaralı eşitsizlikte kullanılarak Matveev teoremi yardımıyla

$$\frac{3}{\alpha^n} > |\Lambda_2| > \exp(-C)(1 + \log 2)(1 + \log n)(1.4)(0.5)(\log 20 + (n - m) \log \alpha)$$

veya

$$C = 1.4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4.5} \cdot 2^2$$

olmak üzere

$$n \log \alpha - \log 3 < C(1 + \log 2)(1 + \log n)(1.4)(0.5)(\log 20 + (n - m) \log \alpha)$$

bulunur. Bu son eşitsizlikte (3.4) numaralı eşitsizlik yerine yazılırsa

$$n \log \alpha - \log 3 < C(1 + \log 2)(1 + \log n)(1.4)(0.5)(\log 20 + 2.4 \cdot 10^{12} \log n) \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece

$$n < 2.91 \cdot 10^{28}$$

olarak elde edilir.

Bu sınır bilgisayarla hesaplama yapabilmek için oldukça yüksek olup indirgeme yaparak aşağıya çekilebilir.

$$z_1 := a \log 2 - n \log \alpha + \log \sqrt{5}$$

olsun.

Bu durumda (3.2) numaralı eşitsizlik gereği

$$|1 - e^{z_1}| < \frac{4}{\alpha^{n-m}}$$

elde edilir.

$z_1 < 0$ 'dır. Gerçekten de

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = F_n + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} > F_n - 1 > F_n - F_m = 2^a$$

Bu durumda $n - m \geq 3$ için

$$\frac{4}{\alpha^{n-m}} < 0.95$$

olduğundan

$$e^{|z_1|} < 20$$

olur. O halde

$$0 < |z_1| < e^{|z_1|} - 1 \leq e^{|z_1|} |1 - e^{z_1}| < \frac{80}{\alpha^{n-m}}$$

veya

$$0 < |a \log 2 - n \log \alpha + \log \sqrt{5}| < \frac{80}{\alpha^{n-m}}$$

elde edilir.

Son eşitsizlik $\log \alpha$ ile bölünerek

$$0 < \left| \alpha \left(\frac{\log 2}{\log \alpha} \right) - n + \frac{\log \sqrt{5}}{\log \alpha} \right| < 50 \cdot \alpha^{-(n-m)} \quad (3.7)$$

bulunur.

Matveev Teoremi'ni kullanmak için

$$\gamma := \frac{\log 2}{\log \alpha} \notin \mathbb{Q}, \quad \mu := \frac{\log \sqrt{5}}{\log \alpha}, \quad A := 50, \quad B := \alpha \quad \text{ve} \quad w := n - m$$

alınsın.

$M := 2.91 \cdot 10^{28}$ alınarak γ 'nın 64. yakınsağı $6M$ 'yi geçser. Bu nedenle ilgili teoremde bu sayının paydası olan q_{64} kullanılır. Üstelik bu durumda

$$\epsilon := \|\mu q_{64}\| - M \|\gamma q_{64}\| \geq 0.184$$

olur.

Dikkat edilirse ϵ pozitif olduğunda (3.7) eşitsizliği $n - m \geq \frac{\log\left(\frac{A \cdot q_{64}}{\epsilon}\right)}{\log B}$ için çözümü olmadığı sonucuna varılır. Bilgisayar yardımıyla yapılacak sayısal hesaplamaların ardından

$$n - m \geq 146.408$$

olarak bulunur ki bu üst sınır $n - m$ için (3.6) nolu eşitsizlikte yerine yazılarak $n < 7.56 \cdot 10^{15}$ olarak bulunur. Aynı metot bir kez daha uygulanarak $n - m \neq 4, 12$ haricinde $n \geq 98.1915$ için

$$0 < \left| a \left(\frac{\log 2}{\log \alpha} \right) - n + \frac{\log(\sqrt{5}(1-\alpha^{m-n})^{-1})}{\log \alpha} \right| < 13 \cdot \alpha^{-n} \quad (3.8)$$

eşitsizliğin çözümü olmadığı sonucuna varılır. Bu ise $n > 200$ kabulüyle çelişir. İspatı tamamlayabilmek için $n - m = 1, 2, 4$ ve 12 durumlarının ayrıca ispatlanması gerekir. Buna göre eğer $n - m = 1$ ise bu durumda

$$2^a = F_{m+1} - F_m = F_{m-1}$$

denklemlerinden

$$(n, m, a) = (3, 2, 0), (4, 3, 0), (8, 7, 3)$$

elde edilir. Eğer $n - m = 2$ ise

$$2^a = F_{m+2} - F_m = F_{m+1}$$

elde edilir ki buradan

$$(n, m, a) = (3, 1, 0)$$

çözümü bulunur.

Eğer $n - m = 4$ ise Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntı kullanılarak

$$2^a = F_{m+4} - F_m = F_{m+3} + F_{m+1} = L_{m+2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözümü (Bugeaud vd., 2006)' da verilmiş olup tek çözüm $m = 1$ ve böylece $n = 5$ ve $a = 2$ 'dir. Son olarak $n - m = 12$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$m + 12 \equiv m \pmod{4}$$

olduğundan

$$2^a = F_{m+12} - F_m = F_6 L_{m+6}$$

bulunur.

Bu denklemin $m > 0$ için çözümleri olmadığı kolayca görülebilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. İKİ PERRİN SAYISININ ÇARPIMI OLARAK YAZILABİLEN TRİBONACCİ SAYILARI

Bu bölümde çalışmanın özgün kısmını oluşturan ve (Demirkol Özkaya, vd., 2025)'te yayınlanan çalışma ele alınacaktır. Literatürde bu biçimdeki Diophantine denklemlerine rastlanmaktadır. Burada iki Perrin sayısının çarpımı olarak yazılabilen tüm Tribonacci sayıları bulunmuştur. İspatta ise Baker teorisinin önemli bir parçası olan logaritmalarda lineer formlar kullanılmıştır. İlk olarak temel sonuç verilecektir.

Teorem 4.1. T_n ile Tribonacci sayıları ve R_n ile Perrin sayıları gösterilmek üzere

$$T_n = R_k R_m$$

Diophantine denkleminin pozitif n, k, m tamsayıları için $k \leq m$ olmak üzere sadece

$$(n, k, m) = (5, 2, 2), (5, 2, 4), (5, 4, 4), (8, 2, 9), (8, 4, 9), (9, 2, 11), (9, 4, 11)$$

için çözümü vardır.

İspata geçmeden önce bazı ön hazırlıklar yapılacaktır.

Lemma 4.2. (Sanchez ve Luca, 2014)

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}}{6}, \quad \beta = \frac{-\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} - \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}} + i\sqrt{3}(\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} - \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}})}{12}$$

olmak üzere Perrin Sayılarının karakteristik polinomu

$$X^3 - X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$$

şeklindedir.

Dikkat edilirse $\gamma = \bar{\beta}$ ve ilave olarak $|\beta| = |\gamma| = \alpha^{-\frac{1}{2}}$ şeklindedir.

Her $n \geq 0$ için Perrin dizisinin Binet formülü

$$R_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

dır. $n \geq 2$ için n . Perrin sayısı α^{n-1} ile üstten sınırlıdır. Böylece Perrin sayıları için

$$\alpha^{n-2} \leq R_n \leq \alpha^{n+1}$$

eşitsizliği doğrudur. Tribonacci sayılarının karakteristik formu ise $\psi = \frac{1+r+r^*}{3}$, $w = \frac{2-(r+r^*)+i\sqrt{3}(r-r^*)}{6}$, $w^* = \bar{w}$, $r = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$ ve $r^* = \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$ olmak üzere

$$X^3 - X^2 - X - 1 = (X - \psi)(X - w)(X - w^*)$$

olur.

Buna göre Tribonacci sayıları için

$$\psi^{n-2} \leq T_n \leq \psi^{n-1}$$

olduğu açıktır.

Binet formülü ise tüm $n \geq 0$ değerleri için

$$T_n = a\psi^n + bw^n + c(w^*)^n$$

ile verilir.

Burada $a = \frac{5\psi^2 - 3\psi - 4}{22}$, $b = \frac{5w^2 - 3w - 4}{22}$, $c = \bar{b}$ ve $\max\{|a|, |b|, |c|\} < 1$ şeklindedir.

\mathbb{K} sayı cismi için bu cismin \mathbb{Q} rasyonel sayı cismi üzerindeki derecesi $d_{\mathbb{K}}$ olsun ve bu değer genellikle $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ ile gösterilir. $d_{\mathbb{Q}}(\alpha) = 3$ ve $d_{\mathbb{Q}}(\psi) = 3$ olduğundan kolayca görülebilir ki

$$\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\psi)$$

öte yandan α , ψ ve a pozitif sayılar olup bu sayılar \mathbb{K} derecesi $d_{\mathbb{K}} = 9$ olan

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha, \psi)$$

reel cisminin elemanlarıdır. Gerekli hesaplamalar yapılarak aşağıdaki numerik kestirimler elde edilir:

$$1.83 < \psi < 1.84$$

$$0.73 < |w| = \psi^{-\frac{1}{2}} < 0.74$$

$$0.33 < |a| < 0.34$$

$$0.25 < |b| < 0.27$$

$T_n := e(n) + a\psi^n$ olsun. O halde $n \geq 1$ olmak üzere $|e(n)| < \psi^{-\frac{n}{2}}$ elde edilir.

Tribonacci ve Perrin sayılarının sağladığı eşitsizlikler ve Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi^{n-2} &\leq T_n \leq \psi^{n-1}, \\ \alpha^{k-2} &\leq R_k \leq \alpha^{k+1} \end{aligned}$$

ve

$$\alpha^{m-2} \leq R_m \leq \alpha^{m+1}$$

yazılabilir.

Bu son eşitsizlikler kullanılarak

$$-0.85 + (k+m) \frac{\log \alpha}{\log \psi} \leq n \leq (k+m) \frac{\log \alpha}{\log \psi} + 2.95 \quad (4.1)$$

yazılabilir.

Diğer yandan verilen Diophantine denklemini düzenlenip tekrar yazılırsa

$$T_n = (\alpha^k + \beta^k + \gamma^k) \cdot (\alpha^m + \beta^m + \gamma^m)$$

elde edilir ve

$$T_n = a\psi^n + e(n), e(n) < \psi^{-n/2} < \psi^{-1}$$

ve

$$|\beta| = |\gamma| = \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \frac{a\psi^n}{\alpha^{k+m}} - 1 \right| &\leq |(e(n) + \alpha^k \beta^m + \alpha^k \gamma^m + \alpha^m \beta^k + \beta^{k+m} + \beta^k \gamma^m + \alpha^m \gamma^k + \gamma^k \beta^m + \\ &\gamma^{k+m}) \alpha^{-(k+m)}| < 8.55 \cdot \alpha^{-\frac{3k}{2}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

Baker metodunu etkin olarak kullanabilmek için uygun bir Λ fonksiyonu tanımlanmalıdır. Burada

$$\Lambda_1 := \frac{a\psi^n}{\alpha^{k+m}} - 1$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda

$$\eta_1 = \psi, \eta_2 = \alpha, \eta_3 = a, b_1 = n, b_2 = -(k+m), b_3 = 1$$

olarak elde edilir.

Diğer yandan dikkat edilirse bu seçimlerin sonucunda $\Lambda_1 \neq 0$ olur. Gerçekten de bunun ispatı için tersine $\Lambda_1 = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $a\psi^n = \alpha^{k+m}$ eşitliği sağlanırdı. Ancak dikkat edilirse bu bir çelişki olur. Çünkü

$$a\psi^n \notin \mathbb{Q}(\alpha)$$

olur ki böylece bu eşitlik sağlanmaz. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$h(\eta_1) = h(\psi) = \frac{1}{3}(\log 1 + \log \psi + \log 1 + \log 1) = \frac{1}{3}(\log \psi) \cong 0.2031 < 0.204,$$

$$h(\eta_2) = h(\alpha) = \frac{1}{3}(\log 1 + \log \alpha + \log 1 + \log 1) = \frac{1}{3}(\log \alpha) \cong 0.0937 < 0.094,$$

$$h(\eta_3) = h(a) = \frac{1}{3}(\log(44) + \log 1 + \log 1 + \log 1) \cong 1.2613 < 1.262$$

$d_{\mathbb{K}} = 9$ olduğundan Matveev Teoremi'nde A_1, A_2 ve A_3 değerleri

$$A_1 = 1.84 > 9 \cdot 0.204 \geq 9 \cdot h(\psi) \geq \max\{9 \cdot h(\psi), |\log(\psi)|, 0.16\},$$

$$A_2 = 0.85 > 9 \cdot 0.094 \geq 9 \cdot h(\alpha) \geq \max\{9 \cdot h(\alpha), |\log(\alpha)|, 0.16\},$$

$$A_3 = 11.36 > 9 \cdot 1.262 \geq 9 \cdot h(a) \geq \max\{9 \cdot h(a), |\log(a)|, 0.16\}$$

olarak seçilebilir. $B = k + m$ olarak alınırsa $k + m \geq 3$ için

$$1 + \log(k + m) < 2 \log(k + m)$$

olduğu kullanılarak buradan

$$\log |\Lambda_1| > -1.32 \cdot 10^{15} \log(k + m)$$

olarak bulunur. Bu son eşitsizlik ile (4.2) eşitsizliği birlikte kullanılarak

$$k \log \alpha < 8.9 \cdot 10^{14} \log(k + m) \quad (4.3)$$

elde edilir.

İspatın ikinci adımında k sayısı sabit olarak alınır ve Binet formülü ile ifade edilen çarpım yeniden yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{a\psi^n}{R_k} - \alpha^m = \frac{-e(n)}{R_k} + \beta^m + \gamma^m$$

olarak bulunur.

$m \geq 3$ ve $R_k > 2$ olduğundan

$$\left| \frac{a\psi^n}{R_k \alpha^m} - 1 \right| < \frac{|e(n)|}{R_k \alpha^m} + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^m + \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right|^m < \frac{1}{R_k \alpha^m} + \frac{\alpha^{-m/2}}{\alpha^m} + \frac{\alpha^{-m/2}}{\alpha^m} < \alpha^{-m} \left(\frac{1}{2} + 2\alpha^{-3/2} \right)$$

olur.

O halde $\Lambda_2 := \frac{a\psi^n}{R_k \alpha^m} - 1$ olarak tanımlanırsa

$$|\Lambda_2| < 1.812 \cdot \alpha^{-m} \quad (4.4)$$

elde edilir.

Yine benzer gerekçeyle $R_k \alpha^m \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ olduğundan $\Lambda_2 \neq 0$ elde edilir. Λ_2 değerini hesaplamak için

$$t := 3 \text{ ve } \eta_1 = \psi, \eta_2 = \alpha, \eta_3 = \frac{a}{R_k}, b_1 = n, b_2 = -m, b_3 = 1$$

olarak seçilsin ve böylece $k \geq 2$ için

$$h(\eta_3) = h\left(\frac{a}{R_k}\right) \leq h(a) + \log(R_k) \leq h(a) + \log(\alpha^{k+1}) \leq 2.6k \log \alpha$$

olur. Bir kez daha $d_{\mathbb{K}} = 9$ elde edilir. Böylece (4.3) eşitliği $B = k + m$ olduğu kullanılarak

$$A_1 = 1.84, A_2 = 0.85, A_3 = 23.5k \log \alpha$$

seçilebilir.

$k + m \geq 3$ için

$$1 + \log(k + m) < 2 \log(k + m)$$

olduğu kullanılarak

$$\log|\Lambda_2| > -2.73 \cdot 10^{15} \log(k + m) k \log \alpha$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik (4.4) eşitsizliği ile birleştirilerek

$$m \log \alpha < \log(1.812) + 2.73 \cdot 10^{15} k \log \alpha \log(k + m)$$

ve böylece

$$m \log \alpha < 2.74 \cdot 10^{15} k \log \alpha \log(k + m) \quad (4.5)$$

elde edilir.

Bu nedenle (4.3) eşitsizliğinden $k \cdot \log \alpha$ için üst sınır dikkate alınarak

$$m < \left(\frac{(2.74 \cdot 10^{15}) \cdot (8.9 \cdot 10^{14})}{\log \alpha} \right) \cdot \log^2(k + m)$$

ve böylece

$$m < 8.68 \cdot 10^{30} \log^2(2m)$$

elde edilir.

Üstelik bu eşitsizlik

$$2m < 17.36 \cdot 10^{30} \log^2(2m)$$

olarak düzenlenebilir.

$l = 2$, $L = 2m$ ve $H = 17.36 \cdot 10^{30}$ değerleri için ilgili lemma uygulanarak

$$m < 1.8 \cdot 10^{35} \quad (4.6)$$

elde edilir.

Böylece

$$0 < |n \log \psi - (k + m) \log \alpha + \log a| < 12.825 \alpha^{\frac{-3k}{2}}$$

elde edilir ki bu eşitsizlik

$$0 < \left| n \frac{\log \psi}{\log \alpha} - (k + m) + \frac{\log a}{\log \alpha} \right| < 45.61 \alpha^{\frac{-3k}{2}} \quad (4.7)$$

eşitsizliğini gerektirir.

$\frac{\log \psi}{\log \alpha}$ irrasyonel sayı olduğu için (4.1) ve (4.6) eşitsizliklerinden

$$n < 2.95 + (2 \cdot m) \frac{\log \alpha}{\log \psi} < 1.67 \cdot 10^{35}$$

bulunur.

$w := \frac{-3k}{2}$, $\tau := \frac{\log \psi}{\log \alpha}$, $\mu := \frac{\log a}{\log \alpha}$, $A := 45.61$, $B := \alpha$, $M := 1.67 \cdot 10^{35}$ değerlerini ilgili lemmada yerine yazacağız. Mathematica programı yardımıyla τ ' nun 70. yakınsayını

$$\frac{p_{70}}{q_{70}} = \frac{31823508756383478569276843491595581367}{14685070877534159280098882522397462513}$$

dikkat edilirse bu ifadenin paydası

$$q_{70} > 6M$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$\epsilon > 0.0498134 > 0$$

eşitsizliği doğru olur.

O halde (4.7) eşitsizliği

$$\frac{3k}{2} \geq \frac{\log\left(\frac{45.61 \cdot q_{70}}{\epsilon}\right)}{\log \alpha}$$

için yani $k > 219$ için çözümü yoktur.

k için verilen bu üst sınırı (4.5) eşitsizliğinde yerine yazarak

$$m < 2.74 \cdot 10^{15} k \log(k + m) \leq 6.0006 \cdot 10^{17} \log(2m)$$

eşitsizliği elde edilir.

$l = 1$, $H = 12.0012 \cdot 10^{17}$, $L = 2m$ değerleri için ilgili lemma tekrar uygulanarak m için aşağıdaki üst sınır elde edilir.

$$m < 4.996 \cdot 10^{19}$$

$k \leq m$ olduğundan (4.1) eşitsizliği kullanılarak n için aşağıdaki üst sınır elde edilir.

$$n < 4.611 \cdot 10^{19}$$

A_2 dikkate alınarak (4.4) eşitsizliği yardımıyla

$$0 < \left| n \log \psi - m \log \alpha + \log\left(\frac{a}{R_k}\right) \right| < 2.72 \alpha^{-m}$$

olur.

Bu ise

$$0 < \left| n \frac{\log \psi}{\log \alpha} - m + \frac{\log\left(\frac{a}{R_k}\right)}{\log \alpha} \right| < 9.7 \alpha^{-m} \quad (4.8)$$

olmasını gerektirir.

$$w := m, \tau := \frac{\log \psi}{\log \alpha}, \mu := \frac{\log\left(\frac{a}{R_k}\right)}{\log \alpha}, A := 9.7, B := \alpha, M := 4.611 \cdot 10^{19}$$

değerleri için ilgili lemmayı tekrar uygulayacağız.

Mathematica programı yardımıyla τ 'nun 35. yakınsağı

$$\frac{p_{35}}{q_{35}} = \frac{827607854074501875668}{381902576768821595885}$$

olarak bulunur. $q_{35} > 6M$ olduğu açıkça görülür. Buradan $k \in [3, 219]$ için

$$\epsilon > 0.00460347 > 0$$

olur. O halde

$$m \geq \frac{9.7^{q_{35}}}{\log \alpha} \geq 195.74$$

için (4.8) eşitsizliğinin çözümü olmadığı sonucuna varılır. (4.1) eşitsizliği gereği

$$m \leq 195 \text{ ve } n \leq 193$$

elde edilir. Böylece verilen denklemin sadece $2 \leq k \leq m \leq 195$ ve $n \leq 193$ aralığındaki çözümlerine bakmak yeterlidir. Bu çözümler de

$$(n, k, m) \in (5, 2, 2), (5, 2, 4), (5, 4, 4), (8, 2, 9), (8, 4, 9), (9, 2, 11), (9, 4, 11)$$

olarak bulunur. Bu da ispatı bitirir.

KAYNAKÇA

- Bilu, Y., Hanrot, G., & Voutier, P. M.** (2001). Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 539, 75–122.
- Bravo, J. J., & Luca, F.** (2015). Repdigits as sums of two k-Fibonacci numbers. *Monatshefte für Mathematik*, 176(1), 31–51.
- Bravo, J. J., & Luca, F.** (2016). On The Diophantine equation $F_{n+1} + F_{m+1} = 2^a$. *Quaestiones Mathematicae*, 39(3), 391-400.
- Bravo, J. J., Gómez, C. A., & Luca, F.** (2016). Powers of two as sums of two k-Fibonacci numbers. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1).
- Bugeaud, Y., Mignotte, M., & Siksek, S.** (2006). Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I: Fibonacci and Lucas perfect powers. *Annals of Mathematics*, 163, 969–1018.
- Carmichael, R. D.** (1913). On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$. *Annals of Mathematics*, 15(1/4), 49–70.
- Demirkol Özkaya, Z., Inam, I., & Senadim, M.** (2025). On Tribonacci numbers written as a product of two Perrin numbers. *Asian-European Journal of Mathematics*, 18(11), 2550051.
- Koshy, T.** (2019). Fibonacci and Lucas numbers with applications (Vol. 2). John Wiley & Sons.
- Matveev, E. M.** (2000). An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers II. *Izvestiya: Mathematics*, 64(6), 1217–1269.
- Odjoumani, J., & Ziegler, V.** (2023). On prime powers in linear recurrence sequences. *Annales mathématiques du Québec*, 47(2), 349–366.
- Pethő, A., & Tichy, R. F.** (1993). S-unit equations, linear recurrences and digit expansions. *Publications Mathematicae Debrecen*, 42(1–2), 145–154.
- Sanchez, S. G., & Luca, F.** (2014). Linear combinations of factorials and S-units in a binary recurrence sequence. *Annales mathématiques du Québec*, 38(2), 169–188.
- Siar, Z., & Keskin, R.** (2017). On the Diophantine equation $F_n - F_m = 2a$. In *Colloq. Math.*