

**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

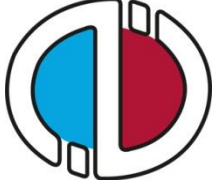
**EISENSTEIN SERİLERİ ÜZERİNE**

**Kenan ELMAAĞAÇ  
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı  
Doç.Dr. İlker İNAM**

**BİLECİK, 2015**

**Ref.No: 10088723**



**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

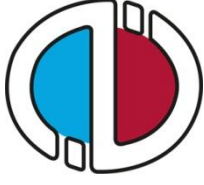
**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**EISENSTEIN SERİLERİ ÜZERİNE**

**Kenan ELMAĞAÇ  
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı  
Doç.Dr. İlker İNAM**

**BİLECİK, 2015**



**ANADOLU UNIVERSITY**



**BILECIK SEYH EDEBALI  
UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences  
Department of Mathematics**

**ON THE EISENSTEIN SERIES**

**Kenan ELMAAGAC  
Master's Thesis**

**Thesis Advisor  
Assoc.Prof.Dr. Ilker INAM**

**BILECIK, 2015**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS  
JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun / /2015 tarih ve 1 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından / /2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Kenan ELMAĞAÇ'ın "Eisenstein Serileri Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

**ÜYE**

(TEZ DANIŞMANI) : Doç.Dr. İlker İNAM

**ÜYE : Doç.Dr. Nülfir ÖZDEMİR**

**ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Osman Zeki OKUYUCU**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI: V.**

Doç.Dr. İlker İNAM

**ONAY**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun  
.../.../..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitiminin tez hazırlama süreci boyunca engin bilgi ve deneyimleri ile bana her zaman yol gösteren, zamanımı, sabrını, hoşgörüsünü ve arkadaşlığını esirgemeyen ve bu tez için benden bile çok emek harcayan değerli hocam Sayın Doç. Dr. İlker İnam'a,

Çalışmalarım süresince bana destek ve yardımcı olan değerli arkadaşlarıma üzerimde emeği geçen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi ve Anadolu Üniversitesi'ndeki tüm hocalarıma,

Benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime, hayatımın anlamı güzel kızlarım Şevval ve Melisa'ya ve değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

## ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmada Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi'yle Cebir ve Sayılar Teorisi'nin arakesitinde yer alan Eisenstein serileri çalışılmıştır. İlk bölümde konu tanıtılmış olup, ilerleyen bölümlerde kullanılacak kavramlar tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili özellikler ele alınmıştır. İkinci bölümde Eisenstein serileri tanımlanmış, bu serilerin Fourier açılımları tanıtılmış ve çeşitli örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise modüler formlar kısaca tanıtılmış ve Eisenstein serileriyle ilgisi ortaya konmuştur. Dördüncü bölümde Eisenstein serilerinin sıfırları üzerine bazı sonuçlar göz önüne alınmıştır. Beşinci ve son bölümde ise iki ağırlıklı Eisenstein serilerinin sıfır yerleriyle ilgili literatürde yer alan sonuçlar ele alınmıştır. Çalışma derleme niteliğindedir.

### **Anahtar Kelimeler**

Eisenstein serileri; Fourier açılımı; Modüler grup; Sıfırlar

## ABSTRACT

In this work which consists of five sections, Eisenstein series which are intersection of Analysis and Function Theory and Algebra and Number Theory are studied. In the first section, subject is introduced and notions which will be used in the next sections are defined and some properties of them are given. In the second section, Eisenstein series are defined, their Fourier expansions are introduced and some examples are given. In the third section, modular forms are briefly introduced and their connection with the Eisenstein series is studied. In the fourth section, some properties of the zeros of the Eisenstein series are considered. In the fifth and the last section, results for the zeros of the weight two Eisenstein series in the literature are considered. This work is a compilation.

### **Key Words**

Eisenstein series; Fourier expansion; Modular Group; Zeros

## İÇİNDEKİLER

<b>JÜRİ ONAY SAYFASI</b>	
<b>TEŞEKKÜR</b>	
<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iii</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>v</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1 Tanım ve Temel Özellikler .....	1
1.2 Modüler Gruplar .....	3
1.3 Modüler Grubun Temel Bölgesi .....	4
1.4 Bernoulli Sayıları.....	6
1.5 Riemann Zeta Fonksiyonu.....	7
<b>2. EISENSTEIN SERİLERİ</b> .....	<b>8</b>
2.1 Eisenstein Serisinin Tanımı .....	8
2.2 Eisenstein Serilerinin Fourier Katsayıları .....	9
2.3 Ramanujan- $\tau$ Fonksiyonu.....	14
<b>3. MODÜLER FORMLAR VE EISENSTEIN SERİLERİ</b> .....	<b>17</b>
<b>4. EISENSTEIN SERİLERİNİN SIFIRLARI</b> .....	<b>20</b>
<b>5. İKİ AĞIRLIKLI EISENSTEIN SERİLERİ VE BU SERİLERİN SIFIRLARI</b>	<b>23</b>
5.1 Tanım ve Temel Özellikler .....	23
5.2. $E_2$ Eisenstein Serisinin Sıfırları.....	24
5.3. $E_2$ 'nin Sıfır Yerleri Üzerine Bazı Hesaplamalar.....	27
5.4. Yardımcı Bir Fonksiyon İle Sıfırların Araştırılması.....	30
5.5. $E_2$ 'nin Bir Sıfır Yerlerinin Dağılımı.....	31
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>33</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	

**SİMGELER VE KISALTMALAR****Simgeler**

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$\Gamma$	: Modüler Grup
$\mathcal{H}$	: Üst Yarı Düzlem
$G_k$	: Eisenstein Serisi
$R_G$	: Temel Bölge
$Re(z)$	: $z$ karmaşık sayısının reel kısmı
$Im(z)$	: $z$ karmaşık sayısının reel kısmı

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<b>Şekil 1.1.</b> Modüler grubun temel bölgesi.....	5
<b>Şekil 1.2.</b> $\Gamma_0(3)$ için temel bölge.....	5
<b>Şekil 3.1.</b> $E_k(z)$ 'nin sıfırlar ( $k \geq 4$ ).....	20
<b>Şekil 5.1.</b> $E_2(z)$ 'nin sıfırları.....	28

## 1.GİRİŞ

### 1.1 Tanım ve Temel Özellikler

Bu bölümde; çalışmanın tamamı için gerekli temel tanım, teorem ve eşitsizlikleri verilecektir.

**Tanım 1.1.1.**  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ve  $ad - bc \neq 0$  olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona, *kesirli doğrusal dönüşüm (Möbiüs dönüşümü)* denir.

İki kesirli doğrusal dönüşümün eşit olması için gerekli ve yeter koşul karşılıklı katsayıların orantılı olmasıdır. Gerçekten de

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\dot{a}z + \dot{b}}{\dot{c}z + \dot{d}}$$

yazılırsa,

$$\frac{a}{\dot{a}} = \frac{b}{\dot{b}} = \lambda, \quad \frac{c}{\dot{c}} = \frac{d}{\dot{d}} = \mu \text{ ve } \lambda = \mu$$

bulunur.

$ad - bc$  sayısına  $T$ 'nin *belirteci (determinantı)* denir.

**Uyarı 1.1.2.**  $ad - bc \neq 0$  koşulu önemli bir kısıtlama değildir. Çünkü  $ad - bc = 0$  olsa,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{adz + bd}{cdz + d^2} = \frac{bcz + bd}{cdz + d^2} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d} = \text{sabit}$$

olur.

**Teorem 1.1.3. (Başkan 2000)**  $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, T(\infty) = \frac{a}{c}$  tanımı ile, her  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  doğrusal dönüşümü  $\mathbb{C}_\infty$  dan  $\mathbb{C}_\infty$  a bire-bir, üzerine konform bir dönüşüm olur.

**Önerme 1.1.4. (Başkan 2000)** Her doğrusal  $T$  dönüşümün  $T^{-1}$  ile gösterilen ters fonksiyonu da bir doğrusal dönüşümdür.

**Tanım 1.1.5:** Doğrusal dönüşümlere  $\mathbb{C}_\infty$  un bir *otomorfizması* denir.

**Teorem 1.1.6. (Başkan 2000)**  $PSL(2, \mathbb{C}) := \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$  kümesi fonksiyon bileşkesi işlemine göre bir gruptur.

**İspat.**  $T_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, T_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$  herhangi iki doğrusal dönüşüm olsunlar.

$$T_2 \circ T_1 = \frac{a_2 \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + d_2} = \frac{(a_1a_2 + c_1b_2)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)z + c_2b_1 + d_1d_2}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} & (a_1a_2 + c_1b_2)(c_2b_1 + d_1d_2) - (a_2b_1 + b_2d_1)(a_1c_2 + c_1d_2) \\ &= (a_1d_1 - b_1c_1) - (a_2d_2 - b_2c_2) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $T_2 \circ T_1 \in PSL(2, \mathbb{C})$  dir. Benzer şekilde  $T_1 \circ T_2 \in PSL(2, \mathbb{C})$  olur.

Diğer yandan doğrudan işleme

$$T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$$

olduğu görülür. Her dönüşümün ters dönüşümünün de doğrusal olduğunu Önerme 1.1.4' ten biliniyor. Birim eleman ise  $T(z) = z = I(z)$  olarak bulunur.

**Teorem 1.1.7. (Başkan 2000)** Bir doğrusal dönüşümün üst yarı düzlemi kendi üzerine resmetmesi için gerekli ve yeterli koşul  $a, b, c, d$  katsayılarının gerçel sayı olmasıdır.

**Sonuç 1.1.8. (Başkan 2000)**  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 0\}$  üst yarı düzlemini kendi üzerine resmeden doğrusal dönüşümlerin kümesi  $PSL(2, \mathbb{R})$  simgesi ile gösterilir ve bu küme fonksiyon bileşkesi işlemine göre  $PSL(2, \mathbb{C})$ 'nin bir alt grubudur.

**Teorem 1.1.9. (Başkan 2000)** Her  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  için  $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  dir.

**Tanım 1.1.10.**  $\mathbb{C}_\infty$  düzlemini, sonlu sayıda nokta dışında, kendi üzerine bire-bir ve konform olarak resmeden her  $w = f(z)$  dönüşümü bir doğrusal dönüşümdür.

## 1.2. Modüler Grup ve Denklik Alt Grubu

$PSL(2, \mathbb{C})$  içinde katsayıları tamsayı olan dönüşümler büyük önem taşır. Bu özellikteki dönüşümler,  $PSL(2, \mathbb{C})$ 'nin bir alt grubunu oluşturur. Detaylar için standart referans (Schoeneberg 1974)'dür.

**Tanım 1.2.1.**  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$  şeklinde tanımlanan gruba *modüler grup* denir.

**Uyarı 1.2.2.** Kesirli lineer dönüşümler ile  $2 \times 2$  matrisler arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki uygulamada büyük kolaylıklar sağlar. Buna göre

$$\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

olarak tanımlanırsa Cebir ve Sayılar Teorisi'ndeki 1. İzomorfizm Teoremi'nden

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$$

olduğu görülebilir. Bu izomorfizm tüm kesirli lineer dönüşümler için de geçerlidir.

**Teorem 1.2.3. (Schoeneberg 1974)** Modüler grup  $T(z) = z + 1$  ve  $S(z) = -1/z$  dönüşümleriyle üretilir.

**Tanım 1.2.4.** Modüler grubun *temel denklik alt grubu*,  $\Gamma_0(N)$  ile gösterilir ve

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

olarak tanımlanır.

### 1.3 .Modüler Grubun Temel Bölgesi

**Tanım 1.3.1.**  $G$ , modüler grup  $\Gamma$ 'nin bir alt grubu ve üst yarı düzlem  $\mathcal{H}$ 'nin iki noktası  $\tau$  ve  $\tau'$  olsun. Eğer

$$\tau' = A\tau$$

olacak şekilde  $A \in G$  varsa bu iki noktaya  $G$  altında *denktirler* denir. Bu denklik  $G$  de bir denklik bağıntısı oluşturur.

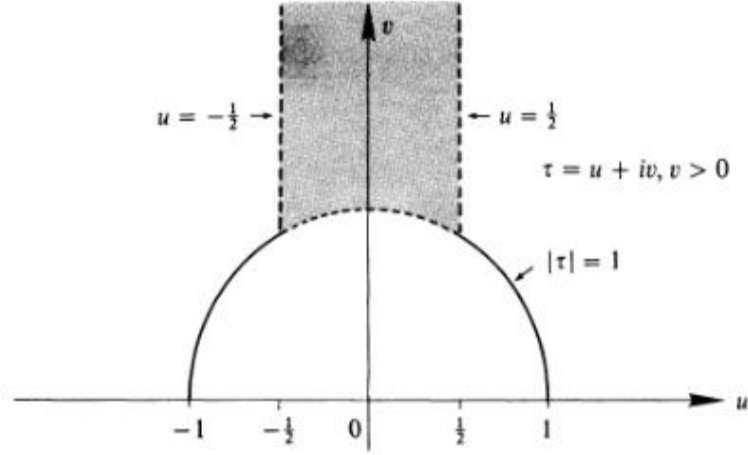
**Tanım 1.3.2.**  $G$  de bu denklik bağıntısı üst yarı düzlem  $\mathcal{H}$ 'i denklik sınıflarının bir ayrık koleksiyonuna ayırır öyle ki bu denklik sınıflarına *yörünge* denir ve  $G_\tau$  ile gösterilir.  $G_\tau$  yörüngesi,  $A \in G$  olmak üzere,  $A\tau$  formundaki tüm kompleks sayıların kümesidir.

**Tanım 1.3.3.**  $G, \Gamma$ 'nin bir alt grubu olsun. Her bir yörünge den seçilen noktaların kümesine  $G$ 'nin *temel kümesi* denir.

**Tanım 1.3.4.**  $G$ , modüler grup  $\Gamma$ 'nin bir alt grubu olsun. Üst yarı düzlem  $\mathcal{H}$ 'nin açık altkümesi  $R_G$  olsun. Eğer

- (a)  $R_G$ 'nin iki farklı noktası  $G$  altında denk değildir,
- (b) Eğer  $\tau \in \mathcal{H}$  ise,  $G$  altında  $\tau$ 'ya denk olacak şekilde  $R_G$ 'nin kapanışında bir  $\tau'$  noktası vardır,

şartlarını sağlıyorsa  $R_G$ 'ye  $G$ 'nin *temel bölgesi* denir.



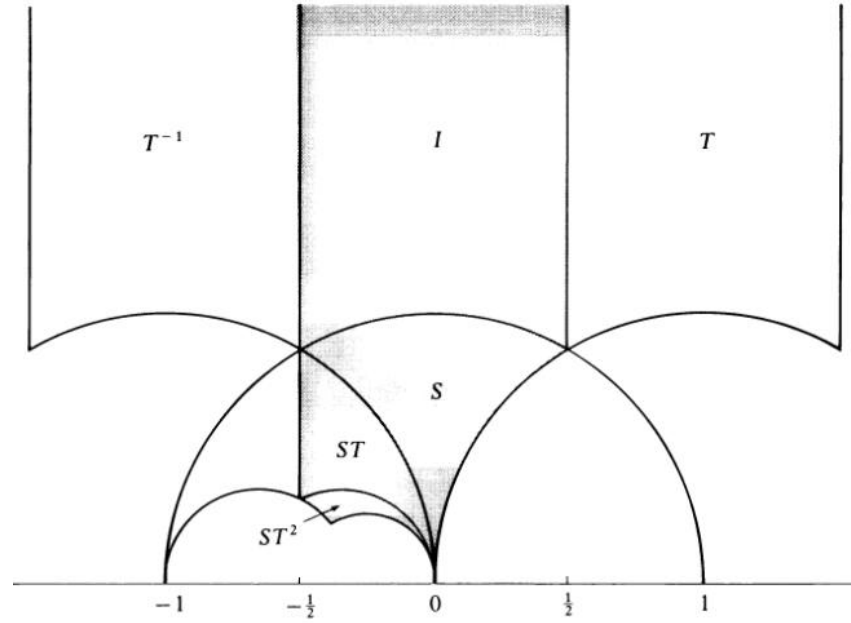
Şekil 1.1. Modüler grubun temel bölgesi.

**Teorem 1.3.5. (Schoeneberg 1974)**  $p$  asal bir sayı olmak üzere,

$$R_{\Gamma} \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(R_{\Gamma})$$

kümesi,  $\Gamma_0(p)$  alt grubunun temel bölgesidir.

Aşağıdaki şekil, yukarıdaki teorem kullanılarak  $p = 3$  için elde edilen  $\Gamma_0(3)$  alt grubunun temel bölgesini gösterir.



Şekil 1.2.  $\Gamma_0(3)$  için temel bölge.

## 1.4. Bernoulli sayıları

### 1.4.1 Tanım.

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (1.1)$$

verilsin. Bu seri açılımı yardımıyla elde edilen kuvvet serisindeki  $B_n$  katsayısına  $n$ . *Bernoulli sayısı* adı verilir.

**1.4.2 Örnek.** Bazı Bernoulli sayıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ B_1 &= -\frac{1}{2}, \\ B_2 &= \frac{1}{6}, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, \\ B_{10} &= \frac{5}{66}, \\ B_{12} &= -\frac{691}{2730}, \\ B_{14} &= \frac{7}{6}, \\ B_{16} &= -\frac{3617}{510}. \end{aligned}$$

**1.4.3 Uyarı.** Dikkat edilirse, burada  $n$ 'nin 1 den büyük tek değerleri için  $B_n = 0$  olur.

## 1.5. Riemann Zeta Fonksiyonu

**1.5.1 Tanım.** *Riemann zeta fonksiyonu*  $\zeta(s)$  ile gösterilir ve

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

olarak tanımlanır.

## 2. EISENSTEIN SERİLERİ

Eisenstein serileri bir sonraki bölümde tanıtılacak olan modüler formların önemli örneklerinden biridir. Özellikle Sayılar Teorisi metotlarının kolayca uygulanabilmesi nedeniyle konu, Kompleks Analiz ile Sayılar Teorisi arasında köprü oluşturur.

### 2.1. Giriş

**2.1.1. Tanım.**  $k > 2$  çift tamsayı,  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  ve  $Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$  olmak üzere

$$G_k(\omega_1, \omega_2) := \sum'_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-k}$$

biçiminde tanımlanan seriye *k-ağırlıklı homojen Eisenstein serisi* denir.

Tanımdaki sembolü  $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$  özelliğindeki tamsayılar üzerinden toplam alındığını göstermektedir.

**2.1.2. Tanım.** Yukarıdaki tanımda  $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  alınarak

$$G_k(\tau) := \omega_2^k G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum'_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} (m_1\tau + m_2)^{-k}$$

tanımlanan seriye de *k-ağırlıklı homojen olmayan Eisenstein serisi* denir.

**2.1.3. Uyarı.** Eisenstein serileri “eliptik bir fonksiyon” olan (Singerman ve Jones 1987, Sayfa 72) Weierstrass- $\wp$  fonksiyonu ile yakın bir ilişkisi vardır. Weierstrass- $\wp$  fonksiyonu  $G_4$  ve  $G_6$  sırasıyla 4 ve 6 ağırlıklı Eisenstein serileri olmak üzere

$$(\wp'(u))^2 = 4\wp(u)^3 - 60G_4\wp(u) - 140G_6$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bu diferansiyel denklemin çözümü yardımıyla Eisenstein serileri, Weierstrass- $\wp$  fonksiyonunun üreteç fonksiyonları olarak düşünülebilir.

Gerçekten de bu değişken katsayılı lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümü

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}$$

olur.

**2.1.4. Tanım.**  $k > 2$  ve çift tamsayı olmak üzere  $k$ -ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serileri  $E_k(z)$  ile gösterilir ve

$$E_k(z) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (cz+d)^{-k}$$

olarak tanımlanır.

**2.1.5. Uyarı.** Tanıma dikkat edilirse normalleştirilmiş Eisenstein serisi  $E_k(z)$ ,  $G_k(z)$  nin tüm terimleri, sabit terimi 1 olacak şekilde  $2\zeta(k)$  ile bölünmesiyle elde edilmiştir. Uygulamada daha çok bu seriler kullanılır.

## 2.2 Eisenstein Serilerinin Fourier Katsayıları

Eisenstein serileri periyodik fonksiyonlar olduğundan Fourier açılımları vardır. Bu serilerin aritmetik özelliklerini daha iyi çalışabilmek için Fourier katsayılarının elde edilmesi büyük önem taşımaktadır. Sıradaki teoremden de görülebileceği gibi bu katsayıların aritmetik fonksiyonlar yardımıyla hesaplanabilmesi konuyla ilgili asimptotik problemlerin çalışılmasında kolaylık sağlar. Gerçekten de Eisenstein serilerinin yeterince sayıda katsayısı uygun bilgisayar yazılımlarıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Bu seriler bu özelliği yardımıyla özellikle modüler formlar için önemli birer örnek olurlar.

Aşağıdaki teoremden Eisenstein serilerinin Fourier katsayılarının nasıl hesaplanabileceği görülmüştür.

**Teorem 2.2.1. (Apostol 1990)** Eğer  $\tau \in \mathcal{H}$  ve  $k > 2$  ve çift tamsayı

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m_1 \geq 1} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{v \geq 1} v^{k-1} e^{2\pi i m_1 v \tau} \\ &= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau} \end{aligned}$$

olur. Buradaki

$$\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m \quad (d > 0)$$

toplamı  $n$ 'nin bölenlerinin  $m$ . kuvvetlerini gösterir.

**İspat.**  $\tau \in \mathcal{H}, v > 0, k \geq 2$  için  $\alpha_v = (-2\pi i)^k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!}$  olmak üzere

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \sum_{v \geq 1} \alpha_v e^{2\pi i v \tau}$$

açıktır.  $q = e^{2\pi i \tau}$  olmak üzere

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\tau + n)^{-2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n$$

ve buradan

$$\sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(\tau + n)^2} = \frac{-4\pi^2 q}{(1-q)^2} - \frac{1}{\tau^2}$$

olur.

Karmaşık has olmayan integral kullanılarak

$$-\sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{1}{\tau + n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2\pi i}{1-q} + \frac{1}{\tau} + C$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\tau + n} = - \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v (-n)^{-(v+1)}, \quad \left| \frac{\tau}{n} \right| < 1,$$

olduğundan Eşitlik (1.1) kullanılarak

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \tau^{2n-1} = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n (2\pi i \tau)^{n-1}}{n!} + C, \quad |\tau| < 1.$$

$C = -\pi i$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$  ve  $k$  pozitif çift tamsayı olmak üzere,

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2(k!)} B_k \quad (2.1)$$

kullanılarak

$$G_k(\tau) = 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \left( -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau} \right). \quad (2.2)$$

elde edilir, bu da ispatı tamamlar.

**Önerme 2.2.2.**  $k \geq 3$  için  $G_k(\tau)$  Eisenstein serileri  $\mathcal{H}$  üst yarı düzleminde mutlak yakınsak olup  $\mathcal{H}$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde bu yakınsama düzgündür.

**İspat.**  $k \geq 3$  olsun. O halde  $G_k(\tau)$ 'nin tanımını kullanarak

$$G_k(\tau) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}^I |(m_1 \tau + m_2)^{-k}| \leq \frac{8}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}}$$

yazılabilir. Son eşitlikte yer alan seri hipotez gereği yakınsak olduğu için Weierstrass  $M$ -testi gereği  $G_k(\tau)$  Eisenstein serisi  $\mathcal{H}$  üst yarı düzleminde mutlak yakınsak,  $\mathcal{H}$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde ise bu yakınsama düzgündür.

**Uyarı 2.2.3.** Yukarıdaki seri mutlak yakınsak olduğu için toplamın sırası önemsizdir öte yandan  $G_k(\tau)$  Eisenstein serisinin özdeşliğin sıfırından farklı olduğu açıktır. Öte yandan

Eisenstein serilerinin yakınsaklığı herhangi bir referansta bulunabilecek bir problem olup, yukarıdaki önermede kaynak gösterilmeden doğrudan ispatı verilmiştir.

**Örnek 2.2.4.** Eisenstein serilerine örnek olarak aşağıdaki seriler verilebilir:

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n$$

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q}$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q}$$

$$E_8(z) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 q^n}{1-q}$$

**Örnek 2.2.5.** Bazı Eisenstein serilerinin Fourier açılımları aşağıda verilmiştir:

$$E_2(z) = 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - 144q^5 - 288q^6 - 192q^7 - 360q^8 - \dots$$

$$E_4(z) = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + \dots$$

$$E_6(z) = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - \dots$$

$$E_8(z) = 1 + 480q + 61920q^2 + 1050240q^3 + \dots$$

$$E_{10}(z) = 1 - 264q - 135432q^2 - \dots$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24q - 196632q^2 - \dots$$

Daha sonra görüleceği gibi Modüler form uzayı  $\mathbb{C}$  üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğu için boyut formülleri (Miyake 2006) yardımıyla Eisenstein serileri arasında bazı özdeşlikler elde edilebilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem 2.2.6. (Apostol 1990)** Eisenstein serileri için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

$$E_4^2 = E_8, E_4E_6 = E_{10}, E_4E_{10} = E_{14}, E_6E_8 = E_{14}$$

**Uyarı 2.2.7.** 4 ağırlıklı ve 6 ağırlıklı Eisenstein serileri yardımıyla daha yüksek ağırlıklı Eisenstein serileri elde edilebilir ((El Basraoui ve Sebbar 2010), Sayfa 2290).

Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 2.2.8. (Apostol 1990)**  $k > 4$  olmak üzere  $E_k$  Eisenstein serileri

$$E_8 = E_4^2$$

$$E_{10} = E_4E_6$$

$$691E_{12} = 441E_4^3 + 250E_6^2$$

$$E_{14} = E_4^2E_6$$

$$3617E_{16} = 1617E_4^4 + 2000E_4E_6^2$$

$$43857E_{18} = 38367E_4^3E_6 + 5500E_6^3$$

$$174611E_{20} = 53361E_4^5 + 121250E_4^2E_6^2$$

$$77683E_{22} = 57183E_4^4E_6 + 20500E_4E_6^3$$

$$236364091E_{24} = 49679091E_4^6 + 176400000E_4^3E_6^2 + 10285000E_6^4$$

özdeşliklerini sağlar.

**Uyarı 2.2.9.** Dikkat edilirse her bir  $k \geq 8$  için  $E_k(z)$  Eisenstein serisi  $E_4(z)$  ve  $E_6(z)$ ' nin polinomları cinsinden ifade edilebilir.

$E_2, E_4$  ve  $E_6$  Eisenstein serileri Ramanujan tarafından yoğun şekilde çalışılmış ve ünlü matematikçi aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

**Teorem 2.2.10. (Ramanujan 1916)** Eisenstein serileri aşağıdaki diferansiyel denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \frac{dE_2}{d\tau} = \frac{1}{12} (E_2^2 - E_4), \\ \text{(ii)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \frac{dE_4}{d\tau} = \frac{1}{3} (E_2E_4 - E_6), \\ \text{(iii)} \quad & \frac{1}{2\pi i} \frac{dE_6}{d\tau} = \frac{1}{12} (E_2E_6 - E_4^2). \end{aligned}$$

### 2.3 Ramanujan- $\tau$ Fonksiyonu

Eisenstein serileri yardımıyla elde edilen Ramanujan- $\tau$  fonksiyonu oldukça ilginç özelliklere sahiptir.

**Tanım 2.3.1.**  $G_4$  ve  $G_6$  sırasıyla 4 ve 6 ağırlıklı Eisenstein serileri olmak üzere Ramanujan- $\tau$  fonksiyonu  $\Delta$  ile gösterilir ve

$$\Delta(\tau) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 (20G_4^3 - 49G_6^2)$$

eşitliği yardımıyla tanımlanır.

**Teorem 2.3.2.**  $(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)$  fonksiyonunun Fourier açılımındaki katsayılar tamsayıdır.

**İspat.**  $q = e^{2\pi i\tau}$  olsun.  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$  ve  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$  olmak üzere

$$G_4(\tau) = \frac{\pi^4}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} \left( 1 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n \tau} \right),$$

$$G_6(\tau) = \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} \left( 1 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) e^{2\pi i n \tau} \right)$$

olduğu biliniyor. O halde

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{12}\Delta(\tau) &= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3} (1 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n)^3 - \frac{1}{2^6 \cdot 3^3} (1 + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n)q^n)^2 \\
&= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3} (1 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n)^3 - \frac{1}{2^6 \cdot 3^3} (1 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n)q^n) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{n \geq 1} (5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n))q^n
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n) = \sum_{d/n} (5d^3 + 7d^5) \equiv 5 \sum_{d/n} d^3(1 - d^2) \pmod{12}.$$

$$d^3(1 - d^2) \equiv 0 \pmod{12}$$

olduğu ise açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teoremden yola çıkarak

$$(2\pi)^{-12}\Delta(\tau) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)e^{2\pi i\tau n} \tag{2.5}$$

kullanılarak Ramanujan- $\tau$  fonksiyonunun bazı değerleri

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= 1, \\
\tau(2) &= -24, \\
\tau(3) &= 252, \\
\tau(4) &= -1472, \\
\tau(5) &= 4830, \\
\tau(6) &= -6048, \\
\tau(7) &= -1674
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 3. MODÜLER FORMLAR VE EISENSTEIN SERİLERİ

Bu bölümde matematiğin son yıllardaki popüler konularından birisi olan modüler formlara kısa bir giriş yapılacak ve Eisenstein serilerinin modüler formlarla ilişkisi ortaya konacaktır. Bu bölümde yer alan kavramlar için standart referanslar olan (Miyake 2006) ve (Koblitz 1984) kaynakları kullanılmıştır.

**Tanım 3.1.**  $f(z)$ ,  $\mathcal{H}$  üst yarı düzlemde tanımlı meremorf bir fonksiyon ve  $k$  bir pozitif tamsayı olsun.  $f(z)$  fonksiyonu her  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  için

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z) \quad (3.1)$$

eşitliğini gerçeklesin.

Üstelik  $f(z)$ ,  $z = \infty$  da meremorf yani  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$  Fourier serisinin  $n < 0$  özelliğinde en fazla sonlu sayıda  $a_n$  katsayısı sıfırdan farklı olsun.

Bu durumda  $f(z)$  fonksiyonuna  $\Gamma$  için  $k$ -ağırlıklı modüler fonksiyon denilir.

$f(z)$ ,  $\Gamma$  için  $k$ -ağırlıklı modüler fonksiyon olsun. Eğer  $f(z)$ ,  $\mathcal{H}$  üzerindeki bir noktada ve  $z = \infty$  da analitik, yani her  $n < 0$  için  $a_n = 0$  ise  $f(z)$  fonksiyonuna  $\Gamma$  için  $k$ -ağırlıklı bir modüler form adı verilir.

Eğer  $a_0 = 0$ , yani modüler form sonsuzda sıfır oluyorsa  $f(z)$  ye  $\Gamma$  için  $k$ -ağırlıklı bir cusp form denir.

**Uyarı 3.2.**  $f(z)$ ,  $k$ -ağırlıklı bir modüler form olsun.  $\Gamma'$  nin üreteçleri dikkate alınırsa bu üreteçler için

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = (-z)^k f(z) \quad (3.2)$$

$$f(z + 1) = f(z) \quad (3.3)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.3) eşitliğine dikkat edilirse modüler formun periyodik fonksiyonlar oldukları görülür.

**Uyarı 3.3.**  $\Gamma$  için  $k$ -ağırlıklı modüler formların kümesi  $M_k(\Gamma)$  ve cusp formların kümesi  $S_k(\Gamma)$  ile gösterilir.

**Teorem 3.4.**  $M_k(\Gamma)$  ve  $S_k(\Gamma)$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. ((Miyake 2008) Sonuç 4.1.4 Sayfa 99 ve (Koblitz 1984) Sayfa 109'a bakılabilir.)

**Tanım 3.5.**  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  serisine  $f$ 'nin  $q$ -açılımı denir.

**Uyarı 3.6.**  $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$  için (3.1) eşitliği yazılırsa

$$f(z) = (-1)^k f(z)$$

elde edilir. Buradan  $f(z)$  özdeşliğin sıfırından farklı bir fonksiyon olması halinde  $k$ 'nin çift sayı olması gerektiği görülür. Başka bir deyişle  $k$ 'nin tek sayı ağırlıklı ve özdeşliğin sıfırından farklı bir modüler fonksiyonu yoktur. O halde bu çalışmada  $k$ 'nin çift sayı olduğu kabul edilecektir.

Eisenstein serileri aritmetik fonksiyonlar yardımıyla tanımlandığı için Fourier katsayıları kolayca hesaplanabilir. Öte yandan modüler formlarla bağlantısı nedeniyle önemli birer aritmetik obje haline gelirler. Eisenstein serileri ile modüler formlar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.7. (Koblitz 1984)**  $G_k, k > 2$  ağırlıklı Eisenstein serisi olsun. Bu durumda

$$G_k \in M_k(\Gamma) \text{ dır.}$$

**İspat:** Hipotez gereği  $k$  en az 4 olduğundan

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}}^I (mz + n)^{-k}$$

serisi mutlak yakınsaktır ve yakınsama  $\mathcal{H}$ 'nin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgündür. Böylece  $G_k(z)$ ,  $\mathcal{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde analitik bir fonksiyon olur. Tanım gereği  $m$  ve  $n$  aynı anda sıfır olmayan tamsayılar olduğu için  $G_k(z)$  ve  $G_k(z+1)$  serileri, terimlerinin sırası farklı, aslında aynı serilerdir. O halde  $G_k(z) = G_k(z+1)$  olduğu açıktır.

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}^I (mz+n)^{-k} = \sum_{n \neq 0} n^{-k} = 2\xi(2) < \infty$$

olduğu için  $G_k(z)$ 'nin Fourier açılımı negatif terimleri içermez. Öte yandan

$$z^{-k} G_k\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}^I (mz+n)^{-k} = G_k(z)$$

olur. Bu da ispatı bitirir.

#### 4. EISENSTEIN SERİLERİNİN SIFIRLARI

Herhangi bir karmaşık fonksiyon verildiğinde akla gelecek ilk sorulardan birisi de bu fonksiyonun varsa sıfırları ve bu sıfırların düzlemdeki yerleridir. Doğal olarak bu problem modüler formlar ve özel olarak Eisenstein serileri için de çalışılmıştır.

Modüler formlar için verilen değerlik formülü (Miyake 2006) yardımıyla  $k$ -ağırlıklı bir modüler formun sıfırlarının sayısını kabaca  $\left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$  olduğu söylenebilir.

$M_k$  uzayının bir bazı da Eisenstein serileri yardımıyla oluşturulabilir (Garthwaite ve ark.). Bu durum ise Eisenstein serilerinin Modüler Formlar Teorisi'ndeki önemli yerinin bir başka kanıtıdır.

Bu bölümde (Garthwaite ve ark. 2011)'dan faydalanılmıştır.

İlk olarak bir fonksiyonun sıfırının tanımı verilecektir.

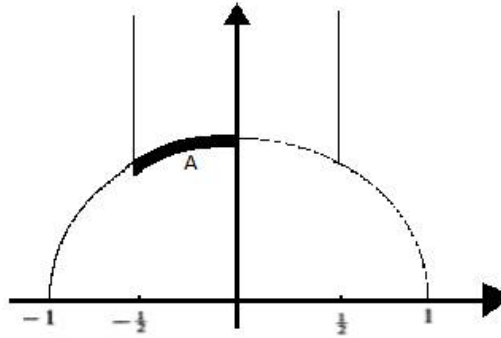
**Tanım 4.1.** Herhangi bir  $f(z)$  fonksiyonu verilsin. Bu durumda  $f(z) = 0$  eşitliğini sağlayan  $z$  noktalarına  $f(z)$  fonksiyonun *sıfırı* adı verilir.

Eisenstein serilerinin sıfırları literatürde ilk olarak 1960'larda Wohlfart (1963) ve R.A. Rankin (1968) tarafından çalışılmıştır. Bu makalelerde  $k = 36$  hariç  $4 \leq k \leq 38$  için  $E_k(z)$ 'nin sıfırlarının birim çember üzerinde olduğu gösterilmiştir. Ardından F.K.C.Rankin ve Swinnerton-Dyer aşağıdaki teoremi vermiştir.

**Teorem 4.2. (Rankin ve Swinnerton-Dyer 1970)**  $k \geq 4$ , çift sayı olsun.  $E_k(z)$ 'nin  $\Gamma$  modüler grubun temel bölgesi üzerindeki tüm sıfırları

$$A := \left\{ z = e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$

yayı üzerindedir.



**Şekil 3.1.**  $E_k(z)$ 'nin sıfırları ( $k \geq 4$ ).

**İspat:**  $n$  bir tamsayı olmak üzere ve  $s = 0, 4, 6, 8, 10$  ve  $14$  olmak üzere  $k = 12n + s$  olsun.

Değerlik formülü gereği,  $s$  sayısı  $E_k(z)$ 'nin  $i$  ve  $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  noktalarında sahip olması gereken en az sıfırlarının sayısını belirler. Bu ise  $E_k(e^{i\theta})$ 'nin  $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$  aralığında en az  $n$  tane sıfır yeri olmasına denktir.

$n > 0$  için  $R, E_k(z)$ 'nin tanımında yer alan tüm terimlerin kalanını göstermek ve  $c^2 + d^2 > 1$  olmak üzere

$$F_k(\theta) = e^{\frac{ik\theta}{2}} E_k(e^{i\theta}) = 2\cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) + R$$

göz önüne alınsın. O halde  $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$  aralığında  $|R| < 2$  olur. Böylece  $E_k(e^{i\theta})$ 'nin bu aralıktaki sıfır sayısı en az  $2\cos\left(k\frac{\theta}{2}\right)$ 'nin sıfır sayısı kadardır. Rankin ve Swinnerton-Dyer kısa bir hesaplamadan sonra sıfır yerleri sayısının  $n$  tane olduğunu göstermiştir.

Eisenstein serilerinin sıfır yerlerinin literatürdeki son çalışmalarından birisi de “ayırma özelliği”dir. Bu özellik (Gekeler 2001)’de gözlemlenmiş ve (Nozaki 2008)’de ispatlanmıştır.

**Teorem 4.3. (Nozaki 2008)**  $k \geq 12$  bir çift tamsayı ve  $E_k(z)$ ,  $SL_2(\mathbb{Z})$  için  $k$ -ağırlıklı Eisenstein serisi olsun.  $\{e^{ia_j}: a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ ,  $E_k(z)$ 'nin  $A$  üzerindeki sıfırlarının

kümesi ve  $\{e^{ib_j}: b_1 < b_2 < \dots < b_{n+1}\}$ ,  $E_{k+12}(z)$ 'nin  $A$  üzerindeki sıfırlarının kümesi olsun. Bu takdirde  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $b_j < a_j < b_{j+1}$  olur.

## 5. İKİ AĞIRLIKLIL EISENSTEIN SERİLERİ VE BU SERİLERİN SIFIRLARI

Modüler formların sıfırlarının kümeleri uzun yıllar boyunca matematikçilerin ilgi çekici çalışma konularından birisi olmuştur. Önceki bölümde görüldüğü gibi Rankin ve Swinnerton-Dyer, (1970)'de  $k$  ağırlıklı Eisenstein serilerinin sıfırlarının standart temel bölgedeki  $|z| = 1$  çemberi üzerinde olduğu gösterilmiştir.

Literatürde güncel çalışmalar göz önüne alınırsa Hahn, (2007)'de bazı özel gruplar üzerinde tanımlanan Eisenstein serilerinin sıfırları çalışıldığı görülür. Miezaki, Nozaki ve Shigezumi, (2007)'de modüler grubun bazı özel alt grupları üzerinde tanımlı Eisenstein serileri için benzer problem olan sıfır yerlerinin geometrik yerleri üzerinde durulmuştur. Farklı bir problem olarak, Rudnick (2005)'de modüler formların sıfırlarının asimptotik dağılımı çalışılmış ve eşdağılım sonuçları elde edilmiştir. Böylece modüler formların sıfırları üzerine iki farklı yaklaşımdan yola çıkılarak önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

Bu bölümde hemen hemen modüler form olan iki ağırlıklı  $E_2(z)$  Eisenstein serileri için sıfırları için (El Basraoui ve Sebbar 2010) ile (Wood ve Young 2013)'te elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

### 5.1. Tanım ve Temel Özellikler.

**Tanım 5.1.1.** İki ağırlıklı Eisenstein serileri  $E_2(z)$  ile gösterilir ve

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n$$

Fourier açılımı yardımıyla tanımlanır.

**Teorem 5.1.2. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2(z)$  Eisenstein serileri her

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma \text{ için}$$

$$E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 E_2(z) - \frac{6}{\pi} ic(cz+d) \quad (4.1)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlar.

**Uyarı 5.1.3.** Yukarıdaki teoreme dikkat edilirse  $E_2(z)$  Eisenstein serileri modüler formların tanımında yer alan fonksiyonel eşitliği bir terim farkla sağlamaz ancak yine de benzer bir eşitliği sağlar. Bu nedenle  $E_2(z)$  Eisenstein serileri *hemen hemen modüler form* özelliğini taşır.

## 5.2. $E_2$ Eisenstein Serisinin Sıfırları

$E_2(z)$ 'nin sıfırlarının sayısı uzun süre literatürde açık problem olarak yer aldı. (El Basraoui ve Sebbar 2010)'da ilk olarak bu sayının sonsuz çoklukta olduğunu gösterilmiştir. Bu bölümde bu makalede yer alan sonuçlar ele alınacaktır.

**Teorem 5.2.1. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$  Eisenstein serisinin sanal eksen üzerinde  $\tau_0$ , ve  $Re(z) = \frac{1}{2}$  doğruları üzerinde  $\tau_1$  gibi en az bir sıfırı vardır.

**İspat:**  $n \geq 0$  olmak üzere  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ve  $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$  olarak tanımlansın.  $\tau$  sayısı pür sanal sayı olarak alınırsa, yani  $\tau = iy$  olursa, bu durumda  $E_2(\tau)$  reel değerler alır ve aynı zamanda  $(0, \infty)$  üzerinde artan olur. Öte yandan  $\lim_{y \rightarrow 0} E_2(iy) = -\infty$  ve  $\lim_{y \rightarrow \infty} E_2(iy) = 1$  'dir. O halde  $E_2(z)$ 'nin sanal eksen üzerinde bir tek  $\tau$  gibi bir sıfır yeri vardır.

Benzer olarak  $E_2(\tau)$ ,  $\tau = \frac{1}{2} + iy$ ,  $y > 0$  için geçerlidir. Bundan başka

$\lim_{y \rightarrow 0} E_2\left(\frac{1}{2} + iy\right) = -\infty$  olur. Gerçekten de  $\alpha = S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  için

$$E_2\left(\frac{1}{2} + iy\right) = -\frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{4} E_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4y}\right) - \frac{6y}{\pi}\right)$$

olur.  $y \rightarrow 0$  iken  $E_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4y}\right) \rightarrow 1$  olduğunda  $\lim_{y \rightarrow 0} E_2\left(\frac{1}{2} + iy\right) = -\infty$  elde edilir.

$E_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = E_2\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$  olduğunda  $E_2(2)$ 'nin reel kısmı  $\frac{1}{2}$  ve sanal kısmı  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , dan küçük olan  $\tau_1$  gibi bir sıfır yeri vardır. Son olarak (El Basraoui ve Sebbar 2010)'de Önerme 2.1. kullanılarak ispat tamamlanır.

**Uyarı 5.2.2.** Modüler formlar,  $\Gamma$  modüler grubun elemanları tarafından invaryant bırakılır. Ancak  $E_2(z)$  Eisenstein serisi hemen hemen modüler form olduğu için bu özelliği kısmen sağlar. Bu durum aşağıdaki önermede yer almaktadır.

**Önerme 5.2.3. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$ 'nin iki sıfır yeri denktir  $\Leftrightarrow$  Biri diğerinin bir tamsayı kadar ötelemesidir.

**İspat:**  $z_1$  ve  $z_2$  üst yarı düzlemde  $\Gamma$ 'ya göre denk olan iki sıfır yeri olsun. Yani belli bir  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  için  $z_1 = \gamma z_2$  olsun. Bu durumda (4.1) gereği

$$E_2(z_1) = 0 = E_2(\gamma z_2) = (cz_2 + d)^2 E_2(z_2) + \frac{6c}{\pi i} (cz_2 + d) = \frac{6c}{\pi i} (cz_2 + d)$$

elde edilir. Son eşitliğin sıfır olması ancak ve ancak  $c = 0$  ile mümkündür. Bu durumda  $ad - bc = 1$  olduğundan  $a = d = \pm 1$  olmalıdır. O halde  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  elde edilir ki bu bir ötelemedir. Yeter şart ise  $E_2$ 'nin öteleme dönüşümlerinin invaryant kalmasından elde edilir. Öyle ki  $z_1, z_2$ 'nin bir tamsayı katı ötelemesi ise  $z_1 = \gamma z_2$  olacak şekilde bir  $\gamma \in \Gamma$  vardır. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 5.2.4. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$ 'nin  $S = \left\{ \tau \in \mathcal{H} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2} \right\}$  şeridi üzerinde  $SL_2(\mathbb{Z})$  ye göre denk olan iki farklı sıfırı yoktur.

$\Delta$  fonksiyonunun çarpım formülü kullanılarak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

**Teorem 5.2.5.**  $E_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$  olur.

**Teorem 5.2.6. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$ 'nin  $S$  üzerinde sonsuz çoklukta sıfır yeri vardır.

Yukarıdaki teorem yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 5.2.7.** Delta fonksiyonu  $\Delta$ 'nın sonsuz çoklukta kritik noktası vardır.

**İspat:**  $E_2$  Eisenstein serisi delta fonksiyonu  $\Delta$ 'nın logaritmik türevi olduğu ve bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktalar kritik noktalar olduğu için ispat açıktır.

**Teorem 5.2.8. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$ 'nin tüm sıfırları basit sıfır yerleridir.

**İspat:**  $E_0, E_2$ 'nin bir sıfır yeri olsun. O halde eşitlik (6) gereği

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dE_2(z_0)}{d\tau} = \frac{1}{12} (E_2(z_0)^2 - E_4(z_0)) = -\frac{1}{12} E_4(z_0)$$

olur. Böylece  $z_0$ 'ın basit sıfır yeri olduğunu göstermek için tanım gereği  $E_4(z_0) \neq 0$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $E_4$ 'ün tüm yerlerinin  $\tau = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ve bu noktanın  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ 'ye göre denk olan noktalar olduğu biliniyor. O halde her  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  için  $E_2(\gamma\tau) \neq 0$  olduğu gösterilmelidir.

Her  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  için eşitlik (4.1) kullanılmalıdır.

$$E_2(\gamma \cdot \tau) = (c\tau + d)^2 \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{6c}{\pi i} (c\tau + d) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} (c^2 - cd + d^2)$$

elde edilir.

O halde  $E_2(\gamma\tau) = 0$  olması için  $c = d = 0$  olmalıdır. Ancak  $ad - bc = 1$  olma koşulu ile bu durum imkansızdır. Yani  $E_2(\gamma\tau) \neq 0$  olur ki bu da ispatı bitirir.

**Uyarı 5.2.9.**  $E_2(z)$  Eisenstein serileri hemen hemen modüler form adını aldığı daha önce belirtilmişti. Doğal olarak akla bu serilerin sıfırlarının yerleri problemi akla gelir. Öte yandan bu serilerin türevlerinin sıfır yerleri de bir başka doğal araştırma konusu olur. Ancak iki durumda da modüler formların sağladığı fonksiyonel eşitliğin getirdiği indirgeme teorisi burada işe yaramadığından üst yarı düzlemin sınırına yaklaşan sıfırların sonsuz çoklukta dizisinin elemanlarını temel bölgeye taşıyacak bir metot yoktur. Bu nedenle bu problem içinde ayrı bir zorluk barındırmaktadır.

**Uyarı. 5.2.10.** Teorem 3.1.2'deki özdeşlikten  $E_2(z)$ 'nin üst yarı düzlemdeki sıfırlarının  $\Delta'(z)$  fonksiyonunun sıfırlarıyla örtüştüğü görülür. El Basroui ve Sebbar, (2010)'da  $E_2(z)$ 'nin  $G = \{z \in \mathcal{H} : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$  şeridi içinde  $\Gamma$ 'nın dönüşümleri altında birbirine resmedilebilen sonsuz çoklukta sıfırının olduğu gösterilmiştir. Bu sonucun diğer hemen hemen modüler formlara genelleştirilmesiyle ilgili sonuçlar Saber ve Sebbar (2012)'de yer almaktadır.

### 5.3. $E_2(z)$ 'nin Sıfır Yerleri Üzerine Bazı Hesaplamalar

Wood ve Young, Mathematica yazılımını kullanarak  $E_2(z) = 0$  denklemini iki ağırlıklı Eisenstein serilerinin kesik Fourier açılımı yardımıyla çeşitli  $\epsilon$  değerleri için  $y \geq \epsilon$  koşuluyla nümerik olarak çözmüşlerdir.

Çeşitli nedenlerden dolayı bu sıfırların yerleri  $y$ -değerlerinin azalan sırasıyla listelenmiştir.

En büyük sıfır yerine eğer  $z_1$  denirse, bu durumda bu sıfır  $x = 0$ ,  $y = 0.5235217000179992$  noktasında yer almaktadır.  $E_2(iy)$  değeri reel sayı olup  $y > 0$  için arttığı ve  $\lim_{y \rightarrow 0^+} E_2(iy) = -\infty$  ve  $\lim_{y \rightarrow \infty} E_2(iy) = 1$  olduğu için  $x = 0$  doğrusu üzerinde  $E_2(z)$ 'nin tam olarak bir tane sıfırı vardır.

İki ağırlıklı Eisenstein serilerinin bir tane daha sıfırı vardır, bu noktaya  $z_2$  denirse, bu sıfır yeri  $x = -1/2$ ,  $y = 0.13091903039676245$  noktasındadır.

El Basroui ve Sebbar, (2010)'da kullanılan metotlar takip edilerek Wood ve Young (2015)'te  $x = -1/2$  özelliğinde bir sıfır yerinin daha olduğu ispatlanmıştır.

Mathematica kullanılarak  $x < 0$  için yaklaşık sıfır yerleri

$$z_3 = -0.33332589074451363 + 0.05818192365400147i$$

$$z_4 = -0.2499951743678368 + 0.03272491502475048i$$

$$z_5^1 = -0.19999706592873248 + 0.020942992286928155i$$

$$z_5^2 = -0.40000182048192795 + 0.020946451276672513i$$

olarak bulunmuştur. Verilere dikkat edilirse sıfır yerlerinin  $x$  – koordinatları sırasıyla  $-1/3$ ,  $-1/4$ ,  $-1/5$  ve  $-2/5$  rasyonel sayılarına yaklaşmaktadır.  $y$  – koordinatları arasında da şu şekilde bir ilişki vardır.

$$\frac{Im(z_1)}{Im(z_2)} = 3.99882 \dots,$$

$$\frac{Im(z_1)}{Im(z_3)} = 8.99801 \dots,$$

$$\frac{Im(z_1)}{Im(z_4)} = 15.9976 \dots,$$

$$\frac{Im(z_1)}{Im(z_5^1)} = 24.9975 \dots,$$

$$\frac{Im(z_1)}{Im(z_5^2)} = 24.9933 \dots,$$

Dikkat edilirse bu sayılar bir tamkareye oldukça yakındır. Böylece Wood ve Young (2015)'te aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

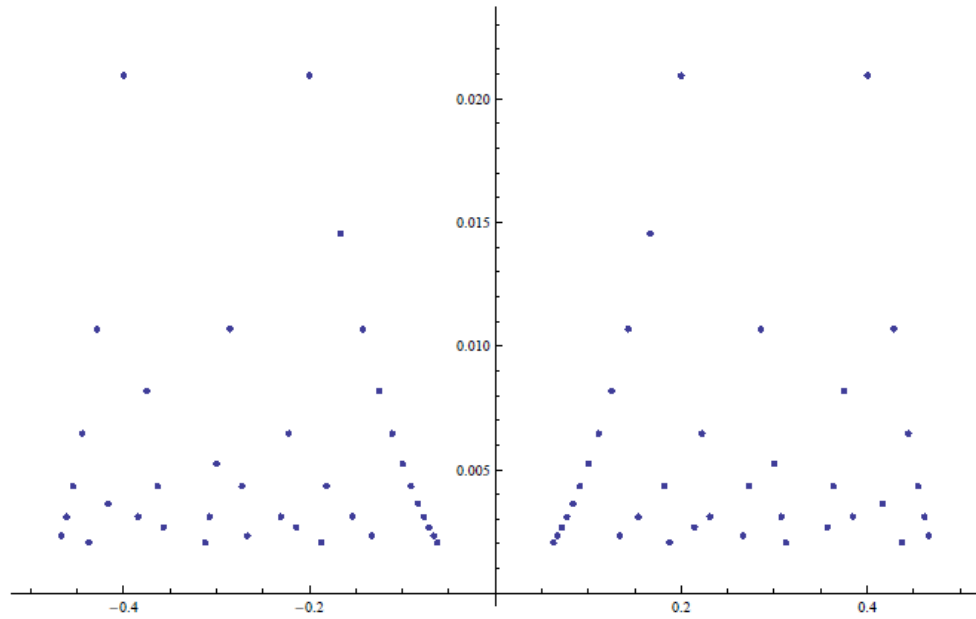
**Teorem 5.3.1. (Wood ve Young 2015)**  $c$  ve  $d$  aralarında asal ve  $-\frac{d}{c} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  özelliğindeki iki sayı ve

$$\hat{z}_c^d := -\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 \left(\frac{6}{\pi}\right)}$$

olarak tanımlansın. Bu özellikteki her bir rasyonel sayı için  $E_2$ 'nin öyle bir  $z_c^d$  sıfırı vardır ki

$$|z_c^d - \hat{z}_c^d| \leq \frac{.00283}{c^2 \left(\frac{6}{\pi}\right)^2}$$

olur.



**Şekil 5.1.**  $E_2(z)$ 'nin sıfırları.

#### 5.4. Yardımcı Bir Fonksiyon İle Sıfırların Araştırılması

Bu bölümde “eşvaryant fonksiyon” tanımlanacak ve hesaplamalarda kullanılan yardımcı bir fonksiyon tanımlanacak ve bu fonksiyonun eşvaryant olduğu görülecektir.

**Tanım 5.4.1.**  $\mathcal{H}$  üst yarı düzlemde tanımlı bir  $h(z)$  fonksiyonu verilsin. Eğer her  $\gamma \in \Gamma$  için

$$h(\gamma z) = \gamma h(z)$$

oluyorsa  $h(z)$  fonksiyonuna eşvaryant fonksiyon denir.

**Teorem 5.4.2. (Wood ve Young 2015)**  $h(z) = z + \frac{6/\pi i}{E_2(z)}$  biçiminde tanımlanan  $h(z)$  eşvaryant bir fonksiyondur.

**İspat:**  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  ve  $z \in U$  olsun bu durumda eşitlik (3.1) gereği

$$h(\gamma z) = \frac{1}{cz + d} \left[ az + b + \frac{\frac{6}{\pi i}}{(cz + d)E_2(z) + \frac{6}{\pi i}c} \right]$$

elde edilir. İkinci terimin pay ve paydası  $E_2(z)$  ile bölerek ve payda eşitlenerek

$$h(\gamma z) = \frac{1}{cz + d} \left[ \frac{(az + b) \left( cz + d + \frac{6c}{\pi i E_2(z)} \right) + \frac{6}{\pi i E_2(z)}}{(cz + d) + \frac{6c}{\pi i E_2(z)}} \right]$$

bulunur. Pay kısmına  $ad - bc = 1$  ve böylece  $ad = 1 + bc$  yazılarak, ayrıca sadeleştirerek

$$h(\gamma z) = \frac{az + b + a \frac{6}{\pi i E_2(z)}}{cz + d + c \frac{6}{\pi i E_2(z)}} = \gamma h(z)$$

elde edilir ki bu da ispatı bitirir.

$E_2(z)$  Eisenstein serisinin sıfır yerleri için eşvaryant olma özelliği kullanılarak elde edilen başka bir özellik aşağıdaki önerme yardımıyla verilmiştir.

**Teorem 5.4.3. (Wood ve Young 2015)**  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  için eğer  $E_2(z_0) = 0$  ise bu durumda  $h(\gamma z_0) = \frac{a}{c}$  olur. Tersine  $(a, c) = 1$  olmak üzere  $h(\tau_0) = \frac{a}{c}$  ise bu durumda belli bir  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  için  $E_2(\gamma^{-1}z_0) = 0$  olur.

**İspat:**  $E_2(z_0) = 0$  olsun. Bu durumda  $h(z_0) = \infty$  olur. O halde  $z = \gamma z_0$  alınsın dikkat edilirse  $\gamma^\infty = \frac{a}{c}$  'dir. Böylece

$$h(\gamma z_0) = \gamma h(z_0) = \gamma^\infty = \frac{a}{c}$$

elde edilir. Tersine  $h(z_0) = \frac{a}{c}$  olsun. Bu takdirde

$$h(\gamma^{-1}\tau_0) = \gamma^{-1}h(\tau_0) = \gamma^{-1}\frac{a}{c} = \infty$$

ve böylece  $E_2(\gamma^{-1}z_0) = 0$  elde edilir.

### 5.5. $E_2$ 'nin Bir Sıfır Yerlerinin Dağılımı

Bu bölümde  $E_2(z)$ 'nin sıfırlarının dağılımıyla ilgili olarak literatürde güncel olarak yer alan iki sonuç ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 5.5.1. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $c \geq c_0$  özelliğindeki tüm  $c$  pozitif tamsayıları için  $\frac{1}{c}$  gibi bir köşesinde  $E_2$ 'nin bir sıfırı var olacak şekilde bir temel bölge oluşturacak şekilde bir  $c_0$  tamsayısı vardır.

**Uyarı 5.5.2.** Yukarıda verilen teorem  $E_2$  Eisenstein serisinin sıfır yerlerinin sayısının sonsuz çoklukta olduğunu gösterir. Öte yandan temel bölge tanım gereği tüm bu sıfırlar  $SL_2(\mathbb{Z})$ 'ye göre denk olmayan noktalardır.

**Teorem 5.5.3. (El Basraoui ve Sebbar 2010)**  $E_2$  Eisenstein serisinin  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ 'nin temel bölgesi içinde sıfır yeri yoktur.

## KAYNAKLAR

- Apostol T. “Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory”, 2. Baskı, *Springer-New York*, (1990).
- Başkan T. “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, *Dora Yayıncılık*, (2000).
- Duke W. ve Jenkins P., “On the zeros and coefficients of certain weakly holomorphic modular forms.”, *Pure and Appl. Math. Q.*, 4(4): 1327-1340 (2008).
- El Basraoui, A. ve Sebbar, A., “Zeros of the Eisenstein Series  $E_2$ .” *Proceedings of the American Mathematical Society*. 138 (7): 2289-2299 (2010).
- Garthwaite S., Long L. ve Swisher H., “Zeros of classical Eisenstein series and recent developments). *Fields Institute Communications Volume WIN—Women in Numbers, Research Directions in Number Theory, American Mathematical Society*”, (2011).
- Gekeler E. U., “Some observations on the arithmetic of Eisenstein series for the modular group  $SL(2, Z)$ ”, *Archiv der Mathematik*, (Basel) 77(1): 5–21, (2001).
- Ghosh, A. ve Sarnak, P., “Real zeros of holomorphic Hecke cusp forms.”, *European Mathematical Society*, 14 (2): 465-487 (2012).
- Hahn, H., “On zeros of Eisenstein series for genus zero Fuchsian groups.”, *American Mathematical Society*, 135 (8): 2391-2401 (2007).
- Koblitz, N. “Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms”, *Springer-Verlag New York*, (1984).
- Miezaki T., Nozaki, H. ve Shigezumi, J., “On the zeros of Eisenstein series for  $\Gamma_0^*(2)$  and  $\Gamma_0^*(3)$ .”, *J. Math. Soc. Japan*, 59 (3): 693-706 (2007).
- Miyake T., “Modular Forms”, *Springer-Verlag*, (2006).
- Nozaki H., “A separation property of the zeros of Eisenstein series for  $SL(2, Z)$ .”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(1): 26–36. (2008).
- Ramanujan S., “On certain arithmetical functions.”, *Trans. Cambridge Philosophical Society*. 22 (9): 159–184 (1916).
- Rankin, F. K. C., Swinnerton-Dyer, H. P. F. , “On the zeros of Eisenstein series.”, *Bulletin London Mathematical Society*, 2 : 169-170(1970).
- Saber, H., Sebbar, A., “On the Critical Points of Modular Forms”, *J. Number Theory*, 8: 1780-1787(2012).
- Schoeneberg, B., “Elliptic modular functions”, *Springer-Verlag*, (1974).

Singerman D, Jones G. A., “Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint”, *Cambridge University Press*, (1987).

Wohlfahrt K., “Über die Nullstellen einiger Eisensteinreihen., (German), *Mathematische Nachrichten*, 26: 381-383(1963/1964).

Wood, R.ve Young, M. P, “Zeros of the weight two Eisenstein Series.”, *Journal of Number Theory*, (2015).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Kenan Elmaağaç  
Doğum Yeri ve Tarihi : Kayseri / 1979



### Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Matematik  
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce  
Bilimsel Faaliyetleri :

### İş Deneyimi

Stajlar :  
Projeler :  
Çalıştığı Kurumlar : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Meslek Yüksekokulu

### İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi MYO BİLECİK  
Tel : (228) 214 16 16  
E-Posta Adresi : kenan.elmaagac@bilecik.edu.tr

### Akademik Çalışmaları

— .....

Yabancı Dil Bilgisi : İngilizce (Orta Seviye)

Tarih:28/09/2015