

ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ
BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

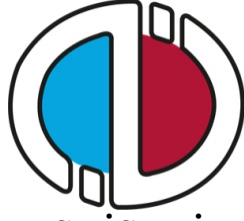
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

KUADRATİK FORMLAR VE MODÜLER FORMLAR

Ezgi CIVGIN
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç.Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2019
Ref.No:



**ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ
BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

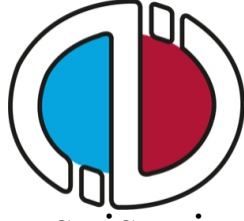
**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı**

KUADRATİK FORMLAR VE MODÜLER FORMLAR

**Ezgi CIVGIN
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Doç.Dr. İlker İNAM**

BİLECİK, 2019



**ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

QUADRATICS FORMS AND MODULAR FORMS

**Ezgi CIVGIN
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Assoc.Prof.Dr. İlker İNAM**

BİLECİK, 2019



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 31.07.2019 tarih ve 41/14 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 20.08.2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ezgi Cıvgın'ın "Kuadratik Formlar ve Modüler Formlar" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE : Doç. Dr. İlker İNAN 

ÜYE : Prof. Dr. Nülfen ÖZDEMİR 

ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR 

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/...../..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danıőman hocam sayın Doç. Dr İlker İnam'a, çalıőmalarım boyunca maddi manevi desteğiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan anneme ve tez sürecimi iőimi aksatmadan devam ettirmeme yardımcı olmalarından dolayı çalıőtıęım kurumun ilgili yöneticilerine sonsuz teőekkürler ederim.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

.../.../ 2019

Ezgi CIVGIN

KUADRATİK FORMLAR VE MODÜLER FORMLAR

ÖZET

İki bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinde sayılar teorisinin önemli konularından olan kuadratik formlar ile son yılların popüler konularından birisi olan modüler formlar arasındaki ilişki çalışılmıştır. İlk bölümde kuadratik formlar tanıtılmış ve temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde ise ilgi çekici bir modüler form örneği olan kuadratik formların teta serilerine ayrılmış olup, belli eliptik eğrilere karşılık gelen özel modüler formlar olan bazı $3/2$ Hecke eigenformlar ait oldukları vektör uzaylarının taban elemanları cinsinden ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuadratik Formlar; Modüler Formlar; Teta Serileri

QUADRATICS FORMS AND MODULAR FORMS

ABSTRACT

In this master thesis which consists of two chapters, the relationship between quadratic forms, which is one of the important subjects of number theory, and modular forms, one of the popular subjects of recent years, is studied. In the first part, quadratic forms are introduced and their basic properties are given. In the second part, is divided into theta series of quadratic forms, which is an interesting example of modular form, and some $3/2$ Hecke eigenforms, which are special modular forms corresponding to certain elliptic curves, are expressed in terms of the base elements of their vector spaces.

Keywords: Quadratic Forms; Modular Forms; Theta Series

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR.....	
BEYANNAME.....	
ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
SİMGELER ve KISALTMALAR	IV
1. İKİLİ KUADRATİK FORMLAR.....	1
1.2. İkili Kuadratik Formlar Üzerinde Denklik Ve İndirgeme.....	5
2. KUADRATİK FORMLARDAN MODÜLER FORMLARA	11
2.1. Materyal Ve Metod	11
2.2. Temel Sonuçlar Ve İspatlar	15
KAYNAKLAR.....	19
ÖZGEÇMİŞ.....	

SİMGELER ve KISALTMALAR**Simgeler**

\mathbb{R}	: Reel sayılar
\mathbb{Z}	: Tamsayılar
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar
$\text{Re}(z)$: z karmaşık sayısının reel kısmı
$\text{Im}(z)$: z karmaşık sayısının sanal kısmı
\mathcal{H}	: Karmaşık üst yarı düzlem
X	: Dirichlet karakteri
Γ	: Modüler grup
$M_k(\Gamma)$: Γ için k ağırlıklı modüler formların uzayı
$S_k(\Gamma)$: Γ için k ağırlıklı cusp formların uzayı
$\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$: Projektif modüler grup
$\Gamma_0(N)$: Modüler grubun N seviyeli temel denklik altgrubu

1. İKİLİ KUADRATİK FORMLAR

1.1. Giriş.

Bu bölümde ikili kuadratik formlar tanıtılacak ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.1.1. (a) $a \neq 0$ olmak üzere n değişkenli $ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ monomialine $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ dereceli adı verilir.

(b) n değişkenli bir polinomun derecesi ise polinomdaki monomial terimlerin derecelerinin en büyüğüne denir.

(c) Çok değişkenli bir polinoma *form* denir ve tüm monomial terimler aynı dereceye sahipse forma *homojen form* adı verilir.

(d) 1 dereceli forma *linear form*, 2 dereceli bir forma ise *kuadratik form* adı verilir.

O halde genel kuadratik form;

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \text{ şeklinde bir toplamdır.}$$

(e) İki değişkenli bir form ise *ikili kuadratik form* olarak adlandırılır.

Bu bölümde tamsayı katsayılı

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

ikili kuadratik formu çalışılacaktır. Bu özellikteki formlar sayılar teorisinde çarpıcı özelliklere sahiptir, kolayca gösterilebilir ki, $x^2 + y^2$ kuadratik formu tarafından temsil edilen n sayıları aslında n 'in asal çarpanları şeklinde ifade edilebilir. Bu durum daha genel kuadratik formlar için de geçerlidir.

Tanım 1.1.2. $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ olmak üzere bir ikili kuadratik formun diskriminantı d ile gösterilir ve $d := b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır. $f(x, y)$ kuadratik formuna karşılık gelen matris ise

$$A := \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Daha genel olarak n değişkenli bir kuadratik forma $n \times n$ tipinde bir matris karşılık gelir, öyle ki, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kuadratik formunun x_1, x_2, \dots, x_n değişkenleri bir \mathbf{x} vektörünü oluşturuyor ise \mathbf{x}^T , \mathbf{x} vektörünün transpozunu göstermek üzere bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

olacak şekilde simetrik A matrisi olarak tanımlanır.

Uyarı 1.1.3. Eğer d sayısı 0 veya bir tam kare ise bu durumda $f(x, y)$ kuadratik formu tamsayı katsayılı iki lineer formun çarpımı olarak ifade edilebilir. Örneğin; xy veya $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ veya $10x^2 - 2xy + 18y^2 = (2x - 3y)(5x - 6y)$ şeklinde yazılabilir, dikkat edilirse bu formların diskriminantları sırasıyla 1, 4 ve 9'dur. Tersine eğer $d \neq 0$ veya bir tam kare değil ise $f(x, y)$ tamsayı katsayılı iki lineer formun çarpımı olarak yazılamaz. Hatta ve hatta katsayılar da rasyonel sayılar kullanılsa bile yazılamaz. Teoride ilerlerken diskriminantları tam kare olanlar ve olmayanlar şeklinde ayırma gitmek zorunludur.

Teorem 1.1.4. (Niven vd. 1960) $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ tamsayı katsayıları ve diskriminantı d olan ikili bir kuadratik form olsun. $d \neq 0$ veya d tam kare değil ise $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ tamsayılar da $f(x, y) = 0$ denkleminin yalnızca bir tek $x = y = 0$ için çözümü vardır.

İspat. $a = 0$ veya $c = 0$ ardından $ac = 0$ ve $d = b^2 - 4ac$ için d 'nin bir tam kare olduğu varsayılabilir. x_0 ve y_0 'ın $f(x_0, y_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tamsayı olduğu kabul edilsin. $y_0 = 0$ ise $ax_0^2 = 0$ ve dolayısıyla $x_0 = 0$ çünkü $a \neq 0$ 'dır. Eğer $x_0 = 0$ ise benzer gerekçe kullanılarak $y_0 = 0$ 'ı verir. Sonuç olarak $x_0 \neq 0$ ve $y_0 \neq 0$ olur, tam kareye tamamlayarak

$$4af(x, y) = (2ax + by)^2 - dy^2 \quad (1.1)$$

elde edilir ve böylece $(2ax_0 + by_0)^2 = dy_0^2$ olur, çünkü $f(x_0, y_0) = 0$ 'dır. Fakat $dy_0^2 \neq 0$ ve tek türlü çarpanlara ayırma özelliği nedeniyle d 'nin tam kare olduğunu gösterir, bu ise ispatı bitirir.

Tanım 1.1.5. Bir $f(x, y)$ formu hem pozitif hem de negatif değerler alırsa $f(x, y)$ formu *indefinite* olarak adlandırılır. Tüm x, y tamsayıları için $f(x, y) \geq 0$ (veya $f(x, y) \leq 0$) ise forma sırasıyla *pozitif yarı definite* veya *negatif yarı definite* denir. x, y tamsayıları için $f(x, y) = 0$; $x = 0$ ve $y = 0$ için sağlanırsa $f(x, y)$ formu *definite* olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.6. $f(1, 0)=1$ ve $f(0, 2)=-2$ için $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ formu indefinetir. $f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2 = (x - y)^2$ pozitif yarı defindedir, ama definite değildir çünkü; $f(1,1)=0$ 'dır. Son olarak $x^2 + y^2$ pozitif definite bir form örneğidir.

Şimdi kuadratik formun diskriminantı kullanılarak kuadratik bir formun definite mi yoksa indefinite mi olduğu belirlenebileceği görülecektir.

Teorem 1.1.7. (Niven vd. 1960) $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ tamsayı katsayılı ve diskriminantı d olan ikili bir kuadratik form olsun. Eğer $d > 0$ ise $f(x, y)$ indefinetedir. $d = 0$ ise $f(x, y)$ yarı defindedir ancak definite değildir. $d < 0$ ise bu takdirde a ve c aynı işarete sahiptir ve $f(x, y)$, $a > 0$ veya $a < 0$ olma durumuna göre sırasıyla ya pozitif ya da negatif defindedir.

Açıkça eğer f pozitif ise $-f$ negatiftir ve tersi doğrudur. Dolayısıyla negatif definite formlar dikkate alınmayabilir, ispatlarda genellik bozulmaz.

İspat. $d > 0$ olduğu varsayalım. Dikkat edilirse $f(1, 0)=a$ ve $f(b, -2a)=-ad$ olur. Bu sayılar $a = 0$ olmadığı sürece ters işaretlidir. Benzer şekilde $f(0, 1) = c$ ve $f(-2c, b) = -cd$ olur. Bu sayılar $c = 0$ olmadığı sürece ters işaretlidir. $a = c = 0$ olasılığı dikkate alınmalıdır. Bundan dolayı $d = b^2 > 0$ böylece $b \neq 0$ olur. Bu durumda $f(1, 1)=b$ ve $f(1, -1)=-b$ böylece f her iki değeri de alır.

Şimdi $d=0$ olduğu varsayalım ve $a \neq 0$ olasılığı göz önüne alalım. Daha sonra (1.1)'den f 'nin sıfır olmayan değerlerinin hepsinin aynı işarete sahip olduğunu görülür, böylece $f(x, y)$ yarı defindedir. Dahası; $f(b, -2a) = -ad = 0$. Dikkate alınan durumlarda $a \neq 0$ olduğundan f 'nin definite olmadığı görülmektedir. Böylece $a = 0$, $d = b^2$ ve $b = 0$ olur çünkü $d = 0$ 'dır. Bu durumda $f(x,y)=cy^2$ elde edilir. Burada sıfır olmayan değerlerin hepsi c ile aynı işarete sahiptir, ancak $f(1, 0) = 0$ olup bu durumda form definite değildir.

Son olarak $d < 0$ olduğunu varsayalım. (1.1) ve Teorem 1.1.4'den $4af(x,y)$ sıfır olmayan tüm x, y tamsayıları için pozitif olduğu görülür yani f defindedir. $f(1,0) = a$ ve

$f(0,1) = c$ olduğu için özellikle a ve c 'nin aynı işarete sahip olduğunu pozitif definite formlar için pozitif ve negatif definite formlar için negatif olduğu sonucuna varılır. Bu da ispatı tamamlar.

a ve c 'nin aynı işarete sahip olduğunu göstermenin alternatif bir yolu; $d < 0$ olduğunda $4ac = b^2 - d \geq -d > 0$ olduğunu belirtmektedir, böylece $ac > 0$ olduğu elde edilir.

Şimdi ikili kuadratik formların diskriminantları olarak hangi sayıların ortaya çıkabileceği incelenecektir.

Teorem 1.1.8. (Niven vd. 1960) d verilen bir tamsayı olsun. Tamsayı katsayılı ve diskriminantı d olan en az bir ikili kuadratik formu vardır ancak ve ancak $d \equiv 0$ veya $1 \pmod{4}$ 'dir.

İspat. Herhangi bir b tamsayısı için $b^2 \equiv 0$ veya $1 \pmod{4}$ olursa $d = 4b^2 - 4ac \equiv 0$ veya $1 \pmod{4}$ olur. Önce $d \equiv 0 \pmod{4}$ olduğu varsayalım. Daha sonra $x^2 - (d/4)y^2$ formunda diskriminant d olan ikili kuadratik form bulunur. Benzer şekilde $d \equiv 1 \pmod{4}$ ise o zaman $x^2 + xy - \left(\frac{d-1}{4}\right)y^2$ formunun diskriminantı d 'dir. Dikkat edilirse bu ifadeler iki yönlü olarak geçerlidir, böylece teorem ispatlanmış olur.

Tanım 1.1.9. Eğer $f(x_0, y_0) = n$ sağlayan ve x_0 ve y_0 tamsayıları varsa, $f(x_0, y_0)$ kuadratik formunun bir tamsayıyı temsil ettiğini söylenir. Eğer $\text{ebob}(x_0, y_0) = 1$ ise böyle bir temsil has temsil olarak adlandırılır, aksi halde has olmayan temsil adını alır.

Örneğin; $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$, $f(2,3) = 31$, $\text{ebob}(2, 3)=1$ olduğu için bu bir has temsildir, ancak $f(2,4)=60$, $\text{ebob}(2,4) = 2$ olduğundan bu has olmayan bir temsildir.

Uyarı 1.1.10. $f(x_0, y_0) = n$ ve $\text{ebob}(x_0, y_0) = g$ ise $g^2 \mid n$, $\text{ebob}(x_0/g, y_0/g) = 1$ ve $f(x_0/g, y_0/g) = n/g^2$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece n 'nin $f(x, y)$ temsilleri g için $g^2 \mid n$ özelliğindeki n/g^2 'nin has temsilleri belirlenerek bulunabilir. Örneğin; $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - 3y^2$, $f(4,2)=84$, $\text{ebob}(2, 4)=2$, $2 \mid 84$, $\text{ebob}(4/2, 2/2)=1$ ve $f(4/2, 2/2)=21$.

Bu bölümün geri kalanındaki amaç, belirli bir kuadratik form ile temsil edilen veya has gösterime sahip n tamsayılarını belirlemektir. Bu amaç kısmen başarılmıştır,

şimdi ise n tamsayısının diskriminantı önceden verilmiş kuadratik formla temsil edilip edilmediği aşağıdaki gibi belirlenebilir.

Teorem 1.1.11. (Niven vd. 1960) $n \neq 0$ özelliğinde bir n ve d tamsayısı verilsin. Bu durumda $x^2 \equiv d \pmod{4|n}$ bir çözüme sahiptir ancak ve ancak d diskriminantına sahip ve n 'yi has olarak temsil eden ikili bir kuadratik form vardır.

İspat. b 'nin teoremden verilen kongrüansın bir çözümü olduğu varsayalım yani $b^2 - d = 4nc$ olsun. O halde $f(x, y) = nx^2 + bxy + cy^2$ formu kabul gereği tamsayı katsayıları ve d diskriminantına sahiptir. Üstelik $f(1, 0) = n$ olup n 'nin has gösterimidir.

Bunun tersine bir $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = n$ diskriminantı $b^2 - 4ac = d$ ile $f(x_0, y_0)$ has gösterimine sahip olduğu varsayalım. O halde $\text{ebob}(x_0, y_0) = 1$ olduğundan $m_1 m_2 = 4|n|$, $\text{ebob}(m_1, y_0) = 1$, ve $\text{ebob}(m_2, x_0) = 1$ olacak şekilde m_1, m_2 tamsayıları seçilebilir. Örneğin; $p|x_0$ için $4n$ olan ve $m_2 = 4|n|/m_1$ değerini koyacağınız p^a asal kuvvetlerinin çarpanı olarak m_1 alınsın. (1.1) denkleminde $4an = (2ax_0 + by_0)^2 - dy_0^2$ ve bundan dolayı $(2ax_0 + by_0)^2 \equiv dy_0^2 \pmod{m_1}$ olduğu görülür. $(y_0, m_1) = 1$ sağlayan bir y_0 tamsayısı vardır, öyle ki $y_0 y_0 \equiv 1 \pmod{m_1}$ ve $u^2 \equiv d \pmod{m_2}$ kongrüansının bir çözümü sahip olduğu bulunur, yani $u = u_1 = (2ax_0 + by_0) y_0$, a ve c ile x ve y değişkenlerini $u^2 \equiv d \pmod{m_2}$ paralel kongrüansının da $u = u_2$ şeklinde bir çözüme sahip olduğunu görülür. Daha sonra Çin kalan teoremi ile $w \equiv u_1 \pmod{m_1}$ ve $w \equiv u_2 \pmod{m_2}$ sağlayan w tamsayısı bulunur. Böylece $w^2 \equiv u_1^2 \equiv d \pmod{m_1}$ ve benzer şekilde $w^2 \equiv u_2^2 \equiv d \pmod{m_2}$ 'yi $w^2 \equiv d \pmod{m_1 m_2}$ 'den elde edilir. Ancak bu son mod $4|n|$ 'dir, bu yüzden teoremin ispatı bitmiş olur.

Sonuç 1.1.12. (Niven vd. 1960) $d \equiv 0$ veya $1 \pmod{4}$ olduğu varsayalım. Eğer p bir tek asal sayı ise bu takdirde $p | d$ veya $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ ancak ve ancak d diskriminantına sahip bir ikili kuadratik form vardır.

1.2. İkili Kuadratik Formlar Üzerinde Denklik ve İndirgeme

$f(x, y) = x^2 + y^2$ ve $g(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $g(x, y) = f(x+y, y)$ ve $f(x, y) = g(x-y, y)$ olarak verilsin. Hesaplama yardımıyla bu formların tam olarak aynı tamsayıları temsil ettiği görülebilir. Daha kesin olarak, ilk özdeşlik $34 = g(2, 3)$ gibi g ile temsil edilen herhangi bir sayının f ile temsil edildiğini gösterir, çünkü $f(2+3, 3) =$

$g(2, 3) = 34$ olur. Tersine, ikinci özdeşlik, f ile temsil edilen herhangi bir sayının g ile temsil edildiğini ifade eder. Hangi sayıların temsil edildiğini belirlemek amacıyla, bu formlar eşdeğer kabul edilebilir. Burada (x, y) noktasının koordinatlarının tamsayı olması için gerek ve yeter şart $(x + y, y)$ noktasının koordinatları tam sayı olmasını gerçeği kullanıldı. Koordinatları tamsayı olan bir noktaya *kafes noktası* denir. Şimdi, hangi lineer değişken değişimlerinin bir kafes oluşturduğunu bire bir şekilde belirlenecektir.

Teorem 1.2.1. (Niven vd. 1960) $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ gerçel girdilere sahip bir 2×2 matrisi ve

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Yani $u = m_{11}x + m_{12}y$, $v = m_{21}x + m_{22}y$ olsun.

Bu takdirde aşağıdaki iki iddia birbirine denktir:

- (i) Doğrusal dönüşüm (1.2), kafes noktalarının bir permütasyonunu tanımlar (başka bir deyişle, kafes noktaları kendilerine bire-bir ve örten şekilde eşlenir),
- (ii) M matrisinin tamsayı girdileri vardır ve $\det(M) = \pm 1$ 'dir.

İspat. İlk olarak (ii)'nin (i)'i gerektirdiği gösterilsin. M 'nin tamsayı girdileri varsa, (u, v) 'nin (x, y) bir kafes noktası olduğu zaman bir kafes noktası olduğu açıktır. Kısaca $\Delta = \det(M) = m_{11}.m_{22} - m_{12}m_{21}$ olarak yazılsın. Bu durumda $\Delta \neq 0$ 'ı sağlayan M^{-1} matrisi vardır ve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_{22}/\Delta & -m_{12}/\Delta \\ -m_{21}/\Delta & m_{11}/\Delta \end{pmatrix}$$

olur. Böylece eğer (ii) sağlanırsa o zaman M^{-1} matrisi de tamsayı girdilere sahiptir ve sonra (u, v) kafes noktalarından (x, y) kafes noktalarına ait ters dönüşüm matris çarpımı ile verilir,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Dolayısıyla bu dönüşüm bire-bir ve örtendir.

Şimdi (i)'in doğru olduğu kabul edilsin. Böylece $(x, y) = (1, 0)$ kafes noktasını alarak, (1.2) $(u, v) = (m_{11}, m_{21})$ 'i verir. Bunun bir kafes noktası olması gerektiğinden, m_{11} ve m_{21} tamsayı olmalıdır. $(x, y) = (0, 1)$ alarak benzer şekilde, m_{12} ve m_{22} tamsayı olmalıdır. Geriye $\det(M) = \pm 1$ olduğunu göstermek kalır. Bu amaçla $(u, v) = (1, 0)$ kafes noktası düşünölsün. (i)'den (1.2) dönüşümünün örtten olduğu bilinmektedir, dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir (x_1, y_1) kafes noktası vardır.

Benzer şekilde,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde (x_2, y_2) kafes noktası vardır.

Bu iki ilişki aşağıdaki gibi tek bir matris özdeşliği olarak ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Eğer M ve N , $n \times n$ tipinde iki matris ise

$$\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N) \quad (1.4)$$

olduğu bilinmektedir. Bunu (1.3)'e uygulayarak $1 = \det(M) (x_1 y_2 - x_2 y_1)$. Burada her iki çarpan da tamsayıdır çünkü sağ taraftaki matrislerin (1.3) tamsayı girdiler vardır. Böylece $\det(M) \mid 1$, yani $\det(M) = \pm 1$ ve ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.1, $\det(M) = -1$ özelliğindeki M matrisleri için geçerli olsa da bir an için $\det(M) = +1$ olan matrislere kısıtlama yapılırsa bu durum önemli bir teoriye yol açar.

M ve N 'nin tamsayı girdileri olan 2×2 matrisler olduğunu varsayılınsın. Dolayısıyla MN matrisi de 2×2 'dir ve tamsayı girdilere sahiptir. (1.4)'den eğer $\det(M) = \det(N) = 1$ ise $\det(MN) = 1$ 'dir. Dahası M^{-1} tamsayı girdilere sahiptir ve $\det(M) = 1$ 'dir. Böylece, tamsayı girdileri ve determinantı 1 olan 2×2 matrislerin kümesi matris çarpımı işlemine göre bir grup oluşturduğu görülür.

Tanım 1.2.2. Tamsayı girdili ve determinant 1 ile 2×2 matrisleri grubu Γ ile gösterilir ve *modüler grup* olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.3. $f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2$ ve $g(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ gibi iki kuadratik form verilsin. Eğer $g(x, y) = f(m_{11}x + m_{12}y, m_{21}x + m_{22}y)$ olacak şekilde bir $M = [m_{ij}] \in \Gamma$ varsa iki kuadratik form denktir denir ve bu durumda $f \sim g$ yazılır ve bu durumda M 'nin f 'yi g 'ye götürür denir.

Bu durumda, g 'nin katsayılarını f ve M 'ye göre hesaplanabilir.

$$A = am_{11}^2 + bm_{11}m_{21} + cm_{21}^2 = f(m_{11}, m_{21}), \quad (1.5)$$

$$B = 2am_{11}m_{12} + b(m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21}) + 2cm_{21}m_{22}, \quad (1.6)$$

$$C = am_{12}^2 + bm_{12}m_{22} + cm_{22}^2 = f(m_{12}, m_{22}). \quad (1.7)$$

Bu değişken değişiminin etkisi, sistematik olarak matris çarpımını kullanarak daha net hale getirilebilir. Gerçekten de,

$$F = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O halde $X^t F X = [f(x, y)]$ olur. Burada sağdaki matris bir 1×1 matrisdir ve $X^t = [x \ y]$, X matrisinin transpozudur. Benzer şekilde $X^t G X = [g(x, y)]$ olur. g tanımı gereği, $g M X$ ile değiştirilen f değeri X ile hesaplanarak elde edilir. Yani, $(M X)^t F (M X) = [g(x, y)]$. $(M X)^t = X^t M^t$ olduğundan, bu $X^t (M^t F M) X = [g(x, y)]$ yazılabilir. Kuadratik formun katsayı matrisi G , g katsayıları tarafından belirlenir, o halde

$$M^t F M = G. \quad (1.8)$$

olur. Tanım 1.2.3 yardımıyla verilen bağıntının aslında tüm ikili kuadratik formların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 1.2.4. (Niven vd. 1960) f, g ve h ikili kuadratik formlar olsun.

- (1) $f \sim f$,
- (2) $f \sim g$ ise $g \sim f$,

(3) $f \sim g$ ve $g \sim h$ ise $f \sim h$ 'dir.

Teorem 1.2.5. (Niven vd. 1960) f ve g denk iki kuadratik form olsun. Verilen keyfi bir n tamsayısı için, n 'nin f kuadratik formları ile gösterimleri ve n 'in g kuadratik formları ile gösterimleri arasında bire-bir eşleme vardır. Ayrıca aynı özellik has gösterimleri için de sağlanır. Dahası, f ve g 'nin diskriminantları birbirine eşittir.

Tanım 1.2.6. f, d diskriminantı tam kare olmayan bir ikili kuadratik form olsun. Eğer,

$$-|a| < b \leq |a| < c$$

veya eğer;

$$0 \leq b \leq |a| = c$$

oluyor ise f ye indirgenmiş ikili kuadratik form denir.

f nin diskriminantı bir tam kare veya 0 ise farklı şekilde hareket edilecektir. Şimdi, bir f formu verildiğinde bunun indirgenmesi için kullanılacak iki basit dönüşüm kullanılacaktır. Kabul gereği f nin diskriminantı bir tam kare olmadığı için, Teorem 1.1.4'den $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ sonuçları elde edilir. Eğer $|c| < |a|$ veya $|a| = |c|$ ve $-|a| \leq b < 0$ ise bu durumda (1.1) eşitliğinden $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü alınsın. Böylece f nin aslında $g(x, y) = cx^2 - bxy + ay^2$ formuna denk olduğunu görülür. Alternatif olarak, b sayısı $(-|a|, |a|]$ aralığına düşmüyor ise bu durumda (1.8)'de $M = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak alınır. O halde (1.5), (1.6) ve (1.7) gereği, $A = a$, $B = 2am + b$ ve $C = f(m, 1) = am^2 + bm + c$ olur. Buradan m sayısı $-|a| < B \leq |a|$ olacak şekildeki tek türlü tamsayı olarak seçilsin. Bu durumda elde edilen form indirgenmiş olmayabilir, çünkü $|C| < |A|$ olabilir. Böyle bir durumda ilk tipteki bir dönüşüm türü uygulanabilir. O halde bu iki dönüşümden uygun olanı kullanılarak indirgenmiş form elde edilir. Bu süreç sonsuza dek süremez. Çünkü kolayca görülebilir ki x^2 katsayısının mutlak değerleri oldukça zayıf bir azalan dizidir, bu miktarın ilk dönüşümle kesinlikle azaldığı, $|a| - |c|$ olmadıkça, bu durumda ilk dönüşüm, indirgenmiş bir form üretir. Böylece aşağıdaki önemli sonucu kanıtlanmış olur.

Teorem 1.2.7. (Niven vd. 1960) d bir tam kare olmayan bir tam sayı olsun. Diskriminantı d olan ikili kuadratik formlarının her bir denklik sınıfı en az bir indirgenmiş form içerir.

Tanım 1.2.3'de $d < 0$ ise, verilen bir denklik sınıfındaki indirgenmiş formun bir tek olduğu görülecektir. $d > 0$ için bu genellikle doğru değildir.

Teorem 1.2.8. (Niven vd. 1960) f diskriminantı tam kare olmayan, indirgenmiş bir ikili kuadratik form olsun. f definite değilse bu durumda $0 < |a| \leq \frac{1}{2}\sqrt{d}$ olur. Eğer f pozitif definite ise $0 < a \leq \sqrt{-d/3}$ olur. Her iki durumda da, bir tam kare olmayan d 'nin indirgenmiş formlarının sayısı sonludur.

2. KUADRATİK FORMLARDAN MODÜLER FORMLARA

Modüler formlar ve eliptik eğriler 1994'te Andrew Wiles'in ispatladığı matematiğin 359 yıllık problemi Fermat'ın Son Teoremi'nin ispatında kullanılması nedeniyle birbiriyle sıkı sıkıya bağlantılı ve popülerliğini koruyan iki konudur. Bu bağlantı Taniyama-Shimura Konjektürü'nden gelir, bu ise her bir eliptik eğrinin bir modüler formla eşleştiğini iddia eder. Modüler formlar uzayı \mathbb{C} üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğu için oldukça ilgi çekici özelliklere sahiptir. Eliptik eğriler konusu çalışmanın kapsamı dışındadır. Konuyla ilgili temel kaynak (Silverman 2006) olup, detaylı bilgi bu kaynaktan bulunabilir.

Kuadratik formlar tamsayıların aritmetiğinin önemli bir parçasını oluşturur. Tamsayıların ikili kuadratik formlarla temsili problemi sayılar teorisinin eski problemlerinden birisidir. Kuadratik formların teta serileri birer modüler form olduğu için bu iki teori de birbirine bu şekilde bağlıdır.

Bu bölümde bazı kuadratik formların teta serilerinin klasik teta fonksiyonu ile çarpımından elde edilen ve Shimura yükseltmesiyle belirli eliptik eğrilere karşılık gelen $3/2$ ağırlıklı Hecke eigenformlar ait oldukları vektör uzayının taban vektörleri cinsinden ifade edilecektir. Modüler formlar için verilen Sturm sınırı kullanılarak yeterince Fourier katsayısı birbirine eşit olan iki modüler formun birbirine eşit olduğu gerçeği kullanılarak ispatlar yapılacaktır. Modüler formların Fourier açılımlarının bilgisayar yardımıyla (gerekirse büyük indisler için) hesaplanmasında Magma ile Pari/GP cebir yazılımları kullanılmıştır. Yüksek performans gerektiren geniş aralıklarda yapılan hesaplamalar için (özellikle kuadratik formların teta serileri ile klasik teta serilerinin çarpımında) "Fast Fourier Transform" özelliğine sahip Magma ön plana çıkarken, modüler formlara ait "mf" paketiyle Pari/GP, Magma'da olmayan birçok özelliğe sahiptir.

2.1. Materyal ve Metot

Bu kısımda çalışmada kullanılacak kavramlar tanıtılacaktır. Bölüm boyunca \mathcal{H} ile karmaşık üst yarı düzlem, $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile katsayıları tamsayı ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $\frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki lineer kesirli dönüşümlerin grubu ve Γ ile modüler grup gösterilecektir.

Tanım 2.1.1. (Frey 1994) $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}X_i^2 + \sum_{i>j} a_{ij}X_iX_j$ biçiminde tanımlanan fonksiyona \mathbb{Z} üzerinde tanımlı n değişkenli kuadratik form olsun ve üstelik f 'nin pozitif definite ve d diskriminantına sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda $q = e^{2\pi i\tau}$ ve $\tau \in \mathcal{H}$ olmak üzere f kuadratik formuna karşılık gelen teta serisi $\Theta(f)$ ile gösterilir ve

$$\Theta(f)(z) := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} q^{f(\mathbf{x})}$$

olarak tanımlanır. Burada $q = e^{2\pi i\tau}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.1'e dikkat edilirse aslında kuadratik formun teta serisi bir tamsayının verilen kuadratik form tarafından temsil edildiği durumlardan oluşmaktadır. Kolayca görülebilir ki "iki kuadratik forma karşılık gelen katsayı matrisleri R halkası üzerinde birbirine benzer ise bu iki kuadratik form birbirine denktir" şeklinde tanımlanan bağıntı d diskriminantına sahip tüm kuadratik formların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olur, bu denklik bağıntısının denklik sınıflarından birisi k olsun, f kuadratik formu k denklik sınıfından alınsın ve katsayı matrisi A olsun. $n \in \mathbb{N}$ sayısı N . A^{-1} matrisi tamsayı girdilere sahip ve diyagonal üzerinde çift sayı olacak şekildeki en küçük sayı olarak seçilsin. Öte yandan d , f 'nin diskriminantı yani A katsayı matrisinin determinantı ve

$$t := \begin{cases} 2Dn \equiv 1 \pmod{2} \\ -Dn \equiv 2 \pmod{4} \\ Dn \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

olarak tanımlansın ve χ_t , $\mathbb{Q}(\sqrt{t})/\mathbb{Q}$ 'ya karşılık gelen karakter olsun ve aşık karakter id ile gösterilsin.

Modüler formlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.1.2. (Cohen 2019) $k \in \mathbb{Z}$ olsun ve $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

1. Eğer her $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\tau \in \mathcal{H}$ için

$$F(\gamma(\tau)) = (cz + d)^k F(\tau)$$

oluyor ise F 'ye Γ için k -ağırlıklı zayıf modüler adı verilir.

2. Eğer F, \mathcal{H} üzerinde analitik ve $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ yapıldığında $|F(\tau)|$ sınırlı kalıyor ise F 'ye Γ için k -ağırlıklı modüler form denir. Bu özellikteki modüler formların kümesi $M_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

3. Eğer $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ yapıldığında $F(\tau)$ sifıra yakınıyor ise F 'ye Γ için k -ağırlıklı cusp form denir. Bu özellikteki cusp formların kümesi $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Eğer modüler form ya da cusp form Γ 'nın alt grubu $\Gamma_0(N)$ üzerinde tanımlanıyorsa bu durumda tanıma " N seviyeli" eklenir.

Kuadratik formlar ile modüler formlar ile ilişkisi aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 2.1.3. (Shimura 1973) $\theta(k) \in M_{\frac{n}{2}}(N, \chi_t)$ 'dir.

Dikkat edilirse $n = 2$ durumunda ikili kuadratik formların teta serileri belirli koşullar altında 1-ağırlıklı modüler form olur. Bu çalışmada tamamen aşikar karakter ile çalışılmıştır ve ilgili yerlerde bu durum " id " ile gösterilmiştir.

Uyarı 2.1.4. 1. Burada modüler formların çalışma kapsamında kullanılacak bazı özellikleri sıralanacaktır. Tüm detaylar (Cohen ve Strömberg 2017) veya modüler formlarda klasikleşmiş örneğin (Miyake 1989) gibi başka bir kaynaktan bulunabilir. Buna göre, $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$, \mathbb{C} üzerinde birer sonlu boyutlu vektör uzayı olur. $T(z) = z + 1$ dönüşümü modüler grubun üreticidir ve F bir modüler form ise tanım gereği $F(z + 1) = F(z)$ olmak zorundadır, bu nedenle F modüler formunun $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ şeklinde bir Fourier açılımı vardır. Burada tıpkı Tanım 2.1'de olduğu gibi $q = e^{2\pi i \tau}$ şeklindedir.

2. k bir tamsayı olmak üzere $k + 1/2$ şeklindeki sayılara yarım tamsayı denir. Bazı teknik hazırlıkların ardından $k + 1/2$ yani yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar da tanımlanabilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar $\Gamma_0(4N)$ alt grubu üzerinde tanımlanabilir. Burada

$$\Gamma_0(4N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{4N} \right\}$$

olarak tanımlanır. Kolayca görülebilir ki $\Gamma_0(4N)$ modüler grubun alt grubudur.

3. f, k -ağırlıklı bir modüler form ve g, l -ağırlıklı bir modüler form olmak üzere $fg, k + l$ ağırlıklı bir modüler form olur. Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için de bu özellik geçerlidir.

4. $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$, \mathbb{C} üzerinde birer sonlu boyutlu vektör uzayı olduğundan bu uzaylar üzerinde bir lineer operatör yani her bir $n > 1$ sayısı için n . Hecke operatörü

tanımlanabilir. Bu lineer dönüşümün özdeğerlerinin oluşturduğu öz vektör ise Hecke eigenform olarak adlandırılır.

Serre-Stark Teoremi'nin (Frey 1994), özel bir durumu olarak 1/2-ağırlıklı modüler formlara güzel bir örnek klasik teta serileridir.

Teorem 2.1.5. (Frey 1994) l pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\Theta_{id,l} := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{ln^2}$$

olarak tanımlanan klasik teta serisi için $\Theta_{id,l} \in M_{\frac{1}{2}}(4)$ 'dir.

Şimdi ise yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için boyut formülleri göz önüne alınsın.

Tanım 2.1.6. F, χ 'in kondüktörü olsun. $s_2 \neq 1$ ve $s_p \leq r_p$ olmak üzere

$$N = \prod_{p|N} p^{r_p} \text{ ve } F = \prod_{p|N} p^{s_p}$$

olarak tanımlansın. λ_p sabitleri ise aşağıdaki gibi tanımlansın:

(1) $p \geq 3$ veya $p = 2$ ve $r_2 \geq 4$ için

$$\lambda_p = \begin{cases} p^{\lfloor r_p/2 \rfloor} + p^{\lfloor (r_p-1)/2 \rfloor} & ; 2s_p \leq r_p, \\ 2p^{r_p-s_p} & ; 2s_p > r_p \end{cases}$$

(2) Eğer $r_2 = 3$ ise $\lambda_2 = 3$ alınır. Eğer $r_2 = 2$, ise bu takdirde (C) koşulu olarak adlandırılan şu koşul dikkate alınır : $p \equiv 3 \pmod{4}$ olmak üzere $p | N$ olacak şekilde p asalı vardır ve ya r_p tek sayı ya da $0 < r_p < 2s_p$ olur. Bu takdirde eğer (C) koşulu sağlanırsa $\lambda_2 = 2$ alınır, aksi takdirde; $\lambda_2 = 2 + (-1)^{\frac{s_2+k+1}{2}}/2$ olarak alınır.

Buna göre yarım tamsayı ağırlıklı modüler form uzaylarının boyutları aşağıdaki teoreme verilmiştir. Burada χ Dirichlet karakteri için verilen sonuçlar bu çalışmanın özelinde aşikar karakter için de doğal olarak aynen geçerlidir.

Teorem 2.1.7. (Cohen–Oesterlé 1977) $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde;

$$\dim(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - \dim(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \bar{\chi})) = \frac{k-1}{2} N \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda_p.$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $R(N, k, \chi)$ ile gösterilirse bu durumda $k \geq 5/2$ için;

$$\dim(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = R(N, k, \chi)$$

$$\dim(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \bar{\chi})) = R(N, 2-k, \chi)$$

iken

$$\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)) = R(N, 3/2, \chi) + \dim(M_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi)) \dim(M_{3/2}(\Gamma_0(N), \chi)) = -R(N, 1/2, \chi) + \dim(S_{1/2}(\Gamma_0(N), \chi)),$$

olur. Burada $1/2$ ağırlıklı boyutlar Serre–Stark teoreminden elde edilir.

Teorem 2.1.8. (Cohen 2019) $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N))$ olsun. d_N sayısı $\Gamma_0(N)$ 'in $PSL_2(\mathbb{Z})$ 'deki görüntüsünün indeksi olmak üzere

$$M := \frac{kd_N}{12}$$

sayısı tanımlansın. Eğer $0 \leq i \leq M$ için $a_i = b_i$ ise bu takdirde $f = g$ olur.

M sayısına *Sturm sınırı* adı verilir.

2.2. Temel Sonuçlar ve İspatlar

Teorem 2.2.1. (Bungert 1990), (Frey, 1994) Yukarıdaki notasyon kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_1 := [\theta(X^2 + 11Y^2) - \theta(3X^2 + 2XY + 4Y^2)]. \theta_{id, 11} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$$

olur. Üstelik f_1 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 2.2.2. (İnam ve Cıvgın 2019) $v_1 = q - q^4 - q^5 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^3 - q^4 - q^{11} + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_1 = 2v_1 - 2v_2 \text{ 'dir.}$$

İspat. Teorem 2.2.1'den dolayı $\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(44))) = 2$ 'dir. v_1 ve v_2 vektörlerinin lineer bağımsız olduğu açıktır. Sturm sınırı, yani Teorem 2.1.8 gereği bu uzayda iki vektörün birbirine eşit olması için ilk 4 Fourier katsayısının eşit olması yeterlidir. Kolayca gösterilebilir ki v_1 ve v_2 vektörleri $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayını gerer. Buna göre $v_1 = q - q^4 - q^5 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^3 - q^4 - q^{11} + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayının bir bazı olur. O halde $f_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sayıları vardır.

$$\theta(X^2 + 11Y^2) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{11} + 4q^{12} + 4q^{15} + 4q^{20} + 2q^{25} + O(q^{26}),$$

$$\theta(3X^2 + 2XY + 4Y^2) = 1 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^9 + 4q^{12} + 2q^{15} + 2q^{16} + 4q^{20} + 2q^{23} + O(q^{25}),$$

$$\theta_{id,11} = 1 + 2q^{11} + 2q^{44} + 2q^{99} + O(q^{100})$$

olup,

$$f_1 = 2q - 2q^3 - 2q^5 + 2q^{11} + 4q^{12} - 4q^{14} + 2q^{15} - 4q^{16} + 4q^{22} - 2q^{23} + O(q^{24})$$

olarak elde edilir. Kolayca görülebilir ki $c_1 = 2$ ve $c_2 = -2$ olarak bulunur. Bu durum için Sturm sınırı 4 olup $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q^n$ ve $2v_1 - 2v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ için $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ ve $a_4 = b_4$ olması iki cusp formun birbirine eşit olması için yeterlidir. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 2.2.3. (Bungert 1990), (Frey, 1994) Yukarıda ki notasyonu kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_2 := [\theta(X^2 + 14Y^2) - \theta(2X^2 - 7Y^2)]. \theta_{id,14} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$$

olur. Üstelik f_2 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 2.2.4. (İnam ve Cıvgın 2019) $v_1 = q - q^2 - q^9 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^4 - q^7 - q^8 + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_2 = 2v_1 - 2v_2 \text{ 'dir.}$$

İspat. Benzer argümanlar kullanılarak $\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(56)))=2$ olduğu ve $\{v_1, v_2\}$ kümesinin $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$ cusp form uzayının bir bazı olduğu görülebilir. Bu durum için Sturm sınırı 5'dir. Öte yandan

$$\theta(X^2+14Y^2) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{14} + 4q^{15} + 2q^{16} + 4q^{18} + 4q^{23} + O(q^{25}),$$

$$\theta(2X^2+7Y^2) = 1 + 2q^2 + 2q^7 + 2q^8 + 4q^9 + 4q^{15} + 2q^{18} + O(q^{25})$$

ve

$$\theta_{id,14} = 1 + 2q^{14} + 2q^{56} + O(q^{100})$$

Olup

$$f_2 = 2q - 2q^2 + 2q^4 - 2q^7 - 2q^8 - 2q^9 + 2q^{14} + 4q^{15} - 2q^{16} + 6q^{18} - 4q^{21} - 4q^{22} + O(q^{25})$$

olarak elde edilir. O halde $f_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sayıları vardır. Buradan $c_1 = 2$ ve $c_2 = -2$ elde edilir. Eşitliğin her iki yanının ilk 5 Fourier katsayısı birbirine eşit olduğu için bu iki cusp form Sturm sınırı gereği birbirine eşittir.

Teorem 2.2.5. (Bungert 1990), (Frey, 1994) Yukarıdaki notasyon kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_3 := [\theta(3X^2 - 2XY + 23Y^2) - \theta(7X^2 + 6XY + 7Y^2)]. \theta_{id,17} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$$

olur. Üstelik f_1 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 2.2.6. (İnam ve Cıvgın 2019) $v_1 = q - q^2 + q^4 - q^8 - q^9 + O(q^{12})$, $v_2 = q^3 - q^7 - q^{11} + O(q^{12})$ ve $v_3 = q^5 - q^6 - q^7 + q^{10} + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2, v_3\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_3 = 2v_2 \text{ 'dir.}$$

İspat. Benzer argümanlar kullanılarak $\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(68)))=2$ olduğu ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$ cusp form uzayının bir bazı olduğu görülebilir. Bu durum için Sturm sınırı 6'dır. Öte yandan

$$\theta(3X^2 - 2XY + 23Y^2) = 1 + 2q^3 + 2q^{12} + 2q^{23} + 2q^{24} + O(q^{25}),$$

$$\theta(7X^2 + 6XY + 7Y^2) = 1 + 2q^7 + 2q^{11} + 2q^{12} + 2q^{24} + o(q^{25})$$

ve

$$\theta_{id,17} = 1 + 2q^{17} + 2q^{68} + O(q^{100})$$

olup

$$f_3 = 2q^3 - 2q^{17} - 2q^{11} + 4q^{20} + 2q^{23} - 4q^{24} + O(q^{25})$$

olarak elde edilir. O halde $f_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ olacak şekilde c_1, c_2 ve c_3 sayıları vardır. Buradan $c_1 = 0, c_2 = 2$ ve $c_3 = 0$ elde edilir. Bir kez daha Teorem 2.4 gereği ispat bitmiş olur.

Uyarı 2.2.7. Çalışmanın kapsamında olmadığı için eliptik eğriler konusuna yer verilmemiştir. Ancak Modülerite Teoremi ve Shimura Yükseltmesi kullanılarak f_1 Hecke eigenformunun “11a1” Cremona etiketli, f_2 Hecke eigenformunun “14a1” Cremona etiketli ve son olarak f_3 Hecke eigenformunun “17a1” Cremona etiketli eliptik eğriye karşılık geldiği söylenebilir. Modüler formlar ile eliptik eğriler arasındaki “ L -serileri” yardımıyla elde edilen bu önemli ilişki Magma ve Pari/GP programları kullanılarak doğrulanabilir.

KAYNAKLAR

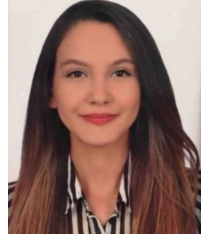
- Bungert, M. (1990). *Konstruktion von Modulformen niedrigen Gewichts*. Universität Essen. Institut für Experimentelle Mathematik.
- Cohen, H., & Oesterlé, J. (1977). Dimensions des espaces de formes modulaires. In *Modular functions of one variable VI* (pp. 69-78). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Cohen, H., & Strömberg, F. (2017). *Modular Forms* (Vol. 179). American Mathematical Soc..
- Cohen, H. (2019). *An Introduction to Modular Forms* in *Notes from the International Autumn School on Computational Number Theory*, Inam, I., & Büyükaşık, E. (Eds.). Springer International Publishing.
- İnam, İ., Cıvgın, E., (2019), 3/2 Hecke eigenformlar üzerine, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Yayına kabul edildi.
- Frey, G. (1994). Construction and arithmetical applications of modular forms of low weight. In *Elliptic curves and related topics*(Vol. 4, pp. 1-21).
- Magma Computer Algebra System (2019). <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/> (Erişim Tarihi 20.08.2019).
- Miyake, T., (1989). *Modular Forms*. Springer Monographs in Mathematics.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1960). *An Introduction to the Theory of numbers*. John Wiley & Sons.
- Pari/GP Computer Algebra System (2019). <https://pari.math.u-bordeaux.fr> (Erişim Tarihi: 20.08.2019),
- Shimura, G. (1973). Modular forms of half integral weight. In *Modular Functions of One Variable I* (pp. 57-74).
- Silverman, J. (2006). *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer Graduate Texts in Mathematics.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Ezgi CIVGIN

Doğum Yeri ve Tarihi : Bilecik / 12.03.1992



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi, Matematik

Bildiği Yabancı Diller :İngilizce

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar :Porland Porselen A.Ş.

Çalıştığı Departman : Bilgi Sistemleri

İletişim:

Adres :

E-posta Adresi : ezgicvgn@gmail.com

Tarih: 05 / 09 / 2019