ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

FRENET DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Melike OKTAY

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2017

Referans No: 10157534

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ **BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

FRENET DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Melike OKTAY

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2017

ANADOLU UNIVERSITY BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences

Depertment of Mathematics

ON THE FRENET PLANES

Melike OKTAY

Master's Theses

Thesis Advisor

Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21/06/2017 tarih ve 32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Melike OKTAY'ın "Frenet Düzlemleri Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE (TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ nejat ekmekçi

ÜYE : Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21/06/2017 tarih ve 32 sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek yüksek lisans çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen Funda BAHÇALI'ya ve beni destekleyen eşim Mehmet OKTAY'a teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir.İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de verilen bir uzay eğrisinin Frenet düzlemlerinin, başka bir uzay eğrisinin Frenet düzlemleri olma şartları araştırılmıştır. Dördüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de verilen uzay eğrisinin herhangi bir spacelike Frenet düzlemlerinin aynı uzayda başka bir uzay eğrisinin herhangi bir spacelike Frenet düzlemleri haline gelip gelmediğini araştırılmıştır. Beşinci bölümde de 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de verilen uzay eğrisinin herhangi bir timelike Frenet düzlemlerinin aynı uzayda başka bir uzay eğrisinin herhangi bir timelike Frenet düzlemleri haline gelip gelmediğini araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Frenet düzlemleri; eğrilikler; Mannheim eğirisi; Salkowski ve Anti-Salkowski eğrisi; spacelike ve timelike düzlem

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter "Introduction" part has been presented. In the second chapter, some basic definitions and concepts in Euclidean and Minkowski 3-spaces have been presented. In the third chapter, some cases that Frenet planes of a given space curve in Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$ are Frenet planes of another space curve have been investigated. In the fourth chapter, the possibility of whether any spacelike Frenet plane of a given space curve in Minkowski 3-space $\mathbb{E}_1^3$ also is any spacelike Frenet plane of another space curve in the same space has been investigated. In the fifth chapter, the possibility of whether any timelike Frenet plane of a given space curve in Minkowski 3-space $\mathbb{E}_1^3$ also is any timelike Frenet plane of another space curve in the same space has been investigated.

Key words: Frenet planes; curves; Mannheim curve; Salkowski and Anti-Salkowski curves; spacelike and timelike plane.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^3$	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	: 3-Boyutlu Minkowski Uzayı
k_1	: Eğrinin Eğriliği
k_2	: Eğrinin Burulması
T	: Teğet Vektör Alanı
N	: Asli Normal Vektör Alanı
B	: Binormal Vektör Alanı
OP	: Oskülatör Düzlem
NP	: Normal Düzlem
RP	: Rektifiyan Düzlem
$\mathcal{S}^2$	: Öklid 3-Uzayında Küre
$\mathcal{S}_1^2$	: Minkowski 3-Uzayında Spacelike Küre
H_2^0	: Minkowski 3-Uzayında Timelike Küre

1. GİRİŞ

Öklid düzlemindeki önemli ve ilginç problemlerden biri regüler bir eğrinin karakterize edilmesidir. Problemin çözümünde regüler bir eğrinin eğrilik fonksiyonları olan k_1 ve k_2 etkili bir rol oynar. Örneğin $k_1 = 0 = k_2$ ise eğri geodeziktir ya da $k_1 = sbt \neq 0,\ k_2 = 0$ ise eğri yarıçapı $\frac{1}{k_1}$ olan çemberdir. Bu durumda eğrilikler kullanılarak regüler bir eğrinin şekline ve büyüklüğüne karar verilebilir.

Problemin çözümünde diğer bir yol eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkidir. Örneğin Bertrand eğrileri: 1845'te Saint Venant şu soruyu sormuştu: "Bir eğrinin asli normali tarafından gerilen düzlemler başka bir eğrinin asli normali olabilir mi?" Bu soru 1850'de Bertrand tarafından cevaplanmıştır. Verilen eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayılı lineer bir ilişki olursa ancak ve ancak yukarıdaki soru cevaplanır. Verilen eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri k_1 ve k_2 olarak alınırsa $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ elde edilir. Bertrand'ın makalesi yayınlandığından beri bu eğriler Bertrand Eğri Çiftleri ya da Bertrand Eğrileri olarak adlandırılır.

Diğer bir örnek de Mannheim eğrileridir. α ve β uzay eğrilerinin karşılıklı noktalarında α'nın asli normal doğruları β nın binormal doğrularıyla çakışıyorsa, o zaman α'ya Mannheim eğrisi, β'ya da α'nın Mannheim eğri çifti denir. 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında Mannheim eğri çiftleri üzerine Liu ve Wang tarafından çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada aşağıdaki sorunun muhtemel cevapları araştırılmıştır.

"$\mathbb{E}^3$ de verilen bir uzay eğrisinin Frenet düzlemleri başka bir uzay eğrisinin Frenet düzlemleri olabilir mi?" Bununla ilgili ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra bu çalışmada 3-boyutlu Minkowski uzayında ortak spacelike ve timelike düzlemli eğri çiftleri de incelemiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında ve $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. I $\subseteq$ $\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ diferansiyellenebilir dönüşümüne 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de bir eğri denir. Burada $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığına parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. α, $\mathbb{E}^3$ de bir eğri ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

ise α ya birim hızlı eğri denir. Burada α', α nın türevini göstermektedir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. α: I $\subseteq$ $\mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. Eğrinin ardışık türevleri, $\alpha'(s)$, $\alpha(s)''$ ve $\alpha(s)'''$ lineer bağımsız vektörler olup, eğri üzerinde her noktada hareketli ortonormal $\{T, N, B\}$ çatısını inşa edebiliriz. Elde edilen bu çatıya Frenet çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.4. Frenet çatısı sırasıyla T, N, B vektörlerinden oluşur ve bu vektörler sırasıyla teğet, asli normal ve binormal vektörleri olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısında $\{T, N\}, \{T, B\}, \{N, B\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemler olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin konum vektörü her zaman kendi;

$B^{\perp} = sp\{T, N\}$ oskülatör düzleminde kalıyorsa bu eğriye oskülatör eğri,

$N^{\perp} = sp\{T, B\}$ rektifiyan düzlemine kalıyorsa bu eğriye rektifiyan eğri,

$T^{\perp} = sp\{N, B\}$ normal düzleminde kalıyorsa normal eğri denir (Özkaldı, 2014).

Tanım 2.1.7. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısında bir eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Burada $T' = \frac{dT(s)}{ds}$ anlamındadır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.8. $\alpha: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri $k_1 = \langle T', N \rangle$ ve $k_2 = \langle N', B \rangle$ şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.9. Öklid uzayında bir eğrinin eğriliklerine göre bilinen bazı karakterizasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

- Eğer $k_1 = k_2 = 0$ ise eğri bir geodeziktir.
- Eğer $k_1 > 0$ ise eğri sağ sarınımlı, $k_2 < 0$ ise eğri sol sarınımlı bir eğridir.
- Eğer $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 = 0$ ise eğri yarıçapı $r = \frac{1}{k_1}$ olan çemberdir.
- Eğer k_1 ve k_2 sıfırdan farklı sabitler ise eğri dairesel helistir.
- Eğer k_1 ve k_2 sabit değil fakat $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabitse eğri bir genel helistir. (Lancert teoremi)
- Eğer k_1 ve k_2 eğrilikleri

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2 = r^2$$

eşitliğini sağlarsa eğri $S^2(r)$ küresi üzerinde yatan bir eğridir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10. $\alpha: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin teğeti sabit doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu durumda α eğrisine bir genel helis denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11. $\alpha: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisinin k_1 eğriliği sabit fakat k_2 eğriliği sabit değilse bu eğriye Salkowski eğrisi denir (Salkowski, 1909).

Tanım 2.1.12. $\alpha\colon \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisinin k_2 eğriliği sabit fakat k_1 eğriliği sabit değilse bu eğriye Anti-Salkowski eğrisi denir (Salkowski, 1909).

Tanım 2.1.13. $\alpha\colon \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ile $M \in \alpha$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye $M \in \alpha$ noktasındaki oskülatör küre denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.14. $\alpha\colon \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun. $M(s) \in \alpha$ noktasındaki oskülatör küre merkezi a ise oskülatör küre merkezinin geometrik yeri,

$$a = M(s) + \frac{1}{k_1}N - \left(\frac{1}{k_1}\right)' \frac{1}{k_2}B$$

denklemi ile verilir. (Hacısalihoğlu, 2000).

Eğriler için diğer bir karakterizasyon yöntemi de iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkilerdir.

Tanım 2.1.15. $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri ve

$\beta : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, Frenet çatısı $\{T^*, B^*, N^*\}$ olan bir diğer birim hızlı eğri olsun. Eğer N ve N^* lineer bağımlı ise bu durumda (α, β) eğri çifti Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır. α'ya Bertrand eğrisi, β'ya da α'nın Bertrand eşleniği adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.16. Eğer N ve B^* lineer bağımlı ise bu durumda (α, β) eğri çifti Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır. α ya Mannheim eğrisi, β ya da α nın Mannheim eşleniği adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayı; (x_1, x_2, x_3), $\mathbb{E}_1^3$ in bir dik koordinat sistemi olmak üzere

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

olarak tanımlanan metrikle birlikte 3-boyutlu Öklid uzayıdır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olmak üzere *x* ve *y* nin vektörel çarpımı

$$x \times y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_3y_2 - x_2y_3,\ x_1y_3 - x_3y_1,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

biçiminde ifade edilir (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir vektörün normu

$$\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlanır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.4. $v, w \in \mathbb{E}_1^3 - \{0\}$ vektörleri için $g(v,w) = 0$ ise v ve w ortogonal iki vektördür denir (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.5. $v \in \mathbb{E}_1^3 - \{0\}$ vektörü;

$g(v,v) > 0$ ise v spacelike vektör
$g(v,v) < 0$ ise v timelike vektör
$g(v,v) = 0$ $(v \neq 0)$ ise v null (lightlike) vektör

denir. Özel olarak $v = 0$ ise v spacelike vektör olur (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.6. $\alpha(s)$, $\mathbb{E}_1^3$ de keyfi bir eğri olsun. Hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) olursa eğri sırasıyla, spacelike, timelike veya null (lightlike) eğri olarak adlandırılır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.7. Bir spacelike veya timelike eğri $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ durumunda birim hızlı eğri olarak adlandırılır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.8. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike eğrinin aslinormal vektörü N, sıfır olursa pseudo null eğrisi olarak adlandırılır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{E}_1^3$ de teğet, aslinormal, binormal vektör alanlarından oluşan α eğrisinin hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Aşağıdaki şartlar altında Frenet formülleri ortaya çıkar.

i) α non-null bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Burada k_1 ve k_2 sırasıyla eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleridir. Burada

$g(T,T) = \varepsilon_1 = \pm 1 \;\; g(N,N) = \varepsilon_2 = \pm 1 \;\; g(B,B) = \varepsilon_3 = \pm 1$

$g(T,N) = g(T,B) = g(N,B) = 0$

dır. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$T \times N = \varepsilon_1 \varepsilon_2 B,\; N \times B = \varepsilon_2 \varepsilon_3 T,\; B \times T = \varepsilon_1 \varepsilon_3 B$ (Kuhnel, 1999).

ii) α null eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $k_1 = 0$ dır. Diğer durumlarda ise $k_1 = 1$ ortaya çıkar. Burada

$$g(T,T) = g(B,B) = g(T,N) = g = (N,B) = 0$$

$$g(N,N) = g(T,B) = 1$$

dır. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$T \times N = -T,\; N \times B = -B,\; B \times T = -N$ (Walrave, 1995).

iii) α pseudo null eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $k_1 = 0$ dır. $k_1 = 1$ ise diğer tüm durumlarda ortaya çıkar. Bu durumda,

$$g(N,N) = g(B,B) = g(T,N) = g(T,B) = 0$$

$$g(T,T) = g(N,B) = 1$$

dır. Üstelik aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$T \times N = N,\ N \times B = T,\ B \times T = B$ (Walrave, 1995).

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET DÜZLEMLERİ VE EĞRİLER

Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan birim hızlı eğri $C: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla s, k_1, k_2 olsun. Başka bir $J \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan bir diğer birim hızlı eğri ise $\bar{C}: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}\bar{B}\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla $\bar{s}$, $\bar{k}_1$ve $\bar{k}_2$ olsun.

C eğrisinin her bir $C(s)$ noktasında $\{T, N\}, \{T, B\}, \{N, B\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri sırasıyla OP, RP, NP olarak gösterelim. $\bar{C}$ eğrisinin her bir $\bar{C}$(s) noktasında $\{\bar{T}, \bar{N}\}, \{\bar{T}, \bar{B}\}, \{\bar{N}, \bar{B}\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri ise sırasıyla $\overline{OP}, \overline{RP}, \overline{NP}$ olarak gösterelim.

$r = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki Frenet formüllerini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T}' \\ \bar{N}' \\ \bar{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_2 \\ 0 & -\bar{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N} \\ \bar{B} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Bu bölümde aşağıdaki soruyu soruyoruz:

“Verilen bir eğrinin Frenet düzlemlerinden biri, başka bir eğrinin Frenet düzlemleri olabilir mi?” Bu durumda 9 farklı durumla karşılaşırız.

$Durum$	C nin $Frenet$ $Düzlemi$	$\bar{C}$ nin $Frenet$ $Düzlemi$	$Şart$
1	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = \overline{OP}$	$OP = \overline{OP}$
2	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \overline{NP}$	$OP = \overline{NP}$
3	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \overline{RP}$	$OP = \overline{RP}$
4	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = \overline{OP}$	$NP = \overline{OP}$

5	$sp\{N,B\} = NP$	$sp\{\bar{N},\bar{B}\} = \overline{NP}$	$NP = \overline{NP}$
6	$sp\{N,B\} = NP$	$sp\{\bar{T},\ \bar{B}\} = \overline{RP}$	$NP = \overline{RP}$
7	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\bar{N}\} = \overline{OP}$	$RP = \overline{OP}$
8	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{N},\bar{B}\} = \overline{NP}$	$RP = \overline{NP}$
9	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\ \bar{B}\} = \overline{RP}$	$RP = \overline{RP}$

Şimdi yukarıdaki durumları inceleyelim:

$\boldsymbol{Durum\ 1.\ OP = \overline{OP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.3}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.3) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a' - bk_1)\frac{1}{r}T + (ak_1 + b')\frac{1}{r}N + bk_2\frac{1}{r}B \tag{3.4}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T,N\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. (3.4) denkleminde bu değer yerine yazılır ve her iki taraf B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$bk_2 = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. $b \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu durumda aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.1.

3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir C uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri olamazlar.

$\boldsymbol{Durum\ 2.\ OP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.6}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.6) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a' - bk_1)\frac{1}{r}T + (ak_1 + b')\frac{1}{r}N + bk_2\frac{1}{r}B \tag{3.7}$$

elde edilir. $B^{\perp} = sp\{T, N\} = sp = \{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan B vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. (3.7) denkleminin her iki tarafı B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{r}{k_2} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.7) denkleminin her iki tarafı N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{-1}{k_1}b' \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) denkleminin türevi (3.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a = \frac{-1}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \frac{d\bar{s}}{ds}\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right) \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebiliriz.

Teorem 3.2.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında C eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C - \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \left(\frac{1}{k_2}\right)'\frac{d\bar{s}}{ds}\right)T + \frac{1}{k_2}\frac{d\bar{s}}{ds}N$$

denklemi ile verilir.

Sonuç 3.1.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı yani $s = \bar{s}$ ve $k_1 = k_2 = sabit \neq 0$ olsun. Bu durumda C eğrisi bir küresel helistir.

$\boldsymbol{Durum}$ **3.** $\boldsymbol{OP = \overline{RP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.11}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.11) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a' - bk_1)\frac{1}{r}T + (ak_1 + b')\frac{1}{r}N + bk_2\frac{1}{r}B \tag{3.12}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, N\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.12) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$bk_2 \frac{1}{r} = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. $b \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu durumda aşağıdaki teoremi verilebiliriz.

Teorem 3.3.

3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir C uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri olamazlar.

$\boldsymbol{Durum\ 4.\ NP = \overline{OP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin normal düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.14}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.14) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 - ak_1)\frac{1}{r}T + (a' - bk_2)\frac{1}{r}N + (ak_2 + b')\frac{1}{r}B \tag{3.15}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{N, B\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda N + \mu B$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.15) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1} \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) değeri (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{T} = \left(\left(\frac{1}{k_1}\right)' - bk_2\right)\frac{1}{r}N + \left(\frac{k_2}{k_1} + b'\right)\frac{1}{r}B \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{k_1}\bar{N}r = &\left(-\left(\frac{1}{k_1}\right)' k_1 + b\, k_1 k_2\right)\frac{1}{r}T \\ &+ \left(\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - b'k_2 - bk_2' - \frac{{k_2}^2}{k_1} - bk_2\right)\frac{1}{r}N \\ &+ \left(2\left(\frac{1}{k_1}\right)' k_2 - bk_2^2 + \frac{{k_2}'}{k_1} + b''\right)\frac{1}{r}B \\ &+ \left(\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)' - bk_2\right)N + \left(\frac{k_2}{k_1} + b'\right)B\right)\left(\frac{1}{r}\right)'\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. $\bar{N} \in sp\{N, B\}$ olduğundan,

$$\bar{N} = \lambda_1 N + \mu_1 B$$

yazılabilir. Burada λ_1 ve μ_1 sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.18) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{-{k_1}'}{k_2 {k_1}^2} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.16) ve (3.19) değerleri (3.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + \frac{1}{k_1}N - \frac{{k_1}'}{k_2 {k_1}^2}B \tag{3.20}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4.

$\mathbb{E}^3$ uzayında C ve $\bar{C}$ eğrilikleri sıfırdan farklı uzay eğrileri olsun. C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi, C eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezi olur.

$\boldsymbol{Durum\ 5.}$ $\boldsymbol{NP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin normal düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.21}$$

yazabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.21) denkeminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 - ak_1)\frac{1}{r}T + (a' - bk_2)\frac{1}{r}N + (ak_2 + b')\frac{1}{r}B \tag{3.22}$$

elde edilir. $T^{\perp} = sp\{N, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir.

$\langle T, \bar{T} \rangle = 1$ olur. (3.22) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1}(1 - r) \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.22) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}(1 - r)\right)' \tag{3.24}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{1}{k_1}\left(1 - \frac{d\bar{s}}{ds}\right)N + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\left(1 - \frac{d\bar{s}}{ds}\right)\right)' B$$

denklemi ile verilir.

Sonuç 3.2.

Genellemeyi bozmadan C ve $\overline{C}$ eğrilerinin aynı s parametresine sahip olduğunu kabul edelim. Yani $s = \bar{s}$ ise o zaman $\bar{C} = C$ dir.

$\boldsymbol{Durum\ 6.\ NP = \overline{RP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin normal düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.25}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlar olsun. (3.25) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 - ak_1)\frac{1}{r}T + (a' - bk_2)\frac{1}{r}N + (ak_2 + b')\frac{1}{r}B \tag{3.26}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{N, B\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda N + \mu B$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.26) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.26) denkleminin türevi alınırsa,

$$\overline{k_1}\overline{N}r = -k_1\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)' - bk_2\right)\frac{1}{r}T$$

$$+\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - 2b'k_2 - bk_2' - \frac{k_2^2}{k_1}\right)\frac{1}{r}N \tag{3.28}$$

$$+\left(2\left(\frac{1}{k_1}\right)' k_2 - bk_2^2 + \frac{k_2{}'}{k_1} + b''\right)\frac{1}{r}B$$

$$+\left(\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)' - bk_2\right)N + \left(\frac{k_2}{k_1} + b'\right)B\right)\left(\frac{1}{r}\right)'$$

elde edilir. $T^{\perp} = sp\{N, B\} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \bar{N}^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. (3.28) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b' + \left(\frac{k_2'}{2k_2} + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}\right)'\right)b = \frac{1}{2k_2}\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2^2}{k_1}\right) + \frac{r}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\left(\frac{1}{r}\right)' \tag{3.29}$$

elde edilir. Burada,

$$\gamma = \frac{k_2'}{2k_2} + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}\right)' \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{1}{2k_2}\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2^2}{k_1}\right) + \frac{r}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\left(\frac{1}{r}\right)'$$

denirse,

$$b' + \gamma b = \delta$$

denklemi ortaya çıkar. Bu denklemin lineer çözümü ise

$$b(s) = e^{-\int \gamma ds}\left\{\int e^{\int \gamma ds}\delta\, ds + t\right\},\ t \in \mathbb{R}$$

dir.

Teorem 3.6.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{1}{k_1}N + \left(e^{-\int \gamma ds}\left\{\int e^{\int \gamma ds}\delta\, ds + t\right\}\right)B$$

denklemi ile verilir. Burada $\gamma = \frac{k_2'}{2k_2} + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r}\right)'$, $\delta = \frac{1}{2k_2}\left(\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2^2}{k_1}\right) + \frac{r}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\left(\frac{1}{r}\right)'$ ve $t \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 3.3

Genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı, yani $s = \bar{s}$ ve $k_1 = sbt \neq 0$ ile $k_2 = sbt \neq 0$ ise

$$b = \frac{-k_2}{2k_1} s + t, \ \ t \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. Bu durumda C bir dairesel helistir.

Sonuç 3.4.

Genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı, yani $s = \bar{s}$ ve $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$, k_2 sabit olmayan bir fonksiyon ise

$$b = \frac{-1}{5} \frac{k_2^2}{k_1} + \frac{1}{\sqrt{k_2}} t, \ \ t \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. Bu durumda C eğrisi $\mathbb{E}^3$ de bir Salkowski eğrisidir.

Sonuç 3.5.

Genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı, yani $s = \bar{s}$ ve $k_1 \neq 0$, k_1 sabit olmayan fonksiyon ve $k_2 = sabit \neq 0$ ise

$$b = \frac{1}{2k_2} \left(\frac{1}{k_1} \right)' - \frac{k_2}{2} \int \frac{1}{k_1} ds + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. Bu durumda C eğrisi anti-Salkowski eğrisidir.

$\boldsymbol{Durum}$ **7**. $\boldsymbol{RP = \overline{OP}}$

“Verilen bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \quad a \neq 0, \ b \neq 0, \tag{3.30}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.30) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a')\frac{1}{r}T + (ak_1 - bk_2)\frac{1}{r}N + b'\frac{1}{r}B \tag{3.31}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, B\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu B$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.31) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$ak_1 - bk_2 = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.31) denkleminin türevi alınırsa,

$$\overline{k_1}\bar{N}r = [a''T + (k_1(1 + a') - k_2 b')N + b''B]\frac{1}{r} \tag{3.33}$$

$$+[(1 + a')T + b'B]\left(\frac{1}{r}\right)'$$

elde edilir. $\bar{N} \in sp\{T, B\}$ olduğundan,

$$\bar{N} = \lambda_1 T + \mu_1 B$$

yazılabilir. Burada λ_1 ve μ_1 sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.33) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$k_1(1 + a') - k_2 b' = 0 \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.32) ve (3.34) denklemlerinden

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{1+a'} \tag{3.35}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.6.

M ve $\overline{M}$ sırasıyla C ve $\bar{C}$ eğrileri üzerinde keyfi noktalar olsun. $OM = X$ ve $\overline{OM} = \bar{X}$ konum vektörleri olmak üzere (3.30) ve (3.31) denklemlerinden,

$$M\overline{M} = aT + bB$$

$$\bar{T} = \big((1 + a')T + b'B\big)\frac{1}{r} \tag{3.36}$$

bulunur. (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden $M\overline{M}$ vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. O halde $M\overline{M}$ vektörü $\bar{C}$ eğrisine $\overline{M}$ noktasında teğettir.

Sonuç 3.7.

$\overline{M} \in sp\{T, B\}$ olduğundan

$$M\overline{M} = sin\theta T + cos\theta B$$

yazılabilir. $M\overline{M}$ vektörünün B vektörü ile yaptığı açıya θ denirse,

$$tan\theta = \frac{a}{b} \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.35) denkleminden,

$$tan\theta = \frac{k_2}{k_1} \tag{3.38}$$

elde edilir. $M\overline{M}$ vektörü C eğrisinin M noktasındaki Darboux vektörüne paraleldir.

Tanım 3.1.

$M\overline{M}$ vektörüne C eğrisinin $C \in M$ noktasındaki rektifiyan doğrusu denir (Özkaldı, 2014).

Sonuç 3.8.

$M\overline{M}$ vektörünün B vektörü ile yaptığı θ açısı sabittir ancak ve ancak C eğrisi bir genel helistir.

(3.32) denkleminin türevi alınır ve (3.34) denklemi kullanılırsa,

$$ak_1' - bk_2' = k_1 \tag{3.39}$$

elde eldilir. (3.32) ve (3.39) denklemleri ortak çözülürse,

$$a = \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} \tag{3.40}$$

$$b = \frac{-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \tag{3.41}$$

elde edilir. Buradan da (3.40) ve (3.41) denklemleri kullanılarak,

$$\|M\overline{M}\|^2 = \frac{k_1^2\left(k_1^2+k_2^2\right)}{k_2k_1'-k_2'k_1} \tag{3.42}$$

elde edilir.

Sonuç 3.9.

Eğer $a = \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_1}{k_2} = c_2e^{c_1s}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir.

Sonuç 3.10.

Eğer $b = \frac{-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_2}{k_1} = cs + d \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

dir. Bu durumda C eğrisi rektifiyan eğridir. Bu eğriler Izumiya ve Takeuchi tarafından kanonikcal geodezik eğri olarak adlandırılmıştır (Izumiya and Takeuchi, 2004).

Sonuç 3.11.

Eğer,

$$\|M\overline{M}\|^2 = \frac{k_1^2(k_1^2 + k_2^2)}{k_2k_1' - k_2'k_1} = sabit$$

ise

$$\frac{k_2}{k_1} = sinh(c_1s + c_2) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur. Bu durumda C eğrisi bir Mannheim eğrisidir (Liu and Wang, 2008).

***Durum* 8.** $\boldsymbol{RP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.43}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (3.43) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a')\frac{1}{r}T + (ak_1 - bk_2)\frac{1}{r}N + b'\frac{1}{r}B \tag{3.44}$$

elde edilir. $N^\perp = sp\{T, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^\perp$ olduğundan N vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. (3.44) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$ak_1 - bk_2 = r \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.44) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = -s + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.44) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R} \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.46) ve (3.47) değerleri (3.45) denkleminde yerine yazılırsa,

$$r = (-s + c_1)k_1 + c_2 k_2 \tag{3.48}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verilebiliriz.

Teorem 3.7.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (-s + c_1)T + c_2 B, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 9. $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$**

"Verilen bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri, başka bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemleri olsun. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{3.49}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlar olsun. (3.49) denkleminin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T} = (1 + a')\frac{1}{r}T + (ak_1 - bk_2)\frac{1}{r}N + b'\frac{1}{r}B \tag{3.50}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, B\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu B$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (3.50) denkleminde yerine yazılır ve her iki taraf N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\mathrm{a}k_1 - bk_2 = 0 \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.50) denkleminin türevi alınırsa,

$$\overline{k_1}\bar{N}r = [a''T + (k_1(1+a') - k_2 b')N + b''B]\frac{1}{r} \tag{3.52}$$

$$+[(1+a')T + b'B]\left(\frac{1}{r}\right)'$$

elde edilir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{T},\ \bar{B}\} = \bar{N}^{\perp}$ olduğundan N vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. (3.52) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a''\frac{1}{r} + (1+a')\left(\frac{1}{r}\right)' = 0$$

$$a = -s + c_1 \int r\, ds + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.53}$$

(3.52) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b''\frac{1}{r} + b'\left(\frac{1}{r}\right)' = 0 \tag{3.54}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$b = d_1 \int r\, ds + d_2 \qquad d_1, d_2 \in \mathbb{R} \tag{3.55}$$

dır.

Teorem 3.8.

Genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip olduğunu kabul edelim. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında C eğrisi, eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (c_1 s + c_2)T + (d_1 s + d_2)B, \qquad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.56}$$

denklemi ile verilir. (3.53) ve (3.55) değerleri (3.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1 s + c_2}{d_1 s + d_2} \tag{3.57}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.12.

Eğer $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$ ise o zaman $\frac{k_1}{k_2} = sabit$ olur. Bu durumda C eğrisi, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında dairesel helis ya da genel helistir.

Örnek 3.1.

$C(s) = (\cos s, \sin s, s)$ olsun. Dairesel helisin Frenet vektörlerini ve eğriliklerini bulalım.

$$C'(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$$

$$\|C'(s)\| = \sqrt{cos^2 s + sin^2 s + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C''(s) = (-\,cos\, s, -\,sin\, s,\ 0)$$

$$\|C''(s)\| = \sqrt{cos^2 s + sin^2 s + 0} = 1$$

$$T = \frac{C'(s)}{\|C'(s)\|} = \left(\frac{-\,sin\, s}{\sqrt{2}}, \frac{cos\, s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N = \frac{C''(s)}{\|C''(s)\|} = (-\,cos\, s, -\,sin\, s, 0)$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{-\,sin\, s}{\sqrt{2}} & \frac{cos\, s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\,cos\, s & -\,sin\, s & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{sin\, s}{\sqrt{2}}, \frac{-cos\, s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$k_1 = \langle T', N\rangle = \langle \left(\frac{-\,cos\, s}{\sqrt{2}}, \frac{-sin\, s}{\sqrt{2}}, 0\right), (-\,cos\, s, -\,sin\, s, 0)\rangle$$

$$= \frac{cos^2 s}{\sqrt{2}} + \frac{sin^2 s}{\sqrt{2}} + 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k_2 = \langle N', B \rangle = \langle (sin\, s, -\, cos\, s, 0), \left(\frac{sin\, s}{\sqrt{2}}, \frac{-cos\, s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle$$

$$= \frac{sin^2 s}{\sqrt{2}} + \frac{cos^2 s}{\sqrt{2}} + 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Şimdi C eğrisi ile aynı rektifiyan düzleme sahip bir $\bar{C}$ eğrisi olduğunu kabul edelim. (3.56) denkleminde $c_1 = d_1 = 0$ ve $c_2 = d_2 = \sqrt{2}$ alınırsa

$$\bar{C}(s) = C(s) + \sqrt{2}\, T + \sqrt{2}\, B$$

elde edilir. C, T, B değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\bar{C}(s) = (cos\, s, sin\, s, s + 2)$$

bulunur. Bu da gösterir ki $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında Temel teoreme göre $C(s)$ ve $\bar{C}(s)$ eğrileri kongurent eğrilerdir.

Sonuç 3.13.

(3.57) denkleminde $d_2 = 0$ alınırsa

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_1}\frac{1}{s}$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi, $\bar{C}$ eğrisi ile aynı parametreye bağlı rektifiyan eğridir.

4. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA ORTAK SPACELİKE FRENET DÜZLEMLİ EĞRİ ÇİFTLERİ

Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan birim hızlı bir eğri $C: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla s, k_1, k_2 olsun. Başka bir $J \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan bir diğer birim hızlı eğri ise $\bar{C}: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla $\bar{s}, \overline{k_1}$ ve $\overline{k_2}$ olsun.

C eğrisinin her bir $C(s)$ noktasında $\{T, N\}, \{T, B\}, \{N, B\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri sırasıyla OP, RP, NP olarak gösterelim. $\overline{C}$ eğrisinin her bir $\overline{C}$(s) noktasında $\{\overline{T}, \overline{N}\}, \{\overline{T}, \overline{B}\}, \{\overline{N}, \overline{B}\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri ise sırasıyla $\overline{OP}, \overline{RP}, \overline{NP}$ olarak gösterelim.

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = f'$$

olsun. Bu bölümde aşağıdaki soruyu soruyoruz:

"Verilen bir eğrinin spacelike Frenet düzlemlerinden biri başka bir eğrinin spacelike Frenet düzlemlerinden biri olabilir mi?"

Bu durumda 9 farklı durumla karşılaşırız.

$Durum$	C $nin\ Frenet\ Düzlemi$	$\bar{C}$ $nin\ Frenet\ Düzlemi$	$Şart$
1	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = \overline{OP}$	$OP = \overline{OP}$
2	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{NP}$	$OP = \overline{NP}$
3	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = \overline{RP}$	$OP = \overline{RP}$
4	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = \overline{OP}$	$NP = \overline{OP}$
5	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{NP}$	$NP = \overline{NP}$
6	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = \overline{RP}$	$NP = \overline{RP}$

7	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\bar{N}\} = \overline{OP}$	$RP = \overline{OP}$
8	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{N},\bar{B}\} = \overline{NP}$	$RP = \overline{NP}$
9	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\bar{B}\} = \overline{RP}$	$RP = \overline{RP}$

Şimdi yukarıdaki durumları inceleyelim:

C eğrisinin oskülatör düzlemi $sp\{T,N\} = OP$ spacelike düzlem ise T spacelike vektör, N spacelike vektör ve B timelike vektördür. Bu durumda aşağıdaki Frenet formüllerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$g(T,T) = 1, \qquad g(N,N) = 1, \qquad g(B,B) = -1$$

$Durum\ 1.\ OP = \overline{OP}$

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{N}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Binormal vektörü $\bar{B}$, timelike vektördür. $\bar{\varepsilon_1} = \bar{\varepsilon_2} = 1$ ve $\bar{\varepsilon_3} = -1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.2}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.2) denkleminin türevi alınır ve (4.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - bk_1)T + (ak_1 + b')N - bk_2B \tag{4.3}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T,N\}$ olduğundan

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (4.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(\lambda T + \mu N)\, f' = (1 + a' - bk_1)T + (ak_1 + b')N - bk_2 B \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denkleminin her iki tarafı B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$bk_2 = 0$$

elde edilir. $b \neq 0\ ve\ k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.

C eğrisinin spacelike oskülatör düzleminin $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi olduğu bir $(C, \bar{C})$ eğri çifti yoktur.

$\boldsymbol{Durum\ 2.\ OP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{B}$ spacelike vektörü ve $\bar{N}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Teğet vektörü $\bar{T}$ timelike vektördür. $\overline{\varepsilon_1} = -1$ ve $\overline{\varepsilon_2} = \overline{\varepsilon_3} = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi timelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \quad (4.5)$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.5) denkleminin türevi alınır ve (4.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - bk_1)T + (ak_1 + b')N - bk_2 B \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = -\frac{f'}{k_2} \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.6) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1}\left(\frac{f'}{k_2}\right)' \tag{4.8}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}\frac{d\bar{s}}{ds}\right)' T - \frac{1}{k_2}\frac{d\bar{s}}{ds} N$$

denklemi ile verilir.

Sonuç 4.1.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki $\bar{C}$ ve C eğrileri aynı s parametresine sahip, $s = \bar{s}$ olsun. $k_1 = k_2 = sabit \neq 0$ ise o zaman C eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan spacelike pseudo küresel helistir. Bu durumda $\bar{C}$ eğrisi, $\bar{k}_1 = \pm\bar{k}_2$ ve $k_1 = k_2 = \bar{k}_1$ eğriliklerine sahip ise H_2^0 küresi üzerinde yatan timelike pseudo küresel helistir.

$\boldsymbol{Durum}$ 3. $\boldsymbol{OP = \overline{RP}}$

“Verilen bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Normal vektörü $\bar{N}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon}_2 = -1$ ve $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_3 = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.9}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.9) denkleminin türevi alınır ve (4.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - bk_1)T + (ak_1 + b')N - bk_2B \tag{4.10}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, N\}$ olduğundan

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\lambda T + \mu N)\ f' = (1 + a' - bk_1)T + (ak_1 + b')N - bk_2B \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa

$$bk_2 = 0$$

elde edilir. $b \neq 0\ ve\ k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.

C eğrisinin spacelike oskülatör düzleminin $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi olduğu bir $(C, \bar{C})$ eğri çifti yoktur.

C eğrisinin normal düzlemi $NP = sp\{N, B\}$ spacelike düzlem ise o zaman N spacelike vektör, B spacelike vektör ve T timelike vektördür. Bu durumda C eğrisi timelike eğri olur. Bu durumda aşağıdaki Frenet formüllerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$g(T, T) = -1, \qquad g(N, N) = 1, \qquad g(B, B) = 1$$

***Durum* 4.** $\boldsymbol{NP = \overline{OP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{N}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Binormal vektörü $\bar{B}$ timelike vektördür. $\overline{\varepsilon_3} = -1$ ve $\overline{\varepsilon_1} = \overline{\varepsilon_2} = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.13}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.13) denkleminin türevi alınır ve (4.12) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + ak_1)T + (a' - bk_2)N + (b' + ak_2)B \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) denklemi T vektörü ile iç çapılırsa,

$$a = -\frac{1}{k_1} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) değeri (4.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' - bk_2)N + (b' + ak_2)B \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) denkleminin türevi alınırsa,

$$\bar{T}f'' + (f')^2\overline{k_1 N} = (a'k_1 - bk_2k_1)T + (a'' - 2b'k_2 - bk_2' - ak_2^2)N \tag{4.17}$$

$$+(2a'k_2 + ak_2' + b'' - bk_2^2)B$$

elde edilir. (4.17) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{k_1'}{k_2k_1^2} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.15) ve (4.18) değerleri (4.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{X} = X - \frac{1}{k_1}N + \frac{k_1'}{k_2 k_1^2}B$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem ortaya çıkar:

Teorem 4.4.

C eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C - \frac{1}{k_1}N + \frac{k_1'}{k_2 k_1^2}B$$

denklemi ile verilir.

Sonuç 4.2.

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında C ve $\bar{C}$ eğrileri sıfırdan farklı birim hızlı eğriler olsun. C eğrisinin normal düzlemi $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi C eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezidir.

$\boldsymbol{Durum}$ 5. $\boldsymbol{NP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{N}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Teğet vektörü $\bar{T}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon_1} = -1$ ve $\bar{\varepsilon_3} = \bar{\varepsilon_2} = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi timelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.19}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.19) denkleminin türevi alınır ve (4.12) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + ak_1)T + (a' - bk_2)N + (b' + ak_2)B \tag{4.20}$$

elde edilir. $T^{\perp} = sp\{N, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. (4.20) denklemi T vektörü ile iç çapılırsa

$$a = \frac{f'-1}{k_1} \tag{4.21}$$

elde edilir ve (4.20) denklemi N vektörü ile iç çapılırsa,

$$b = \frac{1}{k_2}\left(\frac{f'-1}{k_1}\right)' \tag{4.22}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.

C eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$C = \bar{C} + \frac{1}{k_1}\left(-1 + \frac{d\bar{s}}{ds}\right)N + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\left(-1 + \frac{d\bar{s}}{ds}\right)\right)' B$$

denklemi ile verilir.

Sonuç 4.3.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı, yani $s = \bar{s}$ olsun. Bu durumda $C = \bar{C}$ elde edilir.

***Durum* 6. $NP = \overline{RP}$**

“Verilen bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Normal vektörü $\bar{N}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon}_2 = -1$ ve $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_3 = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0, \; b \neq 0, \tag{4.23}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.23) denkleminin türevi alınır ve (4.12) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + ak_1)T + (a' - bk_2)N + (b' + ak_2)B \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = -\frac{1}{k_1} \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) değeri (4.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' - bk_2)N + (b' + ak_2)B \tag{4.26}$$

elde edilir ve burada,

$$\lambda = \frac{a' - bk_2}{f'}, \; \mu = \frac{b' + ak_2}{f'} \tag{4.27}$$

denirse,

$$\bar{T} = \lambda N + \mu B \tag{4.28}$$

yazılabilir. (4.28) denkleminin türevi alınırsa,

$$-(f')\overline{k_1 N} = \lambda k_1 T + (\lambda' - k_2\mu)N + (\lambda k_2 + \mu')B \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa

$$\lambda' - k_2\mu = 0 \tag{4.30}$$

elde edilir ve (4.27) değeri (4.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$b' + b\left(\frac{k_2'}{2k_2}\right) = \frac{a'' - ak_2^2}{2k_2} \tag{4.31}$$

elde edilir. Burada

$$\delta = \frac{k_2'}{2k_2} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{a'' - ak_2^2}{2k_2} \tag{4.32}$$

denirse

$$b' + b\delta = \gamma \tag{4.33}$$

elde edilir. Bu lineer denklemin çözümü ise

$$b(s) = e^{-\int \delta ds}\{\int e^{\int \delta ds}\gamma ds + t\}, \ t\epsilon\mathbb{R}$$

dir. Burada

$$\delta = \frac{f'k_2' - f''k_2}{2k_2 f'} \ \text{ve} \ \ \gamma = \frac{-\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' + \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + \frac{f'k_2^2}{k_1}}{2k_2 f'} \tag{4.34}$$

olarak bulunur. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.6.

C eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C - \frac{1}{k_1}N + e^{-\int \delta ds}\left\{\int e^{\int \delta ds}\gamma ds + t\right\}B$$

denklemi ile verilir. Burada

$$\delta = \frac{f'k_2' - f''k_2}{2k_2 f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{-\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' + \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + \frac{f'k_2^2}{k_1}}{2k_2 f'}$$

dır.

Sonuç 4.4.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip, yani $s = \bar{s}$ ise ve $k_1 = sbt \neq 0$ ile $k_2 = sbt \neq 0$ olmak üzere

$$b = \frac{k_2}{2k_1}s + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

dir. Bu durumda C eğrisi bir dairesel helistir.

Sonuç 4.5.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip, yani $s = \bar{s}$ ve $k_1 = sabit \neq 0$ ile $k_2 \neq 0$, k_2 sabit olmayan fonksiyon olmak üzere,

$$b = \frac{1}{2k_1\sqrt{k_2}} \int (k_2)^{\frac{3}{2}}\, ds + \frac{1}{\sqrt{k_2}} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi bir timelike Salkowski eğrisidir.

Sonuç 4.6.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip, yani $s = \bar{s}$ ve $k_2 = sabit \neq 0$ ile $k_1 \neq 0$ sabit olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$b = \frac{-1}{2k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' + \frac{k_2}{2}\int \frac{1}{k_1} ds + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında bir timelike anti-Salkowski eğrisidir.

C eğrisinin rektifiyan düzlemi $RP = sp\{T, B\}$ spacelike düzlem ise T spacelike vektör, B spacelike vektör ve N timelike vektördür. Bu durumda aşağıdaki Frenet formüllerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

$$g(T,T) = 1, \qquad g(N,N) = -1, \qquad g(B,B) = 1$$

***Durum* 7. $\boldsymbol{RP = \overline{OP}}$**

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{N}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Binormal vektörü $\bar{B}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon}_3 = -1$ ve $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.36}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.36) denkleminin türevi alınır ve (4.35) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + (-ak_1 + bk_2)N + b'B \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$-ak_1 + bk_2 = 0 \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.38) denklemi (4.37) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + b'B \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) denkleminin türevi alınırsa,

$$\bar{T}f'' + (f')^2\overline{k_1N} = a''T + (b'k_2 - a'k_1 - k_1)N + b''B \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.40) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b'k_2 - a'k_1 - k_1 = 0 \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.38) denkleminin türevi alınıp (4.41) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a = \frac{k_1k_2}{k_2{k_1}' - k_1{k_2}'} = \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} \tag{4.42}$$

$$b = \frac{{k_1}^2}{k_2{k_1}' - k_1{k_2}'} = -\frac{1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.42) ve (4.43) değerleri (4.36) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + \frac{k_1 k_2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} T + \frac{{k_1}^2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} B$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.7.

C eğrisi eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike oskülatör düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{k_1 k_2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} T - \frac{{k_1}^2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} B$$

denklemi ile verilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.7.

M ve $\bar{M}$ sırasıyla C ve $\bar{C}$ eğrileri üzerinde keyfi noktalar olsun. $OM = X$ ve $\overline{OM} = \bar{X}$ konum vektörleri olmak üzere (4.36) ve (4.39) denklemlerini düzenlersek

$$\begin{cases} M\bar{M} = aT + bB \\ \bar{T} = \big((1 + a')T + b'B\big)\frac{1}{f'} \end{cases} \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.38) ve (4.41) denklemlerinden $M\bar{M}$ vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. O halde $M\bar{M}$ vektörü $\bar{C}$ eğrisine $\bar{M}$ noktasında teğettir.

Sonuç 4.8.

$\bar{M} \in sp\{T, B\}$ olduğundan,

$$M\bar{M} = sin\theta T + cos\theta B$$

yazılabilir. $M\bar{M}$ vektörünün B vektörü ile yaptığı açıya θ denirse,

$$tan\theta = \frac{a}{b} \tag{4.45}$$

olur. (4.38) denkleminden,

$$tan\theta = \frac{k_2}{k_1} \tag{4.46}$$

elde edilir. $M\bar{M}$ vektörü C eğrisinin M noktasındaki Darboux vektörüne paraleldir.

Tanım 4.1.

$M\bar{M}$ vektörüne C eğrisinin $C \in M$ noktasındaki rektifiyan doğrusu denir (Özkaldı, 2014).

Sonuç 4.9.

$M\bar{M}$ vektörünün B vektörü ile yaptığı θ açısı sabittir ancak ve ancak C eğrisi bir genel helistir.

(4.38) denkleminin türevi (4.41) denkleminde yerine yazılırsa

$$ak_1' - bk_2' = k_1 \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.38) ve (4.47) denklemleri ortak çözülürse

$$a = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} \tag{4.48}$$

$$b = \frac{-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \tag{4.49}$$

elde edilir. Buradan da (4.48) ve (4.49) denklemleri kullanılarak

$$\|M\bar{M}\|^2 = \frac{k_1^2(k_1^2+k_2^2)}{k_2k_1'-k_2'k_1} \tag{4.50}$$

elde edilir.

Sonuç 4.10.

Eğer $a = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_1}{k_2} = c_2 e^{c_1 s}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Sonuç 4.11.

Eğer $b = \frac{-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_2}{k_1} = cs + d \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi rektifiyan eğridir. Bu eğriler Izumiya ve Takeuchi tarafından kanonical geodezik eğri olarak adlandırılmıştır (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Sonuç 4.12.

Eğer

$$\|M\overline{M}\|^2 = \frac{k_1^2(k_1^2 + k_2^2)}{k_2k_1' - k_2'k_1} = sabit$$

ise o zaman

$$\frac{k_2}{k_1} = sinh(c_1 s + c_2) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi bir Mannheim eğrisidir (Liu veWang, 2008).

***Durum* 8. $\boldsymbol{RP = \overline{NP}}$**

"Verilen bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{N}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Teğet vektörü $\bar{T}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon}_1 = -1$ ve $\bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$ için (2.1) deki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ timelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.51}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.51) denkleminin türevi alınır ve (4.35) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + (-ak_1 + bk_2)N + b'B \tag{4.52}$$

elde edilir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olup N vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. (4.52) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$f' = -ak_1 + bk_2 \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.52) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = -s + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.52) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R} \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.54) değeri (4.53) denkleminde yerine yazılırsa,

$$b = \frac{f' + (-s + c_1)k_1}{k_2} = sabit \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.54) ve (4.56) değerleri (4.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + (-s + c_1)T + \left(\frac{f' + (-s + c_1)k_1}{k_2}\right)B, \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.8.

C eğrisi, eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (-s + c_1)T + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{d\bar{s}}{ds} + (-s + c_1)\, k_1\right)\right)B, \ \ c_1 \in \mathbb{R},$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 9.** $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$

“Verilen bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi spacelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ spacelike vektörü tarafından gerilir. Normal vektörü $\bar{N}$ timelike vektördür. $\bar{\varepsilon}_2 = -1$ ve $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$ için (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{4.57}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (4.57) denklemininin türevi alınır ve (4.35) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + (-ak_1 + bk_2)N + b'B \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.58) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$-ak_1 + bk_2 = 0 \tag{4.59}$$

elde edilir ve (4.59) değeri (4.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + b'B \tag{4.60}$$

elde edilir. Burada

$$\lambda = \frac{1+a'}{f'} \text{ ve } \mu = \frac{b'}{f'} \tag{4.61}$$

denirse,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu B \tag{4.62}$$

yazılabilir. (4.62) denkleminin türevi alınırsa

$$-f'\overline{k_1 N} = \lambda' T + (\mu k_2 - \lambda k_1)N + \mu' B \tag{4.63}$$

elde edilir. (4.63) denklemi sırasıyla T ve B vektörleri ile iç çarpılırsa

$$\lambda' = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mu' = 0 \tag{4.64}$$

elde edilir. Burada,

$$\lambda = c_1, \qquad \mu = d_1, \tag{4.65}$$

denirse ve (4.61) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} a = -s + c_1 \int f' \, ds + c_2, & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ b = d_1 \int f' \, ds + d_2, & d_1, d_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.66}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.9.

Genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip olduğunu kabul edelim. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında C eğrisi, eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (c_1 s + c_2)T + (d_1 s + d_2)B \qquad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R} \tag{4.67}$$

denklemi ile verilir.

(4.66) değeri (4.59) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1 s + c_2}{d_1 s + d_2} \tag{4.68}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.13.

Eğer $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$ ise o zaman $\frac{k_1}{k_2} = sabit$ olur. Bu durumda C eğrisi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında bir dairesel helis ya da genel helistir.

Örnek 4.1.

$C(s)=(\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\ s)$ $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında dairesel helis olsun. Dairesel helisin Frenet vektörlerini ve eğriliklerini bulalım.

$$C'(s)=(\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\|C'(s)\|=\sqrt{\left|-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh \text{s}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right|}=1$$

$$C''(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, 0\right)$$

$$\|C''(s)\|=\sqrt{\left|-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh \text{s}\right)^2+0^2\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T=\frac{C'(s)}{\|C'(s)\|}=\left(\frac{\sinh s}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N=\frac{C''(s)}{\|C''(s)\|}=(-\cosh s, -\sinh s, 0)$$

$$B=T\times N=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\sinh s}{\sqrt{2}} & \dfrac{\cosh s}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -coshs & -sinhs & 0 \end{vmatrix}=\left(\frac{-\sinh s}{\sqrt{2}}, \frac{-\cosh s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$k_1=\langle T', N\rangle=\langle \left(\frac{\cosh s}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh s}{\sqrt{2}}, 0\right), (-\cosh s, -\sinh s, 0)\ \rangle$$

$$=\frac{cosh^2 s}{\sqrt{2}}-\frac{sinh^2 s}{\sqrt{2}}+0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k_2=\langle N', B\rangle=\langle(-\sinh s, -\cosh s, 0), \left(\frac{-\sinh s}{\sqrt{2}}, \frac{-\cosh s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle$$

$$= \frac{-sinh^2 s}{\sqrt{2}} + \frac{cosh^2 s}{\sqrt{2}} + 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Şimdi C eğrisi ile aynı rektifiyan düzleme sahip bir $\bar{C}$ eğrisi olduğunu varsayalım. (4.67) denkleminde $c_1 = d_1 = 0$ ve $c_2 = d_2 = \sqrt{2}$ alınırsa,

$$\bar{C}(s) = C(s) + \sqrt{2}\,T + \sqrt{2}\,B$$

elde edilir ve C, T ve B değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\bar{C}(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}} s + 2)$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında Temel teoreme göre $C(s)$ ve $\bar{C}(s)$ eğrileri kongurent eğrilerdir.

Sonuç 4.14.

(4.68) denkleminde $d_2 = 0$ alınırsa

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_1}\frac{1}{s}$$

elde edilir. Bu durumda $\bar{C}$ eğrisi, C eğrisinin yeniden parametrelendirilmesiyle elde edilen bir rektifiyan eğridir.

Sonuç 4.15.

C eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi $\bar{C}$ eğrisinin spacelike rektifiyan düzlemi ise $(C, \bar{C})$ Bertrand eğri çiftidir.

5. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA ORTAK TİMELİKE FRENET DÜZLEMLİ EĞRİ ÇİFTLERİ

Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan birim hızlı bir eğri $C: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla s, k_1, k_2 olsun. Başka bir $J \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlanan bir diğer birim hızlı eğri ise $\bar{C}: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$, yay parametresi, eğriliği ile burulması sırasıyla $\bar{s}, \overline{k_1}$ ve $\overline{k_2}$ olsun.

C eğrisinin her bir $C(s)$ noktasında $\{T, N\}, \{T, B\}, \{N, B\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri sırasıyla OP, RP, NP olarak gösterelim. $\overline{C}$ eğrisinin her bir $\overline{C}$(s) noktasında $\{\bar{T}, \bar{N}\}, \{\bar{T}, \bar{B}\}, \{\bar{N}, \bar{B}\}$ tarafından gerilen oskülatör, rektifiyan ve normal düzlemleri ise sırasıyla $\overline{OP}, \overline{RP}, \overline{NP}$ olarak gösterelim.

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = f'$$

olsun. Bu bölümde aşağıdaki soruyu soruyoruz:

“Verilen bir eğrinin timelike Frenet düzlemlerinden biri başka bir eğrinin timelike Frenet düzlemlerinden biri olabilir mi?”

Bu sorunun cevabı için aşağıdaki 9 durumla karşılaşılır.

Durum	*C nin Frenet Düzlemi*	*$\bar{C}$ nin Frenet Düzlemi*	*Şart*
1	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = \overline{OP}$	$OP = \overline{OP}$
2	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \overline{NP}$	$OP = \overline{NP}$
3	$sp\{T, N\} = OP$	$sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \overline{RP}$	$OP = \overline{RP}$
4	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = \overline{OP}$	$NP = \overline{OP}$
5	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \overline{NP}$	$NP = \overline{NP}$
6	$sp\{N, B\} = NP$	$sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \overline{RP}$	$NP = \overline{RP}$

7	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\bar{N}\} = \overline{OP}$	$RP = \overline{OP}$
8	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{N},\bar{B}\} = \overline{NP}$	$RP = \overline{NP}$
9	$sp\{T,B\} = RP$	$sp\{\bar{T},\ \bar{B}\} = \overline{RP}$	$RP = \overline{RP}$

C eğrisinin timelike oskülatör düzlemi $OP = sp\{T,N\}$ timelike ise T vektörü spacelike (timelike), N vektörü timelike (spacelike) ve B vektörü spacelike vektör olur. Bu durumda aşağıdaki Frenet formüllerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$g(T,T) = \varepsilon_1 \quad g(N,N) = \varepsilon_2 \quad g(B,B) = 1$$

Şimdi tüm durumları adım adım inceleyelim:

***Durum* 1. $\boldsymbol{OP = \overline{OP}}$**

“Verilen bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi timelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektörü ve $\bar{N}$ timelike (spacelike) vektörü tarafından gerilir. Binormal vektörü $\bar{B}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.2}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.2) denkleminin türevi alınır ve (5.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - \varepsilon_1 b k_1)T + (\varepsilon_2 a k_1 + b')N + b k_2 B \tag{5.3}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, N\}$ olduğundan

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (5.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(\lambda T + \mu N)f' = (1 + a' - \varepsilon_1 bk_1)T + (\varepsilon_2 ak_1 + b')N + bk_2 B \qquad (5.4)$$

elde edilir. Her iki taraf B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$bk_2 = 0$$

elde edilir. $b \neq 0 \; ve \; k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu durumda aşağıdaki teorem ortaya çıkar.

Teorem 5.1.

C eğrisinin timelike oskülatör düzleminin $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olduğu hiçbir $(C, \bar{C})$ eğri çifti yoktur.

$\boldsymbol{Durum}$ **2.** $\boldsymbol{OP = \overline{NP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri aynı uzayda başka bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 2.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 2.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 2.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektör olduğundan $\bar{T}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. $B^{\perp} = sp\{T, N\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan B vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.5}$$

yazılabilir. $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.5) denkleminin türevi alınır ve (5.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - \varepsilon_1 bk_1)T + (\varepsilon_2 ak_1 + b')N + bk_2B \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) denklemi B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{f'}{k_2} \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.6) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{-\varepsilon_2}{k_1}\left(\frac{f'}{k_2}\right)' \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7) ve (5.8) değerleri (5.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X - \frac{\varepsilon_2}{k_1}\left(\frac{f'}{k_2}\right)' T + \frac{f'}{k_2}N \tag{5.9}$$

elde edilir.

Durum 2.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi (2.3) denklemindeki Frenet formüllerine göre pseudo null eğrisidir. $\bar{T} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan $\bar{T}$ vektörü ile B vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN \qquad a \neq 0\ \ b \neq 0 \tag{5.10}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 2.1. de yapılan benzer işlemler uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bar{X} = X - \frac{\varepsilon_2}{k_1}\left(\frac{f'}{k_2}\right)' T + \frac{f'}{k_2}N. \tag{5.11}$$

Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C - \frac{\varepsilon_2}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}\frac{d\bar{s}}{ds}\right)' T + \frac{1}{k_2}\frac{d\bar{s}}{ds} N$$

denklemi ile verilir.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine sahip ve $k_1 = k_2 = sabit \neq 0$ olsun. O zaman C eğrisi, $S_1^2(H_2^0)$ küresi üzerinde yatan spacelike (timelike) küresel helistir.

***Durum* 3. $OP = \overline{RP}$**

“Verilen bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike oskülatör düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 3.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ vektörü timelike (spacelike) vektördür.

Durum 3.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 3.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektör olduğundan $\bar{N}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir . Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.12}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.12) denkleminin türevi alınır ve (5.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a' - \varepsilon_1 bk_1)T + (\varepsilon_2 ak_1 + b')N + bk_2 B \tag{5.13}$$

elde edilir. $\bar{T} \in sp\{T, N\}$ olduğundan,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu N$$

yazılabilir. Burada λ ve μ sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu değer (5.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(\lambda T + \mu N)f' = (1 + a' - \varepsilon_1 bk_1)T + (\varepsilon_2 ak_1 + b')N + bk_2 B \tag{5.14}$$

elde edilir. Her iki taraf B vektörü ile iç çarpılırsa,

$$bk_2 = 0$$

elde edilir. $b \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Durum 3.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi (2.2) denklemindeki Frenet formüllerine göre Cartan null eğrisidir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olup $\bar{N}$ vektörü ile B vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bN, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.15}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla C ve $\bar{C}$ eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 3.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$bk_2 = 0$$

elde edilir. $b \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.3.

C eğrisinin timelike oskülatör düzleminin $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi olduğu hiçbir $(C, \bar{C})$ eğri çifti yoktur.

C eğrisinin normal düzlemi $NP = sp\{N, B\}$ timelike düzlem olduğunda iki alt durum ortaya çıkar.

Durum A: N spacelike (timelike) vektör ve B timelike (spacelike) vektördür.

Durum B: N ve B vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum A: N spacelike (timelike) vektör ve B timelike (spacelike) vektör olduğundan T spacelike vektördür. Bu durumda C eğrisinin Frenet vektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

$g(T,T) = 1 \qquad g(N,N) = \varepsilon_2 \qquad g(B,B) = \varepsilon_3$

Buradan 3 alt durum elde edilir.

$\boldsymbol{Durum\ 4.\ NP = \overline{OP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi timelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektörü ve $\bar{N}$ timelike (spacelike) vektörü tarafından gerilir. Binormal vektör alanı $\bar{B}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $\bar{B}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan $\bar{B}$ vektörü ile T vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.17}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.17) denkleminin türevi alınır ve (5.16) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - ak_1)T + (a' - \varepsilon_2 k_2 b)N + (b' + a\varepsilon_3 k_2)B \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.18) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1} \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.19) değeri (5.18) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' - \varepsilon_2 k_2 b)N + (b' + a\varepsilon_3 k_2)B \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.20) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \bar{T}f'' + \bar{\varepsilon_2}(f')^2\overline{k_1 N} = {} & (-a'k_1 + \varepsilon_2 b k_1 k_2)T \\ & +(a'' - 2\varepsilon_2 b' k_2 - \varepsilon_2 b k_2' - \varepsilon_2\varepsilon_3 a k_2^2) \\ & +(2\varepsilon_3 a' k_2 + \varepsilon_3 a k_2' + b'' - \varepsilon_2\varepsilon_3 b k_2^2)B \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.21) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = -\frac{\varepsilon_2 k_1'}{k_2 k_1^2} \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.19) ve (5.22) değerleri (5.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{X} = X + \frac{1}{k_1}N - \frac{\varepsilon_2 k_1'}{k_2 k_1^2}B \tag{5.23}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.4.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N timelike (spacelike) vektörü ve B spacelike (timelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{1}{k_1}N - \frac{\varepsilon_2 k_1'}{k_2 k_1^2}B$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 5. $\boldsymbol{NP} = \overline{\boldsymbol{NP}}$**

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemleri olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 5.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 5.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 5.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektör olduğu için $\bar{T}$ spacelike vektördür. Böylece (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. $\bar{T}^{\perp} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.24}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.24) denkleminin türevi alınır ve (5.16) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - ak_1)T + (a' - \varepsilon_2 k_2 b)N + (b' + a\varepsilon_3 k_2)B \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.25) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1-f'}{k_1} \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.25) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = \frac{\varepsilon_2}{k_2}\left(\frac{1-f'}{k_1}\right)' \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.26) ve (5.27) değerleri, (5.24) denkeminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + \left(\frac{1-f'}{k_1}\right)N + \frac{\varepsilon_2}{k_2}\left(\frac{1-f'}{k_1}\right)' B \qquad (5.28)$$

elde edilir.

Durum 5.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi, (2.3) denklemindeki Frenet formüllerine göre pseudo null eğrisidir. $\bar{T}^{\perp} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \qquad (5.29)$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 5.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$\bar{X} = X + \left(\frac{1-f'}{k_1}\right)N + \frac{\varepsilon_2}{k_2}\left(\frac{1-f'}{k_1}\right)' B \qquad (5.30)$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.5.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N timelike (spacelike) vektörü ve B spacelike (timelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \left(\frac{1-f'}{k_1}\right)N + \frac{\varepsilon_2}{k_2}\left(\frac{1-f'}{k_1}\right)' B$$

denklemi ile verilir. Burada $f' = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olup s ve $\bar{s}$ sırasıyla C ve $\bar{C}$ eğrilerinin parametreleridir.

Genellemeyi bozmadan varsayalım ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı olsun. Yani $s = \bar{s}$ ise o zaman $C = \bar{C}$ elde edilir.

***Durum* 6.** $NP = \overline{RP}$

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 6.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 6.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 6.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike spacelike vektör olduğu için $\bar{N}$ spacelike vektördür. Böylece (2.1) deki Frenet formülüne göre $\bar{C}$ spacelike (timelike) eğridir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0, \; b \neq 0, \tag{5.31}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.31) denkleminin türevi alınır ve (5.16) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - ak_1)T + (a' - \varepsilon_2 k_2 b)N + (b' + a\varepsilon_3 k_2)B \tag{5.32}$$

elde edilir. (5.32) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a = \frac{1}{k_1} \tag{5.33}$$

elde edilir. (5.33) değeri, (5.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' - \varepsilon_2 k_2 b)N + (b' + a\varepsilon_3 k_2)B \tag{5.34}$$

elde edilir.

$$\lambda = \frac{a' - \varepsilon_2 k_2 b}{f'} \qquad \text{ve} \qquad \mu = \frac{b' + a\varepsilon_3 k_2}{f'} \tag{5.35}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\bar{T} = \lambda N + \mu B \tag{5.36}$$

yazılabilir. (5.36) denkleminin türevi alınır ve (5.16) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$(f')^2 \overline{k_1 N} = -k_1 \lambda T + (\lambda' - \varepsilon_2 k_2 \mu) N + (\varepsilon_2 k_2 \lambda + \mu') B \tag{5.37}$$

elde edilir. (5.37) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\lambda' - \varepsilon_2 k_2 \mu = 0 \tag{5.38}$$

elde edilir. (5.38) değeri (5.35) denkleminde yerine yazılırsa,

$$b' + b\left(\frac{k_2 f' + k_2' f' - k_2 f''}{2\varepsilon_2 k_2 f'}\right) = \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + f' \frac{k_2^2}{k_1}}{2\varepsilon_2 k_2 f'}$$

elde edilir. δ ve γ aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$\delta = \frac{k_2' f' - k_2 f''}{2 k_2 f'} \tag{5.39}$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + f' \frac{k_2^2}{k_1}}{2\varepsilon_2 k_2 f'} \tag{5.40}$$

dır. Buradan

$$b' + \delta b = \gamma \tag{5.41}$$

yazılabilir. Bu lineer denklemin çözümü ise

$$b(s) = e^{-\int \delta ds}\left\{\int e^{\int \delta ds} \gamma ds + t\right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dir.

Durum 6.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi (2.2) denklemindeki Frenet formüllerine göre Cartan null eğrisidir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olup $\bar{N}$ vektörü ile T vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0, \; b \neq 0, \tag{5.42}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 6.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$a = \frac{1}{k_1} \tag{5.43}$$

elde edilir. Buradan,

$$\delta = \frac{k_2' f' - k_2 f''}{2k_2 f'} \tag{5.44}$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + f' \frac{k_2^2}{k_1}}{2\varepsilon_2 k_2 f'} \tag{5.45}$$

denklemleri ortaya çıkar. Bu lineer denklemin çözümü ise,

$$b(s) = e^{-\int \delta ds} \left\{ \int e^{\int \delta ds} \gamma ds + t \right\}, \ t \in \mathbb{R} \tag{5.46}$$

dir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.6.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N timelike (spacelike) vektörü ve B spacelike (timelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{1}{k_1} N + e^{-\int \delta ds} \left\{ \int e^{\int \delta ds} \gamma ds + t \right\} B, \quad t \in \mathbb{R}$$

denklemi ile verilir.

Burada

$$\delta = \frac{k_2' f' - k_2 f''}{2k_2 f'} \tag{5.47}$$

ve

$$\gamma = \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)'' f' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' f'' + f' \frac{k_2^2}{k_1}}{2\varepsilon_2 k_2 f'} \tag{5.48}$$

olmak üzere genellemeyi bozmadan C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s-parametresine bağlı ise, yani $s = \bar{s}$ ise ve $k_1 = 1$ ve $k_2 \neq 0$ ve k_2 sabit olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$b = \frac{1}{2\varepsilon_2\sqrt{k_2}}\int (k_2)^{\frac{3}{2}}\,ds + \frac{1}{\sqrt{k_2}}t,$$

burada $t \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon_2 = g(N,N)$ dir. Bu durumda C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de bir timelike Salkowski eğrisidir.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki $\bar{C}$ ve C eğrileri aynı s-parametresine bağlı ise, yani $s = \bar{s}$ ise ve $k_2 = 1$ ve $k_1 \neq 0$, k_1 sabit olmayan bir fonksiyon ise

$$b = \frac{1}{2\varepsilon_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int \frac{1}{k_1}ds + c$$

burada $c \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon_2 = g(N,N)$ dir. Bu durumda C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de bir timelike anti-Salkowski eğrisidir.

Durum B: N ve B lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olmak üzere, C pseudo null eğri ve $k_1 = 1$ için aşağıdaki Frenet formülleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

$$g(T,T) = 1, \qquad g(N,N) = 0, \qquad g(B,B) = 1$$

Buradan üç alt durum ortaya çıkar.

***Durum* 7. $NP = \overline{OP}$**

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi timelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektörü ve $\bar{N}$ timelike (spacelike) vektörü tarafından gerilir. Binormal vektör alanı $\bar{B}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $\bar{B}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan $\bar{B}$ vektörü ile T vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.50}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.50) denkleminin türevi alınır ve (5.49) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1-b)T + (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.51}$$

elde edilir. (5.1) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = 1 \tag{5.52}$$

elde edilir. (5.52) değeri (5.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.53}$$

elde edilir. (5.53) denklemi kendisiyle iç çarpılırsa,

$$a' + ak_2 = \frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{2(b' - bk_2)} \tag{5.54}$$

elde edilir. (5.52) değeri (5.54) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a' + ak_2 = \frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{-2k_2} \tag{5.55}$$

ve bu lineer denklem çözülürse,

$$a = e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{k_2}ds\right], \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{5.56}$$

elde edilir. (5.52) ve (5.56) değerleri, (5.50) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{k_2}ds\right]N + B,\ \ t \in \mathbb{R} \tag{5.57}$$

elde edilir.

Teorem 5.7.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N ve B null (lightlike) lineer bağımsız vektörleri tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\varepsilon_1 (f')^2}{k_2}ds\right]N + B, \quad t \in \mathbb{R}$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 8. $NP = \overline{NP}$**

“Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemleri olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 8.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 8.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 8.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) ve $\bar{B}$ timelike spacelike vektör olduğu için $\bar{T}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike eğridir. $\bar{T}^{\perp} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.58}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.58) denkleminin türevi alınır ve (5.49) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - b)T + (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.59}$$

elde edilir. (5.59) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = 1 - f' \tag{5.60}$$

elde edilir. (5.59) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$a' + ak_2 = 0 \tag{5.61}$$

elde edilir. (5.61) diferansiyel denkleminin çözümü ise

$$a = e^{-\int k_2 ds} + t,\ t \in \mathbb{R} \tag{5.62}$$

dir. (5.61) ve (5.62) değerleri, (5.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{X} = X + \left(e^{-\int k_2 ds} + t\right)N + (1 - f')B, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5.63}$$

elde edilir.

Durum 8.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan (2.3) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ pseudo null eğrisidir. $\bar{T}^{\perp} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.64}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 8.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$\bar{X} = X + \left(e^{-\int k_2 ds} + t\right)N + (1 - f')B, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5.65}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.8.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N ve B null (lightlike) lineer bağımsız vektörleri tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \left(e^{-\int k_2 ds} + t\right)N + \left(1 - \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)'\right)B, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.66}$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 9.** $\boldsymbol{NP = \overline{RP}}$

“Verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike normal düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 9.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 9.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 9.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) ve $\bar{B}$ timelike spacelike vektör olduğu için $\bar{N}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0, \ b \neq 0, \tag{5.67}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.67) denkleminin türevi alınır ve (5.49) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - bk_1)T + (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.68}$$

elde edilir. (5.68) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = 1 \tag{5.69}$$

elde edilir. (5.69) değeri, (5.68) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.70}$$

elde edilir. (5.70) denklemi kendisiyle iç çarpılırsa

$$a' + ak_2 = \frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{2(b' - bk_2)} \tag{5.71}$$

elde edilir. (5.69) değeri (5.71) denkleminde yerine yazılırsa bu lineer denklemin çözümü,

$$a = e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{k_2}ds\right], \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.72}$$

dir. (5.69) ve (5.72) değerleri, (5.67) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{k_2}ds\right]N + B, \ \ t \in \mathbb{R} \tag{5.73}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.9.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N ve B lineer bağımsız null (lightlike) vektörleri tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + e^{-\int k_2 ds}\left[t - \frac{1}{2}\int e^{\int k_2 ds}\frac{\overline{\varepsilon_1}(f')^2}{k_2}ds\right]N + B, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.74}$$

denklemi ile verilir.

Durum 9.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi, (2.2) denklemindeki Frenet formüllerine göre Cartan null eğrisidir. $\bar{N}^{\perp} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \qquad a \neq 0, \ b \neq 0, \tag{5.75}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.75) denkleminin türevi alınır ve (5.49) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 - bk_1)T + (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.76}$$

elde edilir. (5.76) denklemi T vektörü ile iç çarpılırsa,

$$b = 1 \tag{5.77}$$

elde edilir. (5.77) değeri, (5.76) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' + ak_2)N + (b' - bk_2)B \tag{5.78}$$

elde edilir. (5.78) denklemi kendisiyle iç çarpılırsa,

$$2(b' - bk_2)(a' + ak_2) = 0 \tag{5.79}$$

elde edilir. $b' - bk_2 = 0$ veya $a' + ak_2$=0 dır. $b' - bk_2 = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu denklem (5.78) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (a' + ak_2)N \tag{5.80}$$

elde edilir. (5.80) denkleminin türevi alınırsa,

$$\bar{T}f'' + (f')^2\overline{k_1 N} = (a'' + 2a'k_2 + ak_2' + ak_2^2)N \tag{5.81}$$

elde edilir. (5.81) denklemi kendisi ile iç çarpılırsa,

$$(f')^4\left(\overline{k_1}\right)^2 = 0$$

elde edilir. Burada $f^{'} = 0$ veya $\overline{k_1} = 0$ dır. Bu durumda çelişki elde ederiz.

O zaman $a' + ak_2 = 0$ dır. Bu denklemin çözümü ise,

$$a = e^{-\int k_2 ds} \tag{5.82}$$

dir. (5.77) ve (5.82) değerleri, (5.75) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + e^{-\int k_2 ds}N + B \tag{5.83}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.10.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, N ve B lineer bağımsız null (lightlike) vektörleri tarafından gerilen $sp\{N, B\}$ timelike normal düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörleri tarafından gerilen $sp\{\bar{T}, \bar{B}\}$ timelike rektifiyan düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + e^{-\int k_2 ds} N + B \tag{5.84}$$

denklemi ile verilir.

C eğrisinin rektifiyan düzlemi $sp\{T, B\}$ timelike düzlem ise iki alt durum ortaya çıkar

Durum A: T spacelike (timelike) vektör ve B timelike (spacelike) vektördür.

Durum B: T ve B lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum A: T spacelike (timelike) vektör ve B timelike (spacelike) vektör olduğu için N spacelike vektördür. Bu durumda C spacelike (timelike) eğrisi için aşağıdaki Frenet formüllerini verebiliriz:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

$$g(T,T) = \varepsilon_1, \quad g(N,N) = 1, \quad g(B,B) = \varepsilon_3$$

Buradan 3 alt durum elde edilir.

$\boldsymbol{Durum\ 10.\ RP = \overline{OP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin T spacelike (timelike) vektörü ve B timelike (spacelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{T, B\}$ timelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin oskülatör düzlemi timelike düzlem olduğundan $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektörü ve $\bar{N}$ timelike (spacelike) vektörü tarafından gerilir. Binormal vektör alanı $\bar{B}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = \bar{B}^{\perp}$ olduğundan $\bar{B}$ vektörü ile N vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.86}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.86) denkleminin türevi alınır ve (5.85) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + (ak_1 - bk_2)N + b'B \tag{5.87}$$

elde edilir. (5.87) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$ak_1 - bk_2 = 0 \tag{5.88}$$

elde edilir. (5.88) değeri (5.87) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + b'B \tag{5.89}$$

bulunur. (5.89) un türevi alınır ve (2.1) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa

$$\bar{T}f'' + \bar{\varepsilon}_2(f')^2\overline{k_1N} = a''T + (k_1 + a'k_1 - b'k_2)N + b''B \tag{5.90}$$

elde edilir. (5.90) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$k_1 + a'k_1 - b'k_2 = 0 \tag{5.91}$$

elde edilir. (5.88) denkleminin türevi alınır ve (5.91) değeri kullanılırsa,

$$a = \frac{k_1k_2}{k_2{k_1}' - k_1{k_2}'} = \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} \tag{5.92}$$

$$b = \frac{{k_1}^2}{k_2{k_1}' - k_1{k_2}'} = -\frac{1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}$$

elde edilir. (5.92) değeri, (5.86) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{X} = X + \frac{k_1}{k_2}\frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}T - \frac{1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}B \tag{5.93}$$

elde edilir.

Durum B: Durum B için de aynı sonuç elde edilir. Durum A ve Durum B için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.11.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemleri ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + \frac{k_1 k_2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} T - \frac{{k_1}^2}{k_2 {k_1}' - k_1 {k_2}'} B$$

denklemi ile verilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1.

Eğer $a = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_1}{k_2} = c_2 e^{c_1 s}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.

Eğer $b = \frac{-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} = sabit$ ise

$$\frac{k_2}{k_1} = cs + d, \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda C eğrisi rektifiyan eğridir (Chen, 2003).

Bu eğriler İzumiya ve Takeuchi tarafından kanonical geodezik eğri olarak adlandırılmıştır (Izumiya and Takeuchi, 2004).

$\boldsymbol{Durum\ 11.\ RP = \overline{NP}}$

“Verilen bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemleri olabilir mi?”

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin normal düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 11.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 11.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 11.1. $\bar{N}$ spacelike (timelike) ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektörler olduğu için $\bar{T}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ spacelike eğridir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan N vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \quad a \neq 0, \; b \neq 0, \tag{5.94}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.94) denkleminin türevi alınır ve (5.85) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')N + (ak_1 - bk_2)N + b'B \tag{5.95}$$

elde edilir. (5.95) denklemi sırasıyla N, T, B vektörleri ile iç çarpılırsa sırasıyla,

$$ak_1 - bk_2 = f' \tag{5.96}$$

$$a = -s + c, \; c \in \mathbb{R} \tag{5.97}$$

$$b' = 0 \tag{5.98}$$

elde edilir. (5.97) değeri, (5.96) denkleminde yerine yazılırsa,

$$b = \frac{-f' + (-s + c)k_1}{k_2} = sabit, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.99}$$

elde edilir. (5.97) ve (5.99) değerleri (5.94) denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{X} = X + (-s + c)T + \left(\frac{-f' + (-s + c)k_1}{k_2}\right)B, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.100}$$

elde edilir.

Durum 11.2. $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi, (2.2) denklemindeki Frenet formüllerine göre pseudo null eğridir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = \bar{T}^{\perp}$ olduğundan N vektörü ile $\bar{T}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aN + bB, \quad a \neq 0, \; b \neq 0, \tag{5.101}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 11.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$\bar{X} = X + (-s + c)N + \left(\frac{-f' + (-s + c)k_1}{k_2}\right)B, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.102}$$

bulunur. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.12.

C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, T timelike (spacelike) vektörü ve B spacelike (timelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{T, B\}$ timelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike normal düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (-s + c)T + \left(\frac{1}{k_2}\left(-\frac{d\bar{s}}{ds} + (-s + c)k_1\right)\right)B, \quad c \in \mathbb{R},$$

denklemi ile verilir.

***Durum* 12.** $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$

"Verilen bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri başka bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemleri olabilir mi?"

Varsayalım ki bir C eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi olsun. $\bar{C}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi timelike düzlem olduğundan iki alt durum elde edilir.

Durum 12.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektördür.

Durum 12.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

Durum 12.1. $\bar{T}$ spacelike (timelike) ve $\bar{B}$ timelike (spacelike) vektör olduğu için $\bar{N}$ spacelike vektördür. (2.1) denklemindeki Frenet formüllerine göre $\bar{C}$ eğrisi spacelike (timelike) eğridir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \bar{N}^{\perp}$ olduğundan N vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \quad a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{5.103}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. (5.103) denkleminin türevi alınır ve (5.85) denklemindeki Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + (ak_1 - bk_2)N + b'B \tag{5.104}$$

elde edilir. (5.104) denklemi N vektörü ile iç çarpılırsa,

$$ak_1 - bk_2 = 0 \tag{5.105}$$

elde edilir. (5.105) değeri, (5.104) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{T}f' = (1 + a')T + b'B \tag{5.106}$$

elde edilir. Burada,

$$\lambda = \frac{1+a'}{f'} \quad \text{ve} \quad \mu = \frac{b'}{f'} \tag{5.107}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\bar{T} = \lambda T + \mu B \tag{5.108}$$

elde edilir. (5.108) denkleminin türevi alınırsa,

$$f'\overline{k_1 N} = \lambda' T + (\lambda k_1 - \mu k_2)N + \mu' B \tag{5.109}$$

elde edilir. (5.109) denklemi T ve B vektörleri ile iç çarpılırsa sırasıyla,

$$\lambda' = 0, \quad \lambda = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \tag{5.110}$$

$$\mu' = 0, \quad \mu = d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R},$$

elde edilir. (5.110) değeri, (5.107) denkleminde yerine yazılır ve bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$a = -s + c_1 \int f' ds + c_2 \tag{5.111}$$

$$b = d_1 \int f' ds + d_2 \tag{5.112}$$

elde edilir ve burada $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ dir.

Durum 12.2. $\bar{T}$ ve $\bar{B}$ lineer bağımsız null (lightlike) vektörler olduğundan $\bar{C}$ eğrisi (2.2) denklemindeki Frenet formüllerine göre Cartan null eğrisidir. $N^{\perp} = sp\{T, B\} = sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = \bar{N}^{\perp}$ olduğundan N vektörü ile $\bar{N}$ vektörü birbirine paraleldir. Bu durumda,

$$\bar{X} = X + aT + bB, \quad a \neq 0, \ b \neq 0, \tag{5.113}$$

yazılabilir. Burada $\bar{X}$ ve X sırasıyla $\bar{C}$ ve C eğrilerinin konum vektörleri, a ve b sıfırdan farklı s ye bağlı fonksiyonlardır. Durum 12.1 de yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$a = -s + c_1 \int f' ds + c_2 \tag{5.114}$$

$$b = d_1 \int f' ds + d_2 \tag{5.115}$$

elde edilir. Burada $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.13.

Genellemeyi bozmadan kabul edelim ki C ve $\bar{C}$ eğrileri aynı s parametresine bağlı yani $s = \bar{s}$ olsun. C eğrisi; eğrilikleri sıfırdan farklı k_1 ve k_2 , Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. C eğrisinin, T timelike (spacelike) vektörü ve B spacelike (timelike) vektörü tarafından gerilen $sp\{T, B\}$ timelike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{C}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi ise o zaman $\bar{C}$ eğrisi,

$$\bar{C} = C + (c_1 s + c_2)T + (d_1 s + d_2)B, \qquad (c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R})$$

denklemi ile verilir.

(5.105) denklemi kullanılarak,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1 s + c_2}{d_1 s + d_2} \tag{5.116}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 5.3.

Eğer $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$ ise o zaman $\frac{k_1}{k_2} = sabit$ olur. Bu durumda $\mathbb{E}_1^3$ de C eğrisi bir dairesel helis veya genel helistir.

Sonuç 5.4.

Eğer $d_2 = 0$ ise

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_1}\frac{1}{s}$$

dır. Bu durumda C eğrisi bir rektifiyan eğridir.

KAYNAKLAR

Bonnor, W. B., ‘‘Null curves in a Minkowski space-time”, ***Tensor*** ,20: 229-242 (1969).

Bonnor, W. B., “Curves with null normals in Minkowski space-time” A random walk in relativity and cosmology, ***Wiley Easten Limited***, 33-47 (1985).

Chen, B. Y., “When does the position vektor of a space curve always lie in its rectifiying plane” ***Amer. Math. Monthly*** 110 (2): 147-152 (2003).

Chen, B. Y., Dillen, F., “Rectifiying curves as centrodes ve extremal curves” ***Bull. Inst. Math. Academia Sinica*** 33(2): 77-90.

Hacısalihoğlu, H.H., “Diferansiyel Geometri 1”, ***Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi***, Ankara (2000)

Izumiya, S. and Takeuchi N., “New special curves and developable surfaces” ***Turkish J. Math.*** 28(2): 153-163 (2004).

Kuhnel, W., “Differential geometry: curves-surfaces-manifolds” ***Braunschweig***, Wiesbaden, (1999).

Liu, H. and Wang, F., “Mannheim partner curves in 3-space” ***Geom, J.***, 88: 120-126 (2008).

Millman, R. S., and Parker, G. D., “Elelments of differential geometry” ***Prentice-Hall***, New Jersey (1977).

Salkowski, E., “Zur transformation von raumkurven.” ***Mathematische Annalen***. 66(4): 517-557 (1909).

O.Neill, B., “Semi-Riemannian geometry with applications to relativity”, ***Aca-demic Press***, New York, 1983.

Özkaldı, S., İlarslan, K. ve Yaylı, Y., “A new approach for characterization of curve couples in Euclidean 3-space” ***Honam Math. Geom, J.***, 36(1): 113-129 (2014).

Uçum, A., İlarslan, K., and Özkaldı Karakuş, S., “On curves couples with joint lightlike Frenet planes in Minkowski 3-space” ***Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*** 41: 111-119 (2015).

Uçum, A., İlarslan, K., and Özkaldı Karakuş, S., “Curves couples and spacelike Frenet planes in Minkowski 3-space” ***Honam Math. J.*** 36(3): 475-492 (2014).

Walrave, J., “Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral thesis” ***Leuven, K.U., Faculty of Science***, Leuven (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Melike OKTAY

Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA 10/12/1986

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Celal Bayar Üniversitesi-MATEMATİK-2009

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar : Fatih Anadolu Lisesi / MANİSA

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Milli Eğitim Bakanlığı

İletişim

Adres :Kızılay mah. 727 sok. No:17 Kat:3 Bornova/İZMİR

Tel : 05076470889

E-Posta Adresi : mlkdzn@hotmail.com

Akademik Çalışmaları

- 11. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu/Poster sunumu

Yabancı Dil Bilgisi: Orta seviye

Tarih: 2017