

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

PETEK FRAKTALININ GEOMETRİSİ

**Muammer TOPSAKAL
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2014

Ref.No: 10059730



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

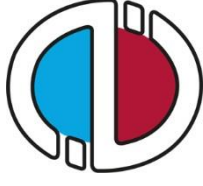
PETEK FRAKTALININ GEOMETRİSİ

**Muammer TOPSAKAL
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2014



ANADOLU UNIVERSITY



**BILECIK SEYH EDEBALI
UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

THE GEOMETRY OF HONEYCOMB FRACTAL

**Muammer TOPSAKAL
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Co-Advisor
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BILECIK, 2014



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 10.12.2014 tarih ve 51 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 24.12.2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Muammer TOPSAKAL'ın "Petek Fraktalının Geometrisi" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE : Prof. Dr. Murat TOSUN

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI:

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Tez yazma ve yüksek lisans eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, deneyimleri ile bana her zaman yol gösteren, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlandığım ve ayrıca bana karşı göstermiş olduğu derin hořđörü ve sabrından dolayı değerli hocam **Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu**'na,

Eğitim ve öğretimim süresince gerek resmi işlerde gerek hocamla olan iletişimlerimde bana destek ve yardımcı olan değerli hocam **Doç. Dr. Sıddıka Özkaldı Karakuş**'a ve tüm diğer ders aldığım Bilecik Şeyh Edebalı Üniversitesi ve Anadolu Üniversitesindeki hocalarıma teőekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Arıların ballarını depo ettikleri ve çoğalmaları için ördükleri yuvalara petek denir. Arılar birer matematikçi gibi, birer mühendis gibi ve birer mimar gibi dizayn ederek, çalışarak peteğin geometrisini kurarlar.

Petek için esas olan geometrik biçim olarak düzgün altıgen seçilmiştir. **“Herhangi bir düzlemi eşit alanlı bölgelere ayırdığımızda çevresi en küçük olan bölge düzgün altıgen olandır”** gerçeği çok eskiden beri bilinen bir matematiksel özeliştir. Bu nedenle arılar da içgüdüsel olarak matematiksel kararı vermiş ve düzgün altıgeni seçmişlerdir. Bunun için en az malzeme ve en kısa boyutla minimum alan ve maksimum hacim esas alınmıştır. Böylece örülen petekler son derece intizamlı ve sağlam yapılardır.

Arıların her biri farklı yerlerden ve farklı yönlerden başlamalarına rağmen, tümü birbirinin birer kopyası olan düzgün altıgenleri, kendi salgıları olan bal mumu ile hiç bir deneme ve yanılmaya uğramadan bir tek noktaya doğru örerler. Bu ilerleme esnasında altıgenlerini de örmeye devam ederler. Sonunda ortada birleşirler. Birleşme yerleri belli olmaz. Ayrıca altıgenlerin bir kopyası, ayrılmış olan yerine öyle bir oturur ki inanılması çok zor olur. Hem de bu iş için bir deneme-yanılma yapılmaz.

Arıların petekleri birer fraktaldır. Bu fraktallarda her adım başlı başına benzer görünüm ve yapıdadır. Birinci adım olarak bir altıgen alırsak, ikinci adımda bu altıgenin her bir kenarı üzerine yine altıgenler koyarsak altıgen sayısı $N=7$ olur. Bu iterasyona devam edersek n . adımda altıgen sayısı $N=1 + 3 \cdot n \cdot (n+1)$ olur.

Arıların petekleri fraktal olduğuna göre bu fraktalın bir boyutunun olması gerekir. Bu boyutu hesaplamak için KANTOR ÜÇLÜLERİ metodunu uygularsak, birinci adımdan n . adıma kadar işlemler şöyle olur:

$$r_1 = 1/6 \text{ ve } N(r_1) = 12 \text{ olur ve boyut } d_1 = \frac{\log N(r_1)}{\log(\frac{1}{r_1})} = \frac{\log 12}{\log 6} = 1,386$$

$$r_2 = 1/18 \text{ ve } N(r_2) = 30 \text{ olur ve boyut } d_2 = \frac{\log N(r_2)}{\log(\frac{1}{r_2})} = \frac{\log 30}{\log 18} = 1,767$$

$$r_3 = 1/30 \text{ ve } N(r_3) = 48 \text{ olur ve boyut } d_3 = \frac{\log N(r_3)}{\log(\frac{1}{r_3})} = \frac{\log 48}{\log 30} = 1,138$$

$r_4 = 1/42$ ve $N(r_4) = 66$ olur ve boyut $d_4 = \frac{\log N(r_4)}{\log(\frac{1}{r_4})} = \frac{\log 66}{\log 42} = 1,1209$

·
·
·

$r_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 6}$ ve $N(r_n) = (3n - 1) \cdot 6$ olması halinde

$$d_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \frac{1}{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((3n-1) \cdot 6)}{\log((2n-1) \cdot 6)} = 1$$

olarak bulunur.

Anahtar Kelimeler

Geometri; Arı; Petek; Bal; Fraktal; Boyut; Altıgen; Açı; Motif; İterasyon

ABSTRACT

The nests that bees knit for reproduction and where they store their honey are called honeycomb. The bees produce the geometry of the honeycomb by designing and working as a mathematician, as an engineer or as an architect.

The regular hexagon was selected for the honeycomb as a basic geometric shape. The following truth of a mathematical property “**when any plane is divided into the parts with equal area, the part with the smallest perimeter is a regular hexagon**” is known from long time ago. Therefore, the bees gave a mathematical decision instinctively and chose a regular hexagon. To do this, the least material, the minimum area with the minimum dimension and the maximum volume were taken as a basis. The honeycombs knitted in this way are extremely orderly and sturdy structures.

Although every bee starts from different places and directions, they progress by knitting the regular hexagons, which are the copies of each one, with their wax secretions towards a single point without any trial or error. During this progress, they continue to knit the hexagons. At the end they join in the middle. The meeting points are not noticeable. Also a copy of the hexagons fits the place from where it was separated in such an incredible way which makes it hard to believe. Moreover, actions like trials or errors are not acceptable in this process.

Each bee honeycomb is a fractal. Every step in these fractals has similar appearance and structure in itself. If we take a hexagon as a first step and put on every side of this hexagon other hexagons as a second step, then the number of hexagons becomes $N=7$. If we continue this iteration, the number of hexagons in the n step will be $N=1 + 3 \cdot n \cdot (n+1)$

Since the bee honeycombs are fractal then this fractal must have a dimension. If we calculate this dimension by using the Cantor’s Triple Method, then the operations from first step to n step should be in the following way:

If $r_1 = 1/6$ then $N(r_1) = 12$ and dimension $d_1 = \frac{\log N(r_1)}{\log(\frac{1}{r_1})} = \frac{\log 12}{\log 6} = 1,386$

If $r_2 = 1/18$ then $N(r_2) = 30$ and dimension $d_2 = \frac{\log N(r_2)}{\log(\frac{1}{r_2})} = \frac{\log 30}{\log 18} = 1,767$

If $r_3 = 1/30$ then $N(r_3) = 48$ and dimension $d_3 = \frac{\log N(r_3)}{\log(\frac{1}{r_3})} = \frac{\log 48}{\log 30} = 1,138$

If $r_4 = 1/42$ then $N(r_4) = 66$ and dimension $d_4 = \frac{\log N(r_4)}{\log(\frac{1}{r_4})} = \frac{\log 66}{\log 42} = 1,1209$

.
.
.

If $r_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 6}$ then $N(r_n) = (3n - 1) \cdot 6$

Thus the dimension $d_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \frac{1}{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((3n-1) \cdot 6)}{\log((2n-1) \cdot 6)} = 1$.

Key Words:

Geometry; Bee; Honeycomb; Honey; Fractal; Dimension; Hexagon; Angle; Motif; Iteration

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI

TEŞEKKÜR

ÖZET i

ABSTRACT iii

İÇİNDEKİLER v

ŞEKİLLER DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

1.1 Petek Fraktalının Geometrisi ve Tarihçesi 1

1.2 Petekteki Açılar 4

2. ARILARIN PETEK FRAKTALI 4

2.1 Petek Fraktallarının Fraktal Boyutu 9

KAYNAKLAR 15

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1: Arı peteğinin bir yüzünden alınmış kesit.....	1
Şekil 1.2: Petek örme işlemi	2
Şekil 1.3: Peteğin görünüşü	3
Şekil 1.4: Petekteki larvalar ve bal	4
Şekil 2.1: Altıgen motif	5
Şekil 2.2: Birinci iterasyon	5
Şekil 2.3: İkinci iterasyon	5
Şekil 2.4: Üçüncü iterasyon	6
Şekil 2.5: Dördüncü iterasyon	6
Şekil 2.6: Beşinci iterasyon	7
Şekil 2.7: Altıncı iterasyon	8
Şekil 2.8: İlk üç çember	9
Şekil 2.9: \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 çemberleri	9
Şekil 2.10: \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 çemberleri	10
Şekil 2.11: \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_4 çemberleri	10
Şekil 2.12: \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}_5 , \mathcal{C}_6 , \mathcal{C}_7 çemberleri	11
Şekil 2.13: \mathcal{C}_6 çemberinin düzgün altıgenlerle görüntüsü	12

1. GİRİŞ

1.1 Petek Fraktalının Geometrisi ve Tarihçesi

Arıların ballarını depo ettikleri ve çoğalmaları için ördükleri yuvalara petek denir (Şekil 1.1). Arılar birer matematikçi gibi, birer mühendis gibi ve birer mimar gibi dizayn ederek, çalışarak peteğin geometrisini kurarlar.



Şekil 1.1: Arı peteğinin bir yüzünden alınmış kesit.

Petek için esas olan geometrik biçim olarak düzgün altıgen seçilmiştir. **“Herhangi bir düzlemi eşit alanlı bölgelere ayırdığımızda çevresi en küçük olan bölge düzgün altıgen olandır”** gerçeği çok eskiden beri bilinen bir matematiksel özelliktir. Bu nedenle arılar da içgüdüsel olarak matematiksel kararı vermiş ve düzgün altıgeni seçmişlerdir. Bunun için en az malzeme ve en kısa boyutla minimum alan ve maksimum hacim esas alınmıştır. Böylece örülen petekler son derece intizamlı ve sağlam yapılardır (Polatöz, 2005; Frisch, 1975).

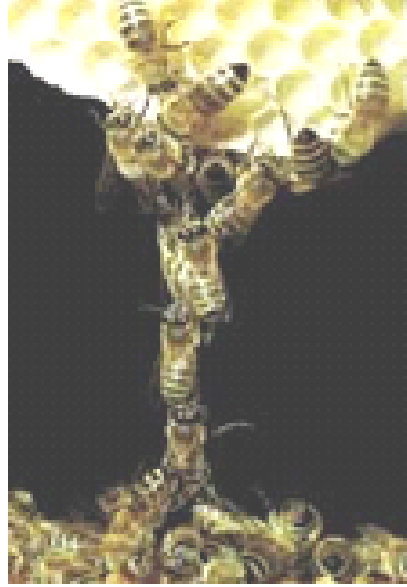
Kalabalık bir arı topluluğunu petek inşa ederken seyrettiğinizde işin bir kargaşa olduğu kanısına kapılırsınız (Şekil 1.2). Birbirinden bağımsız hareket eder gibi görünen bu canlıların sonunda son derece kullanışlı, iyi hesaplanmış yapılar meydana getireceklerine hiç mi hiç ihtimal veremezsiniz. Aslında bu kalabalık canlıların akıllarında tuttukları ortak bir kargaşa değil iyice hesaplanmış bir planları vardır. Bu planı son derece uyum içinde ve hiç yanılmadan ve hiçbir deneme yapmadan uygulamaktadırlar. Bu çalışma düzeni tüm canlılara örnek olacak derecede intizamlı ve hesaplıdır (Hoyt,1965).



Şekil 1.2: Petek örme işlemi.

Üstte petek örme işlemine başlayan arılar görülmektedir. Arılar balmumu üretimi için gerekli olan sıcaklığı elde edebilmek için öncelikle birbirlerine kenetlenerek ısıyı artırırlar. Daha sonra ürettikleri balmumu plakalarını ağızlarında şekillendirerek her biri diğerlerinin aynı, kusursuz altıgenlerden oluşan petekleri örerler (Yahya, 2007).

Arıların her biri farklı yerlerden ve farklı yönlerden başlamalarına rağmen, tümü birbirinin birer kopyası olan düzgün altıgenleri, kendi salgıları olan bal mumu ile hiç bir deneme ve yanılmaya uğramadan bir tek noktaya doğru örerler. Bu ilerleme esnasında altıgenlerini de örmeye devam ederler. Sonunda ortada birleşirler. Birleşme yerleri belli olmaz. Ayrıca altıgenlerin bir kopyası, ayrılmış olan yerine öyle bir oturur ki inanılması çok zor olur. Hem de bu iş için bir deneme-yanılma yapılmaz (Şekil 1.3).



Şekil 1.3: Peteğin görünüşü.

Petek üzerinde hiçbir birleştirme yeri görülmez. Sanki tek elden çıkmışçasına petekler tek bir parça halindedirler. Bu son derece şaşırtıcı bir durumdur. Çünkü aslında çok sayıda arı değişik yerlerden başlayarak ayrı hücreler halinde peteği örerler.

Petekler ikiyüzlüdür. Her iki yüzde de çok sayıda gözler yer alır. Bu gözlere bal, polen ve yumurta yerleştirilir. Bu yerleştirme işinde değişmez bir düzen vardır: En üstten başlayarak orta bölüme kadar bal doldurulur. Ara bölümde polenler, onun altında da larvalar ve en altta da kraliçe odası yer alır. Bal depoları kovanın yan taraflarında da vardır. İşçi arılar bal odaları ile larva odaları arasında birkaç sıra polen depo ederler. Böylece bu malzemelerin birbirine karışması önlenmiş olur. Bu önemli ayırım kovan sahiplerinin menfaatine uygulanmış akılcı bir plandır. Aksi halde birbirinden farksız olan bu odalardan örneğin birbirinden bal almaya çalışırken arı kolonisine zarar verilmiş olurdu. Diğer taraftan en altta ikamet eden kraliçe de bal veya polen depolarına da yumurtlayabilirdi. Bu şuurlu petek düzeni arılara hayran kalacağımız diğer bir akılcı, hatta matematiksel düzendir (Şekil 1.4) (Frisch, 1993).



Şekil 1.4: Petekteki larvalar ve bal.

Arı peteklerindeki çok düzenli yapı sayesinde larvalar ve bal karışmaz.

Petek gözlerinin genişliği 5,2-5,4 mm arasındadır. Sadece erkek arılar için 6,2-6,4 mm lik gözler vardır. Petek tek bir elden çıkmış gibi tek bir parça halindedir (Winston, 1991).

Peteğin kapağı için düzgün altıgen, yan duvarları için yamuk, tavanları için yamuk ve eşkenar dörtgen seçilmiştir. Böylece iki yüzlü petek gözlerinin tavanlarını da birleştirmiş olurlar (Vidinli, 1867C).

1.2 Petekteki Açılar

Arılar peteklerinde üç farklı açı kullanırlar.

1. Petekteki düzgün altıgendeki iç açılar (120^0)
2. İçi bal dolu petek hücrelerinin yerle yaptığı açı (13^0)
3. Petek hücrelerine üstten bakıldığında üç adet eşkenar dörtgenden oluşan tabanın

ilginç yapısı göze çarpar. Üç adet eşkenar dörtgenin düzlemleri arasındaki açıları **Colin Maclaurin** hesaplamıştır. Bu açılar $109^028'$, $109^028'$ ve $70^032'$ dir.

(www.christadelphia.org/archive/creation.htm, 27.11.2014)

2. ARILARIN PETEK FRAKTALI

Motif olarak düzgün altıgen alalım (Şekil 2.1)

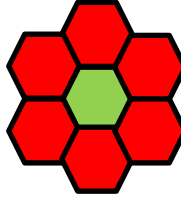


Şekil 2.1: Altıgen motif.

I. Adım: Şekil 2.1 deki altıgenin her kenarı üzerine bir düzgün altıgen olan motif oturtulur (Şekil 2.2). Toplam 7 düzgün altıgen eder. $N=7$ dir. Yani;

$$N = 7 = 1 + 6 = 1 + 1 \cdot 6$$

tür.

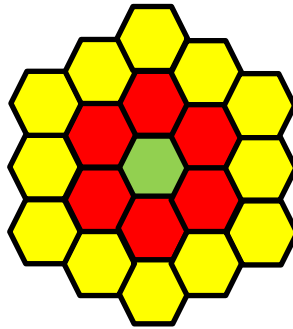


Şekil 2.2: Birinci iterasyon.

II.Adım: Şekil 2.2 deki her bir altıgenin açığa kalan kenarları üzerine birer düzgün altıgen daha oturtalım. Toplam 19 altıgen eder (Şekil 2.3). Yani;

$$N = 19 = 1 + 18 = 1 + (1 + 2) \cdot 6$$

dır.

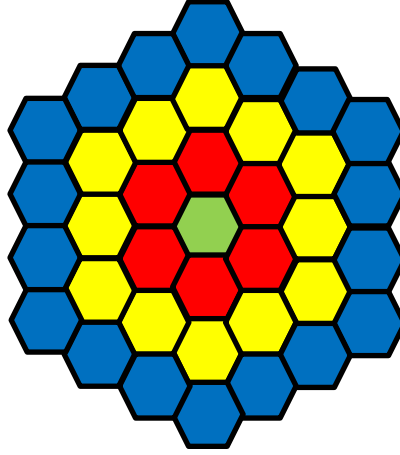


Şekil 2.3 İkinci iterasyon.

III.Adım: Şekil 2.3 deki II. Adımdan devam ederek, benzer iterasyon ile düzgün altıgenlerle bir halka daha yerleştirirsek $N = 37$ olur (Şekil 2.4). Yani;

$$\begin{aligned} N &= 1 + 36 = 1 + (1 + 2 + 3) \cdot 6 \\ &= 1 + \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right) \cdot 6 \\ &= 37 \end{aligned}$$

dir.

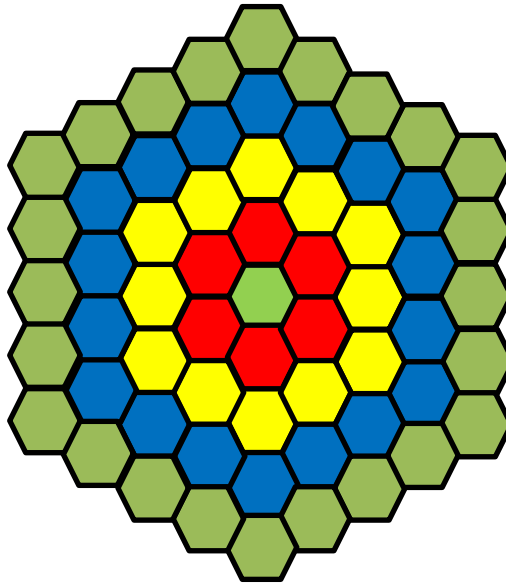


Şekil 2.4: Üçüncü iterasyon.

IV.Adım: III. Adımdan düzgün altıgenlerle iterasyona devam ederek bir halka daha ekleyelim. $N = 61$ olur (Şekil 2.5). Yani;

$$\begin{aligned} N &= 1 + 60 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 6 \\ &= 1 + \left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right) \cdot 6 \\ &= 61 \end{aligned}$$

dir.

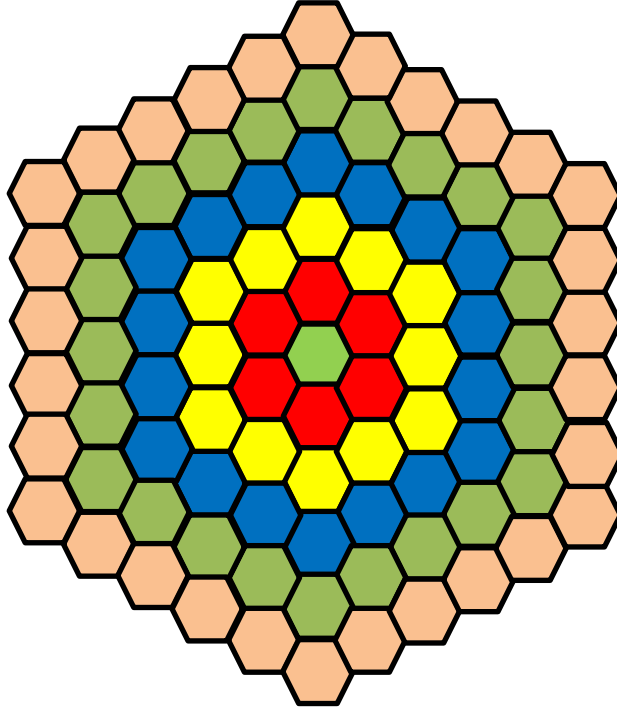


Şekil 2.5: Dördüncü iterasyon.

V.Adım: IV. Adımdan, düzgün altıgenlerle bir adım daha ekleyelim. $N = 91$ olur (Şekil 2.6). Yani;

$$\begin{aligned} N &= 1 + 90 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6 \\ &= 1 + \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right) \cdot 6 \\ &= 91 \end{aligned}$$

dir.

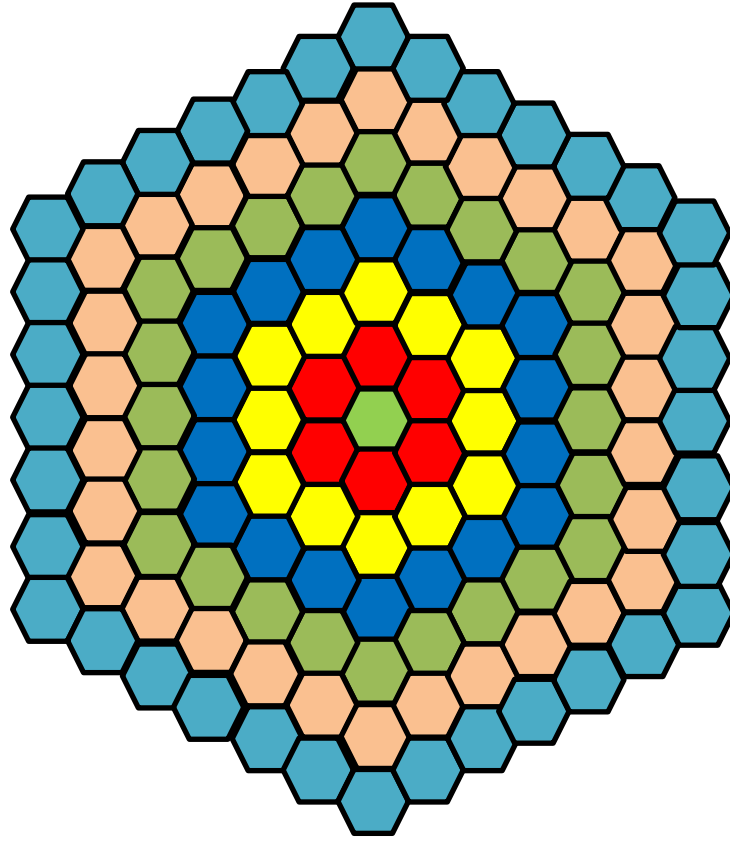


Şekil 2.6: Beşinci iterasyon.

VI.Adım: V. Adımdan, düzgün altıgenlerle bir adım daha ekleyerek toplam düzgün altıgenlerin sayısı $N = 127$ olur (Şekil 2.7). Yani;

$$\begin{aligned} N &= 127 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 6 \\ &= 1 + \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right) \cdot 6 \\ &= 1 + 126 \\ &= 127 \end{aligned}$$

dir.



Şekil 2.7: Altıncı iterasyon.

Genelleme yaparsak n-inci adımda

$$N = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot 6 = 1 + \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) \cdot 6$$

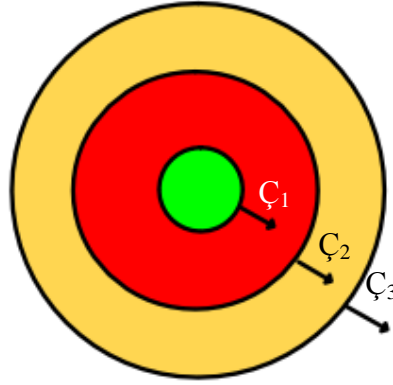
$$N = 1 + 3 \cdot n \cdot (n+1)$$

olur.

Sonuç: Arıların petekleri birer fraktaldır. Bu fraktallarda her adım başlı başına benzer görünüm ve yapıdadır.

2.1 Petek Fraktallarının Fraktal Boyutu

Bu boyutu hesaplamak için KANTOR ÜÇLÜLERİ metodunu uygulayabiliriz. Peteklerin fraktal yapısını Kantor orta üçlülerinin cümlesi olarak ele alalım. Bunun için aynı merkezli ve yarıçapları farklı üç çemberle başlayalım (Şekil 2.8).



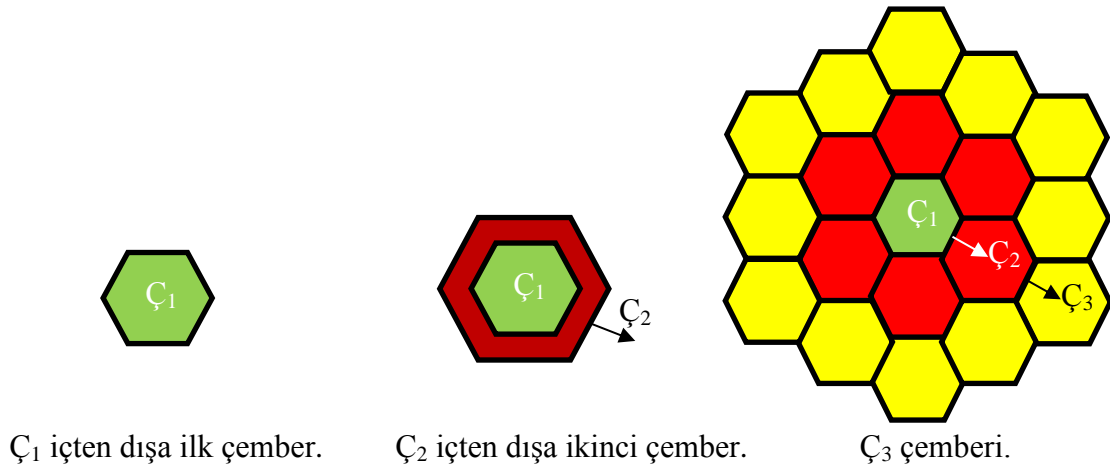
Şekil 2.8: İlk üç çember.

Sonra da en içteki çember yerine bir düzgün altıgen alalım. İkinci çember yerine de bir diğer düzgün altıgen Ç_2 alalım. Böylece iç içe iki düzgün altıgen elde ederiz. Aradaki mesafe arı peteğindeki gibi çok azdır (Şekil 2.9).



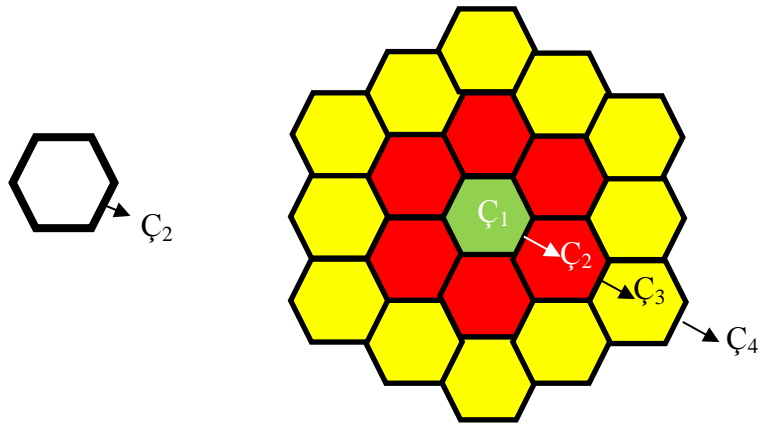
Şekil 2.9: Ç_1 ve Ç_2 çemberleri.

Son durumda, içten dışa üçüncü çemberi de Ç_3 olarak düzgün altıgenlerle uyguladığımız iterasyon ile yan yana getirerek aşağıda (Şekil 2.10) de görüldüğü gibi yerleştirelim.



Şekil 2.10: Ç₁, Ç₂, Ç₃ çemberleri.

Şimdi Kantor üçlülere olarak bu üç Ç₁, Ç₂, Ç₃ çemberlerinden en içteki Ç₁ çemberinin çevrelediği alanı unutalım. O zaman geriye iki çember, Ç₂ ve Ç₃ çemberleri kalır (Şekil 2.11).



Şekil 2.11: Ç₁, Ç₂, Ç₃, Ç₄ çemberleri.

$r_1 = \frac{1}{6}$ seçerek elde kalan Ç₂ ve Ç₃ çemberlerini 6 eş parçaya ayırmış olduk.

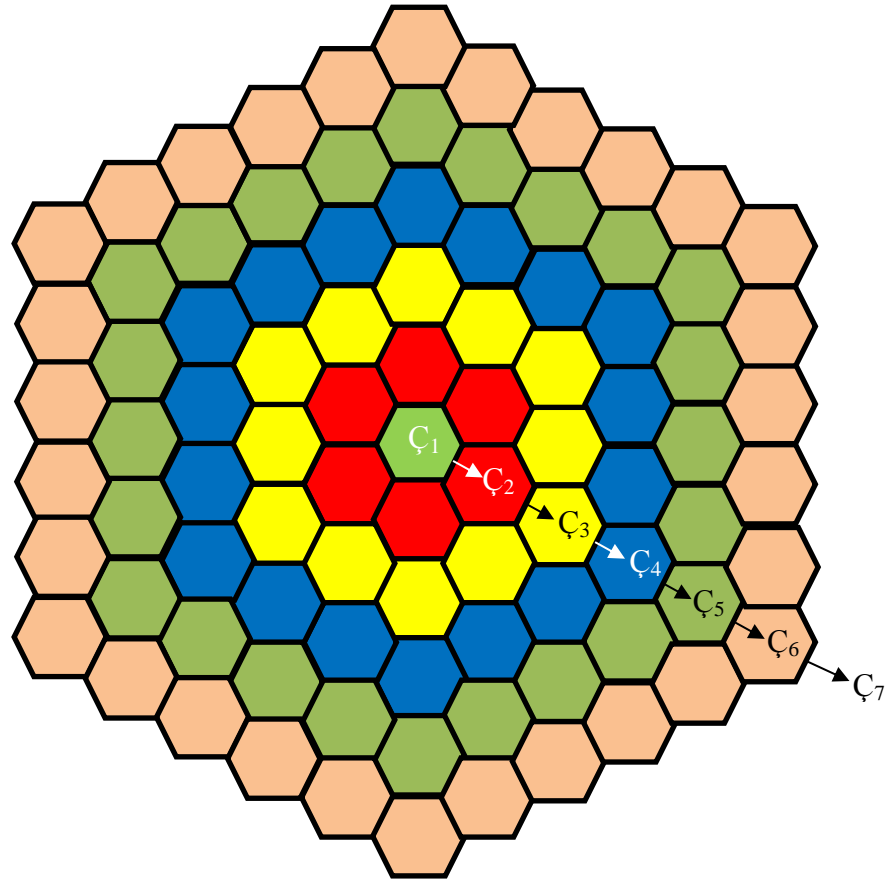
Yani toplam parça sayısı

$$N(r_1) = 6 + 6 = 12$$

olur.

Bu son durumda kırmızı bölgenin sınırı olan \mathcal{C}_3 çemberi de 18 parçanın birleşimidir. Yani $r_2 = \frac{1}{18}$ seçerek iç içe üç çember olarak \mathcal{C}_2 ve \mathcal{C}_3 çemberleri ile bir diğer \mathcal{C}_4 çemberini şu şekilde seçelim: \mathcal{C}_3 çemberinin dışına \mathcal{C}_3 nin dış parçaları üzerine düzgün altıgenleri oturtalım. Bir \mathcal{C}_4 çemberi (kırık çizgisi) çizmiş oluruz ve \mathcal{C}_3 ü unutalım (Şekil 2.12). Bu $r_2 = \frac{1}{18}$ seçilişi ile \mathcal{C}_3 çemberi 18 parçaya ayrılırken \mathcal{C}_4 çemberi de 12 düzgün altıgen oluşur. Yani 12 altıgen parçaya ayrılmış olur.

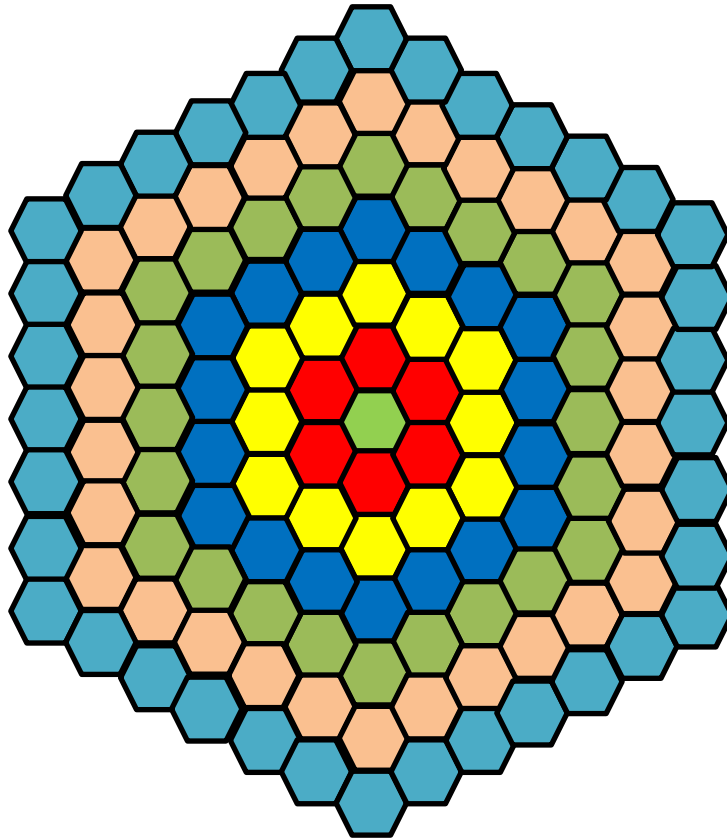
Benzer şekilde devam edilerek \mathcal{C}_4 ve \mathcal{C}_3 çemberlerini alalım ve \mathcal{C}_4 ü unutalım. \mathcal{C}_4 ün dışına düzgün altıgenlerle bir \mathcal{C}_5 çemberi çizelim (Şekil 2.12).



Şekil 2.12: \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}_5 , \mathcal{C}_6 , \mathcal{C}_7 çemberleri.

Bu son durumda \mathcal{C}_4 çemberi 30 parçanın birleşimidir. Yani $r_3 = \frac{1}{30}$ seçersek \mathcal{C}_4 ün dışına düzgün altıgenlerden oluşan bir \mathcal{C}_5 çemberi (kırık çizgi) çizelim (Şekil 2.12). Bu $r_3 = \frac{1}{30}$ seçilişi ile \mathcal{C}_4 çemberi 30 parçaya ayrılırken \mathcal{C}_5 çemberi de 18 altıgen parçaya ayrılmış olur.

Benzer şekilde \mathcal{C}_4 ve \mathcal{C}_5 çemberlerini alalım. \mathcal{C}_5 in dışındaki \mathcal{C}_6 çemberini düzgün altıgenlerle çizelim (Şekil 2.13).



Şekil 2.13: \mathcal{C}_6 çemberinin düzgün altıgenlerle görüntüsü.

Bu son durumda \mathcal{C}_5 çemberi 42 parçanın birleşimidir. Yani $r_4 = \frac{1}{42}$ seçersek iç içe iki çember olarak \mathcal{C}_4 ve \mathcal{C}_5 çemberlerine sahip oluruz. Bu iç içe \mathcal{C}_4 ve \mathcal{C}_5 çemberlerini üçe tamamlamak için \mathcal{C}_5 in dışına düzgün altıgenlerle bir \mathcal{C}_6 çemberi (kırık çizgi) daha çizelim, $r_4 = \frac{1}{42}$ seçimi ile \mathcal{C}_5 çemberi 42 parçaya ayrılırken \mathcal{C}_6 çemberi de 24 düzgün altıgene ayrılır.

Benzer algoritma ile $n > 4$ için r_n ve $N(r_n)$ sayılarını genelleylim. Özetleyecek olursak parçalama oranı r_1 ve parça sayısı $N(r_1)$ olarak $r_1 = \frac{1}{6}$ için \mathcal{C}_2 yi oluşturan 6 kenar ve \mathcal{C}_2 ye oturan 6 düzgün altıgen parçası olmak üzere toplam parça sayısı $N(r_1) = 6 + 6 = 12$ dir. Benzer metot ile $r_2 = \frac{1}{18}$ için \mathcal{C}_3 deki 18 altıgen parçası ile \mathcal{C}_4 ü oluşturan 12 düzgün altıgen olmak üzere toplam parça sayısı olarak $N(r_2) = 12 + 18 = 30$ olduğu görülür. Benzer şekilde $r_3 = \frac{1}{30}$ için $N(r_3) = 18 + 30 = 48$ olur. Nihayet $r_4 = \frac{1}{42}$ için $N(r_4)$ ün toplam parça sayısı da $N(r_4) = 24 + 42 = 66$ olur.

Genellersek n. adımda

$$r_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 6} \text{ ve } N(r_n) = (3n - 1) \cdot 6$$

olur.

Buradan da petek fraktalının boyutu

$$d_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \frac{1}{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((3n-1) \cdot 6)}{\log((2n-1) \cdot 6)} = 1$$

olur.

Özel olarak

$$r_1 = 1/6 \text{ ve } N(r_1) = 12 \text{ olması halinde boyut } d_1 = \frac{\log N(r_1)}{\log(\frac{1}{r_1})} = \frac{\log 12}{\log 6} = 1,386$$

$$r_2 = 1/18 \text{ ve } N(r_2) = 30 \text{ olması halinde boyut } d_2 = \frac{\log N(r_2)}{\log(\frac{1}{r_2})} = \frac{\log 30}{\log 18} = 1,767$$

$$r_3 = 1/30 \text{ ve } N(r_3) = 48 \text{ olması halinde boyut } d_3 = \frac{\log N(r_3)}{\log(\frac{1}{r_3})} = \frac{\log 48}{\log 30} = 1,138$$

$$r_4 = 1/42 \text{ ve } N(r_4) = 66 \text{ olması halinde boyut } d_4 = \frac{\log N(r_4)}{\log(\frac{1}{r_4})} = \frac{\log 66}{\log 42} = 1,209$$

·
·
·

$$r_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 6} \text{ ve } N(r_n) = (3n - 1) \cdot 6 \text{ olması halinde}$$

$$d_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log \frac{1}{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((3n-1) \cdot 6)}{\log((2n-1) \cdot 6)} = 1$$

olur.

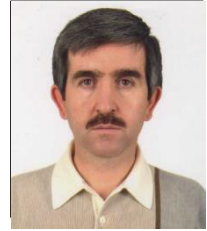
KAYNAKLAR

- Creation or Chance! God's purpose with mankind proved by the wonder of the universe: www.christadelphia.org/archive/creation.htm, (Ziyaret Edilme Tarihi, 27.11.2014).
- Gerone, M., “Aleveoles des Abilles Exercice de Calcul et de Stereotomie”, *Nouvelles Aneles de Mathematiques*, 15: 176-180 (1856).
- Gerone, M., “Arıların teknik çizimi”, *Bulletin de Bibliographie d’histoire et de Biographie mathematiques*, 6: 1-8 (1860).
- Günergün, F., “Matematiksel Bilimlerde ilk Türkçe Dergi: Mebahis-i İlmiye”, *Osmanlı Bilim Araştırmaları Dergisi*, 8(2): 2-42(2007)
- Hoyt, M., “The World of Bees”, **Coward Mcnann Inc**, New York, 100-101 (1965).
- İhsanoğlu, E. Şeşen, R. ve İzgi, C., “Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi”, *Ircica*, İstanbul(1999).
- Frisch, K., “Animal Architecture”, *Hutchinson*, London (1975).
- Frisch, K., “Aus Dem Leben Der Bienen”, *Springer Verlag*, (1993).
- Polatöz, M.S., “Bal Peteğindeki Matematik Sırlar”, *Sızıntı*, 27: 318(2005).
- Saras, C., “Salih Zekiye göre Vidinli Tefik Paşa” *Bilim tarihi*, I(9) : 3-10 (1992).
- Schubring, G., “Hüseyin Tefik Paşa : Lineer Cebirin Mucidi” *Osmanli Bilimi Araştırmaları*, 8(2) : 49-54 (2007).
- Vidinli, H.T., “Arıların Peteklerinin Müseddes Eşşekil Olmasının Sebep ve Hikmetine dair”, *Mebahis-i İlmiye*, 1(3) :76-83 (1867C)
- Vidinli, H.T., “Sanayinin Muhtaç olduğu Ulum”, *Mebahis-i İlmiye*, 2: 89-94(1868).
- Winston, M. L., “The Biology of the Honey Bee”, *Harvard Univ. Press*, 81 (1991).
- Yahya, H., “Balarısı Mucizesi”, *Araştırma Yayıncılık*, İstanbul (2007).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Muammer Topsakal
Doğum Yeri ve Tarihi : Karacasu / 20.01.1974



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Öğretmenliği
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyetleri : Matematik Proje Olimpiyatlarına ve Matematik Dünya Olimpiyatlarına öğrenci hazırladı

İş Deneyimi

Stajlar : BMC ve TOFAŞ ta staj yaptı
Projeler : Uluslararası ve ulusal lise düzeyinde projelere katıldı.
Çalıştığı Kurumlar : Değişik liselerde matematik ve geometri öğretmeni olarak çalıştı

İletişim

Adres : Yenidoğan Mh. Buluş Sk. No:47/1 ESKİŞEHİR
Tel : 0539 739 51 79
E-Posta Adresi : mtpskl@yahoo.com

Akademik Çalışmaları

–
–

Yabancı Dil Bilgisi

İngilizce : İleri Seviyede

Tarih:26/12/2014