ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ÖZELLİKLERİNİN OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Bengi YILDIZ

Doktora Tezi

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vakıf CAFER

BİLECİK, 2015

Ref.No: 10083875

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK ÖZELLİKLERİNİN OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ

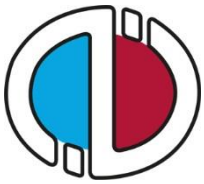
Bengi YILDIZ

Doktora Tezi

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vakıf CAFER

BİLECİK, 2015



ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences

Department of Mathematics

ANALYSIS OF STABILITY PROBLEM OF DYNAMICAL SYSTEMS BY OPTIMIZATION METHODS

Bengi YILDIZ

Ph.D. Thesis

Thesis Advisor

Prof. Dr. Vakıf CAFER

BILECIK, 2015

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 25/06/2015 tarih ve 23 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 09/07/2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Bengi YILDIZ'ın, "Dinamik Sistemlerin Kararlılık Özelliklerinin Optimizasyon Yöntemleri Yardımıyla İncelenmesi" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Vakıf CAFER

ÜYE : Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

ÜYE : Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK

ÜYE : Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI: V.

Yrd. Doç. Dr. İlker İNAM

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …./…./…..... tarih ve ……/…… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Vakıf CAFER'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde bilgi ve görüşlerine başvurduğum Doç. Dr. Taner Büyükköroğlu'na teşekkürü bir borç bilirim.

Bana yol gösteren, destekleyen, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, yalnız bilimsel anlamda değil hayata dair de kendilerinden çok şey öğrendiğim değerli hocalarım Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na, Prof. Dr. Murat TOSUN'a, Yüksek Lisans tez danışmanım Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ'a ve Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Eylül 2014 - Şubat 2015 tarihleri arasında Texas A&M Üniversitesi'ne beni davet eden, bilimsel anlamda yaptığımız çalışmalarla ufkumu açan Texas A&M Üniversitesi Elektrik & Bilgisayar Mühendisliği Bölümü Öğretim Elemanlarından Prof. Dr. Shankar P. BHATTACHARYYA'ya ayrıca teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca, her türlü sıkıntıma katlanıp, bana destek olan, gittiğim yolda beni yüreklendiren ve her zaman yanımda olan aileme minnettarım.

Bengi YILDIZ

Temmuz 2015

ÖZET

Bu tez çalışmasında lineer sistemlerin bazı kararlılık problemleri incelenmektedir. Hem sürekli sistemler (Hurwitz kararlılık) hem de kesikli sistemler (Schur kararlılık) ele alınmaktadır. Düzlemsel aralık sistemlerin ortak quadratik Lyapunov fonksiyonlarının varlığı için gerekli ve yeterli koşullar alınmış ve elde edilen sonuçların uygulamasını gösteren örnekler verilmiştir. Sonra benzer problem 3×3 boyutlu aralık sistemler için incelenmiştir ve benzer koşullar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar algoritmalara dönüştürülmüştür. Bu algoritmalar basit olup uygulamaları kolaydır. $n \times n$ boyutlu aralık Z-matrisler ailesi için de gerekli ve yeterli koşul elde edilmiştir. Herhangi $n \times n$ aralık aile için ise ortak diyagonal çözümün varlığı için bir yeterli koşul verilmiştir.

Aralık rasyonel plantlar (kontrol edilebilir sistemler) için Hurwitz ve Schur kararlaştırıcıların bulunması için bir algoritma verilmiştir. Kesikli sistemlerin kararlılık sınırlarının elde edilmesi ile ilgili bir sonuç elde edilmiştir.

Elde edilen bütün sonuçlar örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler

Hurwitz kararlılık; Schur kararlılık; Lyapunov denklemi; Ortak diyagonal çözüm; Kararlılık sınırı; Kararlaştırıcı

ABSTRACT

In this thesis some stability problems of linear systems are investigated. Both continuous systems (Hurwitz stability) and discrete systems (Schur stability) are considered. For interval plane systems necessary and sufficient conditions for the existence of common Lyapunov functions are obtained and illustrative example are given. Similar problem is investigated for 3×3 interval systems, the existence conditions are obtained. The obtained results are transformed into appropriate algorithms. These algorithms are simple and faster.

Given $n \times n$ dimensional interval systems of Z-matrices a necessary and sufficient condition is proved. For an arbitrary interval system one sufficient condition for the existence of a common diagonal solution to Lyapunov matrix inequality is obtained.

One algorithm for first order stabilizator for interval plants is proposed. Sufficient condition for the stability margin of discrete systems is obtained.

The obtained results are illustrated by number of examples.

Keywords

Hurwitz stability; Schur stability; Lyapunov equation; Common diagonal solution; Stability margin; Stabilizator

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

JÜRİ ONAY SAYFASI . . .

TEŞEKKÜR . . .

ÖZET . . . **i**

ABSTRACT . . . **ii**

İÇİNDEKİLER . . . **iii**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . **iv**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . **v**

1 GİRİŞ . . . **1**

2 ARALIK SİSTEMLER İÇİN ORTAK DİYAGONAL KARARLILIK . . . **13**
2.1 2×2 Aralık Aileler İçin Hurwitz ve Schur Ortak Diyagonal Çözümler . . . 14
2.1.1 Hurwitz durumu . . . 18
2.1.2 Schur durumu . . . 25
2.2 3×3 Aralık Sistemler İçin Hurwitz ve Schur Ortak Diyagonal Çözümler . . . 30
2.2.1 Sürekli sistemler . . . 31
2.2.2 Ayrık sistemler . . . 37
2.3 Aralık Z-matrislerinin Hurwitz Diyagonal Kararlılığı . . . 42
2.4 $n \times n$ Aileler İçin Yeterli Koşul . . . 46

3 ARALIK SİSTEMLER (PLANTLAR) İÇİN 1. MERTEBEDEN KARARLAŞTIRAN KOMPENSATÖRLERİN BELİRLENMESİ . . . **53**

4 KESİKLİ SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK SINIRI . . . **63**

5 SONUÇLAR . . . **71**

KAYNAKLAR . . . **72**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1.1 Bilineer dönüşüm. 4

2.1 Örnek (2.15) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir. 35

2.2 Örnek (2.16) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir. 37

2.3 Örnek (2.18) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir. 40

2.4 Örnek (2.19) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir. 41

3.1 Helikopter Modeli. 55

3.2 Helikopter modeli için K_1-K_2 kararlılık bölgesi. 57

3.3 Eğik kanatlı uçak (Oblique Wing Aircraft). 58

3.4 (f_1, f_2) dönüşümünün görüntüsü. 61

3.5 Kararlaştıran (K_1, K_2) lerin kümesi. 62

4.1 VTOL uçak modeli. 68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu kompleks vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{n\times n}$	: $n \times n$ gerçel matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n\times n}$	: $n \times n$ kompleks matrisler kümesi
$diag(d_1,\ldots,d_n)$	: Köşegen elemanları $d_1,\ldots,d_n$ olan diyagonal (köşegen) matris
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: Kompleks A matrisinin eşlenik transpozu
$A > 0$	: A pozitif tanımlı matrisdir
$A < 0$	: A negatif tanımlı matrisdir
$\mathcal{A}$	: Matrisler ailesi
$\mathcal{Z}$	: $i \neq j$ için $a_{ij} \geq 0$ olan $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisler sınıfı
$\mathcal{P}$	: Polinomlar ailesi
$\mathcal{D}$	: Kararlılık bölgesi
Rez	: z kompleks sayısının gerçel kısmı
$detA$	: A matrisinin determinantı
$traceA$	: A matrsinin izi
$A \preccurlyeq B$	: $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$ $(\forall i, j = 1,2,\ldots,n)$ dir
$\sigma(A)$	: A matrisinin spektral yarıçapı
$\rho(A)$	: A matrisinin spektral apsisi

1 GİRİŞ

Dinamik sistemler, durumu zamana bağlı olarak değişen sistemlerdir. Sarkaçlı bir saatin salınımını, bir borudan geçen suyun hareketini ve her ilkbaharda bir göldeki balık sayısını anlatan matematiksel modeller buna örnek olarak gösterilebilir.

Uygulamada iki temel dinamik sistem söz konusudur:

1. Kesikli zaman dinamik sistemler ($t \in \mathbb{N}$ (veya $\mathbb{Z}$))
2. Sürekli zaman dinamik sistemler ($t \in \mathbb{R}$)

Sürekli zaman dinamik sistemler

$$\dot{x} = f(x), \quad (t \in \mathbb{R})$$

biçiminde verilmektedir.

Kesikli zaman dinamik sistemler ise genel olarak bir fonksiyonun iterasyonu biçiminde yani

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (t \in \mathbb{N} \text{ (veya } \mathbb{Z}))$$

biçiminde verilmektedir.

Sürekli dinamik sistemlerde sistemin noktaları sürekli bir eğri (yörünge) boyunca değişiyorken, kesikli zaman dinamik sistemlerde sistemin noktaları sıçrama yaparak değişir. Pek çok dinamik sistem sadece yörüngesi ile analiz edilemeyecek kadar karmaşıktır. Çalışılan sistem sadece yaklaşık olarak ifade ediliyor olabilir, bu sistemin parametreleri kesin olarak bilinmiyor yani belirsizlik içeriyor olabilir ya da bu sistemi ifade eden denklem çözülürken bazı terimler tam olarak hesaba katılamıyor olabilir. Sistemin yaklaşımlarla ifade edilmesi, kullanılan yöntemlerin uygun ya da genel geçer olup olmadığı sorusunu ortaya çıkarır. Bu tür sorulara cevaben uygulanan yöntemlerin isabetliliğini gösteren birkaç yöntemden biri olan Lyapunov kararlılık kavramı 1892 yılında Rus matematikçi A. M. Lyapunov tarafından geliştirilmiştir. Lineer sistemler için bu kavram ile birlikte kararlılık problemi Lyapunov denklemi denilen matris denkleminin pozitif tanımlı çözümünün varlığı problemine indirgenmiş olur.

İki veya daha fazla kararlı matris için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak pozitif tanımlı P çözümünün var olması lineer sistemler teorisinin ele alınan önemli problemlerinden biridir. Bu tür sistemlere anahtarlamalı (switching) sistemler denir. Ortak pozitif tanımlı P nin varlığı bu sistem için ortak bir $V(x) = x^T Px$ Lyapunov fonksiyonunun varlığı demektir. İki veya daha fazla kararlı matris için Lyapunov eşitsizliğinin ortak $P > 0$ (pozitif tanımlı) matrisinin varlığı için literatürde birçok sonuçlar bilinmektedir (Liberzon ve Tempo, 2004; Narendra ve Shorten, 2007). Özellikle diyagonal tipteki çözümlerin (ortak Lyapunov fonksiyonunun) varlığı da çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır. (Büyükköroğlu, 2012; Dzhafarov ve Büyükköroğlu, 2006; Kaszkurewicz ve Bhaya, 2000; Khalil, 1982; Mason ve Shorten, 2006; Pastravanu ve Voicu, 2006)

Sürekli zaman dinamik sistemlerin kararlılığı belli matris ve polinomların Hurwitz kararlılığına, kesikli zaman dinamik sistemlerin kararlılığı ise belli matris ve polinomların Schur kararlılığına dönüşmektedir (Barmish, 1994; Bhattacharyya vd., 1995). Ancak bir çok problemde daha önce de belirtildiği gibi parametreler belirsizlik içerdiği için matrisler ve polinomlar ailesinin kararlılığı problemleri araştırma konusu olmaktadır.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi (ya da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi) olmak üzere $\mathbb{R}^n$ (ya da $\mathbb{C}^n$) ile n boyutlu reel (ya da kompleks) vektör uzayı gösterilsin.

a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ler reel (ya da kompleks) sayılar olmak üzere

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1}$$

polinomu verilsin. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde $\mathcal{D}$ kümesi basit bağlantılı açık bir küme olsun. Eğer (1.1) polinomunun tüm kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu polinoma $\mathcal{D}$-kararlı polinom denir. Eğer

- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem ise $\mathcal{D}$-kararlılık yerine Hurwitz kararlılık,
- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde açık birim disk ise $\mathcal{D}$-kararlılık yerine Schur kararlılık

deyimleri kullanılır.

2. ve 3. dereceden gerçel katsayılı bir polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşullar aşağıda verilmiştir:

Teorem 1.1. *(Jury, 1960) 2. dereceden gerçel katsayılı polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul* $a_2 > 0$ *olmak üzere,*

i) $|a_0| < a_2$,

ii) $|a_1| < a_0 + a_2$

olmasıdır.

Teorem 1.2. *(Jury, 1960) 3. dereceden gerçel katsayılı polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul* $a_3 > 0$ *olmak üzere,*

i) $|a_0| < a_3$,

ii) $|a_0 + a_2| < a_1 + a_3$,

iii) $|a_0 a_2 - a_1 a_3| < a_3^2 - a_0^2$

olmasıdır.

Eğer (1.1) polinomunda tüm a_i katsayıları gerçel ise, bu polinomun Hurwitz kararlı olması için gerekli koşul a_i katsayılarının aynı işaretli olmasıdır (Bu koşulun yeterli olmadığı bilinmektedir). Kompleks katsayılı (1.1) polinomunun Schur kararlılığı için gerekli koşul olarak ise $|a_0| < |a_n|$ verilebilir.

(1.1) polinomunun Hurwitz kararlılığı için bir diğer kriter de Hurwitz kriteridir.

Teorem 1.3. *(Hurwitz Kriteri) (Barmish, 1994)*

(1.1) $p(z)$ *polinomu icin*

$$A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

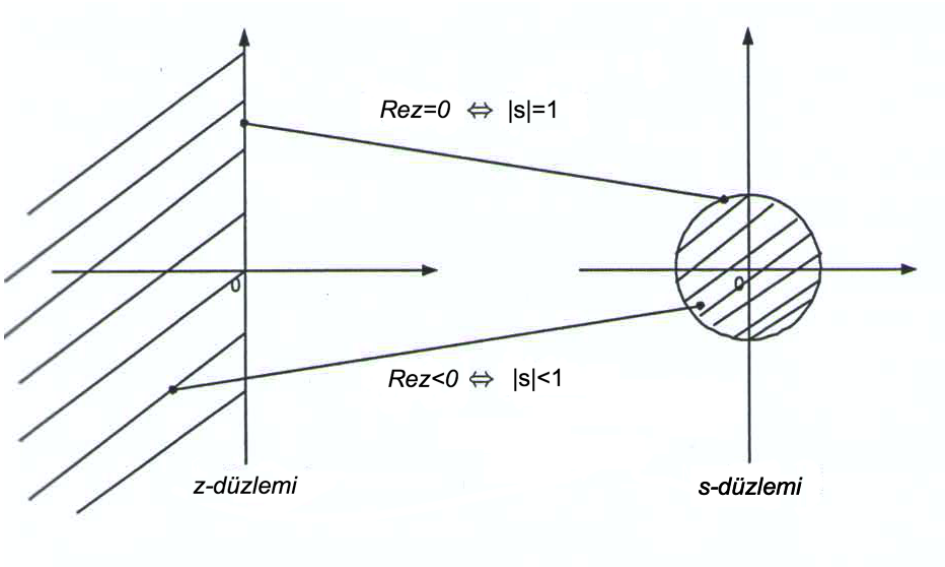
ile tanımlı matrise Hurwitz matrisi denir.

(1.1) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul karşılık gelen (1.2) Hurwitz matrisinin tüm baş minörlerinin (leading principal minors) pozitif olmasıdır.

Bilindiği gibi kompleks düzlemde

$$s \to \frac{z+1}{z-1}$$

bilineer dönüşümü (Bu dönüşüm Mobius dönüşümü olarak bilinmektedir) açık birim diskten sol açık yarı düzleme bire-bir, sürekli bir dönüşümdür (Şekil 1.1). Bu dönüşümün tersi yine kendisidir ve sol açık yarı düzlemden birim diske bire-bir, sürekli dönüşüm olur. Buna göre (1.1) polinomunun Hurwitz kararlılığı ile Schur kararlılığı arasında aşağıdaki Teorem (1.4) geçerlidir.



Şekil 1.1: Bilineer dönüşüm.

Teorem 1.4. *(Bose, 1985) (1.1) polinomu Schur kararlı ise,*

$$\tilde{p}(z) := (z-1)^n p(\frac{z+1}{z-1})$$

polinomu Hurwitz kararlıdır. Tersine, eğer n. dereceden bir $\tilde{p}(z)$ polinomu Hurwitz kararlı ise

$$p(s) := (s-1)^n \tilde{p}(\frac{s+1}{s-1})$$

polinomu Schur kararlıdır.

$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi $\mathbb{R}^{n\times n}$ ile, $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi ise $\mathbb{C}^{n\times n}$ ile gösterilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

matrisi verilsin. A matrisinin kararlılığı, A nın karakteristik polinomunun kararlılığına denktir. Yani A matrisinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul $det(zI - A)$ polinomunun kararlı olmasıdır. Eğer A matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir $\mathcal{D}$ kümesinde ise bu matrise $\mathcal{D}$-kararlı matris denir. $\mathcal{D}$ bölgesi sol açık yarı düzlem ise bu matrise Hurwitz kararlı matris, açık birim disk ise Schur kararlı matris denir.

2×2 ve 3×3 gerçel matrislerin Schur kararlılık kriterleri aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.5. *(Fleming vd., 1998)* 2×2 *boyutlu gerçel bir A matrisinin Schur kararlılığı için gerek ve yeter koşul*

i) $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| < 1$,

ii) $|a_{11} + a_{22}| < 1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

olmasıdır.

Teorem 1.6. *(Fleming vd., 1998)* 3×3 *boyutlu gerçel bir A matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

i) $|detA| < 1$,

ii) $|traceA + detA| < 1 + \mu$,

iii) $|(traceA)(detA) - \mu| < 1 - (detA)^2$

olmasıdır. Burada μ *sayısı A matrisininin* 2×2 *boyutlu baş minörleri toplamıdır.*

Eğer $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin eşlenik transpozu A^*, A matrisinin kendisine eşit ise, bu matrise Hermityen (Hermitian) matris denir. Gerçel Hermityen matris simetrik matrisdir.

Eğer A Hermityen matrisi her $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ kompleks vektörü için

$$z^* Az > 0$$

koşulunu sağlıyorsa bu matrise pozitif tanımlı matris denir ve $A > 0$ ile gösterilir. Benzer olarak negatif tanımlı matris denildiğinde de $-A > 0$ anlaşılmaktadır ve $A < 0$ ile gösterilir.

A matrisinin gerçel olması durumunda ise A matrisinin pozitif tanımlı olması demek A nın simetrik ve her $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için

$$x^T Ax > 0$$

koşulunun sağlanması demektir.

Bir A matrisinin (gerçel ya da kompleks) Hurwitz kararlılığı Lyapunov Teoremi ile, Schur kararlılığı ise Stein Teoremi ile ifade edilebilir.

Teorem 1.7. *(Lyapunov Teoremi) (Gantmacher, 1959)*

1) *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^* P + PA < 0 \tag{1.4}$$

olacak şekilde P pozitif tanımlı matrisinin bulunmasıdır.

2) *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^T P + PA < 0 \tag{1.5}$$

olacak şekilde P pozitif tanımlı matrisinin bulunmasıdır.

(1.4) ve (1.5) eşitsizliklerine Lyapunov eşitsizlikleri denir.

Bir $Q > 0$ için P ye göre

$$A^* P + PA = -Q \quad \text{ve} \quad A^T P + PA = -Q \tag{1.6}$$

ile tanımlı (1.6) denklemlerine Lyapunov denklemleri adı verilir.

Teorem 1.8. *(Stein Teoremi) (Stein, 1952)*

1) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrisi verilsin. A matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^*PA - P < 0 \tag{1.7}$$

olacak şekilde P pozitif tanımlı matrisinin bulunmasıdır.

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrisi verilsin. A matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^TPA - P < 0 \tag{1.8}$$

olacak şekilde P pozitif tanımlı matrisinin bulunmasıdır.

(1.7) ve (1.8) eşitsizliklerine Stein eşitsizlikleri denir.

$Q > 0$ için

$$A^*PA - P = -Q \quad \text{ve} \quad A^TPA - P = -Q \tag{1.9}$$

ile tanımlı (1.9) eşitliklerine Stein denklemleri adı verilir.

Polinomlarda olduğu gibi matrislerde de Hurwitz kararlılık Schur kararlılığa ve tersine dönüştürülebilir. Matrisler arasındaki bu dönüşüme Cayley dönüşümü denir.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin. I birim matris olmak üzere

- A matrisi Hurwitz kararlı ise $(I-A)^{-1}(I+A)$ matrisi Schur kararlıdır.
- A matrisi Schur kararlı ise $(A+I)^{-1}(A-I)$ matrisi Hurwitz kararlıdır. (Taussky, 1964)

Yukarıdaki (1.5) Lyapunov ve (1.8) Stein eşitsizliklerinde pozitif tanımlı olarak alınan P matrisi pozitif diyagonal ise bu kararlılığa özel bir isim verilir.

Eğer $N > 0$ olmak üzere,

$$A^TD + DA = -N \tag{1.10}$$

olacak biçimde D pozitif diyagonal matrisi varsa A ya Hurwitz diyagonal kararlı matris denir.

Benzer yolla Schur diyagonal kararlılık aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Eğer $N > 0$ olmak üzere,

$$A^T DA - D = -N \tag{1.11}$$

olacak biçimde D pozitif diyagonal matrisi varsa A ya Schur diyagonal kararlı matris denir.

$Q \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi verilsin. $x, y \in Q$ için $\{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$ kümesine x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası denir. Eğer Q kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası Q kümesinde ise Q ya konveks küme denir. Bir $\tilde{q} \in Q$ noktası $x, y \in Q,\ t \in (0,1)$ olmak üzere $\tilde{q} = (1-t)x + ty$ biçiminde yazılamıyor ise o zaman $\tilde{q}$ noktasına Q kümesinin bir uç (extremal) noktası denir.

$Q \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümesi ve $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in Q$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \tag{1.12}$$

sağlanıyorsa f ye konveks fonksiyon denir (Aubin, 1998). $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli konveks fonksiyonun maksimumunu a ve b noktasında aldığı bilinmektedir. V kompakt bir küme olmak üzere bir $v \in V$ parametresine bağlı sürekli ve her v için x e göre konveks olan $f(v,x)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \max_{v \in V} f(v,x)$$

fonksiyonu da konvekstir. Gerçekten; her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
f((1-t)x + ty) &= \max_{v \in V} f(v, (1-t)x + ty) \\
&\leq \max_{v \in V} \{f(v,(1-t)x) + f(v,ty)\} \\
&\leq \max_{v \in V} \{(1-t)f(v,x) + tf(v,ty)\} \\
&\leq \max_{v \in V} (1-t)f(v,x) + \max_{v \in V} tf(v,y) \\
&= (1-t) \max_{v \in V} f(v,x) + t \max_{v \in V} f(v,y) \\
&= (1-t)f(x) + tf(y)
\end{aligned}$$

dir. Burada bilinen

$$\max_{v\in V}\{f(v,x)+f(v,y)\} \leq \max_{v\in V} f(v,x)+\max_{v\in V} f(v,y)$$

özelliği kullanıldı.

(1.1) polinomunda ve (1.3) matrisinde katsayılar sabittir. Ancak birçok problemde bu katsayıların ve elemanların değerleri kesin olarak bilinmemektedir. Bu durumda (1.1) polinomu yerine

$$p(z,q) = a_n(q)z^n + \cdots + a_1(q)z + a_0(q) \tag{1.13}$$

polinomlar ailesi ele alınır ve

$$\mathcal{P} = \{p(z,q) : q \in Q \subset \mathbb{R}^l\} \tag{1.14}$$

ailesi ortaya çıkar. Benzer olarak (1.3) matrisi yerine

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \dots & a_{1n}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \dots & a_{2n}(q) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(q) & a_{n2}(q) & \dots & a_{nn}(q) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

matrisler ailesi ele alınır ve

$$\mathcal{A} = \{A(q) : q \in Q\} \tag{1.16}$$

ortaya çıkar. Burada q belirsizlik parametresi olup Q kompakt kümesi üzerinde değişmektedir.

Genellikle, Q kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında bir kutu (box) olarak alınmaktadır:

$$Q = \{(q_1, q_2, \dots, q_l) : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, (i = 1,2,\dots,l)\} \tag{1.17}$$

Eğer ailedeki her polinom (matris) kararlı ise bu aileye gürbüz (robust) kararlı aile denir. Gürbüz kararlılık için Sıfırı İçermeme Prensibi (Zero Exclusion Principle) çok önemlidir. Bu prensip invaryant (değişmez) dereceli ve katsayıları sürekli değişen polinomların köklerinin parametreye göre sürekli değiştiğini ifade eden aşağıdaki teoreme dayalıdır.

Teorem 1.9. *(Marden, 1966) (1.14) polinomlar ailesi invaryant dereceli ve* $a_i(q)$, $(i = 0,1,\ldots,n)$ *katsayı fonksiyonları* $q \in Q$ *ya göre sürekli olsun. Bu durumda* $p(z,q)$ *polinomunun kökleri de* $q \in Q$ *ya göre sürekli değişir. Yani öyle*

$$z_i(.) : Q \to \mathbb{C}, \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

sürekli fonksiyonları vardır ki her $q \in Q$ *için* $z_1(q), z_2(q), \ldots, z_n(q)$ *sayıları* $p(z,q)$ *polinomunun kökleridir.*

Gürbüz Schur kararlılık için sıfırı içermeme prensibi şöyledir:

Teorem 1.10. *(Barmish, 1994; Bhattacharyya vd., 1995) (1.14) polinomlar ailesi invaryant dereceli,* Q *kutu,* $a_i(q)$, $(i = 0,1,\ldots,n)$ *katsayı fonksiyonları* $q \in Q$ *ya göre sürekli ve bu aileye ait en az bir* $p(z,q^0)$ *polinomu Schur kararlı olsun. (1.14) polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her* $z \in \partial\mathcal{D}$ *için*

$$0 \notin p(z,Q) \tag{1.18}$$

olmasıdır. Burada $p(z,Q) = \{p(z,q) : q \in Q\}$, $\partial\mathcal{D}$ *birim diskin sınırıdır.*

$f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $i = 1,2,\ldots,l$ için $q \in Q$ nun q_i bileşeni dışındaki diğer bileşenler sabit olmak üzere q_i ye göre afin ise f ye multilineer fonksiyon denir.

Eğer Q belirsizlik kümesi bir kutu ise $f : Q \to \mathbb{R}$ multilineer fonksiyonunun maksimum ve minimum değerini veren önemli bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.11. *(Barmish, 1994)* Q *kutusunu (1.17) deki gibi alalım.* q^i $(i = 1,2,\ldots,2^{l+1})$ *ile* Q *kutusunun köşeleri gösterilsin.* $f : Q \to \mathbb{R}$ *multilineer bir fonksiyon ise*

$$\min_{q\in Q} f(q) = \min_{1\le i\le 2^{l+1}} f(q^i) \quad ve \quad \max_{q\in Q} f(q) = \max_{1\le i\le 2^{l+1}} f(q^i) \tag{1.19}$$

dir. (Yani f*, maksimum ve minimum değerlerini* Q *nun köşe noktalarında alır.)*

2×2 lik

$$A(q) = \left\{ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{22} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} : \; q_{ij} \in [q_{ij}^-, q_{ij}^+], i = 1,2 \right\} \tag{1.20}$$

matris ailesinin karakteristik polinomu

$$det(zI - A(q)) = (q_{11}q_{12} - q_{21}q_{22}) - (q_{11} + q_{22})z + z^2 \tag{1.21}$$

dir. Bu polinomun katsayıları multilineer fonksiyonlardır. Ele alınan karakteristik polinomun derecesi 2 ve başkatsayısı pozitif olduğundan, $A(q)$ matris ailesinin Hurwitz gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul tüm köşe matrislerinin (Q nun köşelerine karşılık gelen matrislerin) kararlı olmasıdır. Bunun için ise q_{ij} parametrelerinin uç değerlerinde

$$q_{11} + q_{22} < 0$$

$$q_{11}q_{12} - q_{21}q_{22} > 0$$

eşitsizliklerinin sağlanması yeterlidir. Bu durum $n \geq 3$ olduğu durumda $n \times n$ lik aralık matris ailelerinin gürbüz kararlılığı için yeterli olmamaktadır (Barmish, 1994).

Bu tez çalışmasında aralık sistemler için ortak diyagonal çözümlerin varlığı ve bulunması, aralık plantlar (kontrol edilebilen aralık sistemler) için kararlaştıran kompensatörün belirlenmesi ve kesikli sistemler için kararlılık sınırlarının bulunması problemleri ele alınmıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde matrisler ve polinomların kararlılığı teorisinden tezde kullanılmış olan gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise aralık matrisler ailesinin hem Hurwitz diyagonal hem de Schur diyagonal kararlılığı incelenmiştir. 2×2 ve 3×3 boyutlu aralık sistemler için Lyapunov ve Stein eşitsizliklerinin pozitif diyagonal çözümünün varlığına dair gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar kullanılarak diyagonal çözümü bulmak için algoritmalar verilmiştir. Ayrıca $n \times n$ boyutlu aralık Z-matrisler ailesinin Hurwitz diyagonal kararlılığı için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Bölümün sonunda ise $n \times n$ boyutlu aralık ailelerin Hurwitz diyagonal kararlılığı için yani aralık ailelerin genel durumu için Hurwitz diyagonal kararlılığa dair bir yeter koşul verilmiştir.

Bilindiği gibi kontrol sistemlerin en önemli organı kompensatördür (kontrolördür). Üçüncü bölümde transfer fonksiyonu bilinen aralık plantlara bir birinci mertebeden PI (oransal-integratör) kontrolörü uygulayarak sistemi kararlı yapan oransal kazanç ve integral kazancı katsayılarını belirleyen bir algoritma verilmiştir. Burada sıfırı içermeme prensibi ve multilineer fonksiyonların ekstremal özelliklerine dayanarak kararlılık için algoritma elde edilmiştir.

Dördüncü yani son bölümde ise kesikli zaman dinamik sistemlerin durum-uzayı modelini kullanarak kararlılık sınırını veren bir sonuç verilmiştir.

Tezde elde edilen sonuçlar örnekler ile açıklanmıştır.

2 ARALIK SİSTEMLER İÇİN ORTAK DİYAGONAL KARARLILIK

$$\dot{x} = Ax$$

durum denklemi göz önüne alınsın, burada $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ve $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ bir $n \times n$ matristir.

Kontrol sistem uygulamalarının birçoğunda her bir a_{ij} girdisi bazı aralıklarda bağımsız olarak değişebilmektedir. Böyle sistemlere aralık sistemler adı verilmektedir. Başka bir ifade ile $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$ verildiğinde $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$ dir. Sözü edilen aralık aile $\mathcal{A}$ ile gösterilsin, yani

$$\mathcal{A} = \{A = (a_{ij}) : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, (i, j = 1, 2, \ldots, n)\} \tag{2.1}$$

dir.

Mühendislikte aralık ailelerin birçok uygulamasına rastlanmaktadır. Gürbüz kontrol sistem analizi ve dizaynı ile olan doğal bağından dolayı, aralık matrislerin kararlılık analizi için birçok yaklaşım geliştirilmiştir. (Bknz. (Barmish, 1994; Bhattacharyya vd., 1995; Deng vd., 1999; Kharitonov, 1978; Liberzon ve Tempo, 2004; Pastravanu ve Matcovschi, 2015; Rohn, 1994)).

Ayrıca literatürde diyagonal kararlılık probleminin birçok uygulaması yer almaktadır. Örnek olarak (Arcak ve Sontag, 2006), (Büyükköroğlu, 2012), (Johnson, 1974), (Khalil, 1982), (Kaszkurewicz ve Bhaya, 2000), (Oleng ve Narendra, 2003), (Pastravanu ve Matcovschi, 2015), (Ziolko, 1990) yayınları gösterilebilir.

(Arcak ve Sontag, 2006) makalesinde belirli biyokimyasal reaksiyonların dinamik modellerinde ortaya çıkan döngüsel bağlantılı sistemlerin bir sınıfı ele alınıp, daha önce literatürde var olan yerel kararlılık için bir "sekant" kriteri, söz konusu sistemlere karşılık gelen matris ailelerinin diyagonal kararlılığı için gerek ve yeter koşul olarak verilmiştir.

(Johnson, 1974) makalesinde $n \times n$ matrislerin D-kararlı olması için gerek koşullar verilmiştir.

(Ziolko, 1990) da ise sistemin, hiperbolik tipteki lineer birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin bir kümesi olarak ifade edildiği durumdaki Cauchy problemleri ve başlangıç-sınır değer problemleri için kararlılık koşulları diyagonal Lyapunov fonksiyonelleri metodu kullanılarak ispatlanmıştır.

2.1 2×2 Aralık Aileler İçin Hurwitz ve Schur Ortak Diyagonal Çözümler

Tek bir 2×2 boyutlu

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

reel matrisi için Hurwitz ve Schur diyagonal kararlılığın cebirsel karakterizasyonları bilinmektedir.

Teorem 2.1. *(Cross, 1978; Kaszkurewicz ve Bhaya, 2000)*

(2.2) matrisinin Hurwitz diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $a_1 < 0$,

ii) $a_4 < 0$,

iii) $a_1 a_4 - a_2 a_3 > 0$

olmasıdır.

Teorem 2.2. *(Mills vd., 1978; Kaszkurewicz ve Bhaya, 2000)*

(2.2) matrisinin Schur diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $|a_1 a_4 - a_2 a_3| < 1$,

ii) $|a_1 + a_4| < 1 + a_1 a_4 - a_2 a_3$,

iii) $|a_1 - a_4| < 1 - (a_1 a_4 - a_2 a_3)$

olmasıdır.

Gerekliliğin Kanıtı. A matrisi Schur diyagonal kararlı olsun. Bu durumda öyle $D = diag(\lambda, 1) > 0$ matrisi vardır ki

$$A^T DA - D = \begin{bmatrix} (a_1^2-1)\lambda + a_3^2 & a_1a_2\lambda + a_3a_4 \\ a_1a_2\lambda + a_3a_4 & a_2^2\lambda + a_4^2 - 1 \end{bmatrix} < 0 \tag{2.3}$$

dir. Yani

$$(a_1^2-1)\lambda + a_3^2 < 0 \quad \text{ya da} \quad \lambda < \frac{a_3^2}{1-a_1^2}$$

$$a_2^2\lambda + a_4^2 - 1 < 0 \quad \text{ya da} \quad \lambda < \frac{1-a_4^2}{a_2^2}$$

$$det(A^T DA - A) = a_2^2\lambda - (a_2^2a_3^2 + (a_1^2-1)(a_4^2-1) - 2a_1a_2a_3a_4)\lambda + a_3^2 < 0$$

dir. İlk iki eşitsizlikten $a_3^2/(1-a_1^2) < (1-a_4^2)/a_2^2$ eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$a_2^2a_3^2 < (a_1^2-1)(a_4^2-1) = 1 - a_1^2 - a_4^2 + a_1^2a_4^2$$

dir. $(a_1 - a_4)^2$ nin pozitifliği kullanılarak

$$a_2^2a_3^2 < 1 - 2a_1a_4 + a_1^2a_4^2$$

yani

$$\begin{aligned} |a_2a_3| < |1 - a_1a_4| &\Rightarrow -1 + a_1a_4 < a_2a_3 < 1 - a_1a_4 \\ &\Rightarrow |a_1a_4 - a_2a_3| < 1 \\ &\Rightarrow |detA| < 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

A matrisinin Schur diyagonal kararlılığından dolayı (2.3) matrisinin determinant fonksiyonunun diskriminantı pozitiftir. Dolayısıyla

$$\Delta = ((a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2)^2 - 4a_2^2a_3^2 > 0$$

olduğundan

$$((a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 + 2a_2a_3)((a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 - 2a_2a_3) > 0$$

dır.

1.durum:

$$((a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 + 2a_2a_3) > 0$$

ve

$$((a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 - 2a_2a_3) > 0$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
&(a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 - 2a_2a_3 > 0 \\
\Rightarrow &a_1^2 + a_4^2 < 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 - 2a_2a_3 \\
\Rightarrow &(a_1 + a_4)^2 < 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 - 2a_2a_3 + 2a_1a_4 \\
\Rightarrow &|a_1 + a_4| < |1 + a_1a_4 - a_2a_3|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&(a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 + 2a_2a_3 > 0 \\
\Rightarrow &a_1^2 + a_4^2 < 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 2a_2a_3 \\
\Rightarrow &(a_1 - a_4)^2 < 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 2a_2a_3 - 2a_1a_4 \\
\Rightarrow &|a_1 - a_4| < |1 - a_1a_4 + a_2a_3|
\end{aligned}$$

dir.

2.durum: Çarpanların her ikisinin de negatif olması durumudur. Buradan

$$\begin{aligned}
&(a_1a_4 - a_2a_3)^2 + 1 - a_1^2 - a_4^2 - 2a_2a_3 < 0 \\
\Rightarrow &a_1^2 + a_4^2 > 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 - 2a_2a_3 \\
\Rightarrow &(a_1 + a_4)^2 > 1 + (a_1a_4 - a_2a_3)^2 - 2a_2a_3 + 2a_1a_4 \\
\Rightarrow &|a_1 + a_4| > |1 + a_1a_4 - a_2a_3|
\end{aligned}$$

dir, ki bu durum A nın Schur kararlı olması ile çelişir. Gerçekten, A nın Schur kararlı olması demek A nın özdeğerleri α ve β olmak üzere $|\alpha| < 1$ ve $|\beta| < 1$ olması demektir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$$

ya da

$$|\alpha||\beta| - |\alpha| - |\beta| + 1 > 0$$

ya da

$$|\alpha||\beta| + 1 > |\alpha| + |\beta|$$

dir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$|\alpha||\beta| + 1 > |\alpha + \beta|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte "Bir 2×2 lik matriste özdeğerlerin çarpımının matrisin determinantına ve özdeğerlerin toplamının ise matrisin izine eşit olması" özelliği kullanılırsa

$$|traceA| < 1 + detA$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer α ile β kompleks ise, yani $\alpha = \overline{\beta}$ ise

$$|Re(\alpha)| \leq |\alpha| \quad \text{ve} \quad (|\alpha|^2 - 1)^2 = |\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 \geq 0$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$2|Re(\alpha)| \leq 2|\alpha| \leq 1 + |\alpha|^2$$

elde edilir. Buradan da

$$|traceA| < 1 + detA$$

olduğu söylenir. □

Bir 2×2 boyutlu

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} : \ a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 1,2,3,4 \right\} \tag{2.4}$$

aralık matris ailesi göz önünde bulundurulsun.

4-boyutlu kutu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Q = [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times [a_4^-, a_4^+].$$

Genelliği bozmadan tüm 2×2 pozitif diyagonal matrisler $\lambda > 0$ olmak üzere $D = \text{diag}(\lambda, 1)$ şeklinde normalleştirilebilir.

Tanım 2.3. *Eğer (2.4) deki her matris Hurwitz (Schur) diyagonal kararlı ise (2.4) ailesi gürbüz Hurwitz (Schur) diyagonal kararlıdır, yani her $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Q$ için öyle $\lambda > 0$ vardır ki*

$$A^T D + DA < 0 \quad (A^T DA - D < 0)$$

dır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Kararlılık koşullarının multilineerliğinden dolayı (2.4) ailesinin gürbüz Hurwitz (Schur) diyagonal kararlılığı kolaylıkla test edilebilir (Bknz. Teorem (2.1) ve Teorem (2.2)).

2.1.1 Hurwitz durumu

Bu kısımda (2.4) ailesi için Lyapunov eşitsizliğinin ortak diyagonal bir çözümünün varlığına dair bir gerek ve yeter koşul verildi, yani her $a \in Q = [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times [a_4^-, a_4^+]$ için $\lambda_* > 0$ olmak üzere

$$A^T D + DA < 0$$

eşitsizliğini sağlayan $D = \text{diag}(\lambda_*, 1)$ in varlığına dair bir gerek ve yeter koşul verildi.

Ortak diyagonal bir çözümün varlığı için gerekli koşul ele alınan ailenin gürbüz diyagonal kararlı olmasıdır. Bunu göz önünde bulundurarak asıl sonucu vermeden önce aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 2.4. *(2.4) ailesinin gürbüz Hurwitz diyagonal kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$a_1^+ < 0,\ a_4^+ < 0,\ ve\ a_1^+ a_4^+ - \max\{a_2 a_3\} > 0 \tag{2.5}$$

olmasıdır. Burada maksimum a_2^-, a_2^+, a_3^- ve a_3^+ uç noktalarında hesaplanır.

Kanıt. Teorem (2.1) den dolayı her $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Q$ için

$$a_1 < 0,\ \ a_4 < 0,\ \ a_1 a_4 - a_2 a_3 > 0$$

ya da

$$\max a_1 < 0,\ \ \max a_4 < 0,\ \ \min\{a_1 a_4 - a_2 a_3\} > 0$$

ya da

$$a_1^+ < 0,\ \ a_4^+ < 0,\ \ \min\{a_1 a_4\} + \min\{-a_2 a_3\} > 0$$

dır. Açıktır ki $\min\{a_1 \cdot a_4\} = a_1^+ \cdot a_4^+$, $\min\{-a_2 \cdot a_3\} = -\max\{a_2 \cdot a_3\}$ dır ve buradan (2.5) eşitsizlikleri sağlanır. Teorem (1.11) den dolayı (2.5) deki maksimum uç noktalarda hesaplanır. □

Şimdi ortak diyagonal çözümlerin varlığı için gerek ve yeter koşul verilerek devam edilecektir. (2.4) ailesinin gürbüz Hurwitz diyagonal kararlı olduğu varsayılsın, yani (2.5) eşitsizlikleri sağlanır. Ortak diyagonal çözümün varlığı için koşul arıyoruz.

Ortak bir $D = \mathrm{diag}(\lambda_*, 1)$ $(\lambda_* > 0)$ in varlığı demek

$$A^T D + DA = \begin{bmatrix} 2a_1\lambda_* & a_2\lambda_* + a_3 \\ a_2\lambda_* + a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0$$

ya da buna eşdeğer olarak her $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Q$ için

$$2a_1\lambda_* < 0, \quad 4a_1 a_4 \lambda_* > (a_2\lambda_* + a_3)^2 \tag{2.6}$$

demektir. (2.5) den $a_1^+ < 0$ olduğundan (2.6) nın ilk koşulu doğrudan sağlanır. İkinci

koşul ise aşağıdakine denktir.

$$\min_{(a_1,a_4)}(4a_1a_4)\lambda_* > \max_{(a_2,a_3)}(a_2\lambda_*+a_3)^2$$

ya da

$$(4a_1^+a_4^+)\lambda_* > \max\left\{(a_2^-\lambda_*+a_3^-)^2,(a_2^+\lambda_*+a_3^+)^2\right\}$$

ya da

$$(4a_1^+a_4^+)\lambda_* > (a_2^-\lambda_*+a_3^-)^2,\ \ (4a_1^+a_4^+)\lambda_* > (a_2^+\lambda_*+a_3^+)^2$$

ya da

$$\begin{aligned}(a_2^-)^2\lambda_*^2+(2a_2^-a_3^- -4a_1^+a_4^+)\lambda_*+(a_3^-)^2<0,\\ (a_2^+)^2\lambda_*^2+(2a_2^+a_3^+ -4a_1^+a_4^+)\lambda_*+(a_3^+)^2<0\end{aligned} \tag{2.7}$$

dır.

(2.7) deki birinci koşula karşılık gelen

$$f(x)=(a_2^-)^2x^2+(2a_2^-a_3^- -4a_1^+a_4^+)x+(a_3^-)^2 \quad (x\geq 0)$$

fonksiyonu göz önünde bulundurulsun. $f(0)\geq 0$ olduğundan ve (2.4) ailesi gürbüz Hurwitz diyagonal kararlı olduğundan $f(x)<0$ eşitsizliğinin (α_1,α_2) aralığında bir pozitif çözümü vardır. Örneğin, $a_2^-\neq 0$ ise

$$\alpha_1=\frac{(2a_1^+a_4^+-a_2^-a_3^-)-\sqrt{(a_2^-a_3^- -2a_1^+a_4^+)^2-(a_2^-a_3^-)^2}}{(a_2^-)^2}$$
$$\alpha_2=\frac{(2a_1^+a_4^+-a_2^-a_3^-)+\sqrt{(a_2^-a_3^- -2a_1^+a_4^+)^2-(a_2^-a_3^-)^2}}{(a_2^-)^2}$$

dir. ((2.4) ün gürbüz Hurwitz diyagonal kararlılığından dolayı diskriminant $\Delta=(a_2^-a_3^- - 2a_1^+a_4^+)^2-(a_2^-a_3^-)^2$ pozitiftir.)

Benzer olarak, (2.7) deki ikinci koşula karşılık gelen bir (β_1,β_2) açık aralığı vardır. Eğer $a_2^+\neq 0$ ise

$$\beta_1=\frac{(2a_1^+a_4^+-a_2^+a_3^+)-\sqrt{(a_2^+a_3^+ -2a_1^+a_4^+)^2-(a_2^+a_3^+)^2}}{(a_2^+)^2}$$
$$\beta_2=\frac{(2a_1^+a_4^+-a_2^+a_3^+)+\sqrt{(a_2^+a_3^+ -2a_1^+a_4^+)^2-(a_2^+a_3^+)^2}}{(a_2^+)^2}$$

dir (burada yine diskriminant pozitiftir).

Şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 2.5. *(2.4) ailesi gürbüz Hurwitz diyagonal kararlı olsun. Lyapunov eşitsizliğinin bir ortak diyagonal çözümünün var olması için gerekli ve yeterli koşul* (α_1,α_2) *ve* (β_1,β_2) *aralıklarının arakesitinin boştan farklı olmasıdır, yani*

$$\max\{\alpha_1,\beta_1\} < \min\{\alpha_2,\beta_2\}$$

dir. Bu durumda $(\alpha_1,\alpha_2)\cap(\beta_1,\beta_2)$ *da olan her* λ *için* $D=\operatorname{diag}(\lambda,1)$ *matrisi bir ortak çözümdür.*

Aşağıda bir kaç örnek ele alınmıştır:

Örnek 2.6.

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} [-7,-1.2] & [2.5,5] \\ [-4,-3] & [-6,-3] \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

aralık ailesi ele alınsın.

$A^TD+DA<0, \quad \forall A\in\mathcal{A}$ *için ortak diyagonal* $D=\operatorname{diag}(\lambda,1)>0$ *matrisinin varlığını araştıralım.*

Önerme (2.4) göz önüne alındığında

$$a_1^+ = -1.2 < 0$$

$$a_4^+ = -3 < 0$$

$$a_1^+a_4^+ - \max\{a_2a_3\} = (-1,2)\cdot(-3)-(-7.5) = 11.1 > 0$$

olduğundan (2.8) ailesi gürbüz Hurwitz diyagonal kararlıdır.

(2.7) deki eşitsizliklere karşılık gelen eşitsizlikler aşağıdaki gibidir:

$$f_1(x) = (a_2^-)^2x^2+(2a_2^-a_3^- - 4a_1^+a_4^+)x+(a_3^-)^2 = (6.25)x^2-(34.4)x+16<0,$$

$$f_2(x) = (a_2^+)^2x^2+(2a_2^+a_3^+ - 4a_1^+a_4^+)x+(a_3^+)^2 = 25x^2-(44.4)x+9<0$$

dır ve buradan gerekli hesaplamalar yapılarak $\alpha_1=0.5129$, $\alpha_2=4.9911$, $\beta_1=0.2334$ *ve* $\beta_2=1.5426$ *bulunur.*

$(\alpha_1, \alpha_2) \cap (\beta_1, \beta_2) = (0.5129, 1.5426)$ *dir.*

$(0.5129, 1.5426)$ *aralığındaki her* λ *için* $D = \text{diag}(\lambda, 1)$ *matrisi bir ortak diyagonal çözümdür.*

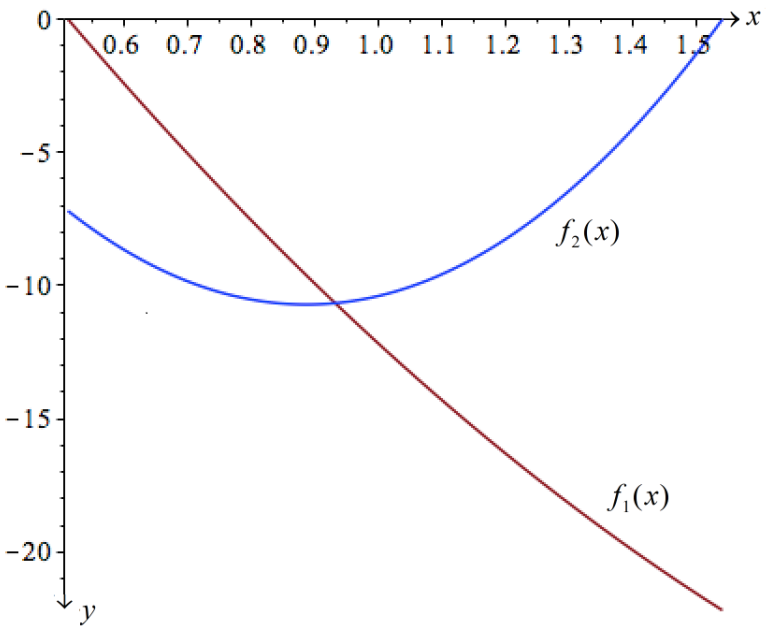
Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi bir matris ve* $(0.5129, 1.5426)$ *aralığından keyfi bir* λ *alınsın:*

$$A = \begin{bmatrix} -6.2635 & 4.7834 \\ -3.3676 & -6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.4456 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^T D + DA$ *matrisinin özdeğerleri* $-19.7360, -10.3733$ *sol yarı düzlemdedir, yani* $A^T D + DA$ *negatif tanımlıdır.*

Ayrıca bu örnek için çözüm bölgesi şekildeki gibidir:



Örnek 2.7.

$$\begin{bmatrix} [-3,-2] & [1,2] \\ [-5,-4] & -1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

ailesi göz önünde bulundurulsun.

Bu aile için bir ortak $D = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$ *çözümü var mıdır?*

Önerme (2.4) den (2.9) ailesi gürbüz Hurwitz diyagonal kararlıdır, gerçekten

$$a_1^+ = -2 < 0$$

$$a_4^+ = -1 < 0$$

$$a_1^+ a_4^+ - \max\{a_2 a_3\} = (-2)\cdot(-1) - (-4) = 6 > 0$$

sağlanır. (2.7) ye karşılık gelen eşitsizlikler

$$f_1(x) = x^2 - 18x + 25 < 0, \quad f_2(x) = 4x^2 - 24x + 16 < 0$$

dır ve gerekli hesaplamalar yapılarak $\alpha_1 = 9 - 2\sqrt{14}$, $\alpha_2 = 9 + 2\sqrt{14}$, $\beta_1 = 3 - \sqrt{5}$ *ve* $\beta_2 = 3 + \sqrt{5}$ *olarak bulunur. Bu durumda* $(\alpha_1, \alpha_2) \cap (\beta_1, \beta_2) = (9 - 2\sqrt{14}, 3 + \sqrt{5})$ *dir.* $(9 - 2\sqrt{14}, 3 + \sqrt{5})$ *aralığındaki her* λ *için* $D = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$ *çözümü bir ortak diyagonal çözümdür.*

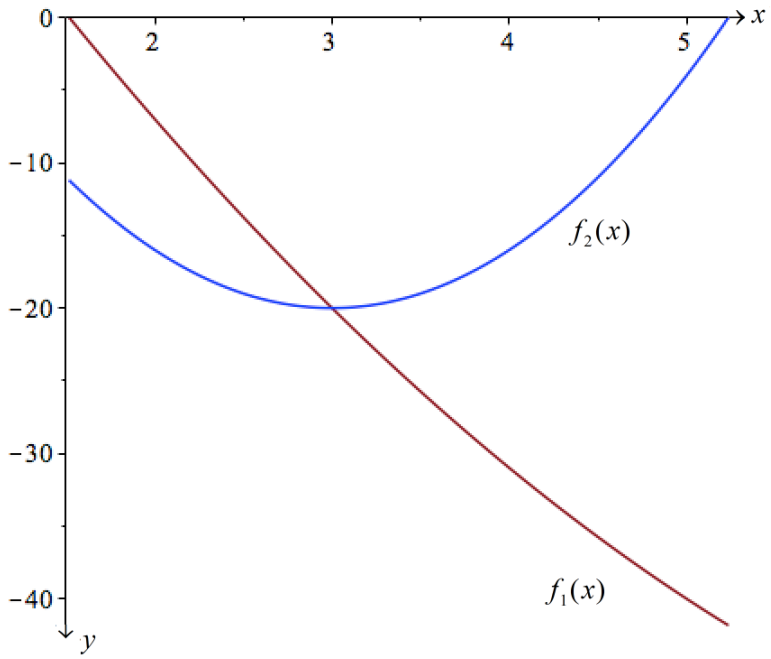
Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi bir matris ve* $(9 - 2\sqrt{14}, 3 + \sqrt{5})$ *aralığından keyfi bir* λ *alındığında:*

$$A = \begin{bmatrix} -2.4531 & 1.9575 \\ -4.0351 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.5469 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A^T D + DA$ *matrisinin özdeğerlerinin* $-23.4140, -0.8945$ *sol yarı düzlemde olduğu, yani* $A^T D + DA$ *negatif tanımlı olduğu görülmektedir.*

Bu örnek için çözüm bölgesi şekildeki gibidir:



Örnek 2.8.

$$\begin{bmatrix} [-2,-1] & [0,1] \\ -1 & [-3,-2] \end{bmatrix}$$

ailesi göz önünde bulundurulsun.

Aile, $a_1^+ = -1 < 0$, $a_4^+ = -2 < 0$, $a_1^+ a_4^+ - \max\{a_2 a_3\} = (-1)\cdot(-2) - 0 = 2 > 0$ *koşullarını sağladığından Önerme (2.4) den dolayı gürbüz Hurwitz diyagonal kararlıdır. (2.7) ye karşılık gelen eşitsizlikler*

$$f_1(x) = -8x + 1 < 0, \quad f_2(x) = x^2 - 10x + 1 < 0$$

dir ve buradan ortak çözüm aralığı gerekli hesaplamalar yapılarak $(1/8, 5+\sqrt{24})$ *olarak bulunur. Dolayısıyla her* $\lambda \in (1/8, 5+\sqrt{24})$ *için* $D = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$ *çözümü ortak diyagonal çözümdür.*

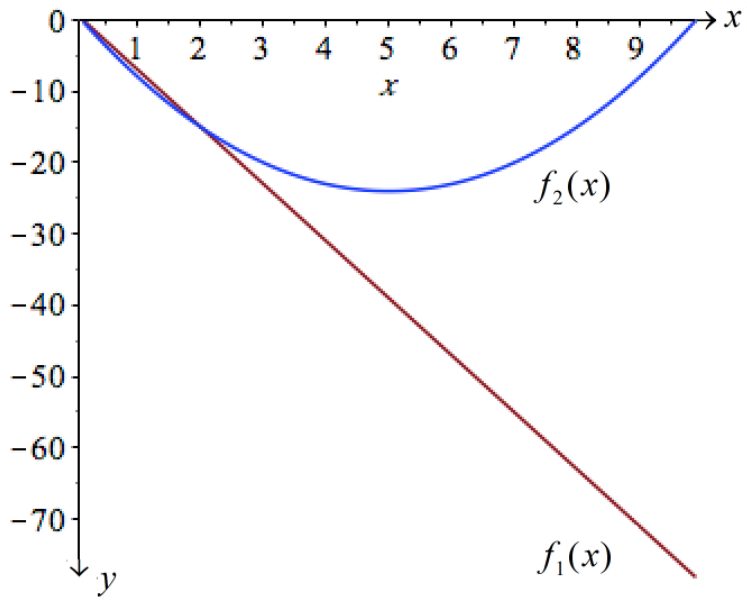
Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi bir matris ve* $(1/8, 5+\sqrt{24})$ *aralığından keyfi bir* λ *alınsın:*

$$A = \begin{bmatrix} -1.5146 & 0.8003 \\ -1 & -2.8581 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.8470 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A^T D + DA$ *matrisinin özdeğerlerinin* $-9.1065, -5.2341$ *sol yarı düzlemde olduğu görülmektedir, yani* $A^T D + DA$ *negatif tanımlıdır.*

Bu örnek için çözüm bölgesi şekildeki gibidir:



2.1.2 Schur durumu

Bu kısımda Schur durumu için ortak diyagonal çözümün varlığına dair bir gerekli ve yeterli koşul verildi, yani her $a \in Q = [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times [a_4^-, a_4^+]$ için $\lambda_* > 0$ olmak üzere

$$A^T DA - D < 0$$

eşitsizliğini sağlayan $D = \text{diag}(\lambda_*, 1)$ matrisinin varlığı için gerekli ve yeterli koşul verildi.

Hatırlansın ki, bir aralık ailenin ortak diyagonal çözüme sahip olması için aile gürbüz diyagonal kararlı olmalıdır.

Teorem (2.2) den aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 2.9. *(2.4) ailesinin gürbüz Schur diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her* $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in Q$ *için aşağıdaki altı koşulun sağlanmasıdır.*

$$\begin{aligned} 1+a_2a_3-a_1a_4 &> 0,\\ 1+a_1a_4-a_2a_3 &> 0,\\ 1+a_1a_4-a_1-a_4-a_2a_3 &> 0,\\ 1+a_1+a_4+a_1a_4-a_2a_3 &> 0,\\ 1+a_4+a_2a_3-a_1-a_1a_4 &> 0,\\ 1+a_1+a_2a_3-a_4-a_1a_4 &> 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Yukarıdaki koşullar, (2.10) un sol tarafındaki eşitsizliklerin multilineerliği ve Teorem (1.11) kullanılarak kolaylıkla Q nun uç noktaları üzerinden kontrol edilebilir.

(2.4) ailesinin gürbüz Schur diyagonal kararlı olduğu kabul edilsin. Ortak $D = \mathrm{diag}(\lambda_*,1)$ $(\lambda_* > 0)$ çözümünün varlığı demek her $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in Q$ için

$$A^TDA - D = \begin{bmatrix} \lambda_*(a_1^2-1)+a_3^2 & \lambda_*a_1a_2+a_3a_4 \\ \lambda_*a_1a_2+a_3a_4 & \lambda_*a_2^2+a_4^2-1 \end{bmatrix} < 0$$

ya da

$$\lambda_*(a_1^2-1)+a_3^2 < 0,\ \left[\lambda_*(a_1^2-1)+a_3^2\right]\left[\lambda_*a_2^2+a_4^2-1\right]-(\lambda_*a_1a_2+a_3a_4)^2 < 0 \tag{2.11}$$

olması demektir. Gürbüz Schur diyagonal kararlılıktan $|a_1| < 1$ (Kaszkurewicz ve Bhaya, 2000) dir. Dolayısıyla (2.11) in ilk koşulu $\lambda_* \min(1-a_1^2) > \max(a_3^2)$ eşitsizliğini verir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\lambda_* > \alpha = \frac{\max a_3^2}{1-\max(a_1^2)}$$

elde edilir.

İkinci koşul ise

$$(a_2^2)\lambda_*^2 - \left[a_3^2a_2^2 + (a_4^2-1)(a_1^2-1) - 2a_1a_2a_3a_4\right]\lambda_* + a_3^2a_4^2 < 0$$

eşitsizliğini verir.

Aşağıdaki fonksiyon göz önünde bulundurulsun.

$$g(x) = (a_2^2)x^2 - \left[a_3^2a_2^2 + (a_4^2-1)(a_1^2-1) - 2a_1a_2a_3a_4\right]x + a_3^2a_4^2 \;\; (x \geq 0).$$

Sıfır ile bölümden kaçınmak için genelliği bozmadan $0 \notin [a_2^-, a_2^+]$ olduğu kabul edilsin. $g(0) \geq 0$ olduğundan ve (2.4) ailesinin gürbüz Schur kararlılığından her $x \in (r_1, r_2)$ için $g(x) < 0$ eşitsizliğini sağlayan $r_1(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ve $r_2(a_1,a_2,a_3,a_4)$ pozitif, sürekli kök fonksiyonları vardır. r_i $(i = 1,2)$ kök fonksiyonları diskriminant kullanılarak tam olarak yazılabilir. Burada diskriminant gürbüz Schur diyagonal kararlılıktan dolayı pozitiftir.

Teorem 2.10. *(2.4) ailesi verilsin ve $0 \notin [a_2^-, a_2^+]$ olsun. (2.4) ailesinin gürbüz Schur diyagonal kararlı olduğu varsayılsın. Ortak bir Schur diyagonal çözümün varlığı için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:*

i) $\gamma_1 := \max\limits_{(a_1,a_2,a_3,a_4)} r_1(a_1,a_2,a_3,a_4) < \gamma_2 := \min\limits_{(a_1,a_2,a_3,a_4)} r_2(a_1,a_2,a_3,a_4)$

ii) $(\alpha,\infty) \cap (\gamma_1,\gamma_2) \neq \emptyset$

Bu durumda her $\lambda \in (\alpha,\infty) \cap (\gamma_1,\gamma_2)$ için $D = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$ matrisi Stein eşitsizliğinin bir ortak çözümüdür.

Örnek 2.11.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right] & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

aralık ailesi göz önünde bulundurulsun.

Aile Önerme (2.9) dan ve Teorem (1.11) den dolayı gürbüz Schur diyagonal kararlıdır:

$$\min_{a\in Q}(1+a_2a_3-a_1a_4)=0.7,$$
$$\min_{a\in Q}(1+a_1a_4-a_2a_3)=0.95,$$
$$\min_{a\in Q}(1+a_1a_4-a_1-a_4-a_2a_3)=0.2,$$
$$\min_{a\in Q}(1+a_1+a_4+a_1a_4-a_2a_3)=1.45,$$
$$\min_{a\in Q}(1+a_4+a_2a_3-a_1-a_1a_4)=0.7,$$
$$\min_{a\in Q}(1+a_1+a_2a_3-a_4-a_1a_4)=0.45.$$

Burada $Q=\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]\times\frac{1}{2}$ *dir.*

$g(x)$ *in* $r_1(a_1,a_2,a_3,a_4)$ *sol kök fonksiyonunun* Q *üzerinden maksimizasyonu* $\gamma_1=0.019$ *i verir ve* $r_2(a_1,a_2,a_3,a_4)$ *sağ kök fonksiyonunun* Q *üzerinden minimizasyonu* $\gamma_2=2.141$ *i verir.* $\alpha=0.0134$ *olduğundan her* $\lambda\in(0.019,2.141)$ *için* $D=\mathrm{diag}(\lambda,1)$ *matrisi bir ortak diyagonal çözümdür.*

Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi üç matris ve bunlara karşılık* $(0.019,2.141)$ *aralığından keyfi üç* λ *alınsın:*

$$A_1=\begin{bmatrix}0.0486 & 0.4706\\ 0.0390 & 0.5\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}0.1122 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$A_1^TDA_1-D$ *matrisinin özdeğerleri* -0.7259, -0.1097 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_1^TDA_1-D$ *negatif tanımlıdır.*

$$A_2=\begin{bmatrix}0.4038 & 0.4510\\ -0.0994 & 0.5\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}1.9734 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$A_2^T DA_2 - D$ *matrisinin özdeğerleri* -1.7121, -0.2784 *sol yarı düzlemdedir.*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.0869 & 0.3836 \\ 0.0594 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.9146 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_3^T DA_3 - D$ *matrisinin özdeğerleri* -0.9162, -0.6033 *sol yarı düzlemdedir.*

Örnek 2.12.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-0.6, 0.5] & [-0.4, 0.3] \\ [-0.8, 0.4] & [0.1, 0.2] \end{bmatrix}$$

aralık ailesi ele alınırsa aile Önerme (2.9) den ve Teorem (1.11) den dolayı gürbüz Schur diyagonal kararlıdır:

$$\begin{aligned}
&\min_{a\in Q}(1 + a_2a_3 - a_1a_4) = 0.66 > 0,\\
&\min_{a\in Q}(1 + a_1a_4 - a_2a_3) = 0.56 > 0,\\
&\min_{a\in Q}(1 + a_1a_4 - a_1 - a_4 - a_2a_3) = 0.08 > 0,\\
&\min_{a\in Q}(1 + a_1 + a_4 + a_1a_4 - a_2a_3) = 0.12 > 0,\\
&\min_{a\in Q}(1 + a_4 + a_2a_3 - a_1 - a_1a_4) = 0.31 > 0,\\
&\min_{a\in Q}(1 + a_1 + a_2a_3 - a_4 - a_1a_4) = 0.08 > 0.
\end{aligned}$$

Burada $Q = [-0.6, 0.5] \times [-0.4, 0.3] \times [-0.8, 0.4] \times [0.1, 0.2]$ *dir.*

$g(x)$ *in* $r_1(a_1, \ldots, a_4)$ *sol kök fonksiyonunun* Q *üzerinden maksimizasyonu* $\gamma_1 = 1.1440$ *i verir ve* $r_2(a_1, \ldots, a_4)$ *sağ kök fonksiyonunun* Q *üzerinden minimizasyonu* $\gamma_2 = 3.4719$ *i verir.* $\alpha = 1$ *olduğundan her* $\lambda \in (1.1440, 3.4719)$ *için* $D = \mathrm{diag}(\lambda, 1)$ *matrisi bir ortak diyagonal çözümdür.*

Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi bir matris ve* $(1.1440, 3.4719)$ *aralığından keyfi bir* λ *alınsın:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2147 & -0.0677 \\ -0.2935 & 0.1174 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.0722 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_1^T DA_1 - D$ matrisinin özdeğerleri $-1.8951,\ -0.9722$ negatiftir, yani $A_1^T DA_1 - D$ negatif tanımlıdır. Yine aileden keyfi bir matris ve $(1.1440, 3.4719)$ aralığından keyfi bir λ alındığında

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2770 & -0.1784 \\ 0.2469 & 0.1149 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.8468 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_2^T DA_2 - D$ matrisinin özdeğerleri $-1.6496,\ -0.9225$ negatiftir, yani $A_2^T DA_2 - D$ matrisinin negatif tanımlı olduğu görülmektedir.

2.2 3×3 Aralık Sistemler İçin Hurwitz ve Schur Ortak Diyagonal Çözümler

Bu kısımda 3×3 aralık ailelerin ortak diyagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul ve bahsi geçen çözüm için bir algoritma verilmiştir.

Aşağıdaki gibi bir 3×3 boyutlu aralık aile

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} : a_i \in [a_i^-, a_i^+],\ (i = 1, 2, \ldots, 9) \right\} \tag{2.12}$$

göz önünde bulundurulsun.

Genellik bozulmaksın tüm 3×3 pozitif $\text{diag}(x_1,x_2,x_3),\ x_i>0\ (i=1,2,3)$ diyagonal matrisleri aşağıdaki biçimde normalleştirilebilir:

$$D=\text{diag}(t,1,s)=\begin{bmatrix} t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}$$

burada $t>0$ ve $s>0$ dır.

2.2.1 Sürekli sistemler

Problem: Her $a_i\in[a_i^-,a_i^+]\ (i=1,2,\ldots,9)$ için öyle bir $D=\text{diag}(t,1,s)$, $t>0$, $s>0$ matrisi var mıdır ki

$$A^TD+DA<0 \tag{2.13}$$

olsun?

$$A^TD+DA=\begin{bmatrix} 2ta_1 & ta_2+a_4 & ta_3+sa_7\\ ta_2+a_4 & 2a_5 & sa_8+a_6\\ ta_3+sa_7 & sa_8+a_6 & 2sa_9\end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa (2.13) matris eşitsizliği aşağıdakine denktir:

i) $a_1<0$,

ii) $(a_2t+a_4)^2-4a_1a_5t<0$,

iii) $d_0(t,a_1,\ldots,a_9)+d_1(t,a_1,\ldots,a_9)s+d_2(t,a_1,\ldots,a_9)s^2<0$.

Burada $d_i\ (i=1,2,3)$ fonksiyonları düşük mertebeden polinomlardır ve açık şekilde yazılabilirler.

i) koşulunun her $a_1\in[a_1^-,a_1^+]$ için sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1^+<0$ olmasıdır. Her (a_1,a_2,a_4,a_5) için *ii*) yi sağlayan ortak t nin varlığı problemi 2×2 boyutlu $\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_4 & a_5\end{bmatrix}$ ailesinin bir ortak diyagonal çözümünün varlığı problemine

denktir ve bu durum 2×2 aralık aileler için bir önceki bölümde hesaplanmıştı. Ortak t nin kümesi ya boştur ya da açık (α,β) aralığıdır. Boş ise (2.13) eşitsizliğini sağlayan ortak $D=\mathrm{diag}(t,1,s)$ yoktur. Boş olmadığı varsayılsın. Bu durumda bir ortak $D=\mathrm{diag}(t,1,s)$ varlığı demek "öyle bir $t\in(\alpha,\beta)$ ve $s>0$ vardır ki her $(a_1,a_2,\ldots,a_9)$ için *iii*) sağlanır" demektir.

Bu problem bir oyun problemidir. Gerçekten; *iii*) nin sol tarafı $f(t,s,a_1,\ldots,a_9)$ olarak gösterilir ise *iii*) aşağıdaki minimax eşitsizliğine denktir

$$\inf_{t\in(\alpha,\beta),s>0}\ \max_{(a_1,\ldots,a_9)} f(t,s,a_1,\ldots,a_9)<0. \tag{2.14}$$

Genelde (2.14) oyun problemini çözmek zordur, f fonksiyonu konveks olmadığı için bu oyunun bir eyer noktası (saddle point) yoktur.

Tezin bu kısmında (2.14) problemini nümerik olarak çözebilmek için aşağıdaki yeni yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım (2.13) eşitsizliğinin çözüm kümesinin açık olma özelliğine dayanmaktadır.

Önerme 2.13. *Eğer ortak $D=\mathrm{diag}(t_*,1,s_*)$ varsa sırasıyla t_* ve s_* ı içeren $[t_1,t_2]$ ve $[s_1,s_2]$ aralıkları vardır ki her $t\in[t_1,t_2]$, $s\in[s_1,s_2]$ için $D=\mathrm{diag}(t,1,s)$ diyagonal matrisi ortak çözümdür.*

Bu önermeden ortak diyagonal çözüm için aşağıdaki algoritma elde edilir.

Algoritma 2.14. *(2.12) aralık ailesi verilsin.*

i) 2×2 *aralık sistemler için bulunan sonuçlar kullanılarak t için bir (α,β) aralığı belirlenir.*

ii) s için bir $\overline{s}$ üst sınırı belirlenir.

iii) $[\alpha,\beta]$ *aralığı k tane eşit uzunluklu $[\alpha_i,\beta_i]$ alt aralıklarına ve $[0,\overline{s}]$ aralığı m tane eşit uzunluklu $[s_j^-,s_j^+]$ alt aralıklarına bölünür.*

iv) Her bir

$$[\alpha_i,\beta_i]\times[s_j^-,s_j^+]\times[a_1^-,a_1^+]\times\cdots\times[a_9^-,a_9^+]$$

kutusu üzerinde $f(t,s,a_1,\ldots,a_9)$ polinom fonksiyonunun maksimizasyonu problemi ele alınır.

Eğer maksimumu negatif yapacak şekilde i_* ve j_* indisleri varsa durulur. $[\alpha_{i_*}, \beta_{i_*}] \times [s^-_{j_*}, s^+_{j_*}]$ *aralığı ortak diyagonal çözümlerin ailesidir.*

Yukarıdaki (2.14) oyun probleminin, düşük mertebeden çok değişkenli polinomların kutular üzerinde maksimize edildiği sonlu sayıda maksimizasyon problemine indirgenebildiği görülebilir. Sözü edilen optimizasyonlar Maple programı ile ya da Bernstein genellemesi ile uygulanabilir.

Şimdi Algoritma (2.14) ün yeterince etkili olduğunu gösteren birkaç örnek verelim.

Örnek 2.15.

$$\begin{bmatrix} -4 & q_1 & 1 \\ 1 & -4 & q_2 \\ q_3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

ailesi göz önüne alınsın, burada $q_1 \in [2,3]$, $q_2 \in [1,2]$ *ve* $q_3 \in [1,2]$ *dir.*

$A^T D + DA$ *hesaplanırsa*

$$A^T D + DA = \begin{bmatrix} -8t & q_1 t + 1 & t + q_3 s \\ q_1 t + 1 & -8 & s + q_2 \\ t + q_3 s & s + q_2 & -10s \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2×2 *esas baş minör*

$$64t - (q_1 t + 1)^2 > 0 \Rightarrow 64t > (q_1 t + 1)^2,$$

$$64t > \max_{q_1 \in [2,3]} (q_1 t + 1)^2 = (3t + 1)^2 < 64t,$$

$$9t^2 - 58t + 1 < 0$$

eşitsizliğini verir. Buradan bu eşitsizliğin çözüm kümesi yani $(0.0173, 6.427)$ *aralığı t için aranılan aralıktır. Yani her* $t \in (0.0173, 6.427)$, $q_1 \in [2,3]$ *için*

$$64t - (q_1 t + 1)^2 > 0$$

eşitsizliği sağlanır. t için 2×2 *aralık sistemler için elde edilen sonuçlar kullanılarak bir* $(\alpha, \beta) = (0.0173, 6.427)$ *aralığı belirlendi.*

Şimdi algoritmanın ikinci adımını uygulayalım. $s > 0$ *için bir üst sınır* $\bar{s}$ *belirlenmeli:*

$A^T D + DA$ *negatif tanımlı olması gerektiğinden* $-(A^T D + DA)$ *pozitif tanımlı olması gerekir. Dolayısıyla, tüm baş minörlerinin hepsi pozitif tanımlı olacaktır. Bu durum göz önünde bulundurularak sadece s li olanlara bakılırsa*

$$\begin{bmatrix} 8 & -(s+q_2) \\ -(s+q_2) & 10s \end{bmatrix} > 0$$

olması gerektiği elde edilir. Buradan

$$(s+q_2)^2 < 80s$$

ya da

$$\max_{q_2 \in [1,2]} (s+q_2)^2 < 80s$$

eşitsizliği elde edilir. s pozitif bir sayı ve q_2 *nin aralığı pozitif sayılar olduğu için*

$$(\max_{q_2 \in [1,2]} |s+q_2|)^2 < 80s$$

yazılabilir. O zaman

$$(s+2)^2 < 80s$$

$$s^2 - 76s + 4 < 0$$

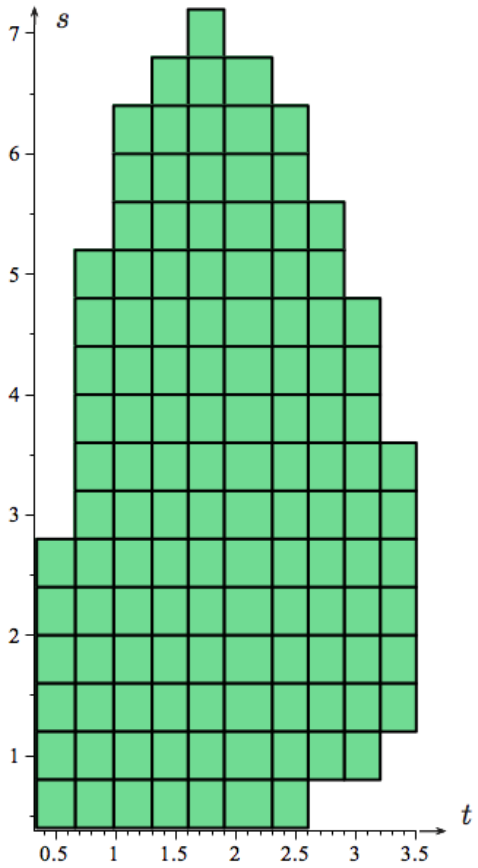
dir. Yukarıdaki eşitsizliğin çözüm aralığı

$$0.052 < s < 75.948$$

olarak bulunur. Bulunan aralık göz önünde bulundurularak s için bir üst sınır olarak 80 *alınabilir. (*$\overline{s} = 80$*)*

Şimdi $[0.0173, 6.427]$ *ve* $[0, 80]$ *aralıkları sırasıyla* 20 *ve* 200 *eşit parçalara bölünsün.*

Şekil (2.1) de, $det(A^T D + DA)$ *nın tüm* $q_1 \in [2,3]$, $q_2 \in [1,2]$ *ve* $q_3 \in [1,2]$ *için üzerinde negatif olduğu kutular ailesi gösterilmektedir.*



Şekil 2.1: Örnek (2.15) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \text{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir.

Örnek 2.16.

$$\begin{bmatrix} -3 & q_1 & -5 \\ q_2 & -2 & 1 \\ q_3 & q_4 & -6 \end{bmatrix}$$

aralık ailesi göz önünde bulundurulsun. Burada $q_1 \in [1,2]$, $q_2 \in [1,2]$, $q_3 \in [4,6]$ *ve* $q_4 \in [-3,-1]$ *dir.*

$A^T D + DA$ *hesaplanırsa*

$$A^T D + DA = \begin{bmatrix} -6t & q_1 t + q_2 & -5t + q_3 s \\ q_1 t + q_2 & -4 & q_4 s + 1 \\ -5t + q_3 s & q_4 s + 1 & -12s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yine

$$24t - (q_1 t + q_2)^2 > 0 \Rightarrow 24t > (q_1 t + q_2)^2,$$

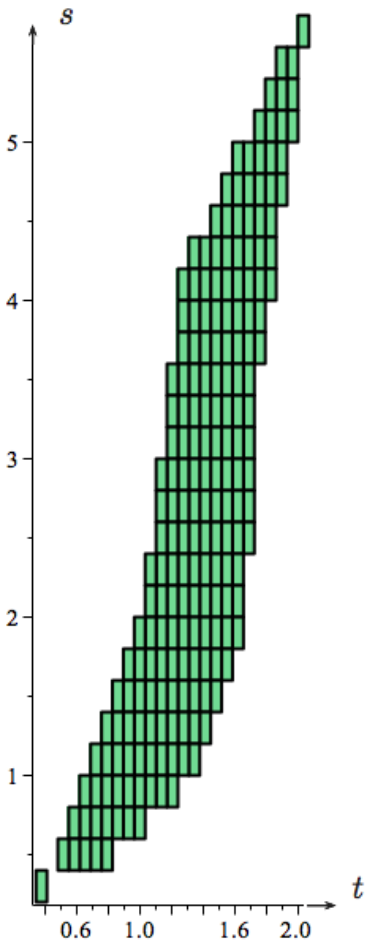
$$\max_{q_1 \in [1,2],\ q_2 \in [1,2]} (q_1 t + q_2)^2 = (2t+2)^2 < 24t,$$

$$t^2 + 2t + 1 < 0, \quad t \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

dir. Dolayısıyla her $t \in (0.268, 3.732)$, $q_1 \in [1,2]$ *ve* $q_2 \in [1,2]$ *için* $24t - (q_1 t + q_2)^2 > 0$ *dir.*

$\overline{s} = 20$ *olsun.* $[0.268, 3.732]$ *ve* $[0,20]$ *aralıkları sırasıyla* 50 *ve* 100 *eşit aralıklara bölünsün.*

Aşağıdaki şekilde, $det(A^T D + DA)$ *nın tüm* $q_1 \in [1,2]$, $q_2 \in [1,2]$, $q_3 \in [4,6]$ *ve* $q_4 \in [-3,-1]$ *için üzerinde negatif olduğu kutular ailesi gösterilmektedir.*



Şekil 2.2: Örnek (2.16) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir.

2.2.2 Ayrık sistemler

Ayrık aralık sistemlerin ortak diyagonal kararlılığı

$$A^T DA - D < 0,\ \forall\, A \in \mathcal{A} \tag{2.15}$$

(burada $\mathcal{A}$ (2.1) deki gibidir) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif D diyagonal matrisin varlığına denktir.

$n = 2$ durumu bir önceki bölümde ele alınmıştı. $n = 3$ durumunda ise genellik bozulmaksızın $D = \mathrm{diag}(t,1,s)$ alınarak

$$A^TDA-D=\begin{bmatrix} ta_1^2+a_4^2+sa_7^2-t & ta_1a_2+a_4a_5+sa_7a_8 & ta_1a_3+a_4a_6+sa_7a_9 \\ ta_1a_2+a_4a_5+sa_7a_8 & ta_2^2+a_5^2+sa_8^2-1 & ta_2a_3+a_5a_6+sa_8a_9 \\ ta_1a_3+a_4a_6+sa_7a_9 & ta_2a_3+a_5a_6+sa_8a_9 & ta_3^2+a_6^2+sa_9^2-s \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Baş minör koşullarından yukarıdaki matrisin negatif tanımlılığı üç tane polinom eşitsizliğe denk olacaktır.

$$\begin{aligned} f_1(t,s,a_1,a_4,a_7) &= t(a_1^2-1)+sa_7^2+a_4^2, \\ f_2(t,s,a_1,\ldots,a_8) &= -(2\times 2 \text{ esas baş minör}), \\ f_3(t,s,a_1,\ldots,a_9) &= \text{Determinant} \end{aligned}$$

gibi gösterilirse (2.15) eşitsizliği aşağıdaki probleme denk olur:

Öyle (t,s) ikilisi var mıdır ki her $(a_1,a_2,\ldots,a_9)$ için

$$f_1<0, \quad f_2<0, \quad f_3<0 \tag{2.16}$$

olsun?

Tezin bu kısmında yukarıdaki problemin çözümü için aşağıdaki algoritma verilmiştir:

Algoritma 2.17. *(2.12) deki gibi bir* 3×3 *aralık ailesi verilsin.*

i) 2×2 *aralık aileler için bulunan sonuçlar kullanılarak t değişkeni için* (α,β) *aralığı hesaplanır.*

ii) *s için bir* $\bar{s}$ *üst sınırı belirlenir.*

iii) $[\alpha,\beta]$ *aralığı k tane eşit* $[\alpha_i,\beta_i]$ *aralığa ve* $[0,\bar{s}]$ *aralığı m tane eşit* $[s_j^-,s_j^+]$ *aralığa bölünür.*

iv) *Her bir*

$$[\alpha_i,\beta_i]\times[s_j^-,s_j^+]\times[a_1^-,a_1^+]\times\cdots\times[a_9^-,a_9^+]$$

kutusu üzerinde f_i $(i = 1,2,3)$ polinom fonksiyonlarının maksimizasyonu göz önünde bulundurulur.

Eğer öyle i_* ve j_* indisleri varsa ki her bir f_k $(k = 1,2,3)$ fonksiyonlarının maksimumu negatif ise durulur. Bu durumda $[\alpha_{i_*}, \beta_{i_*}] \times [s^-_{j_*}, s^+_{j_*}]$ aralığı ortak diyagonal çözümlerin ailesini oluşturur.

Örnek 2.18.

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & q_1 \\ q_2 & -0.3 & -0.6 \\ -0.2 & q_3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

aralık ailesi göz önüne alınsın. Burada $q_1 \in [-0.2, 0.4]$, $q_2 \in [-1, 0]$ ve $q_3 \in [0, 0.2]$ dir.

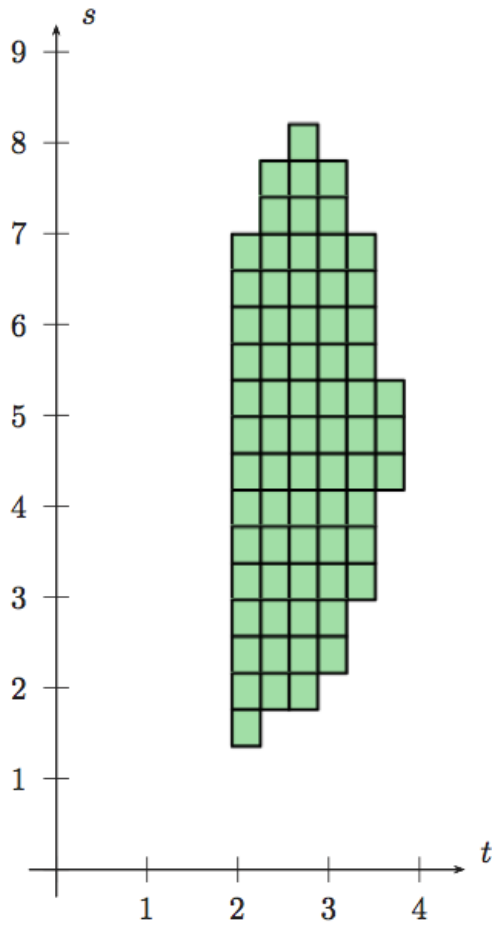
$D = diag(t, 1, s)$ olmak üzere $A^T DA - D$ hesaplanırsa

$$A^T DA - D = \begin{bmatrix} -0.75t + q_2^2 + 0.04s & -0.15t - 0.3q_2 - 0.2q_3 s & -0.5q_1 t - 0.6q_2 - 0.02s \\ -0.15t - 0.3q_2 - 0.2q_3 s & 0.09t + q_3^2 s - 0.91 & 0.3q_1 t + 0.1q_3 s + 0.18 \\ -0.5q_1 t - 0.6q_2 - 0.02s & 0.3q_1 t + 0.1q_3 s + 0.18 & q_1^2 t - 0.99s + 0.36 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $[\alpha, \beta] = [1.3494, 7.5833]$ ve $\bar{s} = 20$ olarak bulunur. Şimdi $[1.3494, 7.5833]$ ve $[0, 20]$ aralıkları sırasıyla 20 ve 50 eşit aralıklara bölünsün.

Şekil (2.3) de, f_k $(k = 1,2,3)$ fonksiyonlarının üçünün de her $q_1 \in [-0.2, 0.4]$, $q_2 \in [-1, 0]$ ve $q_3 \in [0, 0.2]$ için üzerinde negatif olduğu kutular ailesi gösterilmektedir.

Ele alınan aile için ortak Schur diyagonal çözümler vardır. Bu çözümler, (t, s) ikilisi şekildeki gibi olmak üzere $D = diag(t, 1, s)$ biçimindedir.



Şekil 2.3: Örnek (2.18) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \text{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir.

Örnek 2.19.

$$\begin{bmatrix} q_1 & -0.2 & q_2 \\ 0.5 & 0 & q_3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$q_1 \in [-0.5,-0.3]$, $q_2 \in [0.1,0.4]$, $q_3 \in [0.3,0.5]$ *aralık ailesi alınsın.*

Aile için ortak Schur diyagonal çözümün varlığını Algoritma (2.17) yardımıyla bulmaya çalışalım.

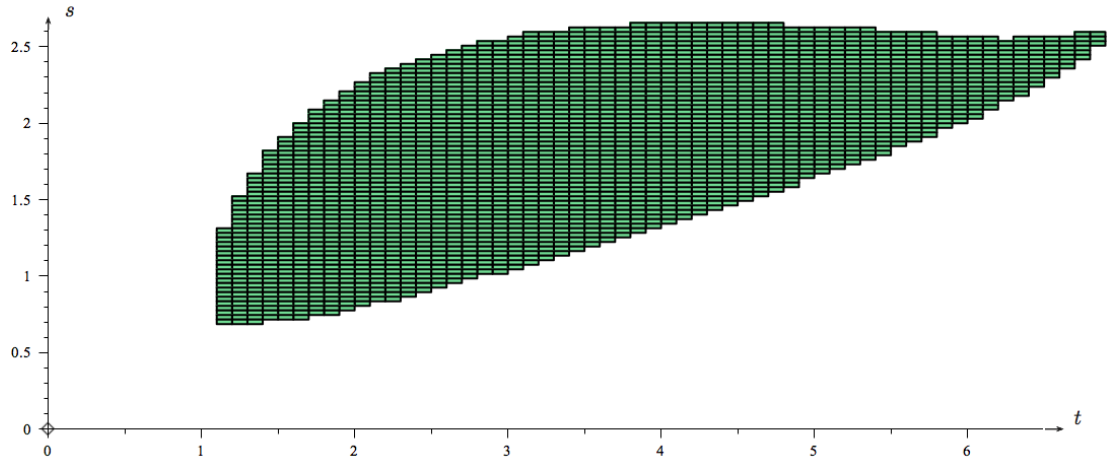
$D = diag(t,1,s)$ *ise*

$$A^T DA - D = \begin{bmatrix} q_1^2 t + 0.25 + 0.09s - t & -0.2q_1 t + 0.12s & q_1 t q_2 + 0.5q_3 + 0.15s \\ -0.2q_1 t + 0.12s & 0.04t + 0.16s - 1 & -0.2q_2 t + 0.2s \\ q_1 t q_2 + 0.5q_3 + 0.15s & -0.2q_2 t + 0.2s & q_2^2 t + q_3^2 - 0.75s \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Negatif belirli matrisin köşegen elemanları negatif olacağıdan

$$0.04t + 0.16s < 1$$

dir, buradan $0 < t < 25$, $0 < s < 7$ *elde edilir. Dolayısıyla* $[\alpha, \beta] = [0,25]$ *ve* $\bar{s} = 7$ *alabiliriz. Algoritma (2.17) yi uygulamak için* $[0,25]$ *aralığını* 250, $[0,7]$ *aralığını ise* 210 *eşit aralıklara bölünebilir. Ortaya çıkan kutularda* $f_k(k = 1,2,3)$ *fonksiyonlarının her üçünün de negatif olması koşulu sağlanmalıdır. Şekil (2.4) de bu koşulu sağlayan* (t,s) *ikililerinin birleşimini gösteren dikdörtgenlerin birleşimi gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi verilen aile için ortak diyagonal çözümler vardır, örneğin* $D = diag(2,1,1.5)$ *diyagonal çözümdür.*



Şekil 2.4: Örnek (2.19) için, her bir kutudaki (t,s) ler $D = \text{diag}(t,1,s)$ ortak diyagonal çözümü verir.

2.3 Aralık Z-matrislerinin Hurwitz Diyagonal Kararlılığı

Bu kısımda $n \times n$ aralık Z-matrisleri için Lyapunov eşitsizliğinin bir ortak diyagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul verildi.

Bir reel $n \times n$ $A = (a_{ij})$ matrisi eğer "$a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$" özelliğini sağlıyorsa bu matrise Z-matrisi adı verilir. Aşağıda Z-matrislerinin iyi bilinen özellikleri verilmiştir (Horn ve Johnson, 1985).

A matrisi bir Z-matrisi olsun, bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1) Eğer A Hurwitz kararlı ise A diyagonal kararlıdır.
2) Spektral apsis $\rho(A) = \max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A)$, yani A nın özdeğerlerinin reel kısımlarının maksimumu A nın bir reel özdeğeridir. Dolayısıyla A nın Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul A nın tüm reel özdeğerlerinin negatif olmasıdır.

Aşağıdaki gibi bir aralık Z-matris ailesi verilsin.

$$\mathcal{A} = \left\{ (a_{ij}) : a_{ij} \in [a_{ij}^-, a_{ij}^+] \right\} \tag{2.17}$$

Burada her $i \neq j$ için $a_{ij}^- \geq 0$ dır.

$\mathcal{A}$ ailesinin sağ uç matrisi U ile gösterilsin: $U = (a_{ij}^+)$.

Teorem 2.20. *(2.17) deki gibi $\mathcal{A}$ ailesi verilsin. Bu aile için Lyapunov eşitsizliğinin bir ortak diyagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul U matrisinin Hurwitz kararlı olmasıdır (Buna denk olarak Hurwitz diyagonal kararlı olmasıdır).*

Kanıt. Kanıtın $\Rightarrow$ tarafı U nun $\mathcal{A}$ ailesinin bir elemanı olmasından dolayı sağlanır.
$\Leftarrow$: U Hurwitz diyagonal kararlı olduğundan öyle bir pozitif diyagonal D_* vardır ki

$$U^T D_* + D_* U < 0 \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır. $\mathcal{A}$ ailesinden keyfi bir A matrisi alınsın. Bu durumda

$$A^T D_* + D_* A \preccurlyeq U^T D_* + D_* U$$

dır, burada "$\preccurlyeq$" sembolü bileşenlere göre eşitsizliği ifade eder. Yani $n \times n$ boyutlu $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrisleri için $A \preccurlyeq B$ sembolü "her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$" anlamına gelir.

$A^T D_* + D_* A$ ve $U^T D_* + D_* U$ matrisleri Z-matrisleridir. Yeterince büyük $\alpha > 0$ alınsın ki

$$0 \preccurlyeq A^T D_* + D_* A + \alpha I, \quad 0 \preccurlyeq U^T D_* + D_* U + \alpha I$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda

$$A^T D_* + D_* A + \alpha I \preccurlyeq U^T D_* + D_* U + \alpha I$$

olduğundan ve (Bernstein, 2005) de yer alan "$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için $A \preccurlyeq B$ olmak üzere $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ dir." teoreminden dolayı

$$\sigma(A^T D_* + D_* A + \alpha I) \leq \sigma(U^T D_* + D_* U + \alpha I)$$

dır, burada $\sigma(\cdot)$ spektral yarıçapı ifade eder. Bileşenlerine göre negatif olmayan bir B matrisi için $\sigma(B) = \lambda_{\max}(B)$ dir, burada $\lambda_{\max}(B)$ B nin en büyük reel özdeğerini ifade eder. Dolayısıyla

$$\lambda_{\max}(A^T D_* + D_* A + \alpha I) \leq \lambda_{\max}(U^T D_* + D_* U + \alpha I) \tag{2.19}$$

dır. Diğer taraftan simetrik bir C matrisi için

$$\lambda_{\max}(C + \alpha I) = \lambda_{\max}(C) + \alpha$$

özelliği sağlandığından (2.18) ve (2.19) göz önünde bulundurularak

$$\lambda_{\max}(A^T D_* + D_* A) \leq \lambda_{\max}(U^T D_* + D_* U) < 0$$

elde edilir. $A \in \mathcal{A}$ keyfi olduğundan son eşitsizlik $\mathcal{A}$ ailesi için Lyapunov eşitsizliğinin bir D_* ortak diyagonal çözümünün var olduğunu gösterir. (Hatırlansın ki, D_* (2.18) in bir pozitif diyagonal çözümüdür.) □

D_* matrisi farklı şekillerde hesaplanabilir: (2.18) in doğrudan çözümü olarak, ya da LMI (Lineer Matris Eşitsizlikleri) teknikleri ile, ya da (Khalil, 1982) de yer alan algoritma ile, ya da Perron-Frobenius teorisi ile hesaplanabilir.

Örnek 2.21.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-8,-6] & [1,5] & [1,2] \\ [2,3] & [-9,-8] & [1,3] \\ [2,4] & [2,5] & [-9,-8] \end{bmatrix}$$

aralık Z-matris ailesi göz önüne alınsın. Burada U matrisi

$$U = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

dir ve Hurwitz kararlıdır, gerçekten U matrisinin özdeğerleri -10, -0.1690, -11.8309 *nin reel kısımları sol açık yarı düzlemdedirler.*

LMI tekniği $U^T D_* + D_* U < 0$ *matris eşitsizliği için uygulandığında* D_* *matrisi* $D_* = (0.249, 0.308, 0.183)$ *olarak bulunur ve (2.18) eşitsizliğinin çözümüdür ve* $\mathcal{A}$ *ailesi için bir ortak çözümdür. Örneğin,* $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi üç matris alındığında*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 3 & -9 & 3 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$A_1^T D + D A_1$ *matrisinin özdeğerleri* -6.8727, -4.2412, -1.7081 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_1^T D + D A_1 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$A_2^T D + D A_2$ *matrisinin özdeğerleri* -6.4127, -4.1991, -0.5981 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_2^T D + D A_2 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_3 = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$A_3^T D + DA_3$ matrisinin özdeğerleri -5.8838*,* -4.4424*,* -1.0158 *sol yarı düzlemdedir, yani $A_3^T D + DA_3 < 0$ eşitsizliği sağlanır.*

Örnek 2.22.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-35,-25] & [1,2] & [2,3] & [0,1] \\ [0,3] & [-21,-20] & [0,2] & [3,4] \\ [2,4] & [1,3] & [-9,-8] & [1,3] \\ [1,7] & [12,14] & [2,9] & [-17,-15] \end{bmatrix}$$

aralık Z-matris ailesi göz önüne alınsın. Burada U matrisi

$$U = \begin{bmatrix} -25 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -20 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -8 & 3 \\ 7 & 14 & 9 & -15 \end{bmatrix}$$

dir ve Hurwitz kararlıdır, gerçekten U nun özdeğerleri -1.9852*,* -14.4897*,* -25.1745*,* -26.3506 *nin reel kısımları sol açık yarı düzlemdedirler.*

LMI yöntemi $U^T D_* + D_* U < 0$ matris eşitsizliği için uygulandığında D_* matrisi $D_* = (4.3161, 2.9584, 1.6383, 0.8276)$ olarak bulunur ve (2.18) eşitsizliğinin çözümüdür ve $\mathcal{A}$ ailesi için bir ortak çözümdür.

Örneğin, $\mathcal{A}$ ailesinden keyfi üç matris alınsın:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -27 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -20 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -9 & 1 \\ 5 & 13 & 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$A_1^T D + DA_1$ matrisinin özdeğerleri -235.2101, -122.8443, -35.3890, -12.2792 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_1^T D + DA_1 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -32 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -21 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -8 & 2 \\ 2 & 13 & 2 & -16 \end{bmatrix}$$

$A_2^T D + DA_2$ matrisinin özdeğerleri -278.2310, -129.0377, -30.4834, -15.4270 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_2^T D + DA_2 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_3 = \begin{bmatrix} -35 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -20 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -9 & 4 \\ 5 & 12 & 3 & -15 \end{bmatrix}$$

$A_3^T D + DA_3$ matrisinin özdeğerleri -304.3290, -121.6267, -34.2299, -14.5948 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_3^T D + DA_3 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

2.4 $n \times n$ Aileler İçin Yeterli Koşul

Bu kısımda, $n \times n$ aralık sistemler için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak diyagonal çözümünün varlığı ve bulunması için yeni bir yeterli koşul verildi. Bu koşul yeterince basittir ve problem konveks optimizasyon ile çözülebilir.

$\underline{a_{ij}}$ ve $\overline{a_{ij}}$ sırasıyla alt ve üst sınırlar olmak üzere

$$\mathcal{A} = \{A = (a_{ij}), \underline{a_{ij}} \leq a_{ij} \leq \overline{a_{ij}}, i, j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2.20}$$

$n \times n$ boyutlu aralık matris ailesi göz önüne alınsın. Merkez (nominal) matris

$$A_c = (\frac{\overline{a_{ij}} + \underline{a_{ij}}}{2}), (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

gibi ve fark (perturbation) matris

$$A_p = (\frac{\overline{a_{ij}} - \underline{a_{ij}}}{2}), (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

gibi tanımlansın.

Bu kısımda ele alınan asıl teoremin ispatında kullanılacak olan bir kaç özellik aşağıdaki gibidir. Bu özellikler (Horn ve Johnson, 1985) da ifade edilmiştir.

- Simetrik bir C matrisi için

$$\lambda_{max}(C) = max_{||v||=1} v^T C v \tag{2.21}$$

  dir, burada $\lambda_{max}(.)$ maximal özdeğeri ve $||.||$ ise $\mathbb{R}^n$ de Öklid (Euclidian) normunu simgelemektedir.

- Eğer A ve B $n \times n$ boyutlu matrisler ve $|A| \preccurlyeq B$ ise

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B) \tag{2.22}$$

  dir. Burada $\rho(.)$ simgesi spektral yarıçapı göstermektedir.

- Eğer $C_2 \geq 0$ ve $C_2^T = C_2$ ise ve $|C_1| \preccurlyeq C_2$ ise

$$\rho(C_2) = \lambda_{max}(C_2) \tag{2.23}$$

  dir.

$n \times n$ $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrisleri için $A \preccurlyeq B$ sembolü "her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$" anlamına geliyordu. $|A|$ matrisi ise $|A| = (|a_{ij}|)$ ile tanımlanır, burada $|a|$ mutlak değeri gösterir.

Teorem 2.23. *Öyle bir $D > 0$ diyagonal matrisi olsun ki*

$$\lambda_{max}(A_c^T D + D A_c) + \lambda_{max}(A_p^T D + D A_p) < 0 \tag{2.24}$$

sağlansın, bu durumda D matrisi (2.20) ailesi için bir ortak diyagonal çözümdür, yani

$$A^T D + DA < 0, \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{2.25}$$

dir.

Kanıt. $|X| \preccurlyeq A_p$ olmak üzere A yerine $A = A_c + X$ yazılsın. O zaman (2.25)

$$\lambda_{max}[(A_c^T D + DA_c) + (X^T D + DX)] < 0 \tag{2.26}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (2.21) eşitliği ve bilinen

$$\max_v [f(v) + g(v)] \leq \max_v f(v) + \max_v g(v)$$

eşitsizliği kullanılarak her $|X| \preccurlyeq A_p$ için

$$\lambda_{max}(A_c^T D + DA_c) + \lambda_{max}(X^T D + DX) < 0 \tag{2.27}$$

ya da

$$\max_{|X| \preccurlyeq A_p} \lambda_{max}(X^T D + DX) < -\lambda_{max}(A_c^T D + DA_c) \tag{2.28}$$

ise (2.26) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Diğer taraftan

$$|X^T D + DT| \preccurlyeq |X|^T D + D|X| \preccurlyeq A_p^T D + DA_p$$

dır ve (2.26) dan her $|X| \preccurlyeq A_p$ için

$$\lambda_{max}(X^T D + DX) \leq \lambda_{max}(A_p^T D + DA_p)$$

dir. Dolayısıyla (2.28) ifadesinden büyük olan

$$\lambda_{max}(A_p^T D + DA_p) < -\lambda_{max}(A_c^T D + DA_c)$$

eşitsizliği sağlanırsa (2.25) de otomatik olarak sağlanır. □

Örnek 2.24.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-27/10, -23/10] & [13/10, 17/10] \\ [-47/10, -43/10] & -1 \end{bmatrix}$$

2×2 *aralık matris ailesi göz önüne alınsın. Bu aile için merkez matris ve fark matris hesaplanırsa merkez matris*

$$A_c = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ -9/2 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak ve fark matris de

$$A_c = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$D = diag(3,1)$ *diyagonal matrisi için*

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A_c^T D + DA_c) + \lambda_{max}(A_p^T D + DA_p) &= -2 + 8/5 \\ &= -2/5 < 0 \end{aligned}$$

sağlanır, bu durumda D matrisi 2×2 *boyutlu* $\mathcal{A}$ *aralık matris ailesi için bir ortak diyagonal çözümdür, yani*

$$A^T D + DA < 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

dir. Örneğin, $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi iki matris alalım:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.4037 & 1.4899 \\ 4.5312 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_1^T D + DA_1$ *matrisinin özdeğerleri* -16.3554, -0.0671 *sol yarı düzlemdedir,* $A_1^T D + DA_1 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.6611 & 1.6294 \\ -4.4221 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_2^T D + DA_2$ *matrisinin özdeğerleri* -17.4785, -0.4884 *sol yarı düzlemdedir,* $A_2^T D + DA_2 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

Örnek 2.25.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-5,-2] & [3,4] \\ [-3.5,-3] & [-5,-4] \end{bmatrix}$$

2×2 *aralık matris ailesi göz önüne alınsın. Bu aile için merkez matris ve fark matris hesaplanırsa merkez matris*

$$A_c = \begin{bmatrix} -7/2 & 7/2 \\ -13/4 & -9/2 \end{bmatrix}$$

olarak ve fark matris de

$$A_c = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$D = diag(3,5)$ *diyagonal matrisi için*

$$\lambda_{max}(A_c^T D + DA_c) + \lambda_{max}(A_p^T D + DA_p) = -19.6935 + 10.4003$$
$$= -9.2932 < 0$$

sağlanır, bu durumda D matrisi 2×2 *boyutlu* $\mathcal{A}$ *aralık matris ailesi için bir ortak diyagonal çözümdür. Örneğin,* $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi iki matris alınsın:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_1^T D + DA_1$ *matrisinin özdeğerleri* -24, -10 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_1^T D + DA_1 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_2^T D + DA_2$ *matrisinin özdeğerleri* -3.1897, -18.8102 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_2^T D + DA_2 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

Örnek 2.26.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-35,-25] & [9,15] & [-3,3] \\ [-10,-4] & [-24,-16] & [0,6] \\ [-21,-17] & [-26,-20] & [-45,-35] \end{bmatrix}$$

3×3 *aralık matris ailesi göz önüne alınsın. Bu aile için merkez matris ve fark matris hesaplanırsa merkez matris*

$$A_c = \begin{bmatrix} -30 & 12 & 0 \\ -7 & -20 & 3 \\ -19 & -23 & -40 \end{bmatrix}$$

olarak ve fark matris de

$$A_p = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$D = diag(0.316, 1, 0.1619)$ *diyagonal matrisi için*

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A_c^T D + DA_c) + \lambda_{max}(A_p^T D + DA_p) &= -11.6441 + 11.5641 \\ &= -0.08 < 0 \end{aligned}$$

sağlanır, bu durumda D matrisi 3×3 $\mathcal{A}$ *aralık matris ailesi için bir ortak diyagonal çözümdür. Örneğin,* $\mathcal{A}$ *ailesinden keyfi iki matris alınsın:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -32 & 9 & -3 \\ -6 & -19 & 2 \\ -21 & -26 & -39 \end{bmatrix}$$

$A_1^T D + DA_1$ *matrisinin özdeğerleri* -38.8776, -21.3406, -10.6339 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_1^T D + DA_1 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -28 & 11 & 1 \\ -10 & -16 & 5 \\ -18 & -20 & -44 \end{bmatrix}$$

$A_2^T D + DA_2$ *matrisinin özdeğerleri* -34.5536, -17.7885, -11.6011 *sol yarı düzlemdedir, yani* $A_2^T D + DA_2 < 0$ *eşitsizliği sağlanır.*

3 ARALIK SİSTEMLER (PLANTLAR) İÇİN 1. MERTEBEDEN KARARLAŞTIRAN KOMPENSATÖRLERİN BELİRLENMESİ

$$P(s,q,r)=\frac{\sum_{i=1}^{m}[q_i^-,q_i^+]s^i}{s^n+\sum_{i=1}^{n-1}[r_i^-,r_i^+]s^i}=\frac{N(s,q)}{D(s,r)}$$

aralık planti ve aşağıdaki gibi bir birinci dereceden bir PI

$$C(s)=\frac{K_1s+K_2}{s}$$

bir PI kompensatörü ele alınsın. Buradan kapalı sistemin karakteristik fonksiyonu

$$p(s,q,r)=(K_1s+K_2)N(s,q)+sD(s,r)$$

olacaktır. Ele alacağımız problem

$$\{(K_1,K_2):\forall(q,r)\in Q\times R,\quad p(s,q,r)\quad \text{Schur kararlıdır}\}$$

kümesinin bulunmasıdır. (Akyar vd., 2010) makalesinde bir multilineer ailenin Schur kararlılığını test eden bir algoritma verilmiştir. Sözü edilen algoritma kullanılarak aşağıdaki algoritma önerilebilir:

Algoritma 3.1. *$P(s,q,r)$ aralık planti verilsin.*

i) Mobius dönüşümü yardımı ile $p(s,q,r)$ karakteristik fonksiyonu Schur kararlılık formuna getirilir.

ii) K_1,K_2 için uygun aralıklar seçilir. ($(K_1,K_2)\in\mathcal{K}$ gibi uygun bir kutu belirlenir.)

iii) $f_1(t,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})$, $f_2(t,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})$ fonksiyonları (Akyar vd., 2010) makalesindeki gibi analitik olarak hesaplanır.

iv)

$$f_1(t,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})=0$$

$$f_2(t,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})=0$$

sistemi, $t=t_1$ yazılarak ve yeni $t_2,t_3,\ldots,t_k$ değişkenleri tanımlanarak multilineerleştirilir. Bu durumda yeni eşitlikler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$f_1(t_1,\ldots,t_k,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})=0$$

$$f_2(t_1,\ldots,t_k,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})=0$$

$$t_2-t_1=0,\quad ,t_3-t_2=0,\ldots,t_k-t_1=0$$

burada $(t_1,\ldots,t_k,K_1,K_2,q_0,\ldots,q_m,r_0,\ldots,r_{n-1})\in\tilde{Q}=\underbrace{[-2,2]\times\cdots\times[-2,2]}_{k\ tane}\times\mathcal{K}\times Q\times R$ *dir.*

v) $\tilde{Q}$ nın uç noktalarının birinde Schur kararlılık kontrol edilir. Eğer kararsız ise $\mathcal{K}$ kutusu bölünmeye başlanır. Elde edilen küçük kutulardan biri sabitlenir.

vi) Sabitlenen kutu için $\overline{Q}=\underbrace{[-2,2]\times\cdots\times[-2,2]}_{k\ tane}\times Q\times R$ kutusu bölünerek her bir alt kutunun uç noktalarının en az birinde Schur kararlılık test edilir. Eğer kararsız ise sabitlenen kutu yeniden bölünür ve (vi). adım yeni kutular için tekrar edilir.

Aksi halde $s=\pm1$ sayılarının her birinin kök olup olmadığı kontrol edilir. Kök ise sabitlenen kutu bölünür ve (vi). adım yeni kutular için tekrar edilir. Kök değil ise f_1,f_2 nin uç noktalardaki tüm değerleri hesaplanır.

$$max f_1<0,\ min f_1>0,\ max f_2<0,\ min f_2>0$$

koşullarından birisi sağlanıyor ise sabitlenen kutu stabilize eden kutudur.

vii) (vi). adım $\mathcal{K}$ nın bölünen başka bir küçük kutusu için tekrarlanır. Verilen bir $\varepsilon>0$ için kutuların boyutları ε dan küçük ise algoritma durdurulur.

Kararlı olan küçük kutuların birleşimi K_1 ve K_2 için aranılan kararlılık bölgesidir.

Örnek 3.2. *(Dorf ve Bishop, 2008) de verilen bir büyük helikopter modelini göz önüne alalım.*

Şekil 3.1: Helikopter Modeli.

Helikopterde şekildeki gibi zıt yönlerde dönen iki tandem pervane kullanılmaktadır. Belirsizlik olmadığında helikopterin basitleştirilmiş dinamiği aşağıdaki gibidir:

$$P(s) = \frac{10}{s^2 + 4.5s + 9}$$

$P(s)$ fonsiyonu yerine aşağıdaki gibi tanımlı $\mathcal{P}$ aralık plant ailesi ele alınabilir:

$$P(s,q,r) = \frac{q_0}{s^2 + r_1 s + r_0} = \frac{N(s,q)}{D(s,r)} \tag{3.1}$$

burada belirsizlik sınırları $9 \leq q_0 \leq 11$, $8 \leq r_0 \leq 10$, $4 \leq r_1 \leq 5$ dır (yani $Q = [9,11]$ ve $R = [8,10] \times [4,5]$ dır).

Kararlaştıran PI kompensatör ise

$$C(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s}$$

şeklindedir. (Burada K_1 ve K_2 kompensatör kazanımlarıdırlar).

PI kompensatör sisteme uygulandığında ele alınan kapalı sistemin karakteristik fonksiyonu

$$p(s,q,r) = (K_1 s + K_2)q_0 + s(s^2 + r_0 s + r_1) = s^3 + r_1 s^2 + (K_1 q_0 + r_0)s + K_2 q_0$$

olarak bulunur. Bu polinomun Hurwitz kararlılığına verilen algoritma yardımı ile bakalım.

Algoritma uygulanırsa:

1. adım: *Mobius dönüşümü yardımı ile $p(s,q,r)$ karakteristik fonksiyonu Schur kararlılık formuna getirilir ve*

$$\tilde{p}(s,q,r)(s) = (K_1q_0 + K_2q_0 + r_0 + r_1 + 1)s^3 + (-K_1q_0 - 3K_2q_0 - r_0 + r_1 + 3)s^2 + (-K_1q_0 + 3K_2q_0 - r_0 - r_1 + 3)s + K_1q_0 - K_2q_0 + r_0 - r_1 + 1$$

elde edilir.

2. adım: *K_1, K_2 için $\mathcal{K} = [-2,2] \times [-2,2]$ olarak seçelim.*

3. adım: *(Akyar vd., 2010) makalesindeki gibi $f_1(t,K_1,K_2,q_0,r_0,r_1)$, $f_2(t,K_1,K_2,q_0,r_0,r_1)$ fonksiyonları analitik olarak hesaplanır ise*

$$f_1(t,K_1,K_2,q_0,r_0,r_1) = -t(K_1q_0 + K_2q_0 + r_0 + r_1 + 1) + 2K_1q_0 + 2K_2q_0 + 2r_0 - 2r_1 - 2$$

$$f_2(t,K_1,K_2,q_0,r_0,r_1) = -t(K_1q_0 - K_2q_0 + r_0 - r_1 + 1) + 2K_1q_0 - 2K_2q_0 + 2r_0 - 2r_1 - 2$$

olarak bulunur.

4. adım: *Fonksiyonlar multilineer olduğu için burada multilineerleştirmeye gerek yoktur.*

5. adım: *$\tilde{Q}$ nın uç noktalarının birinde Schur kararlılık kontrol edilir. Kararsız ise $\mathcal{K}$ kutusu bölünmeye başlanır. Elde edilen küçük kutulardan biri sabitlenir.*

6. adım: *Sabitlenen kutu için $\overline{Q} = \underbrace{[-2,2] \times \cdots \times [-2,2]}_{k \text{ tane}} \times Q \times R$ kutusu bölünerek bölünen her bir kutunun uç noktalarının en az birinde Schur kararlılık test edilir. Eğer kararsız ise sabitlenen kutu yeniden bölünür. Ve (vi). adım yeni kutular için tekrar edilir.*

Aksi halde $s = \pm 1$ den her birinin kök olup olmadığı kontrol edilir. Kök ise sabitlenen kutu bölünür. Ve (vi). adım yeni kutular için tekrar edilir. Kök değil ise f_1, f_2 nin uç noktalardaki tüm değerleri hesaplanır.

$$max f_1 < 0,\ min f_1 > 0,\ max f_2 < 0,\ min f_2 > 0$$

koşullarından biri sağlanıyor ise sabitlenen kutu stabilize eden kutudur.

7. adım: *(vi). adım $\mathcal{K}$ nın bölünen başka bir küçük kutusu için tekrarlanır.*

Algoritmanın yukarıda belirtilen (iv)., (v). ve (vi). adımlarının uygulanması ile elde edilen ilk on kutu aşağıdaki gibidir:

Bulunan K kutusu: $[1,2]\times[1,2]$*, Kararlı kutu sayısı:* 1

Bulunan K kutusu: $[0.5,1]\times[1,2]$*, Kararlı kutu sayısı:* 2

Bulunan K kutusu: $[0,0.5]\times[0.5,1]$*, Kararlı kutu sayısı:* 3

Bulunan K kutusu: $[0.5,1]\times[0.5,1]$*, Kararlı kutu sayısı:* 4

Bulunan K kutusu: $[0,0.5]\times[1,1.5]$*, Kararlı kutu sayısı:* 5

Bulunan K kutusu: $[1,1.5]\times[0.5,1]$*, Kararlı kutu sayısı:* 6

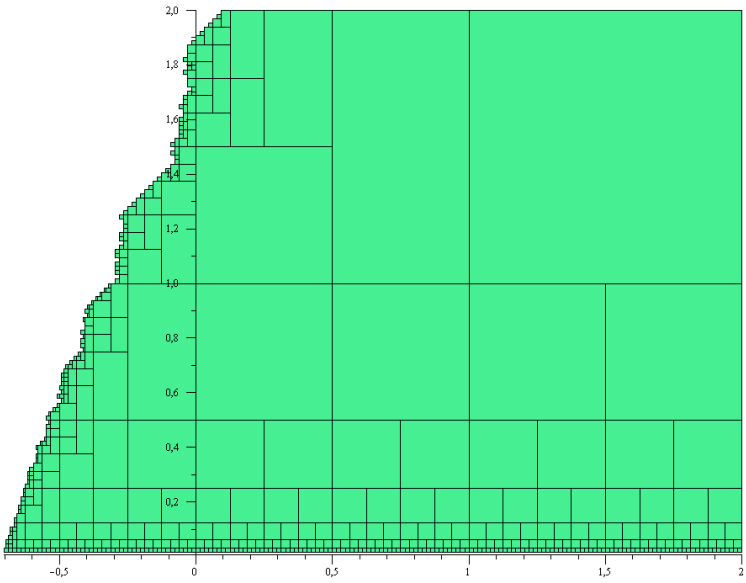
Bulunan K kutusu: $[1.5,2]\times[0.5,1]$*, Kararlı kutu sayısı:* 7

Bulunan K kutusu: $[-0.25,0]\times[0.5,1]$*, Kararlı kutu sayısı:* 8

Bulunan K kutusu: $[0.25,0.5]\times[1.5,2]$*, Kararlı kutu sayısı:* 9

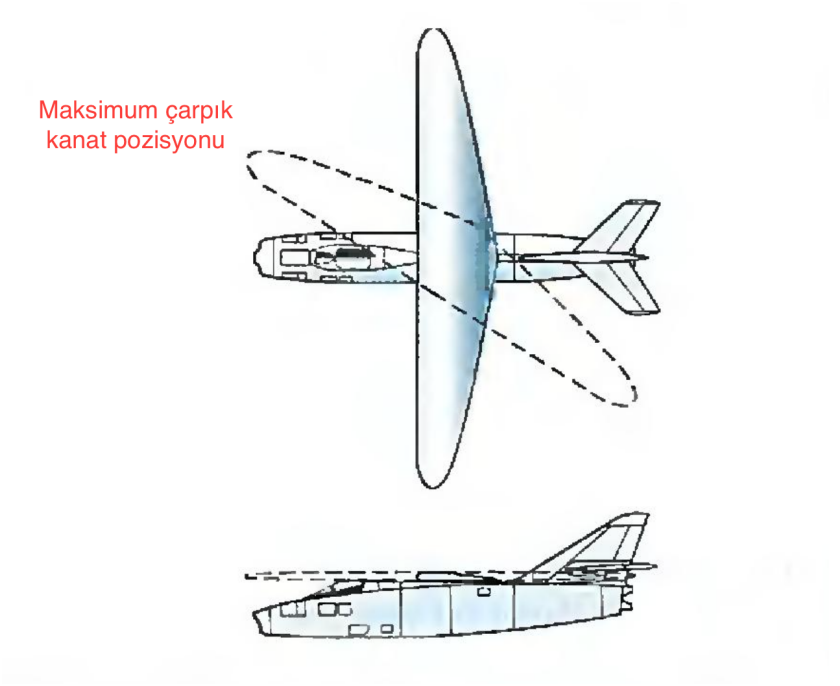
Bulunan K kutusu: $[-0.25,0]\times[0.25,0.5]$*, Kararlı kutu sayısı:* 10

Bu şekilde uygun bir $\varepsilon>0$ için kutuların boyutları ε dan küçük kalana kadar devam edilir. Elde edilen kararlı küçük kutuların birleşimi K_1 ve K_2 için aranılan kararlılık bölgesidir. Bu model için kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2: Helikopter modeli için K_1-K_2 kararlılık bölgesi.

Örnek 3.3. *(Dorf ve Bishop, 2008) de verilen deneysel eğik kanatlı uçak modeli göz önüne alınacaktır. Kanat düşük hızlarda normal çarpık konumdadır ve süpersonik uçuşa geliştirilebilen bir çarpık pozisyona taşınabilir.*



Şekil 3.3: Eğik kanatlı uçak (Oblique Wing Aircraft).

Belirsizlik olmadığında uçak (aircraft) transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P(s) = \frac{64s + 128}{s^4 + 3.7s^3 + 65.6s^2 + 32s}$$

$P(s)$ fonsiyonu yerine aşağıdaki gibi tanımlı $\mathcal{P}$ aralık plant ailesi ele alınabilir:

$$P(s,q,r) = \frac{q_1 s + q_0}{s^4 + r_3 s^3 + r_2 s^2 + r_1 s + r_0} = \frac{N(s,q)}{D(s,r)} \tag{3.2}$$

burada belirsizlik sınırları $90 \le q_0 \le 166$, $54 \le q_1 \le 74$, $-0.1 \le r_0 \le 0.1$, $30.1 \le r_1 \le 33.9$, $50.4 \le r_2 \le 80.8$, $2.8 \le r_3 \le 4.6$ dır. (yani $Q = [90,166] \times [54,74]$ ve $R = [-0.1,0.1] \times [30.1,33.9] \times [50.4,80.8] \times [2.8,4.6]$ dır.)

$$C(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s}$$

birinci mertebeden PI kompensatör yardımı ile bu sistemin kararlaştırılması problemini ele alalım. Bunun için uygun K_1 ve K_2 değerleri belirlemek gerekmektedir.

Kapalı sistemin karakteristik polinomu

$$p(s,q,r) = (K_1 s + K_2)N(s,q) + sD(s,r)$$
$$= s^5 + r_3 s^4 + r_2 s^3 + (K_1 q_1 + r_1)s^2 + (K_1 q_0 + K_2 q_1 + r_0)s + K_2 q_0$$

dir.

$$Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_n) : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+,\ (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{P} = \{p(.,q) : p(s,q) = q_0 + q_1 s \cdots + q_n s^n,\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in Q\}$$

aralık polinomlar ailesi verildiğinde

$$K_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \ldots$$

$$K_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \ldots$$

$$K_3(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \ldots$$

$$K_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \ldots$$

şeklinde tanımlanan n. dereceden $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomlarına Kharitonov polinomları adı veriliyordu.

Ele alınan sistem için Kharitonov polinomlarının kullanıldığı 16 Plant Teoremi geçerlidir.

Teorem 3.4. *(Barmish, 1994) (16 Plant Teoremi) $N_i(s)$ ve $D_j(s)$ $(i,j = 1,2,3,4)$ polinomları pay ve paydadaki aralık aileler için Kharitonov polinomları olsun. $C(s)$ kompensatörünün aileyi kararlaştırması için gerek ve yeterli koşul bu kompensatörün 16 tane*

$$\frac{N_i(s)}{D_j(s)}, \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

plantlerini kararlaştırmasıdır.

Bu teoreme göre tüm aileyi kararlaştıran K_1, K_2 değerlerini bulmak için 16 tane Kharitonov plantlarını kararlaştıran K_1, K_2 değerlerinin kümelerini bulup bu kümelerin arakesitini almak gerekmektedir. Eğer bu arakesit boştan farklı ise o zaman başlangıçtaki

aileyi kararlaştıran kompensatör vardır. Bu örnekte Kharitonov polinomlarına Algoritma (3.1) i uyguladığımızda örneğin yapısından dolayı kararlaştıran (K_1, K_2) *kutularının bulunması uzun sürmektedir.*

(3.2) deki $N(s,q)$ *ve* $D(s,r)$ *için sırasıyla ikinci ve birinci Kharitonov polinomları hesaplanırsa*

$$N_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s = 166 + 74s$$

$$D_1(s) = r_0^- + r_1^- s + r_2^+ s^2 + r_3^+ s^3 + r_4^- s^4 = -0.1 + 30.1s + 80.8s^2 + 4.6s^3 + s^4$$

ilişkili plant

$$P_{2,1}(s) = \frac{74s + 166}{s^4 + 4.6s^3 + 80.8s^2 + 30.1s - 0.1}$$

olur. PI kompensatör ile ele alınan kapalı sistemin karakteristik fonksiyonu

$$p_{2,1}(s) = s^5 + 4.6s^4 + 80.8s^3 + (30.1 + 74K_1)s^2 + (-0.1 + 166K_1 + 74K_2)s + 166K_2$$

olarak bulunur.

(Akyar vd., 2010) makalesindeki gibi $f_1(t, K_1, K_2, q_0, q_1, r_0, r_1, r_2, r_3)$, $f_2(t, K_1, K_2, q_0, q_1, r_0, r_1, r_2, r_3)$ *fonksiyonları analitik olarak hesaplanır ise*

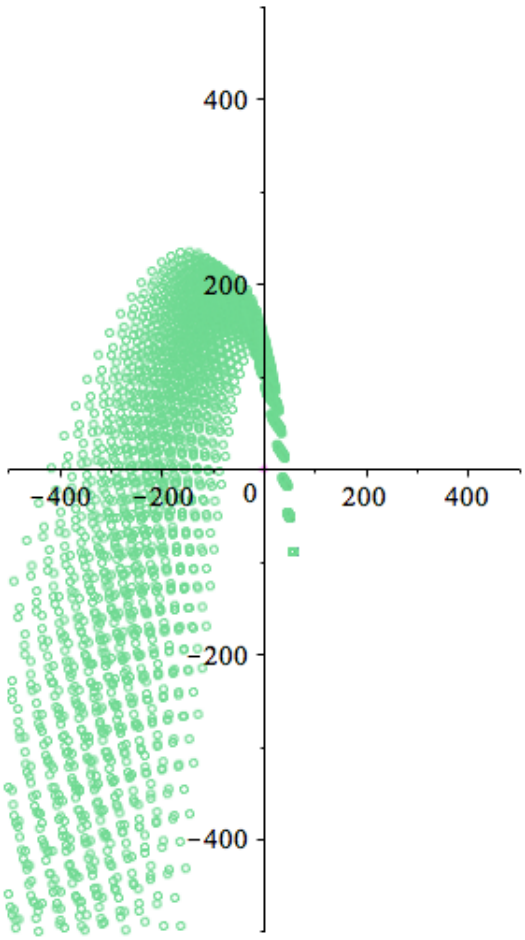
$$\begin{aligned} f_1(t, K_1, K_2, q_0, q_1, r_0, \ldots, r_3) = \\ &-t^2(92K_1 - 92K_2 + 47) - t(-424K_1 + 608K_2 + 102.4) \\ &+ t(116.4 + 240K_1 + 240K_2) - 960K_1 + 368K_2 + 217.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(t, K_1, K_2, q_0, q_1, r_0, \ldots, r_3) = \\ &-t^2(116.4 + 240K_1 + 240K_2) + t(92K_1 - 92K_2 + 47) \\ &- t(69.8 - 572K_1 - 1052K_2) - 368K_1 - 960K_2 + 421.6 \end{aligned}$$

olarak bulunmaktadır.

Algoritma (3.1) e göre bir $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$ *kutusunun kararlaştırıcı olması için* $t \in [-2, 2]$, $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$ *olmak üzere* (f_1, f_2) *dönüşümünün görüntüsü* $(0,0)$ *ı içermemelidir. Aşağıdaki şekilde bu dönüşümün görüntüsü verilmiştir. Görüntünün* $(0,0)$ *a yakın olup* $(0,0)$ *ın etrafında halkaya benzer bir küme olduğu görülmektedir. Bundan dolayı bölme-*

elimine etme algoritması hızlı sonuç vermemektedir.



Şekil 3.4: (f_1, f_2) dönüşümünün görüntüsü.

Öte yandan her bir 16 tane Kharitonov polinomu için

$$\begin{cases} f_1(t, K_1, K_2) = 0 \\ f_2(t, K_1, K_2) = 0 \end{cases}, \quad t \in [-2, 2]$$

denklemleri (K_1, K_2) *düzleminde birer eğri belirlemektedir. Bu eğri*

$$p(1, K_1, K_2) = 0$$

$$p(-1, K_1, K_2) = 0$$

doğruları ile birlikte düzlemi bölgelere ayırmaktadır. Bu bölgeler polinomun inerşiyasının sabit olduğu bölgelerdir. Kararlılık bölgesi de bu bölgelerden birisidir. Ve kolayca tanınabilir.

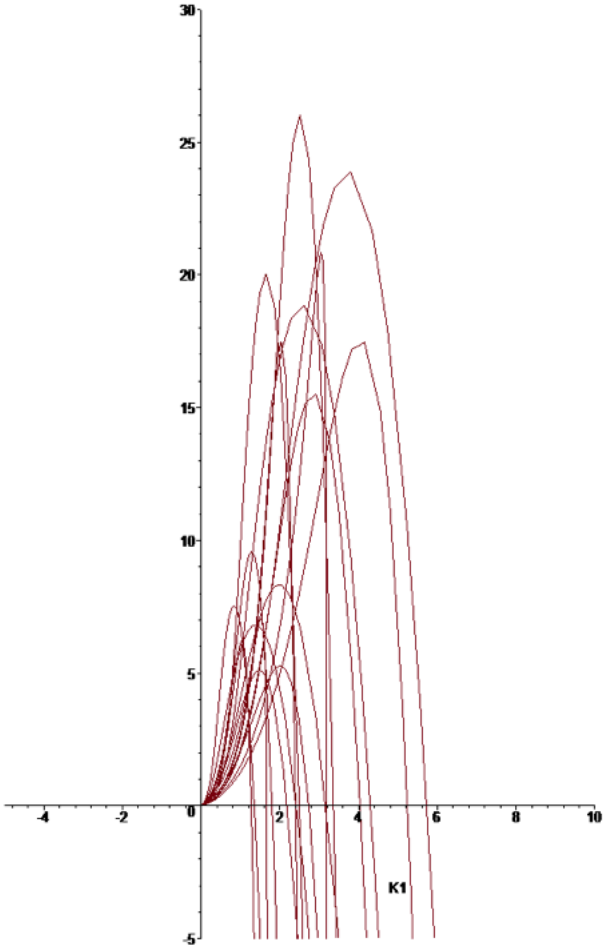
Örneğin $p_{2,1}(s)$ *için* $t \in [-2,2]$ *olmak üzere*

$$K_1 = -\frac{0.05(13743t^2 - 789t - 56882)}{(t-2)(1380t - 4129)}$$

$$K_2 = \frac{0.05(357t^3 + 26104t^2 + 52t - 101456)}{1380t^3 - 9649t^2 + 22036t - 16516}$$

eğrisi ve $p_{2,1}(1,K_1,K_2) = 0 \Rightarrow \emptyset$ *ve* $p_{2,1}(-1,K_1,K_2) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$ *doğruları ortaya çıkmaktadır.*

Aşağıdaki şekilde tüm Kharitonov polinomları için uygun eğriler ve doğrular gösterilmiştir, aralık aileyi kararlaştıran ortak K_1, K_2 lerin kümesinin boş olmadığı görülmektedir.



Şekil 3.5: Kararlaştıran (K_1, K_2) lerin kümesi.

4 KESİKLİ SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK SINIRI

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$u(k) = Cx(k) \tag{4.1}$$

ayrık zamanlı sistemi göz önünde bulundurulsun. (Burada $x \in R^n$ durum vektörü ile diğer vektör ve matrisler uygun boyuttadırlar).

Dinamik kontrolör, $x_c \in R^n$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k)$$
$$u(k) = C_c x_c(k) + D_c y(k) \tag{4.2}$$

Bu durumda kapalı sistem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

gibi tanımlıdır.

$$\tilde{\mathrm{A}} := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\mathrm{B}} := \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\mathrm{K}} := \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix},\ \tilde{\mathrm{C}} := \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilsin. Eğer $\tilde{\mathrm{A}} + \tilde{\mathrm{B}}\tilde{\mathrm{K}}\tilde{\mathrm{C}} = M$ kararlı ise bu durumda (4.2) kontrolörü (4.1) sistemini kararlı yapar.

Şimdi Schur kararlı bir sistemi aşağıdaki gibi ele alalım:

$$x(k+1) = Mx(k) = (A + BKC)x(k) \tag{4.4}$$

burada M pertürbe parametrelerine ($p_i,\ i=1,\ldots,r$) bağlı matristir. Pertürbe edilmiş denklem, $p_i,\ i=1,...,r$ ele alınan kontrolörün parametrelerinin pertürbeleri ve $E_i,\ i=1,...,r$ de pertürbe parametreleri ile belirli matrisler olmak üzere

$$x(k+1) = (M + \sum_{i=1}^{r} p_i E_i)x(k) \tag{4.5}$$

olsun. $Q > 0$ pozitif tanımlı simetrik matris ve P de

$$M^T PM - P + Q = 0 \tag{4.6}$$

Stein denkleminin pozitif tanımlı tek çözümü olsun. P matrisinin varlığı M nin Schur kararlılığından dolayı kesindir. (Lyapunov, 1907; Horn ve Johnson, 1985)

Teorem 4.1. *(4.5) sistemi aşağıdaki eşitsizliği sağlayan her p_i için kararlıdır*

$$0 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |p_i|^2} \leq \alpha \tag{4.7}$$

burada

$$\alpha := \frac{-\sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 + 4\sigma_{min}(Q)\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \nu_{ij}^2}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \nu_{ij}^2}}$$

ve $\mu_i := \|E_i^T PM + M^T PE_i\|_2$ ve $\nu_{ij} := \|E_i^T PE_j\|_2$ dir.

Kanıt. M nin K kontrolörü ile Schur kararlı olduğu varsayımı altında, Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki gibi seçilsin

$$V_k = x_k^T P x_k,\ (x_k := x(k)) \tag{4.8}$$

burada P (4.6) nın pozitif tanımlı simetrik bir çözümüdür. M kararlı matris olduğundan P nin varlığı Lyapunov teoreminden dolayı garantidir.

(4.5) in kararlılığı için

$$V_{k+1} - V_k < 0 \tag{4.9}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir.

$$
\begin{aligned}
V_{k+1} - V_k &= x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k \\
&= x_k^T (M + \sum_{i=1}^{r} p_i E_i)^T P (M + \sum_{i=1}^{r} p_i E_i) x_k - x_k^T P x_k \\
&= x_k^T (M^T P M - P) x_k + x_k^T M^T P (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i) x_k \\
&\quad + x_k^T (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i)^T P M x_k + x_k^T \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i p_j E_i^T P E_j x_k \\
&= x_k^T (-Q) x_k + x_k^T M^T P (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i) x_k \\
&\quad + x_k^T (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i)^T P M x_k + x_k^T \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i p_j E_i^T P E_j x_k
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

buradan

$$
\begin{aligned}
& V_{k+1} - V_k < 0 \Leftrightarrow \\
& x_k^T M^T P (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i) x_k + x_k^T (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i)^T P M x_k \\
& \quad + x_k^T \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i p_j E_i^T P E_j x_k < x_k^T Q x_k, \forall x_k
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

dır.

$$\sigma_{min}(Q) \leq \frac{x_k^T Q x_k}{x_k^T x_k} \leq \sigma_{max}(Q),\ \forall x_k \neq 0$$

Rayleigh prensibi kullanılarak (Lancaster, 1969) (burada $\sigma_{min}(.)$ ($\sigma_{max}(.)$) minimum ve maximum singüler değerleri göstermektedir)

$$\sigma_{min}(Q) x_k^T x_k \leq x_k^T Q x_k$$

elde edilir.

(4.11) eşitsizliğinin sağ tarafı eğer

$$x_k^T \{M^T P (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i) + (\sum_{i=1}^{r} p_i E_i)^T P M + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i p_j E_i^T P E_j\} x_k \leq \sigma_{min}(Q) x_k^T x_k \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanırsa sağlanır.

$$
\begin{aligned}
&|x_k^T\{(\sum_{i=1}^{r} p_iE_i)^T PM + M^T P(\sum_{i=1}^{r} p_iE_i) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} p_ip_jE_i^T PE_j\}x_k| \\
&\leq \|x_k^T\|_2\|(\sum_{i=1}^{r} p_iE_i)^T PM + M^T P(\sum_{i=1}^{r} p_iE_i) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} p_ip_jE_i^T PE_j\|_2\|x_k\|_2 \\
&\leq \|x_k\|_2^2(\sum_{i=1}^{r}|p_i|\|E_i^T PM + M^T PE_i\|_2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|p_i||p_j|\|E_i^T PE_j\|_2)
\end{aligned}
$$

olduğundan (4.12) eşitsizliği eğer

$$
(\sum_{i=1}^{r}|p_i|\|E_i^T PM + M^T PE_i\|_2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|p_i||p_j|\|E_i^T PE_j\|_2) \leq \sigma_{min}(Q) \quad (4.13)
$$

eşitsizliği sağlanırsa sağlanır.

$\mu_i := \|E_i^T PM + M^T PE_i\|_2 = \sigma_{max}(E_i^T PM + M^T PE_i)$ ve $\nu_{ij} := \|E_i^T PE_j\|_2$ olsun. Bu durumda (4.13) eşitsizliğinin sağ kısmı aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&|p_1|\mu_1 + \ldots + |p_r|\mu_r + |p_1|(|p_1|\nu_{11} + \ldots + |p_r|\nu_{1r}) \\
&\quad + \ldots + |p_r|(|p_1|\nu_{r1} + \ldots + |p_r|\nu_{rr}) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} |p_1| & \ldots & |p_r| \end{pmatrix}}_{=\underline{p}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}}_{=\underline{\mu}} + |p_1|\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} |p_1| & \ldots & |p_r| \end{pmatrix}}_{=\underline{p}} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \vdots \\ \nu_{1r} \end{pmatrix}}_{\underline{\nu_1}} \right\} \\
&\quad + \cdots + |p_r|\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} |p_1| & \ldots & |p_r| \end{pmatrix}}_{=\underline{p}} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{r1} \\ \vdots \\ \nu_{rr} \end{pmatrix}}_{=\underline{\nu_r}} \right\} \\
&= \underline{p\mu} + \underbrace{\begin{pmatrix} |p_1| & \ldots & |p_r| \end{pmatrix}}_{=\underline{p}} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_r \end{pmatrix}}_{=\underline{\nu}} \\
&= \underline{p\mu} + \underline{p\nu} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

(Burada $\nu_i := \underline{p}\underline{\nu_i}$ dır.) Dolayısıyla (4.13) eşitsizliği

$$\underline{p}\underline{\mu} + \underline{p}\underline{\nu} \leq \sigma_{min}(Q) \tag{4.15}$$

ya da

$$\begin{aligned} |\underline{p}\underline{\mu} + \underline{p}\underline{\nu}| &\leq \|\underline{p}\underline{\mu}\|_2 + \|\underline{p}\underline{\nu}\|_2 \\ &\leq \|\underline{p}\|_2 \|\underline{\mu}\|_2 + \|\underline{p}\|_2 \|\underline{\nu}\|_2 \\ &\leq \|\underline{p}\|_2 \|\underline{\mu}\|_2 + \|\underline{p}\|_2 \|\underline{p}\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \|\underline{\nu_i}\|_2^2} \\ &\leq \sigma_{min}(Q) \end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanırsa sağlanır.

$\|\underline{p}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |p_i|^2}$, $\|\underline{\mu}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2}$, $\|\underline{\nu_i}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \nu_{ij}^2}$ olduğundan

$$0 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |p_i|^2} \leq \alpha \tag{4.17}$$

dır. Burada

$$\alpha := \frac{-\sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 + 4\sigma_{min}(Q) \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \nu_{ij}^2}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \nu_{ij}^2}}$$

dır. □

Not 4.2. *Yukarıdaki α nın pozitif olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir.*

Örnek 4.3. *(Singh ve Coelho, 1984) da yer alan VTOL uçak modelinin dikey düzlemdeki lineerleştirilmiş modeli*

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

şeklindedir. Burada $x \in \mathbb{R}^4$ durum vektörünün bileşenleri

$$x_1 := \textit{yatay hız}$$

$$x_2 := \textit{dikey hız}$$

$$x_3 := \textit{pitch oranı (derece/s)}$$

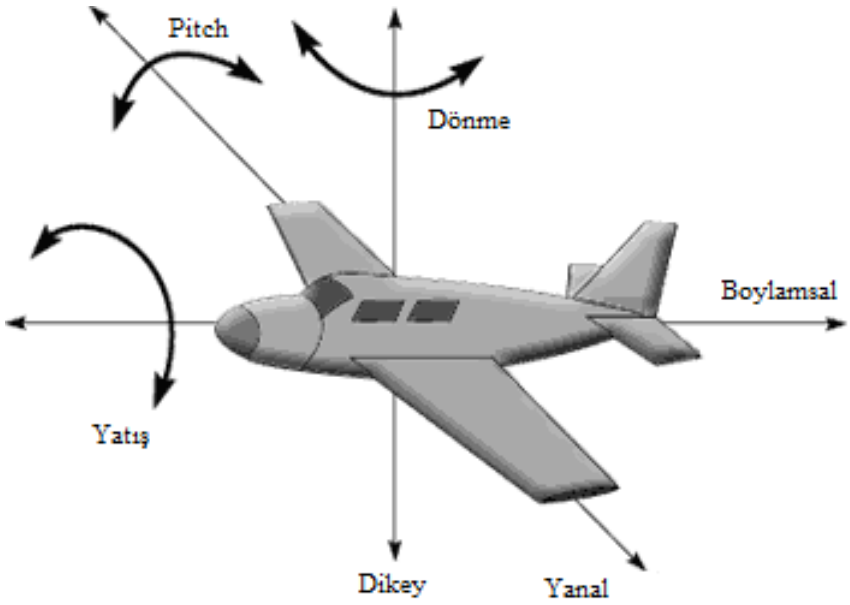
$x_4 :=$ *pitch açısı (derece)*

dir. $u = [u_1, u_2]^T$ *kontrol vektörünün bileşenleri ise*

$u_1 :=$ *"kolektif" pitch kontrolü (pitch control)*

$u_1 :=$ *"boyuna devri (longitudinal cyclic)" pitch kontrolü*

dır.



Şekil 4.1: VTOL uçak modeli.

A ve B matrisleri ise

$$A = \begin{pmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.03681 & -0.707 & 1.42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.4422 & 0.17161 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Bu modelin ayrıklaştırılmış hali ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9964 & 0.002579 & -0.0004258 & -0.04597 \\ 0.004513 & 0.9037 & -0.01879 & -0.3834 \\ 0.009762 & 0.03388 & 0.9383 & 0.1302 \\ 0.0004922 & 0.001741 & 0.09677 & 1.007 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0.04451 & 0.01666 \\ 0.3407 & -0.7249 \\ -0.5278 & 0.4214 \\ -0.02678 & 0.02151 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

Bir kararlaştıran kontrolör aşağıdaki gibidir:

$$K = \begin{pmatrix} -1.63522 \\ 1.582236 \end{pmatrix}$$

Buradan

$$M = A + BKC = \begin{pmatrix} 0.9964 & -0.0438 & -0.0004 & -0.0460 \\ 0.0045 & -0.8004 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0098 & 1.5637 & 0.9383 & 0.1302 \\ 0.0005 & 0.0796 & 0.0968 & 1.007 \end{pmatrix}$$

dır. Pertürbe denklem ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.9964 & -0.0438 & -0.0004 & -0.0460 \\ 0.0045 & -0.8004+p_1 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0098 & 1.5637 & 0.9383 & 0.1302 \\ 0.0005 & 0.0796 & 0.0968 & 1.007+p_2 \end{pmatrix} x(k) \tag{4.18}$$

Teorem (4.1) bu model için uygulanırsa kararılık sınırı

$$\alpha = 0.8036$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (4.18) sistemi

$$p_1^2 + p_2^2 < (0.8036)^2 \tag{4.19}$$

eşitsizliğini sağlayan her p için Schur kararlıdır.

Eğer $p_1 = 0.7$ *ve* $p_2 = 0.4$ *olarak alınırsa (pertürbe parametre değerleri teoremi sağlamaz) (4.18) sistemi kararsızdır. (Gerçekten,* $M + \sum_{i=1}^{r} p_i E_i$ *nin özdeğerleri* -0.1006, $0.9734 + 0.2326i$, $0.9734 - 0.2326i$, 0.9952 *dir. İlk üç özdeğer birim disk içerisinde yer almaz).*

Ancak eğer $p_1 = 0.6$ *ve* $p_2 = 0.4$ *olarak alınırsa (pertürbe parametre değerleri teorem koşullarını sağlar) (4.18) sistemi kararlıdır. (Gerçekten,* $M + \sum_{i=1}^{r} p_i E_i$ *nin özdeğerleri* -0.1958, $0.9710 + 0.2202i$, $0.9710 - 0.2202i$, 0.9951 *dir. Tüm özdeğerlerin modülleri birden küçüktür ve birim disk içerisinde yer alırlar).*

5 SONUÇLAR

Bu çalışmada, aralık sistemlerin ortak quadratik Lyapunov fonksiyonlarının varlığı problemi incelenmiştir. 2×2 ve 3×3 boyutlu aralık sistemler için Lyapunov ve Stein eşitsizliklerini sağlayan pozitif diyagonal çözümün varlığı ve $n \times n$ boyutlu aralık Z-matrisler ailesinin Hurwitz diyagonal kararlılığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Bunun yanısıra $n \times n$ boyutlu aralık ailenin Hurwitz diyagonal kararlılığına dair bir yeter koşul verilmiştir.

Sıfırı içermeme prensibine ve multilineer fonksiyonların ekstremal özelliklerine dayanarak transfer fonksiyonu bilinen kontrol edilebilen aralık sistemlere bir birinci mertebeden PI kontrolörü uygulanarak sistemi kararlı yapan oransal ve integral kazancı katsayılarını belirleyen bir algoritma oluşturulmuştur. Algoritmanın uygulanmasında, her zaman algoritmanın hızlı sonuç vermeyebildiği görülmüş ve bu durum örnekler üzerinde açıklanmıştır.

Dışa yaklaşım metodu kullanılarak kesikli zaman dinamik sistemlerin kararlılık sınırını veren bir sonuç elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Akyar, H., Büyükköroğlu, T., ve Dzhafaraov, V., "On stability of parametrized families of polynomials and matrices", ***Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*** (2010).

Arcak, M. ve Sontag, E., "Diagonal stability of a class of cyclic systems and its connection with the secant criterion", ***Automatica***, 42(9):1531-1537 (2006).

Aubin, J. P., "Optima and Equilibria", ***Springer***, Berlin, Heidelberg (1998).

Barmish, B. R., "New Tools for Robustness of Linear Systems", ***Macmillan***, New York (1994).

Bernstein, D. S., "Matrix mathematics : theory, facts, and formulas with application to linear systems theory", ***Princeton University Press***, Princeton, N.J. (2005).

Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., ve Keel, L. H., "Robust Control: The Parametric Approach", ***Prentice Hall***, Upper Saddle River (1995).

Bose, N. K., "Digital Filters Theory and Applications", ***Elsevier Science Publishing Co., Inc.***, North-Holland (1985).

Büyükköroğlu, T., "Common diagonal lyapunov function for third order linear switched system", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 236:3647-3653 (2012).

Cross, G. W., "Three types of matrix stability", ***Linear Algebra and its Applications***, 20:253-263 (1978).

Deng, M., Iwai, Z., ve Mizumoto, I., "Robust parallel compensator design for output feedback stabilization of plants with structured uncertainty", ***Systems and Control Letters***, 36(3):193-198 (1999).

Dorf, R. C. ve Bishop, R. H., "Modern Control Systems", ***Prentice Hall***, NJ (2008).

Dzhafarov, V. ve Büyükköroğlu, T., "On the stability of a convex set of matrices", ***Linear Algebra and its Applications***, 414:547-559 (2006).

Fleming, R., Grossman, G., Lenker, T., Narayan, S., ve Ong, S. C., "On schur d-stable matrices", ***Liner Algebra Appl.***, 279(10):39-50 (1998).

Gantmacher, F. R., "The Theory of Matrices", volume II, ***Chelsea Publishing Company***, New York (1959).

Horn, R. A. ve Johnson, C. R., "Matrix Analysis", ***Cambridge University Press***, Cambridge University Press (1985).

Johnson, C. R., "Sufficient condition for d-stability", ***J. Econom.***, 9(1):53-62 (1974).

Jury, E. I., "Theory and Applications of the z Transform Method", ***John Wiley***, New York (1960).

Kaszkurewicz, E. ve Bhaya, A., "Matrix diagonal stability in systems and computation", ***Birkhauser***, Boston (2000).

Khalil, H. K., "On the existence of positive diagonal p such that $PA + A^T P < 0$", ***IEEE Trans. Automat. Control***, AC-27(1):181-184 (1982).

Kharitonov, V. L., "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations", ***Differentsialnye Uravneniya***, 14:2086-2088 (1978).

Lancaster, P., "Theory of Matrices", ***N. Y. Academic Press***, New York (1969).

Liberzon, D. ve Tempo, R., "Common lyapunov functions and gradient algorithms", ***IEEE Transactions on Automatic Control***, 49(6):990-994 (2004).

Lyapunov, M. A., "Probleme general de la stabilite des mouvement", ***Ann. Fac. Sci. Toulouse***, 9:203-474 (1907).

Marden, M., "Geometry of Polynomials", ***American Mathematical Society, Providence***, R.I. (1966).

Mason, O. ve Shorten, R., "On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems", ***Linear Algebra and its Applications***, 413:13-23 (2006).

Mills, W. L., Mullis, C. T., ve Roberts, R. A., "Digitals filter realizations without over-

flow oscillations", ***IEEE Transactions on Acustic, Speech, and Signal Processing***, ASSP-26(4):334-338 (1978).

Narendra, K. ve Shorten, R., "Necessary and sufficient conditions for the existence of a common lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems", ***International Journal of Adaptive Control and Signal Processing***, 16:709-728 (2007).

Oleng, N. O. ve Narendra, K. S., "On the existence of diagonal solutions to the lyapunov equation for a third order system", In ***Proceedings of the American Control Conference***, volume 3, pages 2761-2766. IEEE (2003).

Pastravanu, O. ve Matcovschi, M., "Sufficient conditions for schur and hurwitz diagonal stability of complex interval matrices", ***Linear Algebra and its Applications***, 467:149-173 (2015).

Pastravanu, O. ve Voicu, M., "Generalized matrix diagonal stability and linear dynamical systems", ***Linear Algebra and its Applications***, 419(23):299-310 (2006).

Rohn, J., "Positive definiteness and stability of interval matrices", ***SIAM J. Matrix Anal.***, 15(1):75-184 (1994).

Singh, S. N. ve Coelho, A. R., "Nonlinear control of mismatched uncertain linear systems and application to control of aircraft", ***Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control***, 106:203-210 (1984).

Stein, P., "Some general theorems on iterants", ***J. Res. Natl. Bur. Stand.***, 48:82-83 (1952).

Taussky, O., "Matrices c with $c^n \to 0$", ***Journal of Algebra***, 1:5-10 (1964).

Ziolko, M., "Application of Lyapunov functionals to studying stability of linear hyperbolic systems", ***IEEE Trans. Automat.***, 35(10):1173-1176 (1990).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Bengi YILDIZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Elazığ / 30.01.1984

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar :

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Araştırma Görevlisi

İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Matematik Bölümü

Tel : 0228 212 18 47

E-Posta Adresi : bengi.yildiz@bilecik.edu.tr

Akademik Çalışmaları

-Yıldız, B., Büyükköroğlu, T., ve Dzhafarov, V. (2014). Common diagonal stability of second order interval systems. In *Proceedings of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO-2014)*, pages 223-227. SCITEPRESS. DOI: 10.5220/0005025902230227

-Dzhafarov, V., Büyükköroğlu, T., **Yıldız, B.** (2015). Diagonal Stability of Uncertain Interval Systems. In *Proceedings of the 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO-2015*), SCITEPRESS. (Accepted in 2015)

Tarih:…../……/……