

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ TÜREVLİ SÖNÜME SAHİP TEK VE İKİ SERBESTLİK DERECELİ
SİSTEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞENOL GÜMÜŞ

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

BİLECİK, 2024

10605450

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ TÜREVLİ SÖNÜME SAHİP TEK VE İKİ SERBESTLİK DERECELİ
SİSTEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞENOL GÜMÜŞ

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

BİLECİK, 2024

10605450

BEYAN

'Kesirli Türevli Sönüme Sahip Tek ve İki Serbestlik Dereceli Sistemlerin Yaklaşık Çözümleri ve Kararlılık Analizleri' adlı yüksek lisans tezi hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.		
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR	X
Destek alındı ise;		
Destekleyen kurum;		
Desteğin Türü	Proje Numarası	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)		
2- TÜBİTAK		
Diğer;.....		
ETİK KURUL onayı var ise;		
ETİK KURUL karar tarih/sayı:/.....	

Şenol GÜMÜŞ

...../.../2024

İmza

ÖN SÖZ

Yaşamımı sürdürdüğüm şu hayatta bana sevgi, saygı, güven ve iyi insan olmayı aşıl原因an aileme sonsuz teşekkür ederim, bununla birlikte yüksek lisans dönemim boyunca değerli eşim ve kıymetli evlatlarıma bana verdikleri destek için minnettarım ve çok değerli yüksek lisans tez danışmanım olan Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ ın bana vermiş olduğu çok kıymetli düşünce, destek ve tecrübelerinden dolayı teşekkür ederim.

Eğitimin tüm kademeleri boyunca ismini hatırladığım hatırlamadığım tüm öğretmenlerimize teşekkürü bir borç bilirim.

Şenol GÜMÜŞ

2024

ÖZET

KESİRLİ TÜREVLİ SÖNÜME SAHİP TEK VE İKİ SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ

Bu tez kapsamında, yapıların dinamik analizlerinde kritik bir parametre olan sönüm terimlerini içeren matematiksel modeller ele alınmıştır. Dinamik sistemler, hem tek serbestlik dereceli hem de iki serbestlik dereceli olarak ayrı ayrı değerlendirilmiş ve bu sistemlerin titreşim davranışları incelenmiştir. Modellerde özellikle, gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edebilmek amacıyla, kesirli türevli olarak modellenmiş olan sönümlere odaklanılmıştır. Kesirli türevlerin kullanılması, geleneksel tam sayı mertebeli türevlere göre daha geniş bir fenomeni modelleyebilme kapasitesine sahip olup, yapıların dinamik tepkilerini daha hassas bir şekilde tahmin etme olanağı sunmaktadır.

Tezde, bu sönüm modellerinin matematiksel çözümleri elde edilerek, bu çözümler üzerinden kararlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. Kararlılık analizleri, sistemin çeşitli parametreler altındaki davranışını ve olası dengesizliklerini ortaya koymakta olup, bu analizler yapıların güvenli tasarımı açısından kritik öneme sahiptir. Çözüm yöntemi olarak, doğrusal olmayan sistemler ve kesirli türevler içeren modeller için güçlü bir araç olan ve analitik çözümlerin zor olduğu durumlarda kullanılabilen bir pertürbasyon tekniği olan çok zaman ölçekli metot tercih edilmiştir. Bu metodun sağladığı avantajlarla, hem doğrusal olmayan etkilerin hem de kesirli sönüm terimlerinin dinamik sistemin davranışı üzerindeki etkileri analiz edilmiştir. Uygulama olarak, iki serbestlik dereceli sisteme ait matematiksel model ele alınmıştır. Serbest titreşim ve baskın rezonans genel çözümleri ile kararlı durum çözümleri elde edilmiştir. Kararlı durum çözümlerinin genel çözümler ile çakıştığı bölgeler grafiklerle sunulmuştur. α parametresinin çözümler üzerinde etkileri, zaman-deplasman grafikleri ve genlik-zaman grafiklerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Model, Sönüm, Çok Zaman Ölçekli Metot, Kesirli Türev, Kararlılık.

ABSTRACT

APPROXIMATE SOLUTIONS AND STABILITY ANALYSIS OF SINGLE AND TWO DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS WITH FRACTIONAL DAMPING

In this thesis, mathematical models, including damping terms, which are critical parameters in dynamic analyses of structures, are considered. Dynamic systems have been analyzed separately, considering both single-degree-of-freedom and two-degree-of-freedom systems, and their vibration behavior has been investigated. The models mainly focus on fractional-order damping to obtain more accurate results. Using fractional derivatives allows for a broader range of phenomena to be modeled compared to traditional integer-order derivatives, providing the ability to predict the dynamic responses of structures more precisely.

In the thesis, the mathematical solutions of these damping models are obtained, and stability analyses are performed based on these solutions. Stability analyses reveal the system's behavior under various parameters and possible instabilities, and these analyses are critical for the safe design of structures. As a solution method, the method of multiple scales, which is a powerful tool for nonlinear systems and models containing fractional derivatives and a perturbation technique that can be used in cases where analytical solutions are difficult, is preferred. With the advantages provided by this method, the effects of both nonlinear effects and fractional damping terms on the behavior of the dynamic system are analyzed. As an application, the mathematical model of the two-degree-of-freedom system is examined. Free vibration and primary resonance general solutions and steady-state solutions are obtained. The regions where the steady-state solutions coincide with the general solutions are presented with graphics. The effects of α parameter on the solutions are demonstrated with time-displacement and amplitude-time graphs.

Keywords: Mathematical Model, Damping, Multiple Time Scale Method, Fractional Derivative, Stability.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. PERTÜRBASYON METODU.....	6
3.1. Çok Zaman Ölçekli Metot.....	6
3.2. Uygulama Örnekleri.....	8
4. KESİRLİ SÖNÜMLÜ SİSTEMLER VE KARARLILIK ANALİZLERİ	11
4.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistem.....	11
4.2. İki Serbestlik Dereceli Sistem.....	15
5. SONUÇ.....	36
KAYNAKÇA.....	37

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1. Taipei 101'in ayarlanmış kütle sönümleyicisi ve kütle sönümleyicinin bina içindeki yerleşimi.....	12
Şekil 4.2. Sarkaca ait serbest cisim diyagramı.....	12
Şekil 4.3. İki kütle ve sönümleyiciden meydana gelen kütle-yay sistemi fiziksel modeline ait serbest cisim diyagramı.....	15
Şekil 4.4. Non-rezonans durumunda (4.26) – (4.27) sisteminin genlik-zaman grafiği.....	18
Şekil 4.5. Non-rezonans durumunda (4.26) – (4.27) sisteminin u_1 ve u_2 yer değişimleri grafiği.....	19
Şekil 4.6. (4.26) – (4.27) sisteminin rezonans durumuna ait genlik – zaman grafikleri.....	23
Şekil 4.7. (4.54) – (4.55) sisteminin u_1 ve u_2 yer değişimleri ($\Omega \approx \omega_2$ durumu).....	27
Şekil 4.8. (4.54) – (4.55) sistemine ait A_1 ve A_2 zamana bağlı değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_2$ durumu).....	28
Şekil 4.9. (4.54) – (4.55) sistemine ait çözümler ile kararlı çözüm durumu karşılaştırılması ($\Omega \approx \omega_2$ durumu).....	29
Şekil 4.10. (4.54) – (4.55) sistemine ait A_1 ve A_2 zamana bağlı değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_1$ durumu).....	33
Şekil 4.11. (4.54) – (4.55) modelinin u_1 ve u_2 yer değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_1$ durumu).....	34
Şekil 4.12. (4.54) – (4.55) sistemine ait çözümler ile kararlı çözüm durumu karşılaştırılması ($\Omega \approx \omega_1$ durumu).....	35

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
${}_a D_t^\alpha$: Riemann-Liouville kesirli mertbe türevi
Γ	: Gama fonksiyonu
∂	: Kısmi türev
T_n	: Zaman ölçeği
σ_n	: Ayar parametresi
k_1, k_2	: Yay katsayısı
$A_n, \overline{A_n}$: Karmaşık eşlenik genlikler
Ω	: Dış zorlama frekansı
f_1, f_2	: Dış zorlama genliği
$\Re \setminus \Im$: Reel ve sanal
ω_n	: Doğal frekanslar
$\hat{\mu}$: Sönüm katsayısı
ε	: Pertürbasyon parametresi

1. GİRİŞ

Yapıların dinamik davranışlarının doğru bir şekilde analiz edilmesi, mühendislik tasarımlarında güvenlik ve performans açısından büyük önem taşır. Bu bağlamda, sönüm terimlerini içeren matematiksel modellerin geliştirilmesi, sistemlerin gerçek dünya koşullarında nasıl davranacağını anlamak için kritik bir bileşen olarak öne çıkar. Geleneksel modellerin ötesine geçerek, kesirli türevli sönümler gibi daha karmaşık matematiksel yaklaşımlar, sistemlerin dinamik tepkilerini daha hassas bir şekilde tahmin etme olanağı sunar. Bu tez, kesirli türevli sönümler kullanılarak modellenmiş farklı serbestlik derecelerine sahip dinamik sistemlerin davranışlarını inceleyerek, bu tür modellerin mühendislik uygulamalarındaki potansiyelini değerlendirmeye amaçlamaktadır.

Son yıllarda, kesirli hesaplama, klasik tamsayı mertebeli modellerle tam olarak temsil edilemeyen sistemleri modellemek için mühendislik, fizik, biyoloji, mekanik ve finans gibi birçok alanda etkili çözümler sunan güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Kesirli hesaplama, geleneksel tam sayı mertebeli türev ve integral kavramlarının bir genelleştirilmesidir ve sistemlerin daha karmaşık dinamiklerini modellemeye olanak tanır. Kesirli türevler ve integraller, bellek ve geçmiş bağımlılığı gibi özelliklere sahip süreçleri daha doğru bir şekilde modelleyebilir, bu da özellikle sönüm ve yayılım süreçlerinin analizinde büyük önem taşır. Kesirli hesaplama, sistemlerin geçmişe bağımlılığını göz önünde bulundurarak, daha gerçekçi ve hassas sonuçlar elde edilmesine olanak tanır. Kesirli hesaplama teorisi ve uygulamalarının ayrıntılı açıklamaları (Podlubny, 1999; Debnath, 2003; Miller ve Ross, 1993)' de verilmiştir.

Genellikle diferansiyel denklem ve denklem sistemleri ile modellenen bilimsel ve fiziksel alanda karşılaşılan problemlerde lineer olmama, değişken katsayıya sahip olma gibi analitik çözümü zorlaştıran çeşitli zorluklarla karşılaşılabilir. Modeller, analitik çözümler bulunamadığında çeşitli yaklaşımlar ve sayısal tekniklerle çözülmektedir. En önemli yaklaşım yöntemlerinden biri, yaklaşık analitik çözümler sağlayan bir teknik olan pertürbasyon yöntemidir. Diferansiyel denklemler için pertürbasyon teorisinin kökenleri, Poincare'nin gök mekaniğindeki zorluklardan kaynaklanan adi diferansiyel denklem sistemleri için yaklaşık çözümler geliştirdiği 19. yüzyıla kadar uzanır (Poincare, 1959). Asıl probleme bağlı daha basit bir problemi ele almak ve ardından iki problem arasındaki farkı açıklayan küçük terimleri ekleyerek çözümü iyileştirmek prensibine dayanır. Genellikle bu küçük terimler, basit problemden sapmayı ölçen küçük bir parametrede (ε) kuvvet serisi şeklinde ifade edilir. Başlangıçta, pertübe edilmemiş problem (yani, $\varepsilon = 0$ olduğunda) çözülür ve daha sonra bu çözümü iyileştirmek için küçük düzeltmeler yapılır ve sonunda asimptotik bir seri olarak ifade

edilen bir yaklaşık çözüm elde edilir (Nayfeh, 2011; Murdock, 1999; Holmes, 2013). Ancak, bu yaklaşımlar genellikle uzun zaman ölçeklerinde doğruluktan yoksundur. Bu sorunu gidermek için, araştırmacılar çok zaman ölçekli pertürbasyon yöntemini geliştirdiler. Bu yöntem, uzun zaman dilimleri boyunca geçerli olan daha güvenilir yaklaşımlar üretmek için tasarlandı. Çok zaman ölçekli metodun tarihsel gelişimi hakkında daha fazla tarihsel gelişimi hakkında daha fazla ayrıntı için (Kevorkian ve Cole, 1996; Nayfeh, 2008; Bender ve Orszag, 2013) referanslarına ve bu referanslarda yer alan kaynaklara bakılabilir. Çok zaman ölçekli metod, bir pertürbasyon tekniği olarak, birçok matematiksel probleme uygulanabilir. Bu yöntem, özellikle zayıf doğrusal olmayan, sönümlü ve zorlamalı dinamik sistemler gibi problemlerin çözümünde kullanılır. Çok zaman ölçekli metod ile doğrusal olmayan frekanslar ve kararlılık şartları belirlenebilir. Ayrıca, bu yöntem iç rezonanslar, parametrik ve birincil rezonans durumlarının analizine de olanak tanır.

Bu tez çalışmasında, kesirli türev ile modellenmiş sönüm terimi içeren matematiksel modeller incelenmiştir. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Tezde ele alınan sistemlerin yaklaşık analitik çözümleri Çok Zaman Ölçekli metod kullanılarak elde edilmiş ve bu çözümler üzerinden kararlılık analizleri yapılmıştır. Bu yöntem ile ilgili ayrıntılar ve uygulamalar üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü bölümde, hem tek serbestlik dereceli hem de iki serbestlik dereceli dinamik sistemler ele alınmış ve bu sistemlerin titreşim davranışları değerlendirilmiştir. İki serbestlik dereceli sisteme ait matematiksel modelin serbest titreşim ve baskın rezonans durumları için genel ve kararlı durum çözümleri elde edilmiştir. Kararlı durum çözümlerinin genel çözümlerle örtüştüğü bölgeler grafiklerle sunulmuş ve parametrelerin çözümler üzerindeki etkileri zaman-deplasman ve genlik-zaman grafiklerinde gösterilmiştir. Son bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan temel kavramlar yer almaktadır.

Tanım 2.1. (Lineer Diferansiyel Denklem) $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ve g, t 'nin fonksiyonları olmak üzere,

$$b_0(t)y(t)^{(n)} + b_1(t)y(t)^{(n-1)} + b_2(t)y(t)^{(n-2)} + \dots + b_n(t)y(t) = g(t)$$

denkleminde $b_0(t) \neq 0$ olmak üzere n . mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. $g(t) = 0$ ise denklem lineer homojen diferansiyel denklem, $g(t) \neq 0$ ise lineer homojen olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. (Diferansiyel Denklem Sistemi) Diferansiyel denklem sistemi, iki veya daha fazla fonksiyonun türevlerini içeren ve bu fonksiyonlar arasındaki ilişkileri tanımlayan diferansiyel denklemlerin oluşturduğu kümeye denir. Bu sistemler genellikle fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda matematiksel modeller oluşturmak için kullanılır.

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $x \in \mathbb{R}$ dir ve $f_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli kısmi türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır. Bu sistemde (y_1, y_2, \dots, y_n) bağımlı değişkenlerdir ve x ise bağımsız değişkendir. Her bir denklem, bağımlı değişkenlerin türevlerini ve diğer bağımlı değişkenleri içerir.

Tanım 2.3. (Gama Fonksiyonu) Gama fonksiyonu Euler tarafından

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall z > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.4. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) Her sonlu (a, t) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olmak üzere ve $n \in \mathbb{N}^+$, $n - 1 \leq \alpha < n$, $\alpha > 0$ olmak üzere $t > a$ için reel bir f fonksiyonunun α . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} dt$$

şeklinde tanımlanmıştır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.5. (Üstel Fonksiyonların Kesirli Türevi)

$${}_{0+} D_t^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^\alpha e^{-st}}{\alpha + i\omega} ds \quad (2.1)$$

Burada i karmaşık sayı $\sqrt{-1}$ 'i göstermektedir. Eğer α değeri birime çok yakın olduğunda, kesirli parametre α 'nın büyüklüğü yeterince küçükse ve oldukça büyük ω frekansları için (2.1) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim ihmal edilebilir, dolayısıyla

$${}_{0+} D_t^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t}$$

olmaktadır (Rossikhin, 2010).

Buradan sonra α . mertebeden kesirli türev, işlem kolaylığı olması açısından D^α şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.6. (Mertebe Sembolü) a ve b reel fonksiyonlar olsun. Eğer, $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{a(\beta)}{b(\beta)} = A$ ve $0 < |A| < \infty$ ise $\beta \rightarrow 0$ iken $f(\beta) = O[b(\beta)]$ olarak yazılır. Burada a fonksiyonu b fonksiyonunun $\beta \rightarrow 0$ iken O altındaki görüntüsüdür (Nayfeh, 2011).

$$\text{Örneğin; } \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta)}{\beta} = 1 \text{ olduğunda, } \sin(\beta) = O(\beta) \text{ dir.}$$

Tanım 2.7. (Seküler Terim) Pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözümü bulunan bir denklemin $O(1)$ mertebesindeen itibaren her bir çözümün bir sonraki mertebeye yerine yazılması sonucunda, zaman değişkeni t arttıkça sınırsız artışa neden olan terimler seküler terim olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. (Serbestlik Dereceli Sistem) Bir sistemdeki serbestlik derecesi, hareketi tanımlayan birbirinden bağımsız değişkenlerin sayısını ifade eder. Eğer sistemde tek bir bağımsız değişken varsa, bu sistem tek serbestlik dereceli olarak adlandırılır; eğer iki bağımsız değişken varsa, sistem iki serbestlik dereceli olarak adlandırılır.

Tanım 2.9. (Serbest ve Zorlanmış Titreşimler) Sistem dışarıdan herhangi bir etki olmadan başlangıç titreşimi ile salınıyorsa, buna serbest titreşim denir. Ancak sisteme belirli bir dış kuvvet uygulanarak salınıyorsa, bu tür sistemlere zorlanmış titreşim denir.

Tanım 2.10. (Sönümsüz ve Sönümlü Titreşimler) Titreşim sırasında herhangi bir enerji kaybı yoksa bu titreşime sönümsüz titreşim denir, fakat enerji kaybı var ise bu titreşime sönümlü titreşim denir.

Tanım 2.11. (Rezonans) Rezonans, bir sistemin uyarıldığı frekans ile sistemin doğal frekansının aynı veya çok yakın olması durumunda, sistemde oluşan titreşim genliklerinin çok büyük değerlere ulaşması olayıdır.

Tanım 2.12. (Limit Döngüsü) Doğrusal olmayan mekanik sistemlerde, salınım genliğinin başlangıç noktasından bağımsız olduğu sürekli salınımlar gösteren ve bozulma olmaksızın kapalı bir yörünge oluşturan durumdur. Kararlı limit döngülerinde, sistem hareketi, başlangıç noktasına bakılmaksızın bu döngüye ulaşır; kararsız olanlarda ise en küçük bir bozulma, sistemi döngüden uzaklaştırır.

3. PERTÜRBASYON METODU

Pertürbasyon metodu, analitik olarak çözülemeyen bir problemi, bu probleme benzer fakat çözümünü bilinen basit bir problem üzerinden ele alarak yaklaşık bir çözüm bulmak için kullanılan bir matematiksel tekniktir. Çözümü bilinen bir probleme küçük terimler eklenerek elde edilen yeni matematiksel model genellikle analitik olarak çözülemez. Bu tür problemlerin çözümleri, pertürbasyon metodu yardımıyla yaklaşık olarak elde edilebilir.

Bu yöntemde, istenen çözüm, bilinen çözümün etrafında küçük bir parametre kullanılarak bir kuvvet serisi ile ifade edilir. Kuvvet serisinin ilk terimi, bilinen problemin çözümüdür; diğer terimler ise orijinal problemde sapmayı yansıtarak, çözümdeki değişikliklerin boyutunu gösterir.

Pertürbasyon yöntemi, doğrusal olmayan sistemlerde ve analitik çözümleri zor olan problemler için özellikle kullanışlıdır. Küçük sapmaların sistem üzerindeki etkilerini incelemeye imkan tanıyan bu yöntem, mühendislik, fizik ve matematik alanlarında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ayrıca, dinamik sistemlerin kararlılığının incelenmesinde ve özellikle çok zaman ölçekli metot yöntemiyle dış etkilerin sistemler üzerindeki etkilerinin analizinde de oldukça kullanışlıdır.

3.1. Çok Zaman Ölçekli Metot

Bu tez çalışmasında pertürbasyon yöntemlerinden biri olan çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Bu yöntem pertürbasyon teorisinde kullanılan önemli bir tekniktir ve özellikle zamanla değişen sistemlerin dinamik analizinde etkilidir. Bu yöntem, farklı büyüklüklerde zaman ölçeklerine sahip sistemleri incelemek için geliştirilmiştir. Karmaşık sistemlerde, davranışlar hem kısa hem de uzun zaman aralıklarında farklılık gösterebilir. Bu yöntemde, çözüm birkaç farklı zaman ölçeğine bölünerek her bir zaman ölçeğinde sistemin davranışı ayrı ayrı ele alınır. Küçük parametrelerle ifade edilen bu zaman ölçekleri, kısa dönemli hızlı dinamikleri ve uzun dönemli yavaş değişimleri anlamaya olanak tanır. Özellikle doğrusal olmayan sistemlerde rezonans, kararlılık ve küçük dışsal kuvvetlerin etkilerini analiz etmekte kullanılan çok zaman ölçekli metot, doğrusal olmayan sistemlerde çözümün farklı zaman ölçeklerinde nasıl geliştiğini daha hassas bir şekilde inceleme imkanı sağlar.

Çözüm fonksiyonu

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.1)$$

formunda ifade edilsin. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$) pertürbasyon yöntemi için gerekli olan küçük parametre, u yaklaşık analitik çözüm, u_0, u_1, u_2 sırasıyla $O(1), O(\varepsilon), O(\varepsilon^2)$ mertebe çözümlerini ifade etmektedir.

Pertürbasyonda çözüm fonksiyonun seri açılımında belli sayıda terim alınarak çözüm yapılır. Örneğin ilk iki terim, yani $u_0 + \varepsilon u_1$, dikkate alınarak çözüm bulunabilmektedir.

Çok zaman ölçekli metotta çözümün zaman bağımlılığı

$T_0 = t \rightarrow$ hızlı zaman ölçeği

$T_1 = \varepsilon t \rightarrow$ yavaş zaman ölçeği

$T_2 = \varepsilon^2 t \rightarrow$ daha yavaş zaman ölçeği

\vdots

$T_n = \varepsilon^n t \rightarrow$ daha da yavaş zaman ölçeği

şeklinde. Dolayısıyla zaman parametresine göre

$$u(t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n; \varepsilon)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu aranmaktadır. Çözümün pertürbatif açılımı

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) + \dots \quad (3.2)$$

olmaktadır.

Böylece t 'nin bir fonksiyonu olan u çözümü, $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ terimlerinin bir fonksiyonuna dönüşmektedir. Türev ifadeleri $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ lere bağlı ve $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ zamana göre türevler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \\ &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon \alpha D^{\alpha-1} D_1 + \dots \quad (3.5)$$

şeklinde. Burada t ve ε bağımsız değişkenler iken; $T_i, (i=1,2,\dots)$ ler de bu iki değişkenin fonksiyonudurlar ve bu nedenle bağımlı değişkenlerdir.

3.2. Uygulama Örnekleri

Bu kısımda çok zaman ölçekli metot ile ilgili çeşitli uygulamalar verilmiştir.

Örnek 3.2.1.

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u = 0 \quad (3.6)$$

(3.2) - (3.4) eşitlikleri (3.6) denkleminde yerine yazılarak mertebelendirilir ise

$$O(1): D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2D_0 u_0 \quad (3.8)$$

elde edilir. Lineer homojen (3.7) denkleminin çözümü

$$u_0 = A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0} \quad (3.9)$$

formunda önerilir. Burada \bar{A} , A 'nın karmaşık eşlenik fonksiyonudur. (3.9) çözümü (3.8) denkleminde uygulandıktan sonra

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 (A e^{iT_0} + k.e.) - 2D_0 (A e^{iT_0} + k.e.) \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada $k.e.$ karmaşık eşleniği ifade etmektedir. (3.10) denkleminde seküler terimler ayıklanıp (yani e^{iT_0} ve e^{-iT_0} katsayılarına sahip olan terimler ayıklanıp) sıfıra eşitlenmesi ile çözülebilirlik şartı

$$D_1 A + A = 0 \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. $A(T_1)$ fonksiyonunun

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}$$

kutupsal formu göz önünde bulundurularak ve (3.11) çözülebilirlik şartından

$$\frac{1}{2} a'(T_1) + i \frac{1}{2} a(T_1) \beta'(T_1) + \frac{1}{2} a(T_1) = 0 \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (3.12) eşitliğinde reel ve sanal kısımlar ayrıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\Re: \frac{1}{2}a'(T_1) + \frac{1}{2}a(T_1) = 0$$

$$\Im: \frac{1}{2}a(T_1)\beta'(T_1) = 0.$$

Buradan,

$$a'(T_1) + a(T_1) = 0 \quad (3.13)$$

$$a(T_1)\beta'(T_1) = 0 \quad (3.14)$$

olur. Burada (3.13) denkleminde $a(T_1) = a_0 e^{-T_1}$ ve (3.14) denkleminde $\beta = \beta_0$ elde edilir.

Bu değişkenlere göre u_0

$$u_0 = a_0 e^{-T_1} \cos(T_0 + \beta_0) \quad (3.15)$$

şeklinde olur. Elde edilen (3.15) denklemini, (3.2)'de yerine yazılırsa,

$$u = a_0 e^{-\varepsilon t} \cos(t + \beta_0)$$

çözümü elde edilir (Küzün, 2024).

Örnek 3.2.2. İkinci mertebeden kübik non-lineer Duffing denklemini aşağıdaki gibidir:

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (3.16)$$

(3.2)-(3.4) eşitlikleri (3.16) denkleminde yerine yazıldıktan sonra denklem mertebelere ayrılır ise

$$O(1) : D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.17)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada (3.17) lineer homojen denkleminin çözümü

$$u_0 = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}$$

formunda alınır ve (3.18) denkleminde uygulanırsa,

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 (A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}) - (Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0})^3$$

elde edilir. Bu denklemde seküler terimlerin yok edilmesi sonucu

$$-2iD_1 A - 3A^2 \bar{A} = 0$$

eşitliği elde edilir.

$$A = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}$$

olduğundan, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -2i \left(\frac{1}{2}a'(T_1)e^{i\beta(T_1)} + i\frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}\beta'(T_1) \right) \\ & -3\frac{1}{4}a^2(T_1)e^{2i\beta(T_1)}\frac{1}{2}a(T_1)e^{-i\beta(T_1)} = 0. \end{aligned}$$

Burada (') sembolü T_1 ' e göre türevi temsil etmektedir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$-\frac{3}{4}a^3(T_1) + 2a(T_1)\beta'(T_1) - 2ia'(T_1) = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte reel ve sanal kısımları ayırdığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\Re : -\frac{3}{4}a^3(T_1) + 2a(T_1)\beta'(T_1) = 0 \quad (3.19)$$

$$\Im : a'(T_1) = 0. \quad (3.20)$$

Burada (3.20) denkleminde $a(T_1)=a_0$ ve (3.19) denkleminde $\beta(T_1) = \frac{3}{8}a_0^2T_1 + \beta_0$ elde edilir.

Bu değişkenlere göre u_0 çözümü

$$u_0 = \frac{1}{2}a_0 e^{i(T_0 + \frac{3}{8}a_0^2T_1 + \beta_0)} + k.e. \quad (3.21)$$

olmaktadır. Elde edilen (3.21) çözümü, (3.2)'de yerine yazılırsa aşağıda çözüm elde edilmektedir

$$u = a_0 \cos \left(t + \frac{3}{8}a_0^2\epsilon t + \beta_0 \right)$$

şeklinde bulunur (Küzün, 2024).

4. KESİRLİ SÖNÜMLÜ SİSTEMLER VE KARARLILIK ANALİZLERİ

Yüksek binaların yaygınlaşması ile birlikte deprem, rüzgâr, vb. dış etkilerin binalar üzerinde etkileri de anlamlı hale gelmiştir. Özellikle de geleneksel inşaat malzemelerinin yerine daha hafif ve yüksek dayanımlı yeni nesil malzeme kullanımları yapıların eskisinden daha az sönümlenmesine sebep olmuştur. Modern (Hafif) binaların narin (ince) yapısı ve yükseklik artışı ile sönümlenmenin azalması sebebiyle; deprem, rüzgâr vb. durumlarda binanın yaptığı salınımın kabul edilebilir sınırlar içerisinde kalması önem arz etmektedir. Çünkü bina salınımı hem yapı bütünlüğünün korunmasını hem de binalarda yaşayan insanların yaşam kalitesini etkilemektedir. Salınım etkilerin minimuma indirilmesi ile ilgili çalışmaların önemi artmış ve çalışmalar hız kazanmış, çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Binaların salınımının uygun sınırlarda kalması için sertlik, doğal sönümleme ve çeşitli ek sönümleme türleri araştırılmıştır. Mekanik sönümleyiciler ile titreşim kontrolü yaygınlaşmıştır.

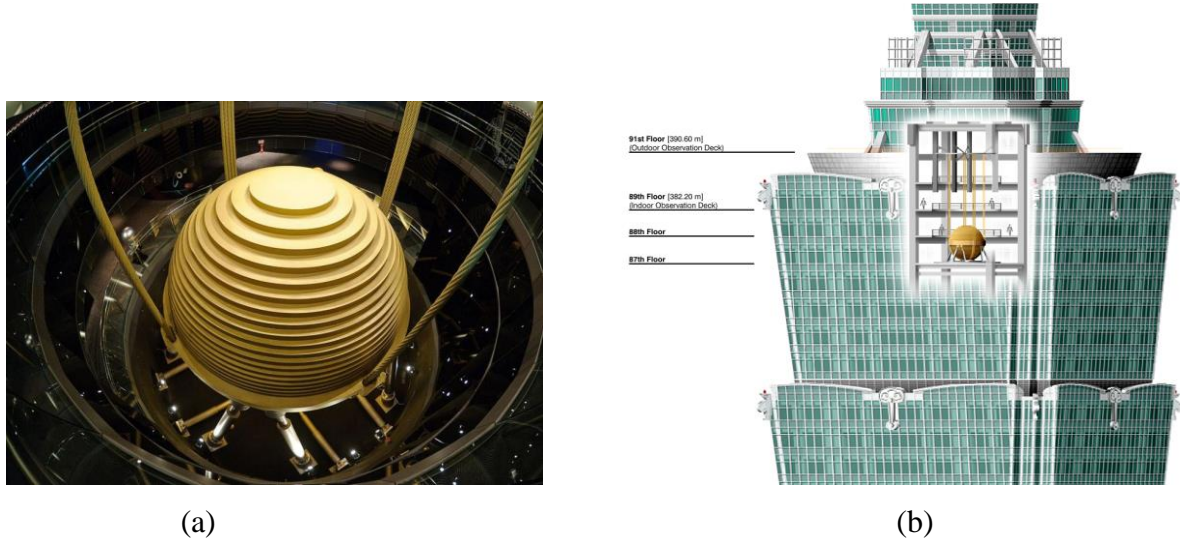
Taipei 101, Burj Khalifa, Petronas kuleleri, Shanghai Dünya Finans Merkezi, vb. Dünyanın En Yüksek Binaları (The World's Tallest Buildings/Super-Tall Buildings gibi isimlendirilen) olarak bilinen yapılar, hem yeni nesil yapı malzemeleriyle hem de yüksek-narin binalar olarak inşa edilmiştir. Bu binalarda çeşitli dinamik titreşim sönümleyiciler kullanılmıştır ve en yaygın bilinenlerden biri ise ayarlanmış kütle sönümleyicilerdir (tuned mass damper) (Gutierrez ve Adeli, 2013; Li vd., 2011; Kourakis, 2007; Poon vd., 2004).

4.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistem

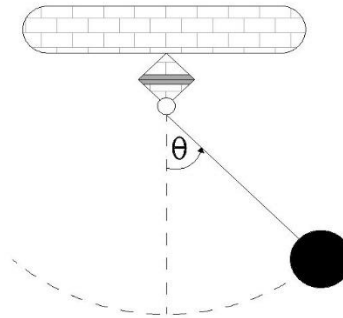
Tek serbestlik dereceli sistem (SDOF), genellikle mühendislikte ve titreşim analizinde temel bir model olarak kullanılır. Deprem, rüzgar veya diğer dış kuvvetler altındaki yapıların dinamik davranışlarını anlamak ve analiz etmek için bir araçtır. SDOF modelinin basitliği, daha karmaşık sistemlerin anlaşılmasına yönelik ilk adım olarak işlev görür, özellikle yapıların titreşim ve kararlılık analizlerinde yaygın olarak uygulanır.

Tek serbestlik dereceli sistemlerin (SDOF) sağladığı basit ama etkili analiz yöntemi, özellikle yüksek yapılar gibi karmaşık yapıların dinamik davranışlarını anlamada büyük önem taşır. Taipei 101 gibi gökdelenlerde, bu sistemler kullanılarak yapının doğal frekansları ve titreşim özellikleri belirlenir. Dış kuvvetlerin etkilerini azaltmak amacıyla kullanılan tek kütleli ayarlanmış kütle sönümleyici sistemleri, bu tür analizlerin temelini oluşturur. Taipei 101 binası, bu teknolojiye sahip en iyi bilinen örneklerden biridir ve burada kullanılan ayarlanmış kütle sönümleyici, fiziksel olarak bir sarkaç (pendulum) sistemi olarak modellenmiştir (Gutierrez ve Adeli, 2013; Poon vd., 2004). Şekil 4.1. (a)–(b) de sönümleyicinin bina içerisinde yerleşimi görülmektedir. Taipei 101'de bulunan 728 tonluk

küre, rüzgarın ve sismik aktivitenin gökdelen üzerindeki etkilerine karşı koymak için tasarlanmış bir sönümleyicidir, binanın deprem ve rüzgar yükleri altında oluşabilecek titreşimlerini sönümleyerek yapının stabilitesini artırmaktadır.



Şekil 4.1. (a) Taipei 101' in ayarlanmış kütle sönümleyicisi (b) Kütle sönümleyicisinin bina içindeki yerleşimi.



Şekil 4.2. Sarkaca ait serbest cisim diyagramı.

Şekil 4.2. de ise sarkaç sisteminin matematik modeli için serbest cisim diyagramı verilmiştir. Sarkacın matematik modeli ikinci mertebeden diferansiyel denklem ile verilmektedir. (Sınır vd., 2021) çalışmasında sarkaç sistemi kesirli türevli sönüme sahip non-linear diferansiyel denklem olarak modellenmiş ve kesirli türev mertebesi α 'nın çözümler üzerinde etkileri incelenmiştir. Bu model, Örnek 4.1.1. de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Örnek 4.1.1. Tek serbestlik derecesine sahip sistemlerin salınımlarını temsil eden non-linear kesirli türeve sahip matematik model aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{u} + 2\hat{\mu}D^\alpha(u) + \omega_0^2 \sin(u) = 0. \quad (4.1)$$

Burada u salınım yapan sarkacın açısı, ω_0 sarkacın doğal frekansı, $\hat{\mu}$ sönüm katsayısıdır.

Non-lineer etkileri hesaba katarak $u = 0$ civarında $\sin(u)$ 'nin açılımı yapıp ilk iki terim alındığında (4.1) denklemi

$$\ddot{u} + 2\hat{\mu}D^\alpha(u) + \omega_0^2\left(u - \frac{1}{6}u^3\right) = 0 \quad (4.2)$$

denklemine dönüşür. Burada sönüm teriminin etkisi çok küçük kabul edilmiştir. Dolayısıyla denklemde sönüm terimi ε^2 mertebesinde yer alacaktır, yani $\hat{\mu} = \varepsilon^2\mu$ dür.

(4.2) için u çözüm fonksiyonu

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots \quad (4.3)$$

şeklinde seriye açılımsın. $T_n = \varepsilon^n t$ ve $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ olmak üzere zaman türevlerine ilişkin bağıntılar aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon(\alpha D^{\alpha-1} D_1) + \dots, \quad (4.6)$$

(4.3)-(4.6) ifadeleri (4.2) denkleminde yerine yazılıp ε 'un ilk üç mertebesi dikkate alınarak

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$O(\varepsilon^2) : D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 \quad (4.8)$$

$$O(\varepsilon^3) : D_0^2 u_3 + \omega_0^2 u_3 = -2D_0 D_1 u_2 - D_1^2 u_1 - 2D_0 D_2 u_1 - 2\mu D^\alpha u_1 + \frac{\omega_0^2}{6} u_1^3 \quad (4.9)$$

eşitlikleri elde edilmektedir. (4.7) denklemi

$$u_1 = A_1(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (4.10)$$

genel çözüm formuna sahiptir. (4.10), (4.8)'de yerine yazıldığında

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2i\omega_0 D_1 A_1 e^{i\omega_0 T_0} + k. e. \quad (4.11)$$

elde edilir. Eşitlik (4.11)'teki seküler terimlerin yok edilmesi ile

$$D_1 A_1 = 0 \quad (4.12)$$

denklemi bulunur. Burada (4.12)'ün $A_1 = A_1(T_2)$ çözümü elde edilir. (4.11) denklemi

$$u_2 = A_2(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_2(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (4.13)$$

genel çözüm formuna sahiptir. (4.13), (4.9)'de yerine yazıldığında,

$$D_0^2 u_3 + \omega_0^2 u_3 = -2i\omega_0 D_1 A_2 e^{i\omega_0 T_0} - 2i\omega_0 D_2 A_1 e^{-i\omega_0 T_0} - 2\mu(i\omega_0)^\alpha A_1 e^{i\omega_0 T_0} + \frac{\omega_0^2}{2} A_1^2 \bar{A}_2 e^{i\omega_0 T_0} + k.e. + S.O.T. \quad (4.14)$$

elde edilir. ‘S.O.T.’ seküler olmayan terimleri temsil etmektedir. (4.14)’deki seküler terimlerin yok edilmesi ile

$$D_1 A_2 + D_2 A_1 - i\mu\omega_0^{\alpha-1} i^\alpha A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (4.15)$$

bulunur ve burada,

$$i^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

açılımı dikkate alındığında

$$D_1 A_2 + D_2 A_1 - i\mu\omega_0^{\alpha-1} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (4.16)$$

denklemini elde edilir. $D_1 A_2 = 0$ olduğu için $A_2 = A_2(T_2)$ olarak elde edilir. Buradan (4.16) eşitliği

$$D_2 A_1 - i\mu\omega_0^{\alpha-1} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (4.17)$$

şeklinde yazılır. $A_1(T_2)$ fonksiyonunun

$$A_1(T_2) = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\beta(T_2)} \quad (4.18)$$

kutupsal formu göz önünde bulundurularak ve eşitlik (4.17)’den,

$$D_2 a + iaD_2 \beta - i\mu\omega_0^{\alpha-1} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) a + \frac{i\omega_0}{16} a^3 = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. Elde edilen (4.19) denklemini reel ve imajiner kısımlara ayrıldığında,

$$\Re: D_2 a + \mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) a = 0 \quad (4.20)$$

$$\Im: aD_2 \beta - \mu\omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) a + \frac{i\omega_0}{16} a^3 = 0 \quad (4.21)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.20) ve (4.21) diferansiyel denklemlerin çözümleri hesaplandığında

$$a(T_2) = a_0 e^{-\mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) T_2} \quad (4.22)$$

ve

$$\beta(T_2) = \frac{\omega_0 a_0^2 e^{-2\mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) T_2}}{32 \mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} + \mu\omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) T_2 + \beta_0 \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Bulunan (4.22) ve (4.23) sonuçları (4.18)' de yerine konularak ve

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad \text{ve} \quad T_2 = \varepsilon^2 t,$$

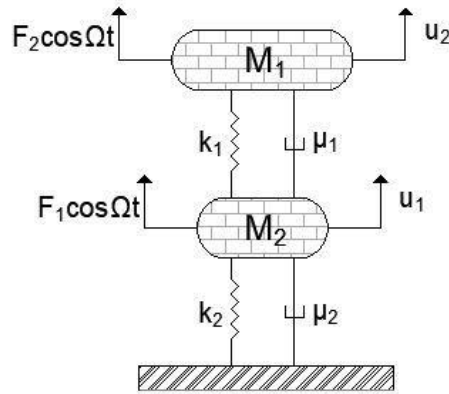
ifadeleri dikkate alınarak (4.2) denkleminin çözümü,

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon a_0 e^{-\mu \omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \varepsilon^2 t} e^{i\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 a_0^2}{32} \frac{-2\mu \omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \varepsilon^2 t}{\mu \omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} + \mu \omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \varepsilon^2 t + \beta_0\right)} + O(\varepsilon^3) \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur (Sınır vd., 2021).

4.2. İki Serbestlik Dereceli Sistem

Literatürde iki ve daha fazla kütlelen oluşan (iki ve çok serbestlik dereceli sistem) ayarlanmış kütle sönümleyiciler de modellenmiştir (Gutierrez ve Adeli, 2013; Takewaki vd., 2012). Bu çalışmada, iki serbestlik dereceli ayarlanmış kütle sönümleyici, kesirli türevli non-linear olarak modellenmiştir. Şekil 4.3. de iki kütle ve sönümleyiciden meydana gelen kütle-yay sistemi fiziksel modeline ait serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Matematiksel model ikinci mertebeden non-linear adi diferansiyel denklem sistemidir ve kesirli türev içermektedir. Kesirli türevli terim sönüm terimidir.



Şekil 4.3. İki kütle ve sönümleyiciden meydana gelen kütle-yay sistemi fiziksel modeline ait serbest cisim diyagramı

Örnek 4.1.2.

Aşağıdaki matematiksel model ele alınsın.

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\hat{\mu}_1 D^\alpha u_1 + \alpha_1 u_1 u_2 \quad (4.26)$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\hat{\mu}_2 D^\alpha u_2 + \alpha_2 u_1^2 \quad (4.27)$$

ω_n , ($n = 1,2$) doğal frekansları, $\hat{\mu}_n$, ($n = 1,2$) sönüm katsayılarını temsil etmektedir. α_1 ve α_2 sabit katsayılardır. (4.26) - (4.27) sisteminin çözümü

$$u_1 = \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots \quad (4.28)$$

$$u_2 = \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots \quad (4.29)$$

şeklinde seriye açılınsın. Burada sönüm teriminin etkisi küçük kabul edildiği için sönüm terimi ε mertebesinde kabul edilecektir. Yani $\hat{\mu}_j = \varepsilon \mu_j$, $j = 1,2$ dir. Ayrıca $T_n = \varepsilon^n t$ olmak üzere zaman türevlerine ilişkin bağıntılar

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (4.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (4.31)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon(\alpha D^{\alpha-1} D_1) + \dots, \quad (4.32)$$

gibidir.

(4.28) - (4.32) eşitliklerini (4.26) ve (4.27) da yerlerine yazılması halinde

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots) (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) + \omega_1^2 (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) \\ = -2\varepsilon \mu_1 (D^\alpha + \varepsilon \alpha D^{\alpha-1} D_1 + \dots) (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) \\ + \alpha_1 (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots) (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) + \omega_2^2 (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\ = -2\varepsilon \mu_2 (D^\alpha + \varepsilon \alpha D^{\alpha-1} D_1 + \dots) (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\ + \alpha_2 (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

ε' nun ilk iki mertebesi dikkate alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$O(\varepsilon)$ mertebesi:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} &= 0 \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$O(\varepsilon^2)$ mertebesi:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 D_1 u_{11} - 2\mu_1 D^\alpha u_{11} + \alpha_1 u_{11} u_{21} \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2D_0 D_1 u_{21} - 2\mu_2 D^\alpha u_{21} + \alpha_2 u_{11}^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

burada $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ dir.

(4.33) sisteminin çözümleri aşağıdaki formda yazılabilmektedir,

$$\begin{aligned} u_{11} &= A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + k.e. \\ u_{21} &= A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + k.e. \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.35) denklemleri (4.34) denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir,

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 D_1 [A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1 T_0}] \\ &\quad - 2\mu_1 D^\alpha [A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1 T_0}] \\ &\quad + \alpha_1 [A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1 T_0}] [A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + \\ &\quad \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega_2 T_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2D_0 D_1 [A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega_2 T_0}] \\ &\quad - 2\mu_2 D^\alpha [A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega_2 T_0}] \\ &\quad + \alpha_2 [A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1 T_0}]^2. \end{aligned}$$

elde edilen denklem sistemde türevler alınıp gerekli düzenlemeler yapılması halinde

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2i\omega_1 A_1' e^{i\omega_1 T_0} - 2\mu_1 (i\omega_1)^\alpha A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \alpha_1 A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} \\ &\quad + \alpha_1 \bar{A}_1 A_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1) T_0} + k.e. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2i\omega_2 A_2' e^{i\omega_2 T_0} - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \alpha_2 A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} \\ &\quad + \alpha_2 2\bar{A}_1 A_1 + k.e. \end{aligned} \quad (4.37)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (') sembolü T_1 ' e göre türevi temsil etmektedir.

$2\omega_1 \approx \omega_2$ olduğunda u_1 ve u_2 arasında ekstra bir terim söz konusu olur. Bu durum iç rezonans olarak ele alınacaktır. (4.36) - (4.37) sisteminin belirli çözümlerini elde etmek için birinci durum olarak $2\omega_1 \approx \omega_2$ rezonans durumu ele alınacaktır. İkinci durum olarak ω_2 ' nin $2\omega_1$ ' den uzak olduğu non-rezonans durumu ele alınacaktır.

1. Durum: (Non-rezonans durumu)

Bu durumda seküler terimler ayıklanarak çözülebilirlik koşulu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} -2i\omega_1 A_1' - 2\mu_1 (i\omega_1)^\alpha A_1 &= 0 \Rightarrow A_1' + \mu_1 (i\omega_1)^{\alpha-1} A_1 = 0 \\ -2i\omega_2 A_2' - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 &= 0 \Rightarrow A_2' + \mu_2 (i\omega_2)^{\alpha-1} A_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

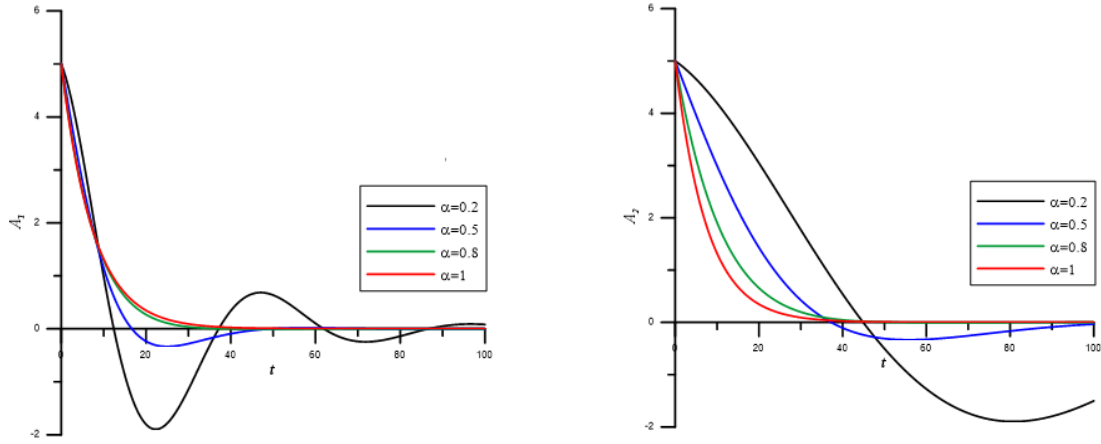
Elde edilen (4.38) den A_1 ve A_2 bağımlı değişkenlerin çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur:

İki denklem de birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerdir. İlk denklemde bağımlı değişken A_1 , ikinci denklemde bağımlı değişken A_2 ve ikisinde de bağımsız değişken T_1 dir. Birinci denklem için karakteristik denklem kökü $-\mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1}$ dir. İkinci denklem için karakteristik denklem kökü $-\mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1}$ dir. Buna göre a_1 ve a_2 kompleks sabitler olmak üzere çözümler sırası ile

$$A_1 = a_1 e^{-\mu_1(i\omega_2)^{\alpha-1} T_1}$$

$$A_2 = a_2 e^{-\mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1} T_1}$$

formunda elde edilir.



Şekil 4.4. Non-rezonans durumunda (4.26) - (4.27) sisteminin genlik-zaman grafiği.

Parametrelerin değerleri şunlardır: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 5$, $\mu_2 = 0.4$, $\alpha = 0.2$, $\mu_1 = 0.4$

Şekil 4.4. de non – rezonans durumunda α değerlerine bağlı olarak A_1 ve A_2 fonksiyonlarının zaman içindeki değişimleri verilmiştir. Belli bir t değerinden sonra sıfıra yaklaşım gözlenmektedir. A_1 ve A_2 diyagramlarında α değeri arttıkça daha hızlı bir şekilde genlik azalarak sıfıra yaklaşmaktadır.

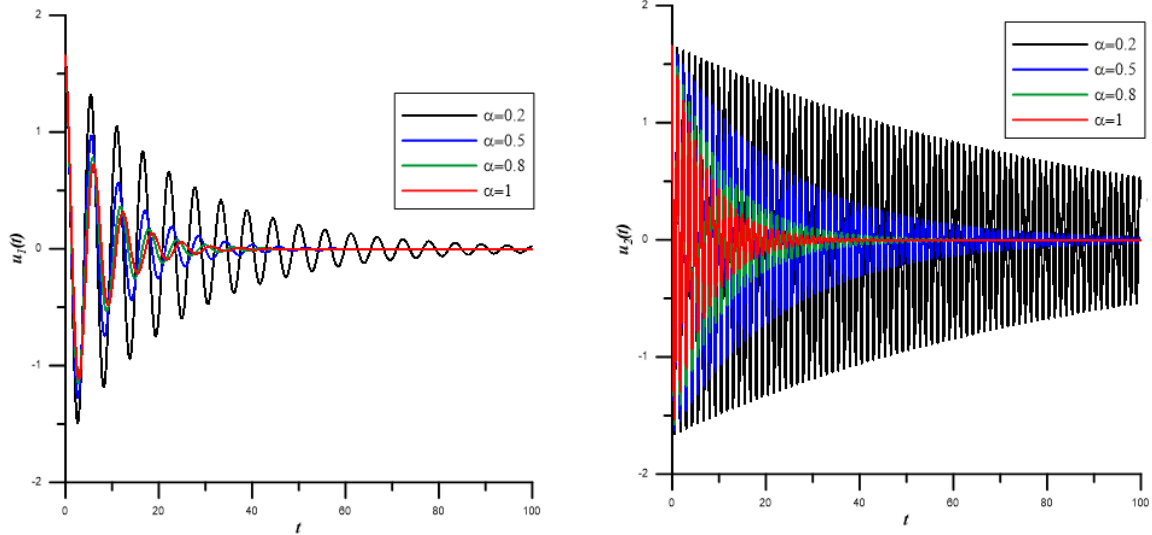
O halde,

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon a_1 e^{(-\varepsilon \mu_1 (i\omega_1)^{\alpha-1} t + i\omega_1 t)} + k. e. + O(\varepsilon^2) \\ u_2 &= \varepsilon a_2 e^{(-\varepsilon \mu_2 (i\omega_2)^{\alpha-1} t + i\omega_2 t)} + k. e. + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

sonucuna ulaşılır ve kararlı durum çözümleri her iki mod da azaldığı için

$$u_1 = u_2 = 0$$

şeklinde bulunur.



Şekil 4.5. Non-rezonans durumunda (4.26) - (4.27) sisteminin u_1 ve u_2 yer değişimleri grafiği. Parametrelerin değerleri şunlardır: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 5$, $\mu_2 = 0.4$, $\alpha = 0.2$, $\mu_1 = 0.4$

Şekil 4.5.'te, farklı α değerleri için u_1 ve u_2 çözümlerinin grafikleri verilmiştir. α değerine bağlı olarak sönümlenme değişimi gözlemlenmektedir. α değeri ne kadar küçük ise sönümlenme yavaş gerçekleşmektedir ancak α değeri büyüdükçe daha hızlı bir şekilde sönümlenme gerçekleşmektedir.

2. Durum: $2\omega_1 \approx \omega_2$ (Rezonans durumu)

Bu durum için σ ayar parametresi

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma$$

şeklinde alınacaktır. Buna göre

$$2\omega_1 T_0 = \omega_2 T_0 - \varepsilon\sigma T_0 = \omega_2 T_0 - \sigma T_1 \quad (4.40)$$

$$(\omega_2 - \omega_1)T_0 = \omega_1 T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = \omega_1 T_0 - \sigma T_1 \quad (4.41)$$

şeklinde olacaktır. (4.40) - (4.41) denklemleri (4.36) ve (4.37) denklemlerinde göz önünde bulundurulacak olunursa,

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2i\omega_1 A_1' e^{i\omega_1 T_0} - 2\mu_1 (i\omega_1)^\alpha A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \alpha_1 A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0}$$

$$+\alpha_1 \bar{A}_1 A_2 e^{i(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)} + k. e.$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2i\omega_2 A_2' e^{i\omega_2 T_0} - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \alpha_2 A_1^2 e^{i(\omega_2 T_0 - \sigma T_1)} \\ + \alpha_2 2\bar{A}_1 A_1 + k. e.$$

elde edilir. Buna göre çözülebilirlik şartları ise,

$$\begin{aligned} -2i\omega_1 A_1' - 2\mu_1 (i\omega_1)^\alpha A_1 + \alpha_1 \bar{A}_1 A_2 e^{i\sigma T_1} &= 0 \\ -2i\omega_2 A_2' - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 + \alpha_2 A_1^2 e^{-i\sigma T_1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Burada aşağıdaki polar gösterimi kullanmak uygun olacaktır.

$$A_m = \frac{1}{2} a_m e^{i\theta_m}, \quad \forall m = 1, 2 \quad (4.43)$$

Burada a_m ve θ_m ler T_1 'nin reel fonksiyonlarıdır.

(4.43) eşitlikleri (4.42) denklem sisteminde yerlerine yazılır ve elde edilen sonuçlar reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} -2i\omega_1 \left[\frac{1}{2} a_1' e^{i\theta_1} + \frac{1}{2} a_1 i\theta_1' e^{i\theta_1} \right] - 2\mu_1 i^\alpha \omega_1^\alpha \left[\frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_1} \right] \\ + \alpha_1 \frac{1}{2} a_1 e^{-i\theta_1} \frac{1}{2} a_2 e^{i\theta_2} e^{i\sigma T_1} &= 0 \\ -2i\omega_2 \left[\frac{1}{2} a_2' e^{i\theta_2} + \frac{1}{2} a_2 i\theta_2' e^{i\theta_2} \right] - 2\mu_2 i^\alpha \omega_2^\alpha \left[\frac{1}{2} a_2 e^{i\theta_2} \right] \\ + \alpha_2 \frac{1}{4} a_1^2 e^{2i\theta_1} e^{-i\sigma T_1} &= 0 \end{aligned}$$

dir.

$$i^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

denklemleri göz önüne alınıp ve $\gamma = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma T_1$ ile işaret edilirse ilk denklem

$$\begin{aligned} -i\omega_1 a_1' + \omega_1 a_1 \theta_1' - \omega_1^\alpha \mu_1 a_1 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \omega_1^\alpha \mu_1 a_1 i\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \\ + \alpha_1 \frac{1}{4} a_1 a_2 \cos \gamma + \alpha_1 \frac{1}{4} a_1 a_2 i \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

şeklindedir. İkinci denklem,

$$\begin{aligned} -i\omega_2 a_2' + \omega_2 a_2 \theta_2' - \omega_2^\alpha \mu_2 a_2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \omega_2^\alpha \mu_2 a_2 i\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \\ + \alpha_2 \frac{1}{4} a_1^2 \cos \gamma + \alpha_2 \frac{1}{4} a_1^2 i \sin(-\gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen (4.44) - (4.45) denklemleri reel ve sanal kısımlarına ayrıldığında

$$a'_1 = -\mu_1 \omega_1^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_1 + \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin \gamma \quad (4.46)$$

$$a'_2 = -\mu_2 \omega_2^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin \gamma \quad (4.47)$$

$$a'_1 \theta'_1 = \mu_1 \omega_1^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_1 - \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \cos \gamma \quad (4.48)$$

$$a'_2 \theta'_2 = \mu_2 \omega_2^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos \gamma \quad (4.49)$$

elde edilmiştir. Kararlı durum için ise $a'_1 = a'_2 = \gamma' = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$0 = -\mu_1 \omega_1^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_1 + \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin \gamma$$

$$0 = -\mu_2 \omega_2^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin \gamma$$

elde edilir. Elde edilen denklemlerde $\sin \gamma$ yalnız bırakılıp birbirine eşitlenir ise,

$$\frac{4\mu_1 \omega_1^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_1}{\alpha_1 a_1 a_2} = \frac{-4\mu_2 \omega_2^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_2}{\alpha_2 a_1^2} \Rightarrow a_1^2 + \frac{\mu_2 \alpha_1 \omega_2^\alpha}{\mu_1 \alpha_2 \omega_1^\alpha} a_2^2 = 0 \quad (4.50)$$

denklemi elde edilmektedir. (4.50) eşitliğinde α_1 ve α_2 nin işareti zıt ise, a_1 ve a_2 sıfırdan farklıdır, aksi durumda 0'a eşittirler.

(4.48) ve (4.49) denklemlerinde θ_1 ve θ_2 yok edilerek

$$a_2 \gamma' = \left[\sigma + \mu_2 \omega_2^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - 2\mu_1 \omega_1^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] a_2 + \left[\frac{\alpha_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \right] \cos \gamma \quad (4.51)$$

denklemi elde edilir. (4.51)'de $\tilde{\lambda} = \sigma + \mu_2 \omega_2^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - 2\mu_1 \omega_1^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ olsun. $\gamma' = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\left(\frac{\alpha_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \right) \cos \gamma + \tilde{\lambda} a_2 = 0 \quad (4.52)$$

denklemi elde edilir. (4.50) ve (4.52) denklemleri göz önünde bulundurularak,

$$\cos \gamma = -\frac{\tilde{\lambda} 4\mu_1 \omega_1^\alpha}{(2\mu_1 \omega_1^{\alpha-1} + \mu_2 \omega_2^{\alpha-1}) \alpha_1 a_2}$$

$$\sin \gamma = \frac{4\mu_1 \omega_1^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha_1 a_2} \quad (4.53)$$

denklemleri bulunur. Bu iki denklemden γ ve a_2 değerleri elde edilir ve (4.50) denkleminde a_1 değerine ulaşılır.

İç rezonans yok ise, yaklaşık çözüm α_1 ve α_2 ' nin işaretlerinden bağımsız olarak lineer problem çözümdür. Diğer taraftan, iç rezonans var ise ve α_1 ve α_2 ' nin işaretleri zıt ise, denklemler sönümlemenin olmasına rağmen ve lineer problemin çözümü ile çelişmesine rağmen kendi kendini sürdüren salınımlara izin verir.

(4.46) – (4.53) denklemleri ile a_1 ve a_2 , Python kullanılarak aşağıda gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

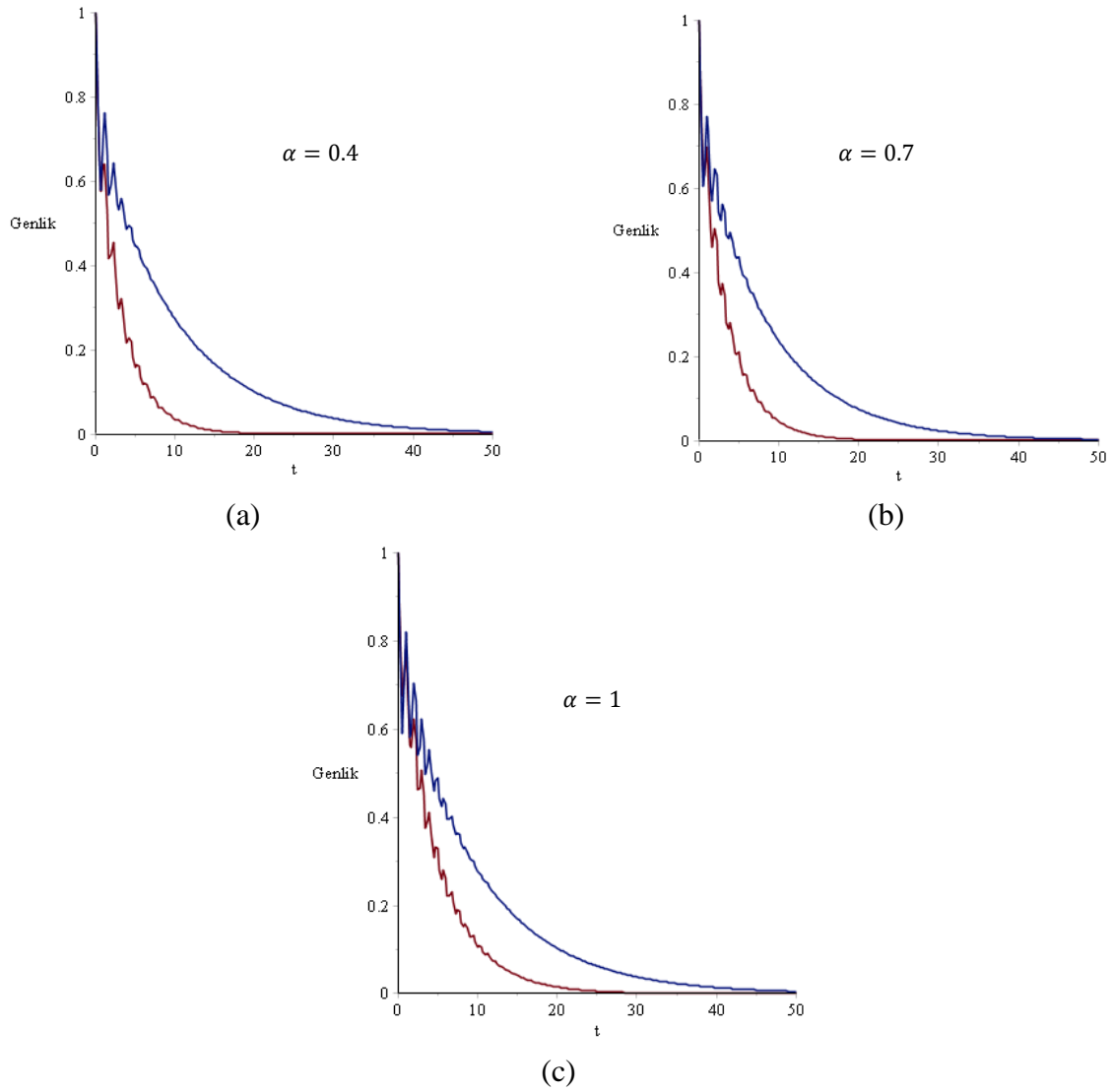
$$a_1 =$$

$$\pm 4 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 \omega_1^\alpha \omega_2^\alpha \left(-4\mu_1^2 \omega_1^{2\alpha-2} - 8\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} \sin^2 \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) + 4\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} + 4\mu_1 \sigma \omega_1^{\alpha-1} \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) - \mu_2^2 \omega_2^{2\alpha-2} - 2\mu_2 \sigma \omega_2^{\alpha-1} \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) - \sigma^2 \right)}{\alpha_1 \alpha_2 (4\mu_1^2 \omega_1^{2\alpha-2} + 4\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} + \mu_2^2 \omega_2^{2\alpha-2})}}$$

$$a_2 =$$

$$\pm \frac{4\mu_1 \sqrt{\frac{\omega_1^{2\alpha} \left(4\mu_1^2 \omega_1^{2\alpha-2} + 8\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} \sin^2 \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) - 4\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} - 4\mu_1 \sigma \omega_1^{\alpha-1} \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) + \mu_2^2 \omega_2^{2\alpha-2} + 2\mu_2 \sigma \omega_2^{\alpha-1} \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) + \sigma^2 \right)}{4\mu_1^2 \omega_1^{2\alpha-2} + 4\mu_1 \mu_2 \omega_1^{\alpha-1} \omega_2^{\alpha-1} + \mu_2^2 \omega_2^{2\alpha-2}}}{\alpha_1}}$$

Şekil 4.6. de yer alan genlik – zaman grafikleri için mavi olarak gösterilen grafikler a_2 ' ye ait zamana göre değişim grafikleri, kırmızı olarak gösterilen grafikler a_1 ' e ait zamana göre değişim grafikleridir. Grafikler Maple ile odeplot komutu kullanılarak çizilmiştir ve başlangıç koşulları $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = 1$ ve $\gamma(0) = 0$ olarak alınmıştır.



Şekil 4.6. Genlik – zaman grafikleri. Parametre değerleri şunlardır: $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.1$, $\sigma = 7$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.41$, (a) $\alpha=0.4$, (b) $\alpha=0.7$, (c) $\alpha=1$

Örnek 4.1.3. İkinci dereceden non-lineerliğe sahip kesirli sönümlü aşağıdaki gibi bir sistem göz önünde bulundursun. Model (Nayfeh ve Mook, 2008) de yer alan modelin modifiye edilmiş halidir.

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\hat{\mu}_1 D^\alpha u_1 + u_1 u_2 + F_1 \cos(\Omega t + \tau_1) \quad (4.54)$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\hat{\mu}_2 D^\alpha u_2 + u_1^2 + F_2 \cos(\Omega t + \tau_2) \quad (4.55)$$

Burada sistemin dış harmonik kuvvetin etkisi altında olduğu varsayılmıştır. Ayrıca sönümleme terimi de lineer alınmıştır. ω_n ($i = 1,2$) doğal frekansları ve Ω da dış zorlama frekansını temsil etmektedir. F_1 ve F_2 , dış kuvvetleri temsil etmektedir.

Çok zaman ölçekli metot doğrudan (4.54) - (4.55) denklemlerine uygulanmıştır. Aşağıda verilen (4.54) - (4.55) denklemlerinin yaklaşık çözüm fonksiyonu olarak varsayılacaktır.

$$u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1, \dots) + \quad (4.56)$$

$$u_2(t; \varepsilon) = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1, \dots) + \quad (4.57)$$

(4.56) - (4.57) denklemlerinde ε genliklerle alakalı küçük boyutsuz bir parametredir ve T_n ' ler $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, \dots$ şeklinde tanımlanır. Burada her bir değişken farklı bir zaman ölçeğini temsil eder, T_0 en hızlıyı temsil ederken T_1 daha yavaş bir hızı temsil eder. Zaman türevleri, daha önce de belirtildiği gibi hızlı ve yavaş zaman ölçekleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots,$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon \alpha D^{\alpha-1} D_1 + \dots,$$

Ayrıca sönüm katsayıları, sönümün ve non-lineerliğin etkilerinin aynı pertürbasyonda ortaya çıkmasını sağlayacak şekilde mertebelendirilmiştir. Sistemin sadece baskın rezonans durumları incelenecektir. Baskın rezonansları analiz etmek için sisteme zorlama terimi eklenmiştir, ki böylece zorlama terimi non-lineer terimler ve sönümleme ile aynı pertürbasyon denkleminde görünür.

i. $\Omega \approx \omega_2$ durumu: İlk olarak $\Omega \approx \omega_2$ durumu ele alınacaktır.

$$u_1 = \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots$$

$$u_2 = \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots$$

şeklinde seriye açılışın. Burada $\omega_2 > \omega_1$ dir. Dolayısıyla iç rezonans durumu yoktur. $F_1 = \varepsilon f_1$, $F_2 = \varepsilon f_2$, ve zorlama terimi $\hat{\mu}_n = \varepsilon \mu_n$ ($i = 1, 2$) alınarak ε kuvvetine göre açılım yapılırsa

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) + \omega_1^2(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) \\ & = -2\varepsilon \mu_1 (D_0^\alpha + \varepsilon \alpha D_0^{\alpha-1} D_1 + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) + \varepsilon f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \\ & \quad + (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) + \omega_2(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\
& = -2\varepsilon \mu_2 (D_0^\alpha + \varepsilon \alpha D_0^{\alpha-1} D_1 + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\
& \quad + \varepsilon^2 f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) + (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots)^2
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

ε' un ilk iki mertebesi dikkate alınarak

$O(\varepsilon)$:

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \quad (4.58)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0 \quad (4.59)$$

$O(\varepsilon^2)$:

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0 D_1 u_{11} - 2\mu_1 D_0^\alpha u_{11} + u_{11} u_{21} \quad (4.60)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0 D_1 u_{21} - 2\mu_2 D_0^\alpha u_{21} + u_{11}^2 + f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) \quad (4.61)$$

elde edilir.

(4.58) denklemi sabit katsayılı homojen olmayan lineer, (4.59) denklemi sabit katsayılı homojen lineer denklemdir. Dolayısıyla (4.58) - (4.59) sisteminin çözümü aşağıdaki gibi bir forma sahiptir.

$$\begin{aligned}
u_{11} &= A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + k.e. \\
u_{21} &= A_2(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.
\end{aligned} \quad (4.62)$$

Burada A_1 ve A_2 keyfi fonksiyonlardır ve $\Lambda = f_1/2(\omega_1^2 - \Omega^2)$ şeklinde ifade edilmiştir.

(4.58) denkleme ait çözüm formu elde edilirken belirsiz katsayılar yöntemi kullanılmıştır. Belirsiz katsayılar yöntemi ile çözümde özel çözüm formu $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ eşitliği göz önünde bulundurularak belirlenmiştir.

(4.62) denklemlerinin (4.60) de yerine yazılması halinde,

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 D_1 u_{11} - 2\mu_1 D_0^\alpha u_{11} + u_{11} u_{21} \\
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 D_1 [A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)}] \\
&\quad - 2\mu_1 D_0^\alpha [A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)}] \\
&\quad + (A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \Lambda e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 T_0} \\
&\quad + \Lambda e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)})(A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 T_0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 A_1' i \omega_1 e^{i \omega_1 T_0} + 2 \bar{A}_1' i \omega_1 e^{-i \omega_1 T_0} - 2 \mu_1 A_1 (i \omega_1)^\alpha e^{i \omega_1 T_0} \\
&\quad - 2 \wedge \mu_1 (i \Omega)^\alpha e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} - 2 \mu_1 \bar{A}_1 (-i \omega_1)^\alpha e^{-i \omega_1 T_0} - 2 \mu_1 \wedge (-i \Omega)^\alpha e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)} \\
&\quad + A_2 A_1 e^{i(\omega_2 + \omega_1) T_0} + A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + \wedge A_2 e^{[i(\Omega + \omega_2) T_0 + \tau_1]} \\
&\quad + \wedge \bar{A}_2 e^{i(\Omega T_0 + \tau_1 - \omega_2 T_0)} + \bar{A}_1 e^{-i \omega_1 T_0} A_2 e^{i \omega_2 T_0} + \wedge e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)} A_2 e^{i \omega_2 T_0} \\
&\quad + \bar{A}_1 \bar{A}_2 e^{-i \omega_1 T_0} e^{-i \omega_2 T_0} + \wedge \bar{A}_2 e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1 + \omega_2 T_0)} \\
&= -2 A_1' i \omega_1 e^{i \omega_1 T_0} - 2 \mu_1 A_1 (i \omega_1)^\alpha e^{i \omega_1 T_0} - 2 \wedge \mu_1 (i \Omega)^\alpha e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} \\
&\quad + A_2 A_1 e^{i(\omega_2 + \omega_1) T_0} + \wedge \bar{A}_2 e^{i(\Omega T_0 + \tau_1 - \omega_2 T_0)} + \wedge A_2 e^{[i(\Omega + \omega_2) T_0 + \tau_1]} \\
&\quad + A_2 \bar{A}_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1) T_0} + k. e. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.62) denklem sistemlerini (4.61) de yerine yazılması halinde,

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2 D_0 D_1 u_{21} - 2 \mu_2 D_0^\alpha u_{21} + u_{11}^2 + f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) \\
D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2 D_0 D_1 [A_2 e^{i \omega_2 T_0} + \bar{A}_1 e^{-i \omega_2 T_0}] - 2 \mu_2 D_0^\alpha [A_2 e^{i \omega_2 T_0} + \bar{A}_1 e^{-i \omega_2 T_0}] \\
&\quad + [A_1 e^{i \omega_1 T_0} + \wedge e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + \bar{A}_1 e^{-i \omega_1 T_0} + \wedge e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)}]^2 \\
&\quad + \frac{f_2}{2} [e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + e^{-i(\Omega T_0 + \tau_2)}] \\
&= -2 A_2' i \omega_2 e^{i \omega_2 T_0} + 2 \bar{A}_2' i \omega_2 e^{-i \omega_2 T_0} - 2 \mu_2 A_2 (i \omega_2)^\alpha e^{i \omega_2 T_0} \\
&\quad - 2 \mu_2 \bar{A}_2 (-i \omega_2)^\alpha e^{-i \omega_2 T_0} + \frac{f_2}{2} e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + \frac{f_2}{2} e^{-i(\Omega T_0 + \tau_2)} + A_1^2 e^{2i \omega_1 T_0} \\
&\quad + \wedge^2 e^{2i(\Omega T_0 + \tau_1)} + 2 \wedge A_1 e^{i(T_0 \Omega + T_0 \omega_1 + \tau_1)} + \bar{A}_1^2 e^{-2i \omega_1 T_0} + \wedge^2 e^{-2i(\Omega T_0 + \tau_1)} \\
&\quad + 2 \wedge \bar{A}_1 e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1 + \omega_1 T_0)} + 2 A_1 \bar{A}_1 + 2 \wedge^2 + 2 A_1 \wedge e^{i(-\Omega T_0 - \tau_1 + \omega_1 T_0)} \\
&\quad + 2 \bar{A}_1 \wedge e^{i(\Omega T_0 + \tau_1 - \omega_1 T_0)} \\
&= -2 A_2' i \omega_2 e^{i \omega_2 T_0} - 2 \mu_2 A_2 (i \omega_2)^\alpha e^{i \omega_2 T_0} + \frac{f_2}{2} e^{-i(\Omega T_0 + \tau_2)} + A_1^2 e^{2i \omega_1 T_0} \\
&\quad + 2 \wedge A_1 e^{i(T_0 \Omega + T_0 \omega_1 + \tau_1)} + \wedge^2 e^{2i(\Omega T_0 + \tau_1)} + 2 A_1 \bar{A}_1 + 2 \wedge^2 + 2 \wedge \bar{A}_1 e^{i(\Omega T_0 + \tau_1 - \omega_1 T_0)} \\
&\quad + k. e. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$i^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

açılımı ve

$$\Omega \approx \omega_2 \Rightarrow \Omega = \omega_2 + \varepsilon \sigma_1 \tag{4.65}$$

eşitlikleri dikkate alındığında ayrıca (4.63) - (4.64) denklemlerinden seküler terimler elendiğinde

$$-2 A_1' - 2 \mu_1 A_1 (i \omega_1)^\alpha = 0 \tag{4.66}$$

$$-2 A_2' i \omega_2 - 2 \mu_2 A_2 (i \omega_2)^\alpha + \frac{f_2}{2} e^{i(\sigma T_1 + \tau_2)} = 0 \tag{4.67}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen (4.66) - (4.67) denklemlerinden A_1 ve A_2 bağımlı değişkenleri,

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{-(i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1 \varepsilon t + i\theta_1} \quad (4.68)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{-(i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2 T_1 + i\theta_2} + \frac{f_2}{4} (i\omega_2)^{-1} \frac{1}{i\sigma + (i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2} e^{i(\sigma T_1 + \tau_2)} \quad (4.69)$$

şeklinde elde edilir.

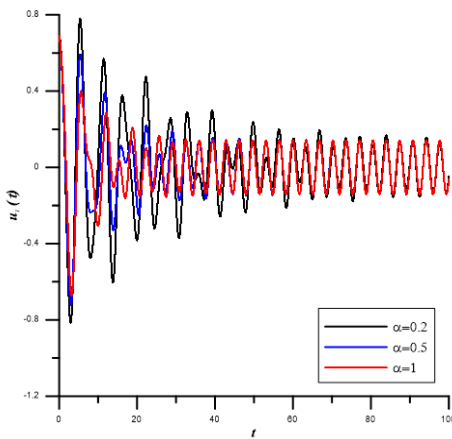
Dolayısıyla ele alınan sistemin $\Omega \approx \omega_2$ baskın rezonans durumu için analitik çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_1 =$$

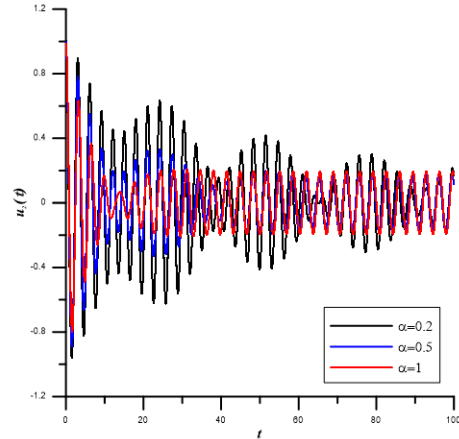
$$\frac{1}{2} \varepsilon a_1 e^{-(i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1 \varepsilon t + i(\theta_1 + \omega_1 t)} + \frac{\varepsilon f_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega t + \tau_1)} + k. e. + O(\varepsilon^2).$$

$$u_2 =$$

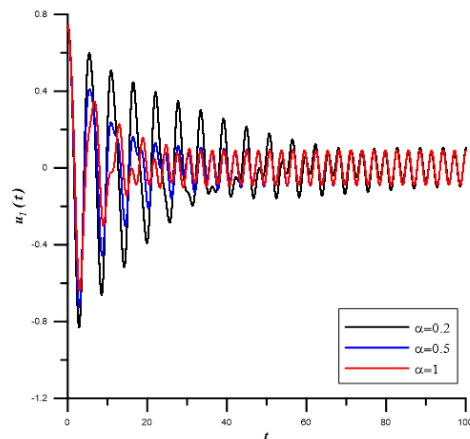
$$\frac{\varepsilon f_2}{4} (i\omega_2)^{-1} \frac{1}{i\sigma + (i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2} e^{i(\sigma \varepsilon t + \tau_2 + \omega_2 t)} + \frac{1}{2} \varepsilon a_2 e^{-(i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2 \varepsilon t + i(\theta_2 + \omega_2 t)} + k. e. + O(\varepsilon^2).$$



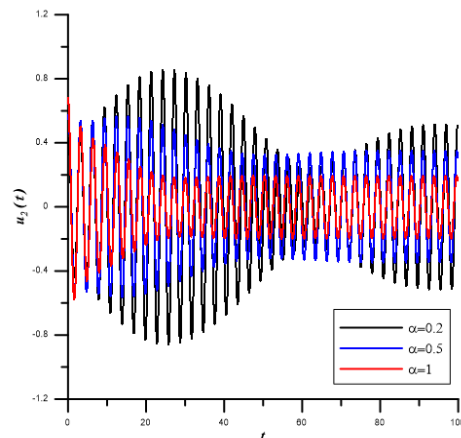
(a)



(b)



(c)



(d)

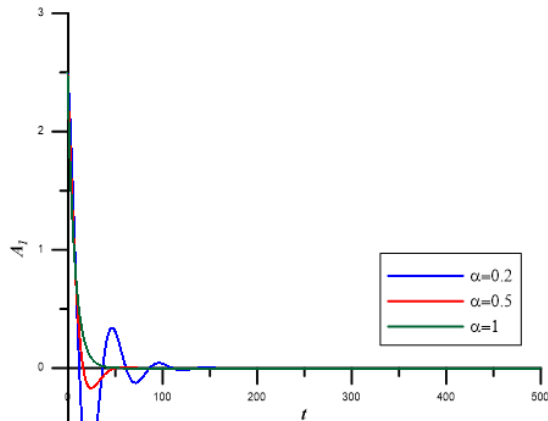
Şekil 4.7. (a) - (b) $\sigma = -0.5$ için (4.54) – (4.55) sisteminin u_1 ve u_2 yer değişimleri; (c) - (d) $\sigma = 0.5$ için (4.54) – (4.55) sisteminin u_1 ve u_2 yer değişimleri. Parametre değerleri: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.4$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $f_1 = 2$,

Şekil 4.7. α arttıkça titreşim genliğinin azaldığını göstermektedir. Genlik azalmasının hızı, daha büyük α değerleri için daha hızlıdır. Titreşim genliği, limit döngüsüne ulaşana kadar azalır. Ek olarak, u_2 diyagramlarında, limit döngüsüne kadar her döngüden sonra azalan periyodik bir salınım vardır ve limit döngüsüne ulaşana kadar azalan periyodik salınım devam eder.

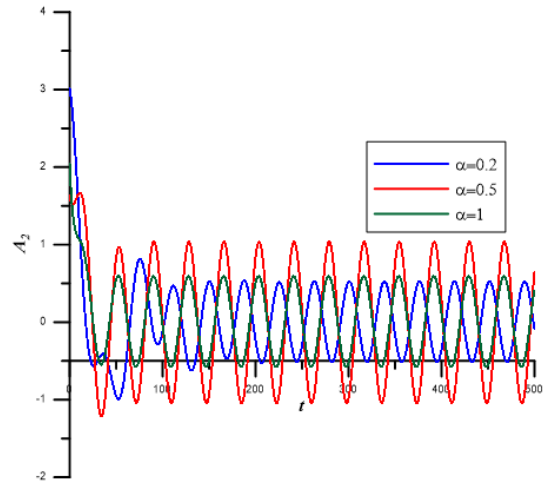
$t \rightarrow \infty, T_1 \rightarrow \infty$ iken

$$A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow -\frac{f_2}{4} (i\omega_2)^{-1} \frac{1}{i\sigma + (i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2} e^{i(\sigma T_1 + \tau_2)} \quad (4.70)$$

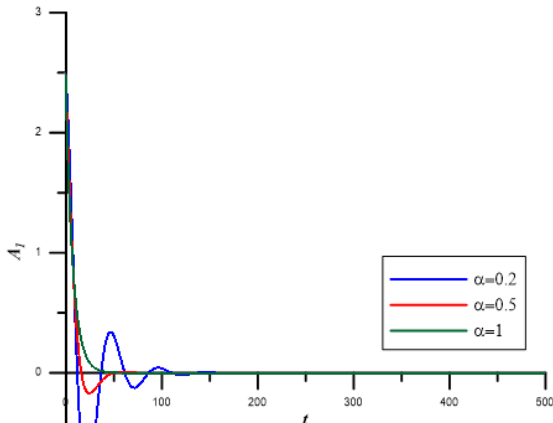
dir.



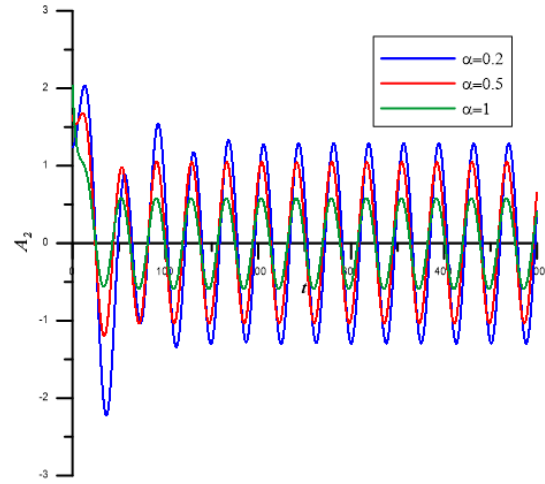
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.8. (4.54) – (4.55) sistemine ait A_1 ve A_2 zamana bağlı değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_2$ durumu) (a) - (b) $\sigma = -0.5$ için (c) - (d) $\sigma = 0.5$ için. Parametrelerin değerleri şunlardır: $\varepsilon = 1/3, a_1 = 5, a_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \mu_2 = 0.4, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \tau_1 = 0, \tau_2 = 0, f_1 = 2, f_2 = 3$.

Şekil 4.8. de A_1 değerinin hızla sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu durum α değeri arttıkça daha da hızlı gerçekleşir. A_1 σ parametresinden bağımsız olduğu için σ nın hem negatif hem de pozitif değerleri için elde edilen sonuçlar aynıdır. (4.70)'de belirtildiği gibi, A_2 değeri

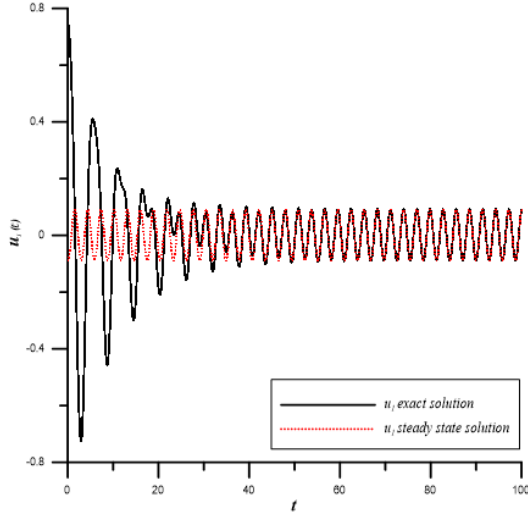
$$-\frac{f_2}{4} (i\omega_2)^{-1} \frac{1}{i\sigma + (i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2} e^{i(\sigma T_1 + \tau_2)}$$

değerine zamanla yakınsar. α arttıkça yakınsama daha hızlı gerçekleşir ve genlik azalır. (4.70) 'i (4.62), (4.56) ve (4.57)'de koyarak kararlı durum çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

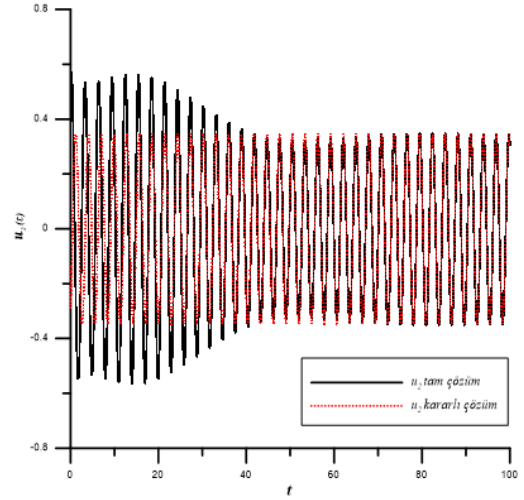
$$u_1 = \frac{\varepsilon f_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega t + \tau_1)} + k. e. + O(\varepsilon^2)$$

$$u_2 = \frac{\varepsilon f_2}{4} (i\omega_2)^{-1} \frac{1}{i\sigma + (i\omega_2)^{\alpha-1} \mu_2} e^{i(\sigma \varepsilon t + \tau_2 + \omega_2 t)} + k. e. + O(\varepsilon^2)$$

Bu nedenle, iç rezonans olmadığında, yaklaşım doğrusal olmayan terimlerden etkilenmez.



(a)



(b)

Şekil 4.9. Çözümler ile kararlı durum çözümünün karşılaştırılması ($\Omega \approx \omega_2$ durumu) (a) u_1 , (b) u_2 . Parametre değerleri: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\mu_2 = 0.4$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $f_1 = 2$, $f_2 = 3$, $\sigma = 0.5$, $\alpha = 0.5$.

Şekil 4.9.'da, bu kısımda bulunan tam çözümler ile kararlı durum çözümleri gösterilmiştir. Siyah renk tam çözümleri temsil etmektedir, kırmızı olarak gösterilen ise kararlı durum çözümlerini temsil etmektedir. Belli bir t zamanından sonra tam çözümün kararlı durum çözümü ile çakıştığı görülmektedir. Sistem sabit bir genlik ile salınma devam etmektedir.

ii. $\Omega \approx \omega_1$ durumu:

İkinci olarak $\Omega \approx \omega_1$ durumu ele alınacaktır. $F_2 = \varepsilon f_2$, $F_1 = \varepsilon^2 f_1$ ve sönüm terimi $\hat{\mu}_n = \varepsilon \mu_n$ alınarak ε kuvvetine göre açılım yapılacaktır. Buna göre

$$u_1 = \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots$$

$$u_2 = \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots$$

çözüm formu da (4.54) ve (4.55) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) + \omega_1^2 (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) \\ & = -2\varepsilon \mu_1 (D_0^\alpha + \varepsilon \alpha D_0^{\alpha-1} D_1 + \dots) (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots) + \varepsilon^2 f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \\ & \quad + (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) + \omega_2^2 (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\ & = -2\varepsilon \mu_2 (D_0^\alpha + \varepsilon \alpha D_0^{\alpha-1} D_1 + \dots) (\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots) \\ & \quad + \varepsilon f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) + (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

ε' nun ilk iki mertebesini dikkate alınarak,

$O(\varepsilon)$:

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = 0$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = f_2 \cos(\Omega t_0 + \tau_2) \quad (4.71)$$

$O(\varepsilon^2)$:

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0 D_1 u_{11} - 2\mu_1 D_0^\alpha u_{11} + u_{11} u_{21} + f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \quad (4.72)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0 D_1 u_{21} - 2\mu_2 D_0^\alpha u_{21} + u_{11}^2 \quad (4.73)$$

(4.71) denklem sisteminde yer alan denklemler sabit katsayılı homojen ve homojen olmayan lineer diferansiyel denklemlerdir. Dolayısıyla (4.71) denklem sisteminin çözümü aşağıdaki formda ifade edilir,

$$u_{11} = A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.$$

$$u_{21} = A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \frac{f_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e. \quad (4.74)$$

Burada A_1 ve A_2 keyfi fonksiyonlardır.

(4.74) denklemleri (4.72) de yerine yazıldığında $\Lambda^* = \frac{f_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 D_1 [A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.] \\
&\quad - 2\mu_1 D_0^\alpha [A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.] \\
&\quad + [A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.] \left[A_2(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \frac{f_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e. \right] \\
&\quad + f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \\
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0 [A_1' e^{i\omega_1 T_0} + k.e.] \\
&\quad - 2\mu_1 [A_1(i\omega_1)^\alpha e^{i\omega_1 T_0} + k.e.] \\
&\quad + A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \Lambda^* A_1 e^{i(\omega_1 T_0 + \Omega T_0 + \tau_2)} + k.e. \\
&\quad + f_1 \left(\frac{e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + e^{-i(\Omega T_0 + \tau_1)}}{2} \right) \\
&= -2 A_1' i\omega_1 e^{i\omega_1 T_0} - 2\mu_1 A_1 (i\omega_1)^\alpha e^{i\omega_1 T_0} + A_2 A_1 e^{i(\omega_2 + \omega_1) T_0} \\
&\quad + \Lambda^* A_1 e^{i(\omega_1 T_0 + \Omega T_0 + \tau_2)} + \Lambda^* \bar{A}_1 e^{i(\Omega T_0 + \tau_2 - \omega_1 T_0)} + A_2 \bar{A}_1 e^{i\omega_2 T_0} e^{-i\omega_1 T_0} + \\
&\quad + \frac{f_1}{2} e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + k.e. \tag{4.75}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.74) denklemleri (4.73) de yerine yazıldığında ise,

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2D_0 D_1 u_{21} - 2\mu_2 D_0^\alpha u_{21} + u_{11}^2 \\
D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2D_0 D_1 [A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \Lambda^* e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e.] \\
&\quad - 2\mu_2 D_0^\alpha [A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \Lambda^* e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e.] + [A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + k.e.]^2 \\
&= -2A_2' i\omega_2 e^{i\omega_2 T_0} - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 e^{i\omega_2 T_0} \\
&\quad - 2\mu_2 \Lambda^* (i\Omega)^\alpha e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + 2A_1 \bar{A}_1 + k.e. \tag{4.76}
\end{aligned}$$

$\Omega = \omega_1 + \sigma\varepsilon$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2 A_1' i\omega_1 e^{i\omega_1 T_0} - 2\mu_1 A_1 (i\omega_1)^\alpha e^{i\omega_1 T_0} + A_2 A_1 e^{i(\omega_2 + \omega_1) T_0} \\
&\quad + \Lambda^* A_1 e^{i(\omega_1 T_0 + \Omega T_0 + \tau_2)} + \Lambda^* \bar{A}_1 e^{i(\Omega T_0 + \tau_2 - \omega_1 T_0)} + \\
&\quad + A_2 \bar{A}_1 e^{i\omega_2 T_0} e^{-i\omega_1 T_0} + \frac{f_1}{2} e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + k.e. \\
D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{22} &= -2A_2' i\omega_2 e^{i\omega_2 T_0} - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 e^{i\omega_2 T_0} \\
&\quad - 2\mu_2 \Lambda^* (i\Omega)^\alpha e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + 2A_1 \bar{A}_1 + k.e. \tag{4.77}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen (4.77) sisteminden seküler terimler ayıklanacak olursa

$$-2i\omega_1 A_1' - 2\mu_1 (i\omega_1)^\alpha A_1 + \frac{f_1}{2} e^{i\varepsilon\sigma_1 T_0 + \tau_1} = 0 \tag{4.78}$$

$$-2i\omega_2 A_2' - 2\mu_2 (i\omega_2)^\alpha A_2 = 0 \tag{4.79}$$

çözülebilirlik koşulları bulunur. (4.78) ve (4.79) denklemleri sade hale getirilirse ve $\varepsilon T_0 = T_1$ şeklinde tanımlandığı için

$$A_1' + \mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1}A_1 = \frac{f_1}{4} e^{i\sigma_1 T_1} (i\omega_1)^{-1} e^{i\tau_1} \quad (4.80)$$

$$i\omega_2 A_2' + \mu_2(i\omega_2)^\alpha A_2 = 0 \quad (4.81)$$

denklemleri elde edilir. (4.81) denklemi lineer homojen diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklemin çözümü

$$m + \mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1}$$

dir. O halde

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{-\mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_2} \quad (4.82)$$

olarak bulunur.

(4.80) denklemi homojen olmayan lineer diferansiyel denklem, belirsiz katsayılar metodu kullanılarak çözülebilmektedir.

Homojen kısmın çözümü:

$$m + \mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1}$$

$$A_{1_{homojen}} = \frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_1} e^{-\mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1} T_1}$$

dir. Özel çözüm olarak $A_1 e^{i\sigma_1 T_1}$ formunda belirlenmiştir, denklemde bu form yerine yazıldığında

$$A_1 i\sigma_1 e^{i\sigma_1 T_1} + \mu_1 A_1 e^{i\sigma_1 T_1} (i\omega_1)^{\alpha-1} A_1 = \frac{f_1}{4} e^{i\sigma_1 T_1} (i\omega_1)^{-1} e^{i\tau_1} e^{i\sigma_1 T_1}$$

dir ve buradan A_1 in yalnız bırakılması halinde de,

$$A_1 = \frac{f_1}{4} e^{i\tau_1} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1}$$

olarak bulunur. O zaman

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{-\mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_1} + \frac{f_1}{4} e^{i\tau_1} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1} e^{i\sigma_1 T_1} \quad (4.83)$$

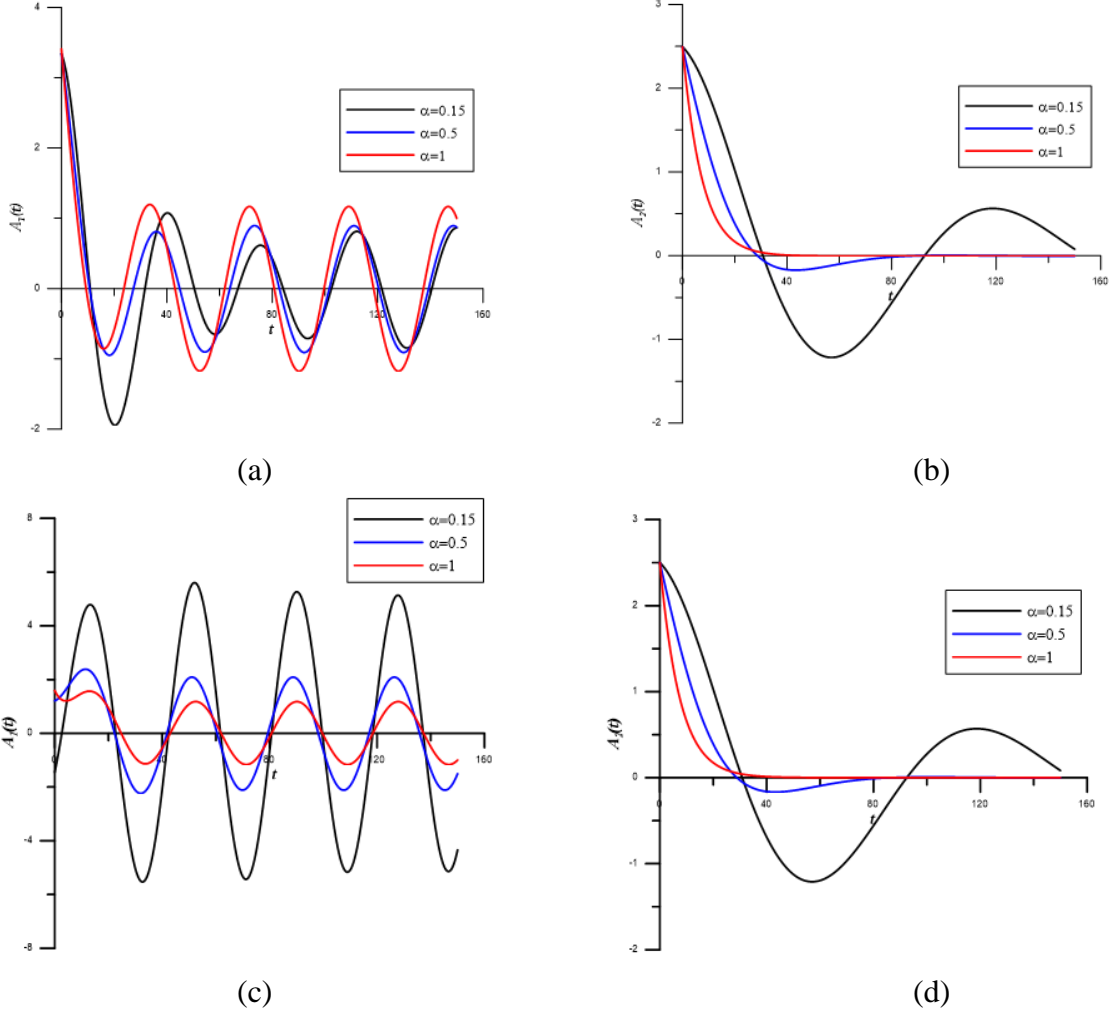
şeklindedir.

Sonuç olarak

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{-\mu_1(i\omega_1)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_1} + \frac{f_1}{4} e^{i\tau_1} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1} e^{i\sigma_1 T_1} \quad (4.84)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{-\mu_2(i\omega_2)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_2} \quad (4.85)$$

elde edilir.



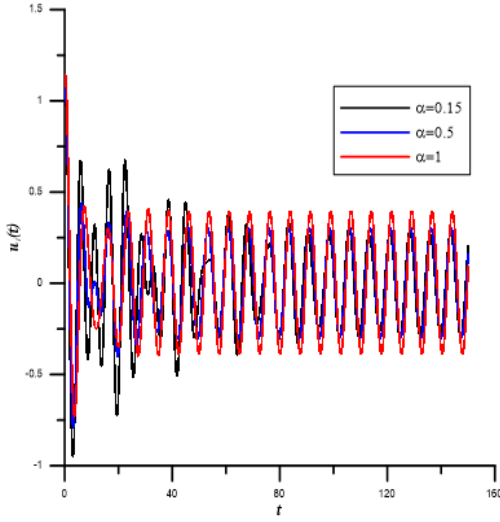
Şekil 4.10. (4.54) – (4.55) sistemine ait A_1 ve A_2 zamana bağlı değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_1$ durumu) (a) - (b) $\sigma = -0.5$ için (c) - (d) $\sigma = 0.5$ için. Parametre değerleri: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\mu_2 = 0.4$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $f_1 = 2$, $f_2 = 3$.

Şekil 4.10’da A_1 için azalarak devam eden periyodik bir durum gözlemlenmektedir. Periyodik olmasına rağmen, α değeri arttıkça sönümlenme hızı da artmakta ve sistem kararlı bir duruma geçmektedir. Ayrıca, A_2 ’nin hızla sifira yaklaştığı görülmektedir ve bu yaklaşma hızı α değeri büyüdükçe artmaktadır. A_2 , σ parametresinden bağımsız olduğu için σ ’nin hem negatif hem de pozitif değerleri için elde edilen sonuçlar aynıdır.

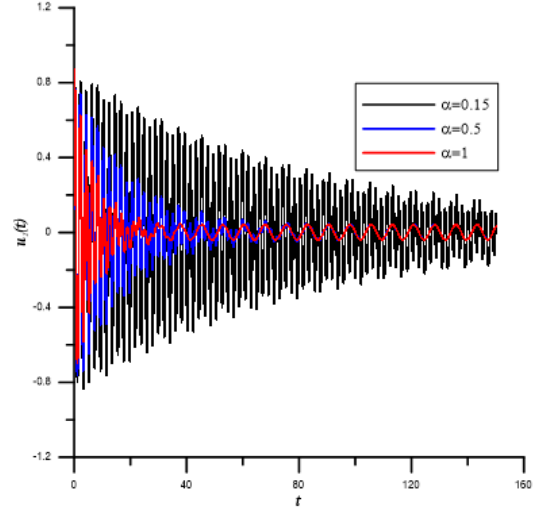
Dolayısıyla, ele alınan sistemin $\Omega \approx \omega_1$ baskın rezonans durumu için yaklaşık analitik çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{-\mu_1 (i\omega_1)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_1} + \frac{f_1}{4} e^{i\tau_1} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1} e^{i\sigma_1 T_1} e^{i\omega_1 T_0} + k.e. + O(\varepsilon^2)$$

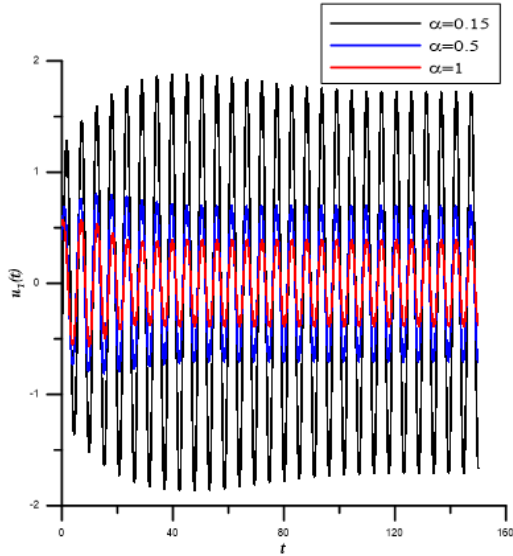
$$u_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{-\mu_2 (i\omega_2)^{\alpha-1} T_1 + i\theta_2} e^{i\omega_2 T_0} + \frac{f_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e. + O(\varepsilon^2)$$



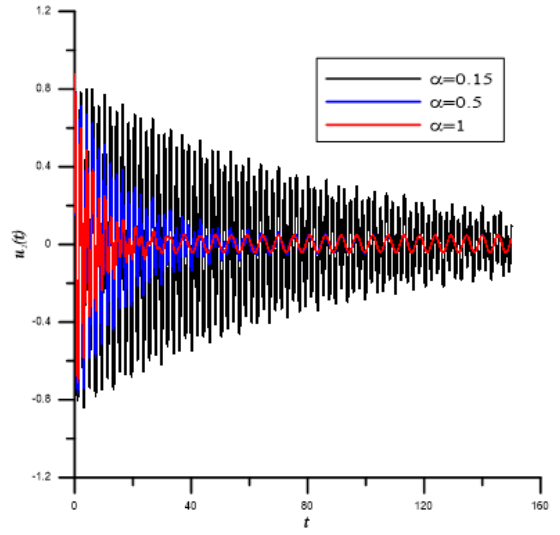
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.11. (4.54) – (4.55) modelinin zamana bağlı u_1 ve u_2 yer değişim grafikleri ($\Omega \approx \omega_1$ durumu) (a) - (b) $\sigma = -0.5$ için, (c) – (d) $\sigma = -0.5$ için Parametrelerin değerleri: $\varepsilon = 1/3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\mu_2 = 0.4$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $f_1 = 2$, $f_2 =$

3.

Şekil 4.11. de yer alan, u_1 diyagramlarında belli bir t değerinden sonra sabit genlikte salınım devam etmektedir. α değeri arttıkça sabit genlikteki salınımlar daha kısa sürede gerçekleşmektedir. u_2 diyagramlarında ise α değeri arttıkça daha hızlı bir şekilde sifıra yaklaşım gözlenmektedir.

(4.84) ve (4.85) denklemlerinde $t \rightarrow \infty, T_1 \rightarrow \infty$ iken

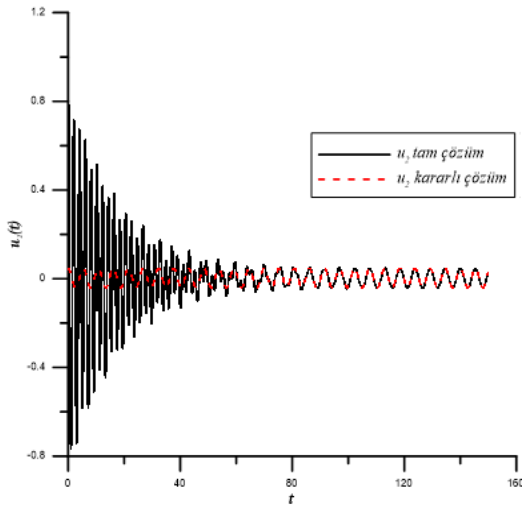
$$A_1 \rightarrow -\frac{f_2}{4} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1} e^{i(\sigma T_1 + \tau_1)}, A_2 \rightarrow 0 \quad (4.86)$$

dir.

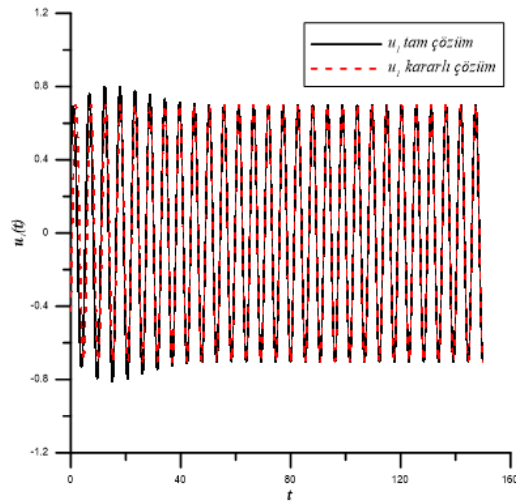
(4.86) ifadelerini (4.74), (4.56) ve (4.57)'de yerine koyarak, $\Omega \approx \omega_1$ durum için çözümler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1 = \frac{f_1}{4} e^{i\tau_1} (i\omega_1)^{-1} \frac{1}{i\sigma_1 + (i\omega_1)^{\alpha-1} \mu_1} e^{i\sigma_1 T_1} e^{i\omega_1 T_0} + k.e. + O(\varepsilon^2)$$

$$u_2 = \frac{f_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + k.e. + O(\varepsilon^2).$$



(a)



(b)

Şekil 4.12. Çözümler ile kararlı durum çözümünün karşılaştırılması ($\Omega \approx \omega_1$ durumu) (a) u_1 , (b) u_2 . Parametre değerleri: $\varepsilon = 1/3, a_1 = 5, a_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \mu_2 = 0.4, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \tau_1 = 0, \tau_2 = 0, f_1 = 2, f_2 = 3, \sigma = 0.5, \alpha = 0.5$.

Şekil 4.12.'de, $\Omega \approx \omega_1$ durumu için bulunan tam çözümler ile kararlı durum çözümleri gösterilmiştir. Siyah renk tam çözümleri temsil etmektedir, kırmızı olarak gösterilen ise kararlı durum çözümlerini temsil etmektedir. Belli bir t zamanından sonra tam çözümün kararlı durum çözümü ile çakıştığı görülmektedir. Sistem sabit bir genlik ile salınıma devam etmektedir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, hem tek serbestlik dereceli hem de iki serbestlik dereceli kesirli sönüme sahip sistemler ele alınmıştır. Pertürbasyon yöntemlerinden biri olan çok zaman ölçekli metot yaklaşık analitik çözümleri hesaplamak için doğrudan sistemlere uygulanmıştır. Sistemlerde yer alan sönüm modellemesinde Riemann- Liouville kesirli türevi kullanılmıştır.

Ana sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- $\alpha = 1$ için, elde edilen çözümler (Nayfeh, 2008)'de verilen kesirli olmayan modellerle örtüşmektedir.
- Bu çalışmada literatürden farklı olarak sönüm terimi modellenirken kesirli türev kullanılmıştır. Bu da daha hassas sonuçlar elde etmeye olanak sağlamıştır.
- İkinci dereceden non-lineerliğe sahip doğrusal olmayan iki serbestlik dereceli bir sistem incelenmiştir.
- Elde edilen sonuçlar, kesirli sönümlemenin farklı serbestlik derecelerine sahip dinamik sistemlerin davranışları üzerindeki etkilerinin analiz edilmesine olanak tanır.
- İki serbestlik derecesine sahip sistemlerde farklı rezonans durumlarına ait genel çözümler elde edilmiştir.
- Kararlı durum çözümleri elde edilmiş ve genel çözümler ile örtüştüğü bölgeler grafikler ile gösterilmiştir.
- Zaman - deplasman, genlik - zaman grafikleri ile elde edilen analiz sonuçları görsel olarak desteklenmiştir. Uygulamalara ait grafiklerde α değişimin etkisi gösterilmiştir. Tüm grafiklerde de görüldüğü gibi α parametresinin değeri büyüdükçe sönüme etkisi artmakta, hareket daha hızlı sönümlenmektedir.

KAYNAKÇA

- Bender, C.M., & Orszag, S.A.** (2013). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer Science & Business Media.
- Debnath, L.** (2003). Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(54):3413–3442.
- Gutierrez, S.M., & Adeli, H.** (2013). Tuned Mass Dampers. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20, 419-431.
- Holmes, M.H.** (2013). *Introduction to Perturbation Methods*. Springer New York
- Kourakis, I.** (2007). *Structural Systems and Tuned Mass Dampers of Super-Tall Buildings: Case Study of Taipei 101* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- Kevorkian, J., & Cole, J.D.** (1996). *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Springer New York.
- Küzün, D.** (2024). *Kesirli Sınır Şartlarına Sahip Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*. (Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi) Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.
- Li, Q.S., Zhi, L.H., Tuan, A.Y., Kao, C.S., Su, S.C., & Wu, C.F.** (2011). Dynamic Behavior of Taipei 101 tower: Field Measurement and Numerical Analysis. *Journal of Structural Engineering*, 137(1), 143-155.
- Miller, K.S., & Ross, B.** (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons
- Murdock, J. A.** (1999). *Perturbations: Theory and Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Nayfeh, A.H.** (2011). *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons.
- Nayfeh, A.H., & Mook, D.T.** (2008). *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons
- Poincare, H.** (1959). *New Methods of Celestial Mechanics*, NASA technical translations, F-450.
- Podlubny, I.** (1999). *Fractional Differential Equations, Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, California, USA.

Poon, D., Poon, D., Shieh, S.S., Joseph, L.M., & Chang, C. (2004). Structural Design of Taipei 101, the World's Tallest Building. In *Proceedings of the CTBUH 2004 Seoul Conference, Seoul, Korea* (pp. 271-278).

Rossikhin, Y.A., & Shitikova, M.V. (2010). Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics: Novel Trends and Recent Results.

Sınır, S., Yıldız, B., & Sınır, B.G. (2021). Approximate Solutions of Nonlinear Pendulum with Fractional Damping. In *5th International Students Science Congress Proceedings Book*, pages 295.

Takewaki, I., Murakami, S., Yoshitomi, S., & Tsuji, M. (2012). Fundamental Mechanism of Earthquake Response Reduction in Building Structures with Inertial Dampers. *Structural Control and Health Monitoring*, 19(6), 590-608.