T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASİYE ARİF

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2022
10474123

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASİYE ARİF

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2022
10474123

BEYAN

"Maksimum-Çarpım Operatörleri İçin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Yaklaşım" adlı yüksek lisansta yeterlilik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	**DESTEK ALINMAMIŞTIR X**
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum;	
Desteğin Türü	**Proje Numarası**
1-BAP(Bilimsel Araştırma Projesi)	
2-TÜBİTAK	
Diğer;..............................	
ETİK KURUL onayı var ise;	
ETİK KURUL karar / sayı:	**.................. ..../......**

Öğrenci Adı ve Soyadı
Asiye ARİF
Tarih
.../.../ 2022
İmza

ÖN SÖZ

Tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM'e emekleri için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Emre TAŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca destekleri ile her zaman yanımda olan aileme ve sınıf arkadaşım Halime TAŞER'e teşekkür ederim.

Asiye Arif

Tarih

.../.../ 2022

ÖZET

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık hatırlatılarak, pozitif lineer operatörler ve süreklilik modülünün temel tanım ve teoremleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, maksimum-çarpım operatörleri tanıtılarak A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde maksimum-çarpım operatörlerinin, daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaklaşım sonuçları elde edilerek temel sonuçlarımıza ait uygulamalara yer verilmiştir. Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Son bölümde, elde edilen orijinal sonuçlarımızın değerlendirilmesi yapılmış ve literatüre katkısından bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuvvet Serisi Metodu, İstatistiksel Yakınsaklık, Maksimum-Çarpım Operatörleri, Yakınsaklık Oranı.

ABSTRACT

APPROXIMATION FOR MAX-PRODUCT OPERATORS VIA STATISTICAL CONVERGENCE WITH RESPECT TO POWER SERIES METHOD

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, by recalling the concepts of statistical convergence, A-statistical convergence, statistical convergence with respect to power series method, positive linear operators and modulus of continuity, some of their important properties are given. In the third section, max-product operators are defined and some approximation properties of the operators which are obtained by A-statistical convergence are presented. In the fourth chapter, the approximation results of the max-product operators are given via statistical convergence with respect to power series which is not included by previously known methods. This chapter contains original results. In the last chapter, our original results are evaluated and their contribution to the literature is mentioned.

Keywords: Power Series Method, Statistical Convergence, Max-Product Operators, Rate of Convergence.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbf{Ax} : ((\mathbf{Ax})_{\mathbf{j}})$	**:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} x_n$ dönüşüm dizisi
$(\mathbf{X}, \mathbf{d})$	**:** Metrik uzay
$\lvert\mathbf{K}\rvert$	**:** K kümesinin eleman sayısı
$\mathbf{K^c}$	**:** K kümesinin tümleyeni
$\delta(\mathbf{K})$	**:** K kümesinin yoğunluğu
$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{K})$	**:** K kümesinin A-yoğunluğu
$\delta_{\mathbf{P_p}}(\mathbf{K})$	**:** K kümesinin P_p-yoğunluğu
$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$	**:** Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbf{C_1}$	**:** Birinci mertebeden Cesáro matrisi
$\mathbf{C}(\mathbf{X}, [\mathbf{0}, \infty))$	**:** X metrik uzayı üzerinde tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	**:** $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{B}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	**:** $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\omega(\mathbf{f}, \delta)\ (\delta > \mathbf{0})$	**:** f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\mathbf{T_n}(\mathbf{f}; \mathbf{x})$	**:** Maksimum-çarpım operatörü
$\mathbf{B_n}(\mathbf{f}; \mathbf{x})$	**:** Bernstein operatörler dizisi
$\bigvee$	**:** Maksimum işareti
$\rightrightarrows$	**:** Düzgün yakınsaklık
$\lvert\lvert . \rvert\rvert_X$	**:** X uzayında norm
$\mathbf{st} - \lim \mathbf{x}$	**:** x dizisinin istatistiksel limiti
$\mathbf{st_{P_p}} - \lim \mathbf{x}$	**:** x dizisinin P_p-istatistiksel limiti
$\mathbf{S_n^h}(\mathbf{f}; \mathbf{x})$	**:** Shepard maksimum-çarpım operatörü
$\mathbf{st_{P_p}} - \mathbf{o}(\mathbf{b_n})$	**:** $o(b_n)$ oranında P_p-istatistiksel yakınsaklık

1. GİRİŞ

Verilen bir fonksiyona daha basit ve kullanışlı fonksiyonlar ile yaklaşılması ile ilgilenen Yaklaşım Teorisi, matematiğin önemli dallarından biri olup bu teorinin ortaya çıkmasının arkasındaki neden K. Weierstrass'ın 1885 yılındaki kapalı, sınırlı bir $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli, reel değerli bir f fonksiyonuna yeterince yakın bir polinomun varlığını ifade eden teoremidir. Yani K. Weierstrass f, $[a,b]$ kapalı sınırlı aralığında tanımlı sürekli, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$

olacak şekilde P polinomunun varlığını ispatlamıştır (Weierstrass, 1885). Ne yazık ki bu ispat oldukça uzun ve zordur. Bu durum birçok matematikçiyi daha basit ve anlaşılır bir ispat aramaya yöneltmiştir ve bu ispatlar arasında iyi bilinen 1912 yılında S. N. Bernstein tarafından kendi adını taşıyan Bernstein polinomları

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, n \in \mathbb{N}, f \in C[0,1] \; ve \; x \in [0,1]$$

kullanılarak verilendir (Bernstein, 1912: 1-2). Bu kadarıyla yetinmeyen birçok matematikçi Bernstein operatörleri yerine daha genel operatörler alınıp alınamayacağı ile ilgilenmiştir. 1953 yılında P. P. Korovkin, pozitif lineer operatörlerin bir $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayıp yakınsamadığına minimum hesaplama ile karar vermeyi sağlayan etkili bir teorem elde etmiştir (Korovkin, 1953: 961). Literatürde Korovkin tipi yaklaşım teoremleri olarak bilinen bu teoremler operatör dizilerinin düzgün yakınsaklığına, pozitifliğine ve lineerliğine dayanmaktadır. Bu teoremler bu üç açıdan da ele alınarak geliştirilmiştir. Örneğin düzgün yakınsaklık yerine, istatistiksel yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, toplanabilme metotları gibi daha zayıf yakınsaklıklar kullanılmıştır (Duman, 2003), (Gadjiev ve Orhan, 2002), (Ünver ve Orhan, 2019). Operatörlerin pozitifliği yerine fonksiyonun artanlığı-azalanlığı, konveksliği-konkavlığı alınarak zayıflatılmıştır. Operatörlerin lineerliği ise son zamanlarda Bede ve arkadaşları tarafından pseudo-lineerlik kavramı kullanılarak geliştirilmiştir (Bede vd., 2006: 494), (Bede vd, 2008: 805), (Bede vd., 2009: 2). Burada aynı anda birden fazla açıdan bu teoremleri geliştirebilir miyiz diye sormak mümkündür. Bu soru 2010 yılında, O. Duman tarafından yakınsaklık yerine A-istatistiksel yakınsaklık, lineerlik yerine pseudo-lineerlik alınarak yanıtlanmıştır (Duman, 2010: 501-514). Daha sonra A-istatistiksel yakınsaklık yerine toplam süreci, kuvvet serisi metotları kullanılarak lineer olmayan maksimum-çarpım operatörlerinin ve maksimum-minimum operatörlerinin yaklaşım özellikleri çalışılmıştır (Gökçer ve Duman, 2016), (Gökçer ve Duman, 2020), (Yurdakadim ve Taş, 2018). Ayrıca birçok matematikçi Korovkin teoremlerini farklı fonksiyon uzaylarına da genişletmiştir.

Abel ve Borel metotları gibi iyi bilinen metotları da içeren kuvvet serisi metodu ve istatistiksel yakınsaklık kavramı birleştirilerek 2019 yılında M. Ünver ve C. Orhan tarafından kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın birbiri tarafından içerilmediğine dair örnekler sunulmuştur (Ünver ve Orhan, 2019).

Bu tezin amacı maksimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemek ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık oranını elde etmektir. Burada maksimum-çarpım operatörlerinin pozitif fakat lineer olmadığını ve ayrıca yaklaşım özelliklerini incelerken kullandığımız kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık metodunun daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmediğini belirtmekte fayda vardır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, A-yoğunluk, A-istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi metodu ve kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır. Ayrıca yaklaşım teorisinde etkili olan pozitif lineer operatörler tanıtılacaktır ve yakınsaklık oranı elde edilirken kullanılan süreklilik modülü ve özellikleri ifade edilecektir.

2.1. Yoğunluk

Bu kısımda $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $K \subseteq \mathbb{N}_0$ olmak üzere, K kümesinin yoğunluğu tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. $\delta(K) := \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k+1} |\{n \leq k : n \in K\}|$ ile tanımlanan limitin mevcut olması durumunda $\delta(K)$ değeri K kümesinin yoğunluğu olarak adlandırılır (Niven ve Zuckerman, 1980: 473). Burada $|K|$ ile K kümesinin kardinal sayısı gösterilmektedir.

Örnek 2.1.2. Bu tanıma göre $\mathbb{N}_0$ kümesinin yoğunluğu 1 olup, doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de 0 yoğunlukludur.

Örnek 2.1.3. Buradan $\{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$ ve $\{1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots\}$ kümelerinin yoğunluklarının

$$\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}_0\}) = \frac{1}{2} \; ve \; \delta(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}_0\}) = \frac{1}{2}$$

olduğu elde edilebilir.

Örnek 2.1.4. Asal sayılar kümesinin ve $\{1, 4, 9, \ldots, k^2, \ldots\}$ kümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrıca $\delta(K)$ ya da $\delta(K^c)$ yoğunluklarından biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(K^c)$ gerçeklenir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı tanıtılarak, klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiden söz edilecektir ve çeşitli örnekler verilecektir.

Tanım 2.2.1. $x = (x_n)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} |\{n \leq k : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanacak biçimde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta(K_\varepsilon) = 0$ ise x dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Fast, 1951: 241), (Fridy, 1985: 302), (Salat, 1980:139).

Bu durum $st - \lim x = \ell$ ya da $x_n \to \ell(st)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.2. $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+2} & , \quad n = m^2 \\ 0 & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisini inceleyelim.
(x_n) dizisinin klasik anlamda yakınsak olmadığı açıktır.
Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n \leq k : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} \subset \{n \leq k : x_n \neq 0\}$$

ve

$$|\{n \leq k : |x_n| \geq \varepsilon\}| \leq |\{n \leq k : x_n \neq 0\}| \leq \sqrt{k}$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} |\{n \leq k : |x_n| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} |\{n \leq k : x_n \neq 0\}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sqrt{k} = 0$$

elde edilir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K_\varepsilon) = 0$ olur. Burada

$$K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - 0| \geq \varepsilon\}$$

olup bu ifade $x = (x_n)$ dizisinin 0 sayısına istatistiksel yakınsak oluğu anlamına gelmektedir.

Örnek 2.2.3. $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad n = m^2 \\ 6 & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisini inceleyelim.
Açıkça (x_n) dizisi sınırsız olup klasik anlamda yakınsak olamaz. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{n \leq k : |x_n - 6| \geq \varepsilon\}| \leq |\{n \leq k : x_n \neq 6\}| \leq \sqrt{k}$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} |\{n \leq k : |x_n - 6| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} |\{n \leq k : x_n \neq 6\}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sqrt{k} = 0$$

elde edilir. Bu durumda $K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - 6| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(K_\varepsilon) = 0$$

olup, $x = (x_n)$ dizisi 6 sayısına istatistiksel yakınsak olacaktır.

Örnek 2.2.4. $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+2} & , \quad n \text{ asal} \\ 0 & , \quad n \text{ asal değil} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisini inceleyelim. Açıkça (x_n) dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.

Asal sayılar kümesinin yoğunluğunun 0 olduğunu kullanarak, asal olmayan sayıların oluşturduğu kümenin 1 yoğunluklu olduğunu söyleyebiliriz. 1985 yılında J. Fridy (Fridy, 1985: 304) ve 1988 yılında J. Connor (Connor, 1988: 51) tarafından istatistiksel yakınsaklık üzerine yapılan çalışmalardan istatistiksel yakınsaklığın 1 yoğunluklu küme üzerinde klasik anlamda yakınsaklığa denk olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla bu bilgiler altında $x = (x_n)$ dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsak olacaktır.

Bu örnekler yardımıyla sınırlı ıraksak dizilerin de sınırsız ıraksak dizilerin de istatistiksel yakınsak olabildiğini görmekteyiz. Klasik yakınsaklıkta ℓ sayısının ε komşuluğu dışında sonlu adette terim kaldığından ve sonlu kümelerin yoğunluğu 0 olduğundan klasik anlamda yakınsak bir dizinin istatistiksel yakınsak olacağı açıktır. Ancak örnekleri dikkatle incelediğimizde istatistiksel yakınsak bir dizinin klasik anlamda yakınsak olmayabileceğini görürüz.

2.3. A-Yoğunluk

Bu kısımda A sonsuz matrisi ve onun yardımıyla tanımlanan A-yoğunluk kavramları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.3.1. $A = (a_{jn})$ $j,n = 0,1,2,\cdots;$ sonsuz bir matris olmak üzere, bir $x = (x_n)$ dizisi için, x in "A-dönüşüm dizisi", $Ax := ((Ax)_j)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} x_n$$

ile tanımlanır. Burada her bir j için seri yakınsak kabul edilmektedir. Klasik anlamda yakınsak bir dizinin A dönüşüm dizisi aynı değere yakınsak oluyorsa A regüler matris adını alır (Hardy, 1949: 42).

Toplanabilme teorisinde $C_1 := (c_{jn})$ Cesàro matrisi

$$c_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j+1} & , \quad 0 \leq n \leq j \\ 0 & , \quad n > j \end{cases}$$

ile tanımlanır ve

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & . & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ \frac{1}{j} & \frac{1}{j} & . & \frac{1}{j} & 0 & \dots \\ \frac{1}{j+1} & \frac{1}{j+1} & . & \frac{1}{j+1} & \frac{1}{j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

şeklinde açıkça ifade edilebilir.

Bir $A = (a_{jn})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz şartları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilir. Burada bu teoremi ispatını vermeksizin hatırlatmakta fayda vardır.

Teorem 2.3.1 (Silverman-Toeplitz)**.** Bir $A = (a_{jn})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i. $\sup_j \sum_{n=0}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$,

ii. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $a_n := \lim_j a_{jn} = 0$,

iii. $\lim_j \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} = 1$

gerçeklenmesidir (Hardy, 1949: 43), (Maddox, 1970: 165).

Kolayca görüleceği üzere Cesàro matrisi regülerdir. Gerçekten de;

i. $\sup_j \sum_{n=0}^{\infty} |a_{jn}| = 1 < \infty$,

ii. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $a_n := \lim_j \frac{1}{j+1} = 0$,

iii. $\lim_j \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} = \lim_j 1 = 1$

gerçeklenir.

Tanım 2.3.2. $A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler matris olsun. $K \subset \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_j \sum_{n \in K} a_{jn} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan limitin olması durumunda $\delta_A(K)$ değerine K kümesinin A-yoğunluğu denir (Freedman ve Sember, 1981: 296-297).

Örnek 2.3.3. $j = 0, 1, 2, \cdots$ için

$$a_{jn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{jn})$ matrisi için $K = \{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\}$ olmak üzere $\delta_A(K) = 1$ olacaktır. Açıkça $K^c = \{0, 2, 3, 5, \cdots\}$ olmak üzere $\delta_A(K^c) = 0$ olduğu görülür.

2.4. A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda A-yoğunluk kavramı yardımıyla tanımlanan A-istatistiksel yakınsaklık hatırlatılacaktır ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.4.1. $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler matris olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n - \ell| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0 \tag{2.2}$$

sağlanacak biçimde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi ℓ sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir.

Yani, her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_A(K_\varepsilon) = 0$$

oluyorsa $x = (x_n)$ dizisi ℓ sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st_A - \lim x = \ell$ ya da $x_n \to \ell(st_A)$ gösterimi kullanılır (Kolk, 1993: 79), (Miller, 1995: 1811).

Tanım 2.4.1 ifadesinde,

- eğer A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa, $I-$yakınsaklık klasik yakınsaklığa indirgenecektir,
- eğer A matrisi yerine C_1 matrisi alınırsa, A-istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenecektir.

Örnek 2.4.2. $j = 0, 1, 2, \cdots$ için

$$a_{jn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{jn})$ matrisini göz önüne alalım. Açıkça $A = (a_{jn})$ negatif olmayan, regüler bir matristir.

Şimdi (x_n) dizisini

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$K_\varepsilon = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n \in K_\varepsilon} a_{jn} = 0$$

olup $x = (x_n)$ dizisinin $\frac{1}{2}$ sayısına A-istatistiksel yakınsak olduğunu elde ederiz. Burada $x = (x_n)$ dizisi sınırlı bir dizidir.

Örnek 2.4.3. $j = 0, 1, 2, \cdots$ için

$$a_{jn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{jn})$ matrisini göz önüne alalım. Açıkça $A = (a_{jn})$ negatif olmayan, regüler bir matristir.

Şimdi (x_n) dizisini

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad n = j^2 \\ j & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $x = (x_n)$ dizisi sınırsız bir dizidir.

$$K_\varepsilon = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n \in K_\varepsilon} a_{jn} = 0$$

olup $x = (x_n)$ dizisinin $\frac{1}{2}$ sayısına A-istatistiksel yakınsak olduğunu elde ederiz.

Klasik anlamda yakınsak bir dizinin A-istatistiksel yakınsak olacağı açıktır. Ancak A-istatistiksel yakınsak bir dizi her zaman klasik anlamda yakınsak olmayabilir. $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler matris olmak üzere $\lim_j \max_n \{a_{jn}\} = 0$ oluyorsa A-istatistiksel yakınsaklık klasik yakınsaklıktan daha kuvvetlidir (Kolk, 1993: 82).

2.5. Kuvvet Serisi Metodu

Bu kısımda kuvvet serisi metodu ve bir dizinin kuvvet serisi anlamında yakınsak olması tanıtılacaktır. Ayrıca, klasik anlamda yakınsaklık ile kuvvet serisi anlamında yakınsaklık arasındaki ilişki örneklendirilecektir.

Tanım 2.5.1. (p_n) negatif olmayan reel terimli bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere,

$$p(t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$$

ifadesine kuvvet serisi denir. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı R ve $0 < R \leq \infty$ olmak üzere

$$C_p := \left\{ f : (-R,R) \to \mathbb{R} | \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} f(t) \quad \text{mevcut} \right\}$$

ve $x = (x_n)$ dizisi için

$$C_{P_p} := \left\{ x = (x_n) | p_x(t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n x_n \quad \text{yakınsaklık yarıçapı} \geq R \quad \text{ve} \quad p_x \in C_p \right\}$$

olsun.

$P_p - \lim : C_{P_p} \to \mathbb{R}$ (kısaca P_p) olmak üzere

$$P_p - \lim x = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n x_n$$

ifadesine kuvvet serisi metodu ve $x = (x_n)$ dizisine de P_p-yakınsaktır denir (Boos, 2000: 152), (Kratz ve Stadtmüller, 1989: 362).

Eğer $\lim x = \ell$ iken $P_p - \lim x = \ell$ oluyorsa, P_p kuvvet serisi metodu regülerdir denir (Boos, 2000: 160).

Şimdi P_p kuvvet serisi metodunun regülerliğini karakterize eden teoremi hatırlatalım:

Teorem 2.5.1. P_p kuvvet serisi metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{t\to R^-} \frac{p_n t^n}{p(t)} = 0$$

olmasıdır (Boos, 2000: 160).

Kuvvet serisi metodu Abel ve Borel gibi iyi bilinen pek çok toplanabilme metotlarını içermektedir. Gerçekten de,

i. eğer $p_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ ise $R = 1$ ve $p(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $t \in (-1,1)$ olup P_p kuvvet serisi metodu Abel metoduyla çakışmaktadır,

ii. eğer $p_n = \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ise $R = \infty$ ve $p(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ olup P_p kuvvet serisi metodu Borel metoduyla çakışmaktadır.

Klasik limit olmadığında dahi kuvvet serisi anlamında yakınsaklıktan söz edebiliriz. Bunu görmek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

Örnek 2.5.2. $x = (x_n)$ dizisi $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$ şeklinde tanımlansın.

$$p_n = \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$$

olmak üzere $R = \infty$, $p(t) = e^t$ ile tanımlanan kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım. Kolaylıkla

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n t^n}{n!} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz ve böylece $x = (x_n)$ dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına P_p-yakınsaktır. Burada $x = (x_n)$ dizisinin klasik anlamda ya da istatistiksel anlamda yakınsak olmadığı açıktır.

Örnek 2.5.3. $x = (x_n)$ dizisi $(1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$ şeklinde tanımlansın.

$$p_n = \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$$

olmak üzere $R = \infty$, $p(t) = e^t$ ile tanımlanan kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım. Kolaylıkla

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n t^n}{n!} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} \left(e^{-t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz ve böylece $x = (x_n)$ dizisi 0 sayısına P_p-yakınsaktır. Burada $x = (x_n)$ dizisinin klasik anlamda ya da istatistiksel anlamda yakınsak olmadığı açıktır.

2.6. Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığı tanıtılarak kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve klasik yakınsaklık ile aralarındaki ilişkiden söz edilecektir.

Tanım 2.6.1. P_p, regüler kuvvet serisi metodu ve $K \subset \mathbb{N}_0$ olsun. Eğer

$$\delta_{P_p}(K) = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n\in K} p_n t^n$$

limiti mevcutsa $\delta_{P_p}(K)$ sayısına K kümesinin P_p- yoğunluğu denir (Ünver ve Orhan, 2019: 537). K kümesinin P_p-yoğunluğu için $0 \leq \delta_{P_p}(K) \leq 1$ olduğu açıktır.

Örnek 2.6.2. Aşağıdaki (p_n) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_n = \begin{cases} 1 \quad , \quad n = 2m \\ 0 \quad , \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

ve $K = \{1,3,5,\ldots\} \subset \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\delta(K) = \frac{1}{2}$ olduğunu biliyoruz ve

$$\begin{aligned} \delta_{P_p}(K) &= \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n\in K} p_n t^n \\ &= \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)}.0 \\ &=0 \end{aligned}$$

bulunur.

Bu örnekten anlaşılacağı üzere, K kümesinin yoğunluğu ile K kümesinin P_p-yoğunluğunun birbirine eşit olması gerekmemektedir.

Tanım 2.6.3. $x = (x_n)$ reel terimli dizi ve P_p regüler kuvvet serisi metodu olsun.

$$K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n\in K_\varepsilon} p_n t^n = 0$$

ise, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{P_p}(K_\varepsilon) = 0$$

ise $x = (x_n)$ dizisi ℓ sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_{P_p} - \lim x = \ell$$

olarak gösterilir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

Örnek 2.6.4. Aşağıdaki (p_n) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ asal} \\ 0 & , \quad n \text{ asal değil} \end{cases},$$

ayrıca $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ asal} \\ n & , \quad n \text{ asal değil} \end{cases}$$

olsun.

$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığı açıktır.

Ancak her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_n - 0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_{P_p}(K_\varepsilon) = 0$$

olup, $x = (x_n)$ dizisi 0 sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 2.6.5. Aşağıdaki (p_n) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ asal} \\ 0 & , \quad n \text{ asal değil} \end{cases}$$

ve $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n \text{ asal} \\ 0 & , \quad n \text{ asal değil} \end{cases}$$

olsun.

Burada $x = (x_n)$ dizisinin 0 sayısına istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Ancak $x = (x_n)$ dizisi P_p-istatistiksel yakınsak değildir.

Bu örnekler yardımıyla istatistiksel yakınsaklık ile P_p-istatistiksel yakınsaklığın birbirini gerektirmediğini söyleyebiliriz (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

2.7. Pozitif Lineer Operatörler

Bu bölümde pozitif lineer operatörlere ilişkin ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve özellikler verilerek iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.7.1. X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere, eğer X uzayından alınan herhangi f fonksiyonuna Y uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren T kuralı varsa o taktirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durumda $g(x) = T(f;x)$ gösterimi kullanılır.

Eğer X uzayı lineer bir uzay ise T operatörünün lineerliğini tanımlayabiliriz.

Tanım 2.7.2. X ve Y reel fonksiyonların iki uzayı olmak üzere her $f, g \in X$ ve α_1, α_2 keyfi iki reel sabiti için T operatörü,

$$T(\alpha_1 f + \alpha_2 g;x) = \alpha_1 T(f;x) + \alpha_2 T(g;x)$$

şartını gerçekliyor ise o taktirde $T : X \to Y$ dönüşümüne lineer operatör denir. Ayrıca eğer $f \geq 0$ olduğunda $Tf \geq 0$ ise T dönüşümüne pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995: 11).

Tanım yardımıyla T lineer operatör ise $T(0;x) = 0$ olduğu kolayca elde edilir.

Önerme 2.7.3. $T : X \to Y$ pozitif lineer operatör olmak üzere

- $f \leq g$ olacak biçimdeki her $f, g \in X$ için $Tf \leq Tg$, (monotonluk)
- her $f \in X$ için $|Tf| \leq T|f|$

gerçeklenir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995: 11).

Tanım 2.7.4. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olmak üzere her $f \in X$ için

$$\|Tf\|_Y \leq M\|f\|_X \tag{2.3}$$

olacak biçimde reel bir M sayısı varsa T sınırlı operatör adını alır. Ayrıca T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{f \in X, f \neq \theta} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} \tag{2.4}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu ve Haciyev, 1995: 12), (Kreyzig, 2007: 91-92).

Şimdi birbirinden bağımsız olarak 1951 yılında Popoviciu (Popoviciu, 1951: 1-4), 1952 yılında H. Bohman (Bohman, 1952: 45) ve 1953 yılında P. P. Korovkin (Korovkin, 1953: 961) tarafından pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsaklığı için gerek ve yeter şart veren teoremi hatırlatalım. Bu teorem literatürde "Bohman-Korovkin Teoremi" olarak bilinmektedir.

Teorem 2.7.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatör ve $e_j(t) = t^j$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde

$$T_n(e_j(t);x) \rightrightarrows e_j(x), j = 0,1,2 \tag{2.5}$$

oluyorsa her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ üzerinde

$$T_n(f(t);x) \rightrightarrows f(x) \tag{2.6}$$

gerçeklenir.

Burada $C[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığından reel sayılara tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı gösterilmiştir.
$[a,b] = [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 2.7.5. $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ *ve* $f \in C[0,1]$ *için*

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanan polinomlar Bernstein polinomları olarak bilinir.
$j = 0,1,2$ olmak üzere $B_n(t^j;x)$ için

$$\begin{aligned} B_n(1;x) &= 1, \\ B_n(t;x) &= x, \\ B_n(t^2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

gerçeklenir.
Gerçekten de $j = 0$ için

$$\begin{aligned} B_n(1;x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (x + (1-x))^n = 1, \end{aligned}$$

$j = 1$ için

$$
\begin{aligned}
B_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x(x+(1-x))^{n-1} = x,
\end{aligned}
$$

$j = 2$ için

$$
\begin{aligned}
B_n(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&\quad + x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\
&\quad + x \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} \\
&\quad + x \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} + x \frac{1}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Dolayısıyla pozitif, lineer (B_n) operatör dizisi için Teorem 2.7.1 gerçeklendiği açıktır.

2.8. Süreklilik Modülü

Bu kısımda hata tahmininde önemli bir yere sahip olan süreklilik modülü tanıtılacaktır ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.8.1. Kompakt bir (X,d) metrik uzayı ve X üzerinde sürekli reel değerli bir f fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonun keyfi bir $\delta > 0$ için $\omega(f,\delta)$ ile gösterilen süreklilik modülü

$$\omega(f,\delta) = \bigvee\{|f(x) - f(y)| : x,y \in X, d(x,y) \leq \delta\}$$

ile tanımlanır.

Burada $\bigvee$ sembolü maksimum anlamına gelmektedir. $\delta > 0$ uzunluğunu aşmayan bir aralıkta fonksiyonun maksimum salınımını ifade eden süreklilik modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir:

i. her $x,y \in X$ için $|f(x) - f(y)| \leq \omega(f,d(x,y))$,

ii. her $\delta > 0$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq m\omega(f,\delta)$ (Altomare ve Campiti, 1994: 266), (Korovkin, 1953: 963).

Ayrıca 1983 yılında Nishishiraho, (X,d) kompakt konveks lineer metrik uzay olması durumunda $\gamma > 0$ için

$$\omega(f,\gamma\delta) \leq (1+\gamma)\omega(f,\delta)$$

olduğunu göstermiştir (Nishishiraho, 1983: 447).

3. MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

Bu bölümde pozitif ancak lineer olmayan operatörlerden iyi bilinen maksimum-çarpım operatörleri tanıtılacaktır ve A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla O. Duman tarafından elde edilen yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Maksimum-Çarpım Operatörleri Ve Özellikleri

Bu kısımda maksimum-çarpım operatörleri tanıtılacaktır ve özellikleri ifade edilecektir. Korovkin tipi yaklaşım teorisinde lineer operatörlerin önemi büyüktür ancak lineer olmayan operatörler de kullanılarak yaklaşım teorisinde çalışmalar yapmak mümkündür.
Şimdi lineer olmayan ancak lineer operatörlerin sahip olduğu yaklaşım özelliklerine sahip olan maksimum-çarpım operatörlerini tanıtalım: (X,d) kompakt metrik uzay olsun. X üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonların uzayını $C(X,[0,\infty))$ ile gösterelim. Maksimum-çarpım operatörleri, $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$T_n(f;x) = \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot f(x_k) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada x_k $(k = 0,1,\cdots,n)$ noktaları X metrik uzayından alınan temsilci noktalar olup, $K_n(x,x_k)$ çekirdek fonksiyonunun X metrik uzayı üzerinde tanımlı, negatif olmayan ve x değerine göre sürekli bir foksiyon olduğu kabul edilmektedir.
Maksimum-çarpım operatörlerinin özelliklerine ilişkin B. Bede ve arkadaşları tarafından elde edilen önermeyi verebiliriz (Bede vd., 2006: 494), (Bede vd, 2008: 805), (Bede vd., 2009: 2).

Önerme 3.1.1. $T_n : C(X,[0,\infty)) \to C(X,[0,\infty))$ her $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $C(X,[0,\infty))$ uzayına ait her f,g fonksiyonu için,

$$T_n(\alpha_1 \cdot f \bigvee \alpha_2 \cdot g;x) = \alpha_1 \cdot T_n(f;x) \bigvee \alpha_2 \cdot T_n(g;x)$$

anlamında pseudo-lineerlik özelliğini sağlar (Bede vd., 2008: 808).

Bu eşitlikten görüldüğü üzere maksimum-çarpım operatörleri klasik anlamda lineer değildir.

3.2. Maksimum-Çarpım Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda maksimum-çarpım operatörlerinin O. Duman tarafından 2010 yılında A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım özellikleri verilecektir (Duman, 2010: 501-514). Bunun için öncelikle ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki lemmayı hatırlatalım.

Lemma 3.2.1. Her $a_k,\ b_k \in [0,\infty),\ ve\ k = 0,1,2,...,n,$ için

$$\left| \bigvee_{k=0}^{n} a_k - \bigvee_{k=0}^{n} b_k \right| \leq \bigvee_{k=0}^{n} |a_k - b_k|$$

eşitsizliği gerçeklenir (Bede vd., 2008: 807).
Burada maksimum-çarpım operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaklaşım özelliklerini elde etmek için önemli olan

$$\delta_A\left(\left\{n\in\mathbb{N}:\bigvee_{k=0}^{n}K_n(x,x_k)=1\right\}\right)=1 \tag{3.2}$$

ifadesinin her $x\in X$ için gerçeklendiğini kabul edeceğiz.
Şimdi negatif olmayan, regüler $A=(a_{jn})$ matrisi için eşitlik (3.1) ve eşitlik (3.2) ile birlikte verilen maksimum-çarpım operatörlerinin A-istatistiksel yaklaşım özelliklerine ilişkin teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.1. (X,d) kompakt metrik uzay ve $A=(a_{jn})$ negatif olmayan, regüler bir matris olmak üzere (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile birlikte verilen T_n operatörü için

$$st_A-\lim\left\{\bigvee\{|T_n(\varphi_x;x)|:x\in X\}\right\}=0,\ \varphi_x(t)=d^2(t,x), \tag{3.3}$$

oluyorsa her $f\in C(X,[0,\infty))$ için

$$st_A-\lim\left\{\bigvee\{|T_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}\right\}=0$$

gerçeklenir (Duman, 2010: 504).

İspat. $x\in X$ ve $f\in C(X,[0,\infty))$ verilsin. f, X kompakt uzayı üzerinde sürekli olduğundan, f fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli olacaktır. Dolayısıyla her $\varepsilon>0$ için bir δ sayısı bulabiliriz ki $d(t,x)<\delta$ olacak biçimde her x,t için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ gerçeklenir. Burada $H_f:=\bigvee\{|f(t)|:t\in X\}$ olmak üzere her $t\in X$ için

$$|f(t)-f(x)|\leq\varepsilon+\frac{2H_f}{\delta^2}\varphi_x(t) \tag{3.4}$$

yazabiliriz.

$$E:=\left\{n\in\mathbb{N}:\bigvee_{k=0}^{n}K_n(x,x_k)=1\right\} \tag{3.5}$$

kümesini göz önüne alırsak eşitlik (3.2) gereğince $\delta_A(E)=1$ ve $\delta_A(E^c)=0$ olup eşitsizlik (3.4) ve Lemma 3.2.1 gereğince her $n \in E$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &= \left| \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot f(x_k) - \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot f(x) \right| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot |f(x_k) - f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot \left(\varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2} \varphi_x(x_k) \right) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2} \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot \varphi_x(x_k) \\
&= \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2} T_n(\varphi_x;x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Her $x \in X$ üzerinden eşitsizliğin iki tarafında maksimum alırsak, her $n \in E$ için

$$\bigvee \{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2} \bigvee \{|T_n(\varphi_x;x)| : x \in X\} \tag{3.6}$$

gerçeklendiğini görürüz. Verilen bir $h > 0$ sayısı için $\varepsilon < h$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçerek G ve G' kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
G &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \left(\bigvee \{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \right) \geq h \right\}, \\
G' &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \left(\bigvee \{|T_n(\varphi_x;x)| : x \in X\} \right) \geq \frac{(h-\varepsilon)\delta^2}{2H_f} \right\}.
\end{aligned}$$

G ve G' kümelerinin tanımından yararlanarak

$$G \cap E \subset G' \cap E$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Buradan her $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in G \cap E} a_{jn} \leq \sum_{n \in G' \cap E} a_{jn} \leq \sum_{n \in G'} a_{jn}$$

yazabiliriz.
$j \to \infty$ üzerinden limit alarak

$$\lim_{j} \sum_{n \in G \cap E} a_{jn} = 0$$

elde ederiz. Ayrıca her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n \in G} a_{jn} = \sum_{n \in G \cap E} a_{jn} + \sum_{n \in G \cap (\mathbb{N} \setminus E)} a_{jn} \leq \sum_{n \in G \cap E} a_{jn} + \sum_{n \in (E^c)} a_{jn}$$

eşitsizliği sağlanır. $\delta_A(E^c) = 0$ olduğunu kullanarak

$$\lim_j \sum_{n\in G} a_{jn} = 0$$

buluruz. Bu ise

$$st_A - \lim \left\{ \bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} \right\} = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■
Teorem 3.2.1 ifadesinde A matrisi yerine I matrisi alarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.2. (X,d) kompakt metrik uzay olmak üzere eşitlik (3.1) ile tanımlanan T_n operatörü için *her* $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$

$$\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) = 1$$

gerçeklenirse ve $(T_n(\varphi_x;x))$ dizisi sıfır fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsak ise, $C(X,[0,\infty))$ uzayına ait her f fonksiyonu için $(T_n(f;x))$ dizisi f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır.

Uyarı 3.3. Teorem 3.2.1 maksimum-çarpım operatörlerinin bir $f \in C(X,[0,\infty))$ fonksiyonuna A-istatistiksel yakınsaklığını verirken, Sonuç 3.2.2 klasik yakınsaklığını verir. Ancak aşağıdaki örnek ile istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaklaşım sonuçlarının klasik anlamda yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu göreceğiz.

Örnek 3.3.1. (X,d) kompakt metrik uzay olmak üzere $x \in X$, $\lambda, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ için Shepard maksimum-çarpım operatörü:

$$S_n^{\lambda}(f;x) = \bigvee_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{1}{d^{\lambda}(x,x_k)}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d^{\lambda}(x,x_j)}} \right) \cdot f(x_k) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{d^{\lambda}(x,x_k)}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d^{\lambda}(x,x_j)}} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Her $f \in C(X,[0,\infty))$ için $\left(S_n^{\lambda}(f)\right)$ dizisinin f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsak olduğu bilinmektedir (Bede, vd., 2006: 495).
Şimdi sıfıra $A-$istatistiksel yakınsak fakat klasik anlamda yakınsak olmayan bir (a_n) dizisi göz önüne alalım (Kolk, 1993). (a_n) dizisi ve $\left(S_n^{\lambda}(f)\right)$ dizisi yardımıyla $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$T_n(f;x) = (1+a_n)S_n^{\lambda}(f;x) \tag{3.8}$$

operatörünü tanımlayalım. Açıkça T_n operatörleri Teorem 3.2.1 in tüm şartlarını gerçekler. Böylece $f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$st_A - \lim \left\{ \bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} \right\} = 0$$

gerçeklenir. Ancak (a_n) dizisi klasik anlamda yakınsak olmadığından $(T_n(f;x))$ dizisi ile f foksiyonuna yaklaşmak mümkün değildir.

Şimdi Teorem 3.2.1 ile elde edilen A-istatistiksel yakınsaklığın oranını verebiliriz. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanımı hatırlatalım.

Tanım 3.3.2. $A = (a_{jn})$ negatif olmayan, regüler bir matris ve (a_n) pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n - \ell| \geq \varepsilon a_n} a_{jn} = 0$$

ise, bu durumda $x = (x_n)$ dizisi, $o(a_n)$ oranında ℓ sayısına $A-$istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n - \ell = st_A - o(a_n), (n \to \infty)$ ile gösterilir.

A-istatistiksel yakınsaklık oranıyla ilgili teoremi vermeden önce ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki lemmayı ispatlı olarak hatırlatalım.

Lemma 3.3.3. Her $a_k, b_k \geq 0$ $(k = 0,1,...,n)$, için

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k b_k \leq \left(\bigvee_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\bigvee_{k=0}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}$$

gerçeklenir (Duman, 2010: 507).
İspat. $p,q \in \{0,1,\cdots,n\}$ için

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k = a_p \; ve \; \bigvee_{k=0}^{n} b_k = b_q$$

olduğunu kabul edelim. Her $k = 0,1,\cdots,n$ için

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k b_k \leq a_p b_q, \bigvee_{k=0}^{n} a_k^2 = a_p^2 \; ve \; \bigvee_{k=0}^{n} b_k^2 = b_q^2$$

olup, buradan sonuç kolaylıkla elde edilir. ∎

Teorem 3.3.1. (X,d) kompakt metrik uzay, $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve (a_n) pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere eşitlik (3.1) ve eşitlik (3.2) ile verilen T_n operatörü ve $C(X,[0,\infty))$ uzayına ait her f fonksiyonu için

$$\omega(f,\delta_n) = st_A - o(a_n), (n \to \infty),$$

$$\delta_n := \sqrt{\bigvee \{T_n(\varphi_x;x) : x \in X\}},\ \varphi_x(t) = d^2(t,x),$$

oluyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \geq a_n$ olacak biçimde pozitif terimli, artmayan bir (b_n) dizisi için

$$\bigvee \{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} = st_A - o(b_n), (n \to \infty)$$

gerçeklenir.

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ olsun. Eşitlik (3.2) ile tanımlanan E kümesini kullanarak her $n \in E$ ve her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot |f(x_k) - f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot \omega(f,d(x_k,x)) \\
&\leq \omega(f,\delta) \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \left(1 + \frac{d(x_k,x)}{\delta}\right) \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) d(x_k,x)\right\} \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \bigvee_{k=0}^{n} \left[K_n^{1/2}(x,x_k)\right] \cdot \left[K_n^{1/2}(x,x_k) d(x_k,x)\right]\right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan Lemma 3.3.3 gereğince ve her $n \in E$, $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} [K_n(x,x_k)]} \cdot \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} [K_n(x,x_k) d^2(x_k,x)]}\right\} \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{T_n(d^2(\cdot,x);x)}\right\}
\end{aligned}$$

olup aynı n ve δ değerleri için

$$\bigvee \{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{\delta_n}{\delta}\right\} \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Özel olarak $\delta := \delta_n$ seçilerek

$$\bigvee \{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \leq 2\omega(f,\delta_n) \tag{3.10}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ için G ve G' kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} \geq \varepsilon b_n \right\},$$
$$G' := \left\{ n \in \mathbb{N} : \omega(f, \delta_n) \geq \frac{\varepsilon a_n}{2} \right\}.$$

G ve G' kümelerinin tanımından yararlanarak

$$G \cap E \subseteq G' \cap E$$

olup

$$\sum_{n \in G \cap E} a_{jn} \leq \sum_{n \in G' \cap E} a_{jn} \leq \sum_{n \in G'} a_{jn}$$

yazabiliriz.
Şimdi $j \to \infty$ için limit alarak

$$\lim_j \sum_{n \in G \cap E} a_{jn} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_j \sum_{n \in G} a_{jn} = 0$$

olacaktır ve

$$\bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} = st_A - o(b_n), (n \to \infty)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

4. MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM

Bir dizinin yakınsak olmadığı durumlarda uygun toplanabilme yöntemleri; örneğin sonsuz matrisler, istatistiksel yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, ideal yakınsaklık kullanılarak diziye limit karşılık getirmek mümkündür. Iraksak seriler ve toplanabilme teorisinin temel amacı olan bu arayış yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynamıştır. Yaklaşım teorisi ile toplanabilme teorisini birleştiren ilk çalışma A. D. Gadjiev ve C. Orhan tarafından yapılmış olup oldukça aktif çalışılan bir teoriyi geliştirmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002). Korovkin teoremi, klasik limit yerine istatistiksel yakınsaklık alınarak daha etkili, kullanışlı hale getirilmiştir. 2019 yılında M. Ünver ve C. Orhan tarafından kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık tanımlanarak Korovkin teoremi bu yönde de geliştirilmiştir.

Bu bölümde kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla maksimum-çarpım operatörleri için elde edilen yaklaşım sonuçları verilecektir.

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

4.1. Pozitif Lineer Operatörler İçin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Yaklaşım

Bu kısımda pozitif lineer operatörler için A. D. Gadjiev ve C. Orhan tarafından istatistiksel yakınsaklık yardımıyla verilen Korovkin tipi teorem ispatlı olarak hatırlatılacaktır. Ayrıca M. Ünver ve C. Orhan tarafından P_p-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla verilen versiyonu da ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : C[a,b] \to B[a,b]$ tanımlı pozitif lineer operatörler olmak üzere

i. $st - \lim ||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} = 0$

ii. $st - \lim ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} = 0$

iii. $st - \lim ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} = 0$

oluyorsa, her $f \in C[a,b]$ için

$$st - \lim ||T_n(f;x) - f(x)||_{B[a,b]} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Orhan, 2002: 131).

İspat. $f \in C[a,b]$ verilsin. f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan, düzgün sürekli olacaktır. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için bir δ sayısı bulabiliriz ki $|t-x| < \delta$ olacak biçimde her $x,t \in [a,b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Ayrıca f fonksiyonu aynı zamanda sınırlı olduğundan $|t-x| \geq \delta$ olacak biçimde her $x,t \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \cdot 1 \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

sağlanır. Buradan da her $t \in (-\infty, \infty)$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + \varepsilon \tag{4.1}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} T_n(f;x) - f(x) &= T_n(f(t) - f(x) + f(x);x) - f(x) \\ &= T_n(f(t) - f(x);x) + f(x)T_n(1;x) - f(x) \\ &= T_n(f(t) - f(x);x) + f(x)[T_n(1;x) - 1] \end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.1) eşitsizliğinin her iki tarafına T_n operatörü uygulanarak,

$$\begin{aligned} ||T_n(f;x) - f(x)||_{B[a,b]} &\leq \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}\right)||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} \\ &+ \frac{4Mb}{\delta^2}||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} + \frac{2M}{\delta^2}||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} \\ &\leq H_1\left(||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} + ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} + ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H_1 = \max\left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}, \frac{4Mb}{\delta^2}\right)$ ile verilmektedir. Son eşitsizlikten, her $\varepsilon' > 0$ için

$$\begin{aligned} |\{n \leq N : ||T_n(f;x) - f(x)||_{B[a,b]} \geq \varepsilon'\}| \leq \Big|\Big\{n \leq N : &||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} + ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} \\ &+ ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{H_1}\Big\}\Big| \end{aligned} \tag{4.2}$$

yazabiliriz. Verilen bir $\varepsilon' > 0$ sayısı için $\varepsilon < \varepsilon'$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilerek G, G_1, G_2 ve G_3 kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} G &:= \left\{n : ||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} + ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} + ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{H_1}\right\}, \\ G_1 &:= \left\{n : ||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}, \\ G_2 &:= \left\{n : ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}, \\ G_3 &:= \left\{n : ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}. \end{aligned}$$

G, G_1, G_2 ve G_3 kümelerinin tanımından yararlanarak

$$G \subset G_1 \cup G_2 \cup G_3$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Yukarda verilen eşitsizlik (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}|\{n \leq N : ||T_n(f;x) - f(x)||_{B[a,b]} \geq \varepsilon'\}| \leq & \left|\left\{n \leq N : ||T_n(1;x) - 1||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}\right| \\ & + \left|\left\{n \leq N : ||T_n(t;x) - x||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}\right| \\ & + \left|\left\{n \leq N : ||T_n(t^2;x) - x^2||_{B[a,b]} \geq \frac{\varepsilon'}{3H_1}\right\}\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.
(i), (ii) ve (iii) gereğince

$$st - \lim ||T_n(f;x) - f(x)||_{B[a,b]} = 0$$

gerçeklenir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla verilen Korovkin tipi bir teorem hatırlatalım:

Teorem 4.1.2. P_p regüler kuvvet serisi metodu ve $T_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörler ve $i = 0,1,2$ için $e_i(t) = t^i$ olmak üzere,

$$st_{P_p} - \lim ||T_n e_i - e_i|| = 0$$

oluyorsa her $f \in C[a,b]$ için

$$st_{P_p} - \lim ||T_n f - f|| = 0$$

gerçeklenir (Ünver ve Orhan, 2019: 544).

4.2. Maksimum-Çarpım Operatörlerinin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda maksimum-çarpım operatörleri için kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımı ile elde edilen yaklaşım özellikleri ve P_p-istatistiksel yakınsaklık oranı verilecektir. Burada sonuçlarımızı elde etmek için A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaklaşım özelliklerini incelerken kabul ettiğimiz şarta benzer olarak

$$E := \left\{n : \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) = 1\right\}$$

olmak üzere

$$\delta_{P_p}(E) = 1 \tag{4.3}$$

gerçeklendiğini kabul edeceğiz. Ayrıca $n = 0$ için $T_n(f;x) = f(x)$ olarak tanımlayacağız. Bu tanım, örneğin $x_k = \frac{k}{n}$ gibi temsilci noktalardaki anlamsızlığı ortadan kaldırarak iyi tanımlı bir operatör dizisini göz önünde bulundurmamızı sağlayacaktır.

Teorem 4.2.1. (X,d) kompakt metrik uzay ve P_p regüler kuvvet serisi metodu olmak üzere eşitlik (3.1) ve eşitlik (4.3) ile verilen T_n operatörü için

$$st_{P_p} - \lim\left\{\bigvee\{|T_n(\varphi_x;x)| : x \in X\}\right\} = 0,\ \varphi_x(t) = d^2(t,x), \tag{4.4}$$

oluyorsa her $f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$st_{P_p} - \lim\left\{\bigvee\{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\}\right\} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ verilsin. X kompakt ve f X üzerinde sürekli olduğundan, f fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli olacaktır. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için bir δ sayısı bulabiliriz ki $d(t,x) < \delta$ olacak biçimde her $x,t \in X$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Buradan $H_f := \bigvee\{|f(t)| : t \in X\}$ olmak üzere her $t \in X$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2}\varphi_x(t) \tag{4.5}$$

yazabiliriz. $\delta_{P_p}(E) = 1$ olduğndan $\delta_{P_p}(E^c) = 0$ olup eşitsizlik (4.5) ve Lemma 3.2.1 uyarınca her $n \in E$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &= \left|\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)\cdot f(x_k) - \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)\cdot f(x)\right| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)\cdot|f(x_k) - f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)\cdot\left(\varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2}\varphi_x(x_k)\right) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2}\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)\cdot\varphi_x(x_k) \\
&= \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2}T_n(\varphi_x;x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Her $x \in X$ üzerinden eşitsizliğin iki tarafında maksimum alırsak, her $n \in E$ için

$$\bigvee\{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon + \frac{2H_f}{\delta^2}\bigvee\{|T_n(\varphi_x;x)| : x \in X\} \tag{4.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Verilen bir $h > 0$ sayısı için $\varepsilon < h$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilerek G ve G'

kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$G := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \left(\bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} \right) \geq h \right\},$$
$$G' := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \left(\bigvee \{ |T_n(\varphi_x;x)| : x \in X \} \right) \geq \frac{(h-\varepsilon)\delta^2}{2H_f} \right\}.$$

$$G \cap E \subset G' \cap E$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz ve her $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G \cap E} p_n t^n \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G' \cap E} p_n t^n \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G'} p_n t^n$$

yazabiliriz.
Eşitsizliğin iki tarafında limit alarak

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G \cap E} p_n t^n = 0$$

elde ederiz. Bu ise

$$\delta_{P_p}(G \cap E) = 0$$

demektir. Buradan

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^n = \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G \cap E} p_n t^n + \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G \cap (E^c)} p_n t^n \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G \cap E} p_n t^n + \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in E^c} p_n t^n$$

olup eşitsizliğin iki tarafında limit alarak, $\delta_{P_p}(E^c) = 0$ olduğundan

$$\delta_{P_p}(G) = 0$$

bulunur. Bu ise

$$st_{P_p} - \lim \left\{ \bigvee \{ |T_n(f;x) - f(x)| : x \in X \} \right\} = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■
A-istatistiksel yakınsaklık oranı, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.2.1. P_p regüler kuvvet serisi metodu ve (a_n) pozitif terimli, artmayan reel sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{0<t \to R^-} \left[\frac{1}{p(t)} \sum_{n:|x_n - \ell| \geq \varepsilon a_n} p_n t^n \right] = 0$$

sağlanıyorsa $x = (x_n)$ dizisi ℓ sayısına $o(a_n)$ oranında P_p-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $n \to \infty$ iken $x_n - \ell = st_{P_p} - o(a_n)$ gösterimi kullanılır.

Burada yakınsaklık oranının (x_n) dizisinin terimleri tarafından kontrol edildiğini belirtmekte fayda vardır.
Şimdi P_p-istatistiksel yakınsaklık oranı ile ilgili elde ettiğimiz teoremi verelim.

Teorem 4.2.2. (X,d) kompakt, konveks, lineer metrik uzay ve P_p regüler kuvvet serisi metodu olsun. Eğer eşitlik (3.1) ve eşitlik (4.3) ile verilen T_n operatörü, $C(X,[0,\infty))$ uzayına ait her f fonksiyonu için

$$\omega(f,\delta_n) = st_{P_p} - o(a_n), (n \to \infty),$$

$$\delta_n := \sqrt{\bigvee\{T_n(\varphi_x;x) : x \in X\}},\ \varphi_x(t) = d^2(t,x),$$

şartını sağlıyorsa, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $b_n \geq a_n$ olacak biçimde pozitif terimli, artmayan bir (b_n) dizisi için

$$\bigvee\{|T_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} = st_{P_p} - o(b_n), (n \to \infty)$$

gerçeklenir.

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ verilsin. Eşitlik (4.3) ile tanımlanan E kümesini kullanarak her $n \in E$ ve her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot |f(x_k) - f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \cdot \omega(f,d(x_k,x)) \\
&\leq \omega(f,\delta) \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) \left(1 + \frac{d(x_k,x)}{\delta}\right) \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) d(x_k,x)\right\} \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \bigvee_{k=0}^{n} \left[K_n^{1/2}(x,x_k)\right] \cdot \left[K_n^{1/2}(x,x_k) d(x_k,x)\right]\right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan Lemma 3.3.3 gereğince ve her $n \in E$, $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x) - f(x)| &\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} [K_n(x,x_k)]} \cdot \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} [K_n(x,x_k) d^2(x_k,x)]}\right\} \\
&\leq \omega(f,\delta) \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{T_n(d^2(\cdot,x);x)}\right\}
\end{aligned}$$

olup aynı n ve δ değerleri için

$$\bigvee\{|T_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}\leq\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{\delta_n}{\delta}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta:=\delta_n$ seçimi ile

$$\bigvee\{|T_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}\leq 2\omega(f,\delta_n) \tag{4.7}$$

elde ederiz. $\varepsilon>0$ için G ve G' kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} G &:= \left\{n\in\mathbb{N}_0 : \bigvee\{|T_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}\geq\varepsilon b_n\right\}, \\ G' &:= \left\{n\in\mathbb{N}_0 : \omega(f,\delta_n)\geq\frac{\varepsilon a_n}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Eşitsizlik (4.7) gereğince

$$G\cap E\subseteq G'\cap E$$

olup

$$\frac{1}{p(t)}\sum_{n\in G\cap E}p_nt^n\leq\frac{1}{p(t)}\sum_{n\in G'\cap E}p_nt^n\leq\frac{1}{p(t)}\sum_{n\in G'}p_nt^n$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{n\in G\cap E}p_nt^n=0$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\lim_{t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{n\in G}p_nt^n=0$$

olup

$$\bigvee\{|T_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}=st_{P_p}-o(b_n),(n\to\infty)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi bilinen teoremleri kullanmanın mümkün olmadığı ancak bizim sonuçlarımız yardımıyla yine de yaklaşım özelliklerinden söz edebileceğimiz örnekler vereceğiz.

Örnek 4.2.2. Aşağıdaki (p_n) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım ve (s_n) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}, \qquad s_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ 1 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}.$$

P_p kuvvet serisi metodunun regüler olduğu açıktır ve $\varepsilon > 0$ için

$$E_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |s_n - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{n = 2k+1 : k \in \mathbb{N}_0\}$$

sağlandığını görebiliriz. Buradan da

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon) = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n\in E_\varepsilon} p_n t^n = 0$$

olup (s_n) dizisinin 0 sayısına P_p-istatistiksel yakınsak olduğunu elde ederiz. Her $f \in C(X,[0,\infty))$ için Örnek 3.3.1 de tanımlanan $\left(S_n^\lambda(f)\right)$ Shepard maksimum-çarpım operatör dizisinin f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsak olduğu bilinmektedir. (s_n) dizisi ve $\left(S_n^\lambda(f)\right)$ dizisi yardımıyla T_n operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T_n(f;x) = (1+s_n)S_n^\lambda(f;x), \; x \in X \; ve \; f \in C(X,[0,\infty)).$$

Açıkça T_n operatörleri Teorem 4.2.1 in tüm koşullarını sağlar. Buradan, her $f \in C(X,[0,\infty))$,

$$st_{P_p} - \lim\left\{\bigvee\{|T_n(f,x) - f(x)| : x \in X\}\right\} = 0$$

elde ederiz. Ancak (s_n) dizisi klasik anlamda yakınsak olmadığından $(T_n(f))$ dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşmak mümkün değildir.

Örnek 4.2.3. Aşağıdaki gibi tanımlanan (T_n) dizisini göz önüne alalım,

$$T_n(f;x) = u_n S_n^\lambda(f;x), \tag{4.8}$$

burada $(S_n^\lambda(f))$ Shepard maksimum-çarpım operatörü ve

$$u_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}, \qquad p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

ile verilsin.

P_p kuvvet serisi metodunun regüler olduğu açıktır ve $\varepsilon > 0$ için

$$E_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 : |u_n - 0| \geq \varepsilon\} \subseteq \{n = 2k+1 : k \in \mathbb{N}_0\}$$

sağlandığını görebiliriz. Buradan da

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon) = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n\in E_\varepsilon} p_n t^n = 0$$

olup (u_n) dizisi 1 sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla Teorem 4.2.1 kullanılarak $(T_n(f))$ dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşmak mümkün olacaktır. Ancak (u_n) klasik anlamda yakınsak olmadığından $(T_n(f))$ X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla lineer olmayan maksimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin incelenmesi ve yakınsaklık oranının hesaplanması amaçlanmıştır. Bu bağlamda, öncelikle klasik Korovkin teoremi, kuvvet serisi metodu, istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık hatırlatılmıştır. Daha sonra lineer olmayan ancak lineer operatörlerin sahip olduğu yaklaşım özelliklerine sahip olan maksimum-çarpım operatörleri tanıtılmıştır ve A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin teoreminin istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen genelleştirmeleri hatırlatılmıştır.
Son olarak, tezin amacı doğrultusunda kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla maksimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca yakınsaklık oranı hesaplanmıştır. Verilen örnekler ile literatürde bilinen sonuçların kullanılamayacağı görülmüştür. Yani ispatladığımız teoremlerimizin önemli bir boşluğu dolduracağı açıktır.
Sonuç olarak yakınsaklık yerine daha zayıf olan kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık alınarak lineer olmayan operatörler için yaklaşım teoremleri elde edilmiştir. Bu sonuçların gelecek yıllarda maksimum-minimum operatörlerine de aktarılması mümkün gözükmektedir ve bu konu ile ilgilenen okuyuculara toplanabilme metotları kullanılarak elde edilebilecek yaklaşım sonuçları öneri niteliğindedir.

KAYNAKÇA

Altomare, F. & Campiti, M. (1994). Korovkin-type approximation theory and its applications, *Walter de Gruyter Co. Berlin*, 17.

Bede, B., Nobuhara, H., Fodor, J., & Hirota, K. (2006). Max-product Shepard approximation operators. *J. Adv. Comput. Intelligence Intelligent Informatics*, 10, 494-497.

Bede, B., Nobuhara, H., Dankova, M., & Nola, A. D. (2008). Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy Sets Syst.*, 159, 804-820.

Bede, B., Coroianu, L., & Gal, S. G. (2009). Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operators of max-product kind. *Int. J. Math. Sci. , Art. ID 590589*, 22 pp.

Bernstein, S. N. (1912). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee. *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13, 1-2.

Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat.*, 2, 43-56.

Boos, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. *Oxford University Press, Oxford.*

Connor, J. (1988). The statistical and strong p- Cesàro convergence of sequences. *Analysis 8*, 47-63.

Duman, O., Khan, M. K., & Orhan, C. (2003). A-statistical convergence of approximating operators. *Math. Inequal. Appl.*, 6, 689-699.

Duman, O. (2010). Statistical convergence of max-product approximating operators. *Turk. J. Math.*, 34, 501-514.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2, 241-244.

Freedman, A. R., & Sember, J. J. (1981) Densities and summability. *Pacific J. Math.* 95, 293-305.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis 5*, 301-313.

Gadjiev, A., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 32 , 129-137.

Gökçer T. Y., & Duman, O. (2016). Summation process by max-product operators. *Comp. Anal. Springer Proceedings in Math. and Stat.* 155, DOI 10.1007/978-3-319-28443-9-4.

Gökçer, T. Y., & Duman, O. (2020). Approximation by max-min operators: A general theory and its application. *Fuzzy Sets and Systems*, 394, 146-161.

Hardy, G. H. (1949). Divergent series. *Oxford University Press, London*.

Hacısalihoğlu, H. I., & Orhan, C. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, *A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara*.

Kratz, W. & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p-summability. *J. Math. Anal. Appl.*, 139, 362-371.

Kreyzig, E. (2007). Introductory to functional analysis with application. *John Wiley, New York*.

Kolk, E (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, 13, 77-83.

Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R*, 90, 961-964.
Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis. *Cambridge University Press*.
Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.* Volume 347, Number 5, 1811-1819.
Nishishiraho, T. (1983). Convergence of positive linear approximation processes. *Tohoku Math. J.*, 35, 441-458.
Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (2008). An introduction to the theory of numbers. *John Wiley and Sons*.
Popoviciu, T. (1950). Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare *Lucrarile Ses. Gen. Şt. Acad. Române din*, 1-4.
Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mat. Slovaca.*, 30, 139-150.
Ünver, M., & Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory. *Numer. Func. Anal. Opt.*, 40, 535-547.
Yurdakadim, T., & Taş, E. (2018). Some results for max-product operators via power series method. *Acta. Math. Univ. Comeniannae Vol. LXXXVII*, 2, PP. 191-198.
Weierstrass, K. G. (1885). Über die analytische Dorstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen. *Veranderlichen. Sitzungsber, Akad. Berlin*.