ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

İKİZ ASALLAR ÜZERİNE

Hasan DAĞLAR
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2017

Ref.No: 10158323

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ
ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

İKİZ ASALLAR ÜZERİNE

Hasan DAĞLAR
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2017

ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

ON TWIN PRIMES

Hasan DAĞLAR
Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Ilker INAM

BILECIK, 2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21.06.2017 tarih ve ....32.. sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14.07.2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hasan DAĞLAR'ın "İkiz Asallar Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. İlker İNAM

ÜYE : Prof.Dr.Emrah AKYAR

ÜYE : Doç.Dr.Yasemin ÇENGELLENMİŞ

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../........ tarih ve ..../............ sayılı kararı.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimimin tez hazırlama süreci boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, yoğun mesaisine rağmen beni ihmal etmeyen kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İlker İNAM’a, destekleri ile sürekli yanımda olan aileme ve kurumuma teşekkürlerimi sunarım.

Hasan DAĞLAR

ÖZET

Bu çalışmada asal sayıların bazı özellikleri incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde çalışmada kullanılacak olan notasyon tanıtılarak giriş yapılmıştır. İkinci bölümde asal sayıların özellikleri incelenmiş ve Goldbach problemleri ile Riemann ve Genişletilmiş Riemann Hipotezleri ele alınmıştır. Ayrıca Riemann-zeta fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde asal sayılar için bazı analitik metotlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm ise kısa aralıklardaki asal sayıların varlığı ve ikiz asallar üzerine özellikle Cole ödülü sahibi Prof.Dr.Cem Yalçın Yıldırım'ın sonuçlarının da aralarında bulunduğu literatürdeki sonuçlar ele alınmıştır. Beşinci ve son bölümde ise çalışmanın sunuş tarihi itibariyle oldukça güncel bir sonuç olan $[4n, 5n]$ aralığında asal sayıların varlığına dair elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Asal Sayılar; Riemann Hipotezi; Kısa Aralıktaki Asal Sayılar

ABSTRACT

In this study, some features of prime numbers are examined. In the first part of this work consisting of five chapters, the notation to be used in the study is introduced. In the second part, some properties of prime numbers are examined and Goldbach problems and Riemann and Generalized Riemann Hypothesis are discussed. In addition, the properties of the Riemann-zeta function have been studied. In the third chapter some analytical methods for prime numbers are introduced. In the fourth part, the results of the literature on the existence of prime numbers in short intervals and twin primes including the results of Prof.Dr.Cem Yalçın Yıldırım, who has Cole Prize, are discussed. In the fifth and last chapter, the results obtained on the existence of prime numbers in the interval $[4n, 5n]$, which is a fairly recent result as of the date of presentation of the work. This work is a compilation.

Keywords: Prime Numbers; Riemann Hypothesis; Primes in Short Intervals

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ONAY SAYFASI

TEŞEKKÜR

ÖZET	**i**
ABSTRACT	**ii**
JÜRİ ONAY SAYFASI	**iii**
TEŞEKKÜR	**iii**
1. GİRİŞ VE NOTASYON	**1**
2. ASAL SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ	**2**
2.1. Goldbach Problemleri	2
2.2. Riemann Zeta Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri	3
2.3. Riemann Hipotezi	6
3. ASAL SAYILAR İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR	**11**
4. KISA ARALIKLARDAKİ ASAL SAYILAR ÜZERİNE	**14**
5. [4*n*,5*n*] ARALIĞINDAKİ ASAL SAYILAR ÜZERİNE	**18**
KAYNAKLAR	**28**

ÖZGEÇMİŞ

1. GİRİŞ VE NOTASYON

Bu bölümde çalışmada kullanılacak terimlere dair notasyonlar ve bunlara ait açıklamalar ele alınacaktır.

- (a, b): a ile b sayılarının ortak bölenlerin en büyüğü

- Euler $\phi(n) : n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\phi(n)$ n'den küçük ya da eşit ve n ile aralarında asal pozitif tam sayıların sayısı olarak tanımlanır.

Örneğin: $\phi(10) = 4,\ \phi(7) = 6$

- p : asal sayı

- $p_n : n - inci$ asal sayı

Örneğin, $p_2 = 3$

- f ve g iki fonksiyon olsun. Eğer bu iki fonksiyonun tanımlı olduğu küme üzerinde $|f(x)| \leq Cg(x)$ olacak şekilde bir C sabiti varsa

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ ve ya}$$

$$f \ll g(x)$$

yazılır.

- Eğer C sayısı bir α parametresine bağlı ise bu durumda $f = O_\alpha g$ yazılır.

- $x \to a,\ limf(x) \sim g(x)$ ise $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

- $f(x) = o(g(x))$ ise $lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- $limsup \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0$ ise $f(x) = \Omega\big(g(x)\big)$

- $\lim sup \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \lim\ inf \frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ise $f(x) = \Omega_{\mp}\big(g(x)\big)$

2. ASAL SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde asal sayıların bazı özellikleri incelenecektir. Çalışmanın tamamında olduğu gibi bu bölümde de (Yıldırım, 2009)'dan faydalanılmıştır.

Teorem 2.1. Asal sayılar kümesi sonsuz elemanlıdır.

İspat. Asal sayılar kümesi sonlu olsun, yani $p_1, p_2, \dots, p_n$ gibi sonlu sayıda asal sayı mevcut olsun. Şimdi, $A = (p_1 p_2 \dots p_n) + 1$ pozitif tamsayısını göz önüne alalım. A sayısı asal sayı değildir, çünkü asal sayılardan daha büyük bir sayıdır. O halde Aritmetiğin Temel Teoremi gereği bu bileşik sayı bir asal sayıya bölünmesi gerekir (Asar vd. 2012). Buradan $p_i \mid A$ olduğu görülür. Aynı zamanda p_i, $p_1.p_2.\dots p_n$ çarpımının da bir böleni olduğundan $p_i \mid p_1.p_2.\dots p_n$ olur.

$p_i \mid A$ ve $p_i \mid p_1.p_2.\dots p_n$ ise $p_i \mid A - p_1.p_2.\dots p_n$ dir. Yani $p_i \mid 1$ olur. Burada bir çelişki oluşur. Çünkü hiçbir asal sayı 1'i bölemez. O halde asal sayılar sonsuz çokluktadır.

Bu ispata alternatif olarak, şimdi de Euler'in yaptığı ispata kabaca bakalım.

Euler asal sayıların çarpmaya göre ters hallerini yazarak toplamış ve bu toplamın ıraksak olduğunu yani sonsuza yakınsadığını göstermiştir.

$$\sum_{p\ asal} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

Eğer asal sayılar sonlu sayıda olsaydı, sonlu tane sayının toplamı olarak bu seri yakınsak olacaktı.

2.1. Goldbach Problemleri

Asal sayılarla ilgili bir başka ilgi çekici problem Goldbach tarafından ortaya atılmıştır. Bu konjektürün doğruluğuna yaygın şekilde inanılmaktadır ancak ispat için henüz bir ilerleme kaydedilememiştir. Sonsuz çoklukta sayının hangi asal sayıların toplamından geldiğini belirlemek oldukça zor bir problemdir. Bu problem 1742'de Goldbach'ın Euler ile yazdığı bir mektupta ortaya çıkmıştır.

Konjektür 2.1.1. (Goldbach Konjektürü) 2’den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Bu konjektürün üzerinde bazı kısıtlamalara gidilerek Goldbach’ın Zayıf Konjektürü elde edilir. Bu konjektür 5’ten büyük her tek sayının üç asalın toplamı şeklinde yazılabileceğini iddia eder. Bu konjektürün doğruluğu Helfgott tarafından 2014’de ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.2. (Helfgott, 2014**)** 5’ten büyük her bir tek sayı üç asalın toplamı şeklinde yazılabilir.

Uyarı 2.1.3. Bu konjektüre neden zayıf konjektür denildiğinin açıklayalım. Goldbach konjektürü ispatlanabilirse zayıf konjektür otomatik olarak ispatlanmış olur.

Goldbach konjektürünün genelleştirilmesiyle elde edilen problem Waring-Goldbach problemidir, bu problem her bir pozitif tamsayının pozitif tamsayıların n. kuvvetlerinin toplamı şekilde yazılabileceğini iddia eder (Yıldırım, 2009).

Zayıf Goldbach Konjektürü’nün genelleştirilmesiyle Levy, (1963) aşağıdaki kestirimde bulunmuştur. Bu kestirim Zayıf Goldbach Konjektürü’ne benzemesine rağmen daha güçlüdür.

Konjektür 2.1.4. (Levy Konjektürü)(Levy, 1963) $n \geq 7$ bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$2n + 1 = p + 2q$$

olacak şekilde p ve q asal sayıları bulunabilir.

Örneğin, 47 = 13 + 2 × 17 = 37 + 2 × 5 = 41 + 2 × 3 = 43 + 2 × 2.

2.2. Riemann Zeta Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.2.1. s bir karmaşık değişken olsun. $Re(s) > 1$ olmak üzere,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Riemann-Zeta fonksiyonu* denir.

Aşağıda Riemann-Zeta fonksiyonunun farklı bir tanımı daha verilmiştir.

Tanım 2.2.2. $\Gamma(s)$ gama fonksiyonunu göstermek üzere

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^s - 1}{e^x - 1} dx$$

yardımıyla tanımlanır.

Teorem 2.2.3. (Narkiewicz, 1990) Riemann-Zeta fonksiyonu karmaşık düzlemde bir meremorf fonksiyondur. $s = 1$ de basit kutup yeri vardır ve kalıntısı da 1'dir, yani

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\ \zeta(s) = 1$$

dir.

Şimdi ise Riemann-Zeta fonksiyonunun bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 2.2.4. (Narkiewicz, 1990) $\boldsymbol{B_{2n}}$ 2. Bernoulli sayısını göstermek üzere her bir pozitif çift 2*n* sayısı için

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2.(2n)!}$$

dir. Ayrıca *n* > 1 için $\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{n+1}$'dir.

Örnek 2.2.5. Riemann-zeta fonksiyonunun bazı değerleri

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5. İçinde tam kare çarpan bulundurmayan tam sayılara *kare çarpansız tamsayılar* denir.

Örneğin, 10 sayısı kare çarpansız tam sayıdır fakat 18 sayısı değildir. Çünkü $18 = 2.3^2$ olduğundan 18 sayısının çarpanları arasında tam kare olan 9 sayısı bulunur. Kare çarpansız tamsayıların dağılımı ile Riemann-zeta fonksiyonu arasında ilginç bir ilişki vardır. Örneğin, 1'den 30'a kadar olan tam sayıları ele alalım. İçinde kare çarpan bulunduran sayıları çıkardığımız taktirde, elimizde kalan sayılar 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30'dur. O halde

$$\frac{\text{İç}inde\ tam\ kare\ olmayan\ sayılar}{Sayı\ dizisindeki\ tüm\ sayılar} = \frac{18}{30} = 0{,}6'dır.$$

Bu ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.2.6. (Narkiewicz, 1990) Rastgele seçilen bir pozitif tamsayının bir kare çarpansız tamsayı olma olasılığı

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

dir. ($\frac{6}{\pi^2} \cong 0{,}61$)

Şimdi ise Riemann-zeta fonksiyonun *Euler çarpımı*nı verelim. Riemann-zeta fonksiyonu ile asal sayılar arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi ilk keşfeden Euler olmuştur.

Teorem 2.2.7. (Narkiewicz, 1990)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ asal} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

dir.

2.3. Riemann Hipotezi

Riemann-zeta fonksiyonunun Bernoulli sayılarıyla olan ilişkisinden kolaylıkla –2, –4, … noktalarında sıfır olduğu yani bu sayıların Riemann-zeta fonksiyonunun sıfır yerleri olduğu görülür. Bu sıfır yerlerine Riemann-zeta fonksiyonun *aşikar sıfır yeri* adı verilir. Aşikar olmayan sıfır yerleri asal sayılarla ve sayılar teorisinin başka problemlerinde yaygın olarak kullanıldığı için oldukça ilgi çeker. Aşağıdaki problemin çözümünü doğru olarak yapan ilk kişiye Clay Matematik Enstitüsü 1 milyon dolar ödül vermeyi tahahhüt etmiştir.

Konjektür 2.3.1. (Riemann Hipotezi) Riemann-Zeta fonksiyonunun aşikar olmayan sıfır yerleri

$$\{s \in \mathbb{C}: 0 < Re(s) < 1\}$$

açık şeridi içerisinde kalır.

s sayısı Riemann-Zeta fonksiyonunun aşikar olmayan bir sıfır yeri olsun. Bu durumda $Re(s) = \frac{1}{2}$ dir.

Uyarı 2.3.4.

$$\left\{s \in \mathbb{C}: Re(s) = \frac{1}{2}\right\}$$

kümesine Riemann-Zeta fonksiyonu için kritik doğru denir.

Teorem 2.3.5. (Ivic, 1985)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \text{ }, \sigma = Re(s) > 1$$

sonsuz serisi $\sigma > 1$ özelliğindeki tüm kompleks sayılar için yakınsaktır. (Ivic 1985)

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

toplamının özellikleri için ne söylenebilir?

Riemann bu sorudan ilham alarak 1859'da Riemann-zeta fonksiyonunu tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir.

Riemann ilk olarak aşağıdaki $Z(s)$ fonksiyonunu tanımlamıştır.

Tanım 2.3.6. $Z(s)$ fonksiyonu her $s \in \mathbb{Z}$

$$Z(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse $s \leq 1$ için $Z(s)$ ıraksaktır.

Riemann ilk olarak s'nin hangi değerleri için $\zeta(s) = Z(s)$ olduğu sorusunun cevabını aramıştır. Böylece Riemann $Z(s)$ ile ters simetrik bir fonksiyon bulmuş olur. $\zeta(s)$ fonksiyonunun tanım kümesini genişletmek ister.

Hatırlanacağı gibi $s = 1$ için

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

olur.

Riemann $\zeta(s)$'yi tanımladıktan sonra özelliklerini incelemiş ilk olarak ne zaman sıfır olur sorusunu göz önüne almıştır.

Teorem 2.3.7. (Davenport, 1980) $s = -2, -4, -6, -8, \ldots$ için $\zeta(s) = 0$'dır.

Bu sıfır yerlerine $\zeta(s)$ fonksiyonunu aşikar *sıfır yerleri* denir. $\zeta(s)$'nin bunlardan başka gerçel sıfır yeri yoktur. Sıradaki soru $\zeta(s)$ fonksiyonunun başka sıfır yerleri var mıdır?

Cevap: Evet vardır.

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + 14.134725142i\right) = 0$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+21.022039639i\right)=0$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+25.010857580i\right)=0$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+30.424876126i\right)=0$$

Uyarı 2.3.8. Riemann Hipotezi ve $\zeta(s)$'nin tanımı dikkate alınırsa $\zeta(s)$ 'nin aşikar olmayan tüm sıfır yerlerinin $0 \leq Re(s) \leq 1$ şeridi üzerinde olduğu iddia edilir. Bu şeride $\zeta(s)$ için *kritik şerit* adı verilir. 1896'da Hadamard ve de la Valleé Poussin birbirinden bağımsız olarak Asal Sayı Teoremi ispatında $\zeta(s)$'nin $Re(s)=1$ üzerinde sıfır yeri olmadığını göstermiştir. Hardy, $\zeta(s)$'nin $Re(s)=\frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde sonsuz çoklukta sıfırı olduğunu ispatlamış Levinson ise $\zeta(s)$'nin tüm sıfırlarının $\frac{1}{3}$'ünün $Re(s)=\frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde olduğunu ispatlamıştır. Riemann hipotezi $\zeta(s)=0$ denkleminin tüm ilgi çekici çözümlerinin düzlemde belli bir dikey doğru üzerinde olduğu iddia etmiştir. Bilgisayar hesaplamaları ilk 10.000.000.000.000 çözüm için hipotezin sağladığını göstermektedir. Clay Matematik Enstitüsü Milenyum Problemlerinden biri olarak Riemann Hipotezi'nin ispatına 1.000.000 dolar ödül biçmiştir. Bernhard Riemann'ın sayılar teorisi üzerine yalnızca bir makalesi olmasına rağmen bu makalesi 158 yıldır çözülemeyen ve ispatına ödül vaat edilen bir problemin ortaya çıkmasına neden olması ilginçtir.

Konjektür 2.3.9. (Genelleştirilmiş Riemann Hipotezi (GRH)) 3.1'de tanımlanacak olan Dirichlet L-fonksiyonlarının aşikardan farklı tüm sıfır yerleri $Re(s)=\frac{1}{2}$ kritik doğrusu üzerindedir.

Uyarı 2.3.10. RH ve GRH doğruluğu kabul edilerek,

1. Asal sayı teoreminin ortalamadan ne kadar saptığını bulmada,

2. $\pi(x)$ ve $Li(x)$ fonksiyonlarını karşılaştırmada(*),

3. Asal sayılar arasındaki boşlukların ölçülmesi,

4. Chebyshev konjektürü,

5. Goldbach konjektürü(*),

6. Polinom süreli asallık testlerinde(*),

7. Tamsayıların öklid halkaları(*),

8. Artin'in ilkel kök konjektürü,

9. Verilen bir aritmetik dizideki ilk asal sayı bulma problemi(*),

10. Gauss'un sınıf sayısı problemi,

11. Bir kuadratik formun eksik değerlerini bulma

sonuçlarına ulaşılmıştır.

(*) İlk olarak bu sonuçlar RH ve/veya GRH ile ilişkilendirilerek ve bunların doğruluğu kabul edilerek elde edilmiş. Ancak daha sonra ispatlar bu koşulardan bağımsız olarak yapılmıştır.

Asal sayılar neden 2'den başlar? Şimdi ise bu sorunun cevabını verelim. $n > 1$ bir tamsayı olsun. Eğer n sayısı 1 ve kendisinden başka bir pozitif tamsayıya bölünmüyorsa n'ye asal sayı dendiğini biliyoruz. Alman matematikçi Goldbach ve bundan önce yaşayan matematikçiler 1 sayısını asal olarak kabul ettiler. Ancak yukarıdaki tanım dikkate alındığında 1 sayısının asallığını araştırmanın anlamsız olduğu görülür. Gerçekten de 1 sayısını diğer asal sayılardan ayırt eden bazı özellikler vardır. Örneğin; 1 sayısı $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının çarpımsal birimidir. Bir sayının 1 ile bölünmesi özel bir anlam taşımaz. Üstelik herhangi bir tamamen çarpımsal aritmetik fonksiyonun 1'deki değeri 1 olacağından aritmetik fonksiyon tanımında bazı sıkıntılara yol açmamak için 1 sayısını asal sayılardan çıkarmak gerekir.

Örneğin; Euler ϕ fonksiyonu p asalı için $\phi(p) = p - 1$ olup 1 asal sayı kabul edildiğinde $\phi(1) = 0$ olur ki bu da fonksiyonu anlamsız kılar. Buna benzer birçok nedenle 1 sayısı asal sayı olarak alınmaz.

Asal sayıların formülüze edilemeyeceği ispatlanmıştır. Ancak asal sayıların sonsuz çoklukta olduğu bilindiğinden asal sayıların asimptotik davranışı incelemek oldukça ilgi çekicidir.

$\pi(x)$ ile x ve x'ten küçük asal sayıların sayısı olsun ($\pi(10) = 4$). Yani

$$\pi(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p\ asal}} 1$$

dir.

li(x) ile

$$li(x) := \int_{2}^{x} \frac{dt}{logt}$$

x'in logaritmik integralini gösterelim.

Gauss 1792'de $\pi(x)$ fonksiyonunun $li(x)$ fonksiyonuna benzer şekilde hareket ettiğini ispatlamıştır. Aynı zamanda,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/logx} = 1$$

olduğu gösterilmiştir.

Bu ise bize yeterince büyük x'ler için $h(x) = \frac{x}{logx}$ fonksiyonunun benzer şekilde hareket ettiğini gösterir. Bu teorem *Asal Sayı Teoremi* olarak adlandırılır (Narkiewicz, 1990).

Gauss bunun dışında x ve x'ten küçük olan ve iki farklı asalın çarpımı olarak yazılabilen tüm tamsayıların sayısını $t(x) = \frac{x.loglogx}{logx}$ fonksiyonuna benzer şekilde hareket ettiğini ispatlamıştır.

2. ASAL SAYILAR İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Euler ilk terimi belli bir sayı olan aritmetik örüntüde sonsuz çoklukta asal sayılar olduğunu ispatlamıştır.

a ve q aralarında asal pozitif tamsayılar olsun ve k tüm doğal sayıları dolaşsın. Bu durumda $3+4k, 1+4k, 1+3k, 5+6k$ örüntülerinde sonsuz çoklukta asal sayı vardır. Örneğin, $1+4k$ için 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, … bu örüntüde sonsuz çoklukta asal olduğunu göstermek için Euler'in metodu kullanabilir (Murty 1988).

Euclid teoreminin genelleştirilmesi aslında a ve q aralarında asal doğal sayılar olmak üzere $a+kq$ sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu iddia eder. Bu teorem 1788 yılında Legendre tarafından konjektür olarak ortaya atılmış 1837-1840 yılları arasında Dirichlet tarafından ispatlanmıştır. Bu ispat analitik sayılar teorisinin kökeni olarak kabul edilir. Bu ispatta Dirichlet'in kullandığı argüman Euler'in metodunu q asal sayı olmak üzere mod q'daki a denklik sınıfını kısıtlamaktadır. Bu makalede Dirichlet-L fonksiyonu adı verilen ve $s<1$ için

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p\ asal} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanan fonksiyon kullanılmıştır. Buradaki seri ve sonsuz çarpım $s>1$ için mutlak yakınsaktır. Burada χ'ye q modülüne göre *Dirichlet modülü* adı verilir. χ, n tamsayı değişkeninin çarpımsal ve q'ya göre periyodik olan bir fonksiyonudur.

Tanıma dikkat edilirse $(n,q)=1$ olursa bu durumda $\chi(n)$ modülün bir kökü olur. $(n,q)>1$ için $\chi(n)=0$ olarak tanımlamak uygundur.

q ile aralarında asal olan tüm n sayılarında 1 değerini alan χ_0 karakterine *temel karakter* adı verilir.

q ile aralarında asal olan n değerleri için temel olmayan $\chi(n)$ nin en az bir periyodu q değil ancak q'nun bir böleni oluyorsa χ karakterine ilkel olmayan karakter aksi takdirde ilkel karakter adı verilir.

q modülüne göre $\phi(q)$ tane karakter vardır. Bu karakterler bir abelyen grup yapısı oluştururlar. Burada χ_1 ve χ_2 arasındaki ikili işlem her $n \in \mathbb{R}$ için

$$\chi_1\chi_2(n) = \chi_1(n).\chi_2(n)$$

olarak tanımlanır. Bu grup q modülüne göre aralarında asal olan kalan sınıfların q modülündeki karakterler

$$\sum_{n(modq)} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \chi = \chi_0 \\ 0 & diğer \end{cases}$$

ve

$$\sum_{\chi(modq)} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & n \equiv 1 \ (mod\ q) \\ 0 & diğer \end{cases}$$

özdeşliklerini sağlarlar.

Tam sayıların bir kümesi ile birlikte özel bir kalan sınıfında olan a (mod q) sayısı aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi\ (mod\ q)} \bar{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv a\ (mod\ q)\ \ ve\ (a,q) = 1 \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.2) eşitliğindeki temel olmayan χ karakterlerinin serileri $0 < s \leq 1$ için koşullu yakınsak olur. Böylece $L(s,\chi)$ fonksiyon $s = 1$ de düzenli olur.

Dirichlet'in $a + kq$ aritmetik dizisinde sonsuz çoklukta asalın bulunduğu iddiasının ispatında kullanılan temel argüman q karakterleri için $s \to 1^+$ iken $logL(s,\chi)$ fonksiyonunun sınırlı olmasıdır.

Dirichlet bu özellik yardımıyla asal sayılar ile ilgili önemli bir sonuca ulaşmıştır. Ancak bu sonuç, $x \to \infty$ için x'e kadar olan asal sayıların sayısını veren bir fonksiyonun verdiği sorusuna cevap verememektedir. 1849'da Chebyshev bu problem ile ilgili bazı yeni sonuçlar bulmuştur. Eğer $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/x\ logx$ limiti mevcut ise bu limit 1'e eşit olmak zorundadır ve aynı zamanda Chebyshev bu limit değeri için alt sınırın 0,92… ve üst sınırın 1,10… olduğunu göstermiştir. Burada $logn!$ için n ile arasında asal olan sayıların logaritmaları üzerinden bir toplam olarak düşünerek Stirling formülünü

$logn!$'e uygulayarak bu sonuçları elde etmiştir. Ancak Chebyshev'in bu metodu limitin 1 olduğunu göstermeye yeterli olmamıştır.

Mertens, 1874'te Chebyshev'in sonuçlarını kullanarak aşağıdaki asimptotik formülleri elde etmiştir.

$$\sum_{p\leq x}\frac{logp}{p} = logx + O(1) \tag{3.3}$$

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = loglogx + A + O\left(\frac{1}{logx}\right) \tag{3.4}$$

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})^{-1} = e^{\gamma}logx + O(1) \tag{3.5}$$

Mertens bunun dışında χ'nin bir temel olmayan karakter olması durumunda $\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$ serisinin yakınsak olduğunu göstermiştir. Böylece Dirichlet'in bulduğu $\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_p \frac{\chi(p)}{p^{\sigma}}$ sonlu olduğu sonucunu geliştirmiştir. Mertens burada (3.4) numaralı asimptotik formülün genelleştirilmesi olarak düşünülecek

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a(mod\ q)}}\frac{1}{p} = \frac{loglogx}{\phi(q)} + A(q,a) + O\left(\frac{1}{logx}\right) \tag{3.6}$$

eşitliğini kullanmıştır.

3. KISA ARALIKLARDAKİ ASAL SAYILAR ÜZERİNE

Asal sayılar için genel bir formül elde edilemeyeceği ispatlandıktan sonra bilim insanları belirli bir aralıktaki asal sayıların varlığını ve bunların sayısını araştırma yoluna girmişlerdir. Böylece asal sayı teoreminden sonra hangi $\Phi(x)$ fonksiyonları için $x \longrightarrow \infty$ olduğunda

$$\pi\big(x+\Phi(x)\big)-\pi(x)\sim\frac{\Phi(x)}{logx} \tag{4.1}$$

özelliği sağlanacağı sorusu akla gelir.

Dikkat edilirse bu soru x ile $x+\Phi(x)$ arasındaki asal sayıların sayısı asimptotik olarak verilmektedir. Burada oldukça yavaş artan bir $\Phi(x)$ fonksiyonu bulmak gerekir.

Heath-Brown (1988)'de $x\to\infty$ olduğunda $\varepsilon(x)\to 0$ olmak üzere $\Phi(x)=x^{\frac{7}{12}-\varepsilon(x)}$ alınabileceğini ispatlamıştır. Riemann Hipotezinin doğru olduğu kabul edildiğinde $\Phi(x)=x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ olabileceği ispatlanmıştır. Bu üst sınırlar ile bilinen alt sınırlar asarsındaki fark oldukça büyüktür. Rankin (1938)'de (4.1) eşitliğinin

$$\Phi(x)=c\,\frac{logxloglogxlogloglogx}{(loglogx)^2} \tag{4.2}$$

için sağlanmadığını ispatlamıştır. Gerçekten de Rankin ∞'a yakınsayan x'lerin öyle bir varlığını göstermiştir ki uzunluğu (4.2)'de verilen x'in civarındaki aralıklarda herhangi bir asal sayı bulunmamaktadır. Bu ise ardışık asallar arasındaki büyük boşluklar için ispatlanan en iyi mesafedir. Maier (1981)'de bu varlık teoremini genişleterek sabit bir k sayısı için her birinin büyüklüğü (4.2)'deki gibi olan asal sayılar arasındaki k ardışık boşluğu olduğu ispatlanmıştır.

Diğer yandan Selberg (1943)'de Riemann Hipotezinin doğruluğunu kabul ederek $x\to\infty$ iken $\frac{\Phi(x)}{(logx)^2}\to\infty$ oluyorsa hemen hemen tüm x'ler için (4.1)'in sağlandığını ispatlamıştır. Buradaki *hemen hemen tüm x'ler için* kavramı şu anlama gelmektedir. $x\to\infty$ iken (4.1) eşitliğini sağlamayan $x\in[0,X]$ özelliğindeki x'lerin kümesi ölçümü o(X)'tir. Riemann Hipotezi doğru olduğu varsayımı olmadan elde edilen en iyi sonuç Zaccagnini (1998)'de $\Phi(x) = x^{\frac{1}{6}-\varepsilon}$ için (4.1) eşitliğinin doğru olduğu ispatlanmıştır. Doğal olarak Selberg'in sonucunun acaba tüm x'ler için doğru olup olmadığı akla gelir. Bu sorunun cevabı Maier (1985)'te (4.1) eşitliğini sağlamayan istisnaların belli $\lambda > 1$ için $\Phi(x)'in\ (logx)^{\lambda}$ kadar büyük olduğunu ispatlamıştır. Yani

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{\pi\left(x + (logx)^{\lambda}\right) - \pi(x)}{(logx)^{\lambda-1}} > 1\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} \inf \frac{\pi\left(x + (logx)^{\lambda}\right) - \pi(x)}{(logx)^{\lambda-1}} < 1 \tag{4.3}$$

olur.

Asal Sayı Teoremi gereği p_n ile p_{n+1} ardışık asallar arasındaki farkın asimptotik olarak $logp_n$ gibi davrandığı söylenebilir. Cramer (1936)'da olasılığa dayalı bir sebepten yola çıkarak ardışık asallar arasındaki olası en büyük boşluğun $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{(logp_n)^2} = 1$ olduğunu bir konjektür olarak vermiştir. Ancak daha bu konjektür üzerinde gerekli düzenlemeler yapılarak daha iyi bir sonuç olan

$$p_{n+1} - p_n = O(log^2 p_n) \tag{4.4}$$

elde edilmiştir. Cramer'in bu kestirimi aslında şu basit modele dayanmaktadır: Herhangi bir n sayısının asal olma olasılığı yaklaşık olarak $\frac{1}{logn}'dir$ ve bu olasılık farklı asallar için bağımsız olarak göz önüne alınabilir. Ancak Cramer'in düşüncesinin bu dayanağında şöyle bir boşluk yer almaktadır. Örneğin, n ve $n + 2$ sayısının ikisinin birden asal sayı olması bağımsız olaylar olarak düşünülemez. Gerçekten de n sayısı çift sayı ise $n + 2$ sayısı asal sayı olmaz.

Tekrar Rankin'in sonucunu göz önüne alalım. (4.2) numaralı eşitlikte c gibi bir sabit söz konusudur. Maier ve Pomerance (1990)'da numaralı kaynakta bu c sabiti değeri için bir iyileştirme elde edilmiştir. Doğal olarak Riemann-Zeta fonksiyonunun sıfırları hakkında daha çok bilginin bilinmesi veya doğruluğunun kabul edilmesi asal sayıların dağılımı hakkında daha güçlü sonuçlar elde edilmesine yarar.

Grosswald ve Schnitzer (1978)'de

$$\zeta^*(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{q_n^s})^{-1} \qquad (p_n \leq q_n \leq p_{n+1}),$$

fonksiyonunu göz önüne almış ve bu fonksiyon yardımıyla asal sayılar ile Riemann-Zeta Fonksiyonunun sıfır yerleri hakkında başka sonuçlar elde edilmiştir. Bu çarpım $\sigma > 1$ için mutlak yakınsak olup bu bölgede hiçbir zaman sıfır olmaz. Öte yandan $\sigma > 0$ bölgesine aralıklı olarak devam ettirilir. Böylece kolaylıkla $\sigma > 0$ için $\zeta^*(s)$ ve $\zeta(s)$ aynı sıfır yerlerine sahiptir. Ancak $\zeta(s)$ için geçerli olan bazı önemli özellikler $\zeta^*(s)$ için geçerli değildir. Örneğin, $\zeta^*(s)$ için $\sigma > 0$ boyunca analitik devam mümkün olmadığı için $\zeta^*(s)$ bir fonksiyonel eşitliğe sahip değildir. $s = 1$ de basit kutup yerine sahiptir. Rezidü *r* ile gösterilsin. Bu rezidü $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ özelliğindedir.

1990'lı yılların başlarında asal sayılar için küçük boşluklar üzerine oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Goldston (1995)'te asal sayıların dağılımı hakkındaki birçok problemde kullanılan bazı büyüklükler için alt sınırlar veren bir metod geliştirmiştir. Daha sonra bu metot Goldston ve diğerleri tarafından geliştirilerek birçok yeni uygulamalar ve geliştirilmiş sonuçlar elde edilmiştir. Goldston, Pintz ve Yıldırım (2006) ve (2009)'da herhangi bir sabit pozitif r tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{p_{n+r} - p_n}{\log p_n} \leq e^{-\gamma}(\sqrt{r} - 1)^2 \tag{4.5}$$

eşitsizliğini elde etmiştir.

Uyarı 4.1. Dikkat edilirse (4.5)'te $r = 1$ alınarak herhangi bir sabit $\epsilon > 0$ sayısı için ortalama boşluğu ϵ'dan küçük olan sonsuz çoklukta ardışık asal sayının varlığı sonucuna ulaşılır.

Goldston, Pintz ve Yıldırım (2010)'da bu elde edilen sonuçlar üzerinde derinlemesine bir analiz yaparak daha iyi bir sonuç olan

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{p_{n+r} - p_n}{\sqrt{\log p_n}\,(\log\log p_n)^2} < \infty \tag{4.6}$$

elde etmiştir.

Uyarı 4.2. Goldston, Pintz ve Yıldırım (2010)'da ikiz asallar arasında boşluğun yeterince küçük olduğunu yani sonsuz çoklukta ikiz asal olduğunu gözlemlemişlerdir. Bu üç bilim insanı 2014'te ikiz asallar üzerine çalışmaları nedeniyle oldukça saygın bir ödül olan Cole ödülünü kazanmışlardır. Goldston, Pintz ve Yıldırım aralarında en fazla 16 fark olan sonsuz çoklukta ikiz asal olduğunu ispatlamışken, 2013'te Yitang Zhang bu sonucu geliştirerek aralarındaki fark en fazla 70 milyon olan sonsuz çoklukta ikiz asal olduğunu kanıtlamıştır.

4. [4*n*,5*n*] ARALIĞINDAKİ ASAL SAYILAR ÜZERİNE

Bu bölümde Balliet (2017)'nin verdiği sonuçlar üzerinde durulacaktır. Literatürde oldukça güncel olarak yer alan bu makalede $n > 2$ için $4n$ ile $5n$ arasında mutlaka bir asal sayı bulunduğu ispatlanmıştır.

Örneğin $n = 3$ için 12 ile 15 arasında 13 asal sayısı vardır. $n = 7$ için 28 ile 35 arasında 29 ve 31 asal sayıları vardır.

$n > 2$ özelliğindeki tüm n'ler için bu aralıkta bir asal sayının olup olmadığını belirlemek oldukça ilgi çekici bir problemdir. Bu problemin motivasyon kaynağı Bertnard (1845)'te referans olduğu ve Chebyshev (1850)'de çözdüğü şu sonuca dayanır: $n > 1$ için n ile $2n$ arasında en az bir tane asal sayı vardır. Erdös (1932) ve (2003)'te

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \in \mathbb{N}}} \log p.$$

Chebyshev fonksiyonlarının temel özelliklerini ispatlamış ve binom katsayıları için bazı yaklaşımlar da bulunmuştur.

Güncel literatüre bakılırsa El Bachraoui $n > 1$ için 2n ile 3n arasında bir asal sayının bulunduğunu ispatlamıştır. Bertnard postulatına benzer bir sonuç olup daha küçük bir aralıkta bir asal sayının varlığını söylemektedir. Örneğin, Bertnard postulatı $p \in (10,20)$ açık aralığındaki bir özelliğe asalın varlığını ifade etmekteyken, Bachraoui $p \in (10,15)$ özelliğinde bir asalın varlığını ispatlamıştır.

El Bachraoui aynı makalesinde açık problem olarak $n > k \geq 2$ özelliğindeki k ve n sayıları için kn ile $(k+1)n$ arasında bir asal sayı olup olmadığı sorusunu ortaya atmıştır.

Daha da güncel bir sonuç olarak Loo (2011)'de bu aralığı daha da kısaltarak $n > 1$ için $p \in (3n, 4n)$ özelliğinde bir asalın varlığını ispatlamıştır. Bu bölümde aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 5.1. (Balliet, 2017) $n > 2$ için $[4n, 5n]$ arasında bir asal sayı vardır.

Bu teoremin ispatında aşağıdaki teoremlerden faydalanacağız.

Teorem 5.2. (Robbins, 1955) Her $x \geq 1$ için

$$\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x+1}} \leq x! \leq \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}$$

Teorem 5.3. (Balliet, 2017) r ve s gerçel sayıları $s > r \geq 1$ ve $\left\{ s \atop r \right\} = \delta(r.s)\binom{[s]}{[r]}$ özelliğinde olsun. Bu durumda $1 \leq \delta(r, s) \leq s$ olur.

Teorem 5.4. (Loo, 2011)

1. $c \geq \frac{1}{12}$ bir sabit olsun. Bu durumda her $x \geq \frac{1}{2}$ için $\frac{u(x+c)}{l(c)l(x)}$

2. c pozitif belli bir sabit olsun ve $h_2(x)$ fonksiyonu $h_2(x) = \frac{u(c)}{l(x)l(c-x)}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{c}{2} \quad için \quad h_2'(x) > 0$$

$$x = \frac{c}{2} \quad için \quad h_2'(x) = 0$$

$$\frac{c}{2} < x \leq c - \frac{1}{2} \quad için \quad h_2'(x) < 0$$

dir.

Bu bölümdeki ana teoremin ispatı için aşağıdaki yol izlenecektir. $\binom{5n}{4n}$ binom katsayısı göz önüne alınacak ve bu katsayı büyüklüklerine bağlı olarak üç çarpım olarak asal çarpanlarına ayrılacaktır. Yani bu asal sayılar T_1, T_2 ve T_3 ile gösterilecek olursa

$$T_1 = \prod_{p \leq \sqrt{5n}} p^{\beta(p)}$$

$$T_2 = \prod_{\sqrt{5n} \le p \le 4n} p^{\beta(p)}$$

$$T_3 = \prod_{4n+1 \le p \le 5n} p$$

olmak üzere $\binom{5n}{4n} = T_1 T_2 T_3$ olacak şekilde kategorize edeceğiz.

Böylece eğer $T_3 = \binom{5n}{4n}\frac{1}{T_1 T_2} > 1$ olduğu gösterilirse bu durumda $T_3{}'te$ en az bir asal sayı olduğu ispatlanmış olur. Bu ise $(4n, 5n)$ aralığında bir asal sayı bulunduğunu gösterir. O halde ana teoremin ispatındaki temel amaç $T_3 > 1$ olduğunu ispatlamaktır.

Teorem 5.5. (Balliet, 2017)

1. $n \ge 6818$ için $e^{\frac{1}{60n+1} - \frac{1}{48n} - \frac{1}{12n}} \ge 0{,}999986,$
2. $n \ge 1$ için $e^{\frac{1}{30n} - \frac{1}{24n+1} - \frac{1}{6n+1}} \le 1$
3. $n \ge 1$ için $e^{\frac{1}{20n} - \frac{1}{16n+1} - \frac{1}{4n+1}} \le 1$
4. $n \ge 6815$ için $\frac{4n+3}{n-3} < 4{,}002202$ dir.

Teorem 5.6. (Balliet, 2017) Her $n \ge 6818$

$$\frac{0.054886}{2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{6}} > (5n)^{\frac{2{,}51012\sqrt{5n}}{\log(5n)}}$$

dir.

Ana Teoremin İspatı.

Yukarıda verilen teoremlerdeki eşitsizliklerin $n \ge 6818$ için doğruluğu ispatlanmıştır. Böylece teoremin ispatı iki parçada yapılacaktır.

Kolayca görülebilir ki $2 < n \le 6817$ için 4*n* ile 5*n* arasında her zaman bir asal sayı vardır. O halde $n \ge 6818$ olsun.

$$\binom{5n}{4n} = \frac{(4n+1)(4n+2)\dots(5n)}{1.2\dots n}$$

sayısını göz önüne alalım. Eğer $4n$ ile $5n$ arasında asal sayılar var ise o asalların çarpımı $\binom{5n}{4n}$ sayısını böler.

$T_1, T_2\ ve\ T_3$ çarpımları yukarıdaki gibi tanımlansın. O halde $\binom{5n}{4n} = T_1.T_2.T_3$ yazılabilir.

Erdös (2003), sayfa 24 gereği $\binom{5n}{4n}$ nin asal çarpanlarına ayrıldığında T_2. kuvvetleri 2'den küçük oldukları görülür. Öte yandan T_1 için

$$T_1 < (5n)^{\pi(\sqrt{5n})}$$

eşitsizliği doğrudur. Rosser ve Schoenfeld (1962) gereği

$$\pi(x) \leq \frac{1{,}25506x}{\log(x)}$$

olduğu bilinmektedir. Böylece T_1 için

$$T_1 < (5n)^{\pi(\sqrt{5n})} \leq (5n)^{\frac{2{,}51012\sqrt{5n}}{\log(5n)}}$$

üst sınır elde edilir.

$A = \left\{ \begin{matrix} 5n/2 \\ 2n \end{matrix} \right\}$ ve $B = \left\{ \begin{matrix} 5n/3 \\ 4n/3 \end{matrix} \right\}$ olarak tanımlansın ve T_2 çarpımındaki p asalını göz önüne alalım.

- Eğer $\frac{5n}{2} < p \leq 4n$ ise bu durumda $n < p \leq 4n < 5n < 2p$ dir. Böylece $\beta(p) = 0$'dır.
- Aşikar olarak

$$\prod_{2n<p\leq\frac{5n}{2}} p, \quad A'yı\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{3} < p \leq 2n$ ise bu durumda $n < p < 2p \leq 4n < 5n < 3p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Aşikar olarak

$$\prod_{\frac{4n}{3}<p\leq\frac{5n}{3}} p, \quad B'yi\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{4} < p \leq \frac{4n}{3}$ ise bu durumda $n < p < 3p \leq 4n < 5n < 4p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $n < p \leq \frac{5n}{4}$ ise bu durumda $\frac{n}{2} < p < 2n < 2p \leq \frac{5n}{2} < 3p$ dir.

Böylece

$$\prod_{n<p\leq\frac{5n}{4}} p, \quad A'yı\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{6} < p \leq n$ ise bu durumda

$p \leq n < 2p < 4p \leq 4n < 5p \leq 5n < 6p$ dir. Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{2n}{3} < p \leq \frac{5n}{6}$ ise bu durumda

$\frac{n}{3} < p < \frac{4n}{3} < 2p \leq \frac{5n}{3} < 3p$ dir. Böylece

$$\prod_{\frac{2n}{3}<p\leq\frac{5n}{6}} p, \quad B'yi\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{8} < p \leq \frac{2n}{3}$ ise bu durumda

$p < n < 2p < 6p \leq 4n < 7p < 5n < 8p$ dir. Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{n}{2} < p \leq \frac{5n}{8}$ ise bu durumda $\frac{n}{2} < p < 3p < 2n < 4p < \frac{5n}{2} < 5p$

dir. Böylece

$$\prod_{\frac{n}{2}<p\leq\frac{5n}{8}} p, \quad A'yı\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{11} < p \leq \frac{n}{2}$ ise bu durumda

$p < 2p \leq n < 3p < 8p \leq 4n < 9p < 10p \leq 5n < 11p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{4n}{9} < p \leq \frac{5n}{11}$ ise bu durumda $\frac{n}{3} < p < 2p < \frac{4n}{3} < 3p < \frac{5n}{3} < 4p$

dir. Böylece

$$\prod_{\frac{4n}{9}<p\leq\frac{5n}{11}} p, \quad B'yi\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{12} < p \leq \frac{4n}{9}$ ise bu durumda

$p < 2p < n < 3p < 9p \leq 4n < 10p < 11p < 5n < 12p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{n}{3} < p \leq \frac{5n}{12}$ ise bu durumda $\frac{n}{3} < p < 3p < \frac{4n}{3} < 4p \leq \frac{5n}{3} < 5p$

dir. Böylece

$$\prod_{\frac{n}{3}<p\leq\frac{5n}{12}} p, \quad B'yi\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{16} < p \leq \frac{n}{3}$ ise bu durumda

$p < 2p < 3p \leq n < 4p < 12p \leq 4n < 13p < 14p < 15p \leq 5n < 16p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{2n}{7} < p \leq \frac{5n}{16}$ ise bu durumda

$p < \frac{n}{2} < 2p < 6p < 2n < 7p < 8p \leq \frac{5n}{2} < 9p$ dir.

Böylece

$$\prod_{\frac{2n}{7}<p\leq\frac{5n}{16}} p, \quad A'yı\ böler.$$

- Eğer $\frac{5n}{18} < p \leq \frac{2n}{7}$ ise bu durumda

$p < 2p < 3p < n < 4p < 14p \leq 4n < 15p < 16p < 17p < 5n < 18p$ dir.

Böylece $\beta(p) = 0$'dır.

- Eğer $\frac{n}{4} < p \leq \frac{5n}{18}$ ise bu durumda

$p < \frac{n}{2} < 2p < 7p < 2n < 8p < 9p \leq \frac{5n}{2} < 10p$ dir. Böylece

$$\prod_{\frac{n}{4}<p\leq\frac{5n}{18}} p, \quad A'yı\ böler.$$

Erdös (2003) Sayfa 167 gereği

$$\prod_{p\leq x} p < 4^x$$

olduğundan

$$\prod_{\sqrt{5n}<p\leq\frac{n}{4}} p < 4^{\frac{n}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}$$

elde edilir. Böylece sonuç olarak T_2 için

$$T_2 = \prod_{\sqrt{5n}<p\leq\frac{n}{4}} p^{\beta(p)} < 2^{\frac{n}{2}}AB$$

üst sınırı elde edilir.

Teorem 5.2 gereği

$$\binom{5n}{4n} = \frac{(5n)!}{(4n)!\,(n!)}$$

$$> \frac{l(5n)}{u(4n)u(n)}$$

$$= \sqrt{\frac{5n}{8\pi n}}\left(\frac{3125}{256}\right)^n e^{\frac{1}{60n+1}-\frac{1}{48n}-\frac{1}{12n}}$$

$$> 0.446024n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3125}{256}\right)^n$$

elde edilir. Teorem 5.5. gereği bu son eşitsizlik her $n \geq 6818$ için

$$e^{\frac{1}{60n+1}-\frac{1}{48n}-\frac{1}{12n}} \geq 0,999986$$

eşitsizliğinden gelir. Benzer olarak Teorem 5.2, 5.3, 5.4 gereği *A* ve *B* için sırasıyla

$$A = \left\{ {5n/2 \atop 2n} \right\} \leq \frac{5n}{2}\binom{[5n/2]}{2n}$$

$$= \frac{5n}{2}.\frac{\left[\frac{5n}{2}\right]!}{(2n)!\left(\left[\frac{5n}{2}\right]-2n\right)!}$$

$$< \frac{5n}{2}.\frac{u\left(\left[\frac{5n}{2}\right]\right)}{l(2n)l\left(\left[\frac{5n}{2}\right]-2n\right)}$$

$$\leq \frac{5n}{2}.\frac{u\left(\frac{5n}{2}\right)}{l(2n)l\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{5n}{4}.\sqrt{\frac{5n}{\pi}}\left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{1}{30n}-\frac{1}{24n+1}-\frac{1}{6n+1}}$$

$$< \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5n}{\pi}}\left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$< 1.576958n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{2}}$$

ve

$$B = \left\{ {\frac{5n}{3} \atop \frac{4n}{3}} \right\} \leq \frac{5n}{3}\binom{\left[\frac{5n}{3}\right]}{\left[\frac{4n}{3}\right]}$$

$$= \frac{5n}{3} \cdot \frac{\left[\frac{4n}{3}\right] + 1}{\left[\frac{5n}{3}\right] - \left[\frac{4n}{3}\right]} \cdot \binom{\left[\frac{5n}{3}\right]}{\left[\frac{4n}{3}\right] + 1}$$

$$\leq \frac{5n}{3} \cdot \frac{4n+3}{n-3} \cdot \frac{u\left(\frac{5n}{3}\right)}{l\left(\frac{4n}{3}\right) l\left(\frac{n}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{24\pi}} \left(\frac{4n+3}{n-3}\right) n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{3}} e^{\frac{1}{20n} - \frac{1}{16n+1} - \frac{1}{4n+1}}$$

$$< 5.1531158 n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{3}}$$

üst sınırları elde edilir.

$$T_3 = \binom{5n}{4n} \frac{1}{T_2 T_1}$$

$$> \binom{5n}{4n} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} AB} \cdot \frac{1}{(5n)^{\frac{2{,}51012\sqrt{5n}}{\log(5n)}}}$$

$$> \frac{0{,}054886}{2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{6}} \frac{1}{(5n)^{\frac{2{,}51012\sqrt{5n}}{\log(5n)}}}$$

$$> 1$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.1'in Sonuçları

Yukarıdaki teorem kullanılarak asal sayılar ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.7. (Balliet, 2017) Herhangi $n > 2$ pozitif tamsayısı için $n < p < \frac{5(n+3)}{4}$ olacak şekilde bir *p* asal sayısı vardır.

Teorem 5.8. (Balliet, 2017) Herhangi $n > 2$ pozitif tamsayısı için *n* ile 5*n* arasında en az 4 tane asal sayı vardır.

Teorem 5.9. (Balliet, 2017) Her $n > 5$ için *n* ile 5*n* arasında en az 7 asal sayı vardır.

Teorem 5.10. (Balliet, 2017) $n > 2$ olsun. Bu durumda $(4n, 5n)$ aralığındaki en az

$$\log_{5n} \frac{0.054886}{2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3125}{256}\right)^{\frac{n}{6}} (5n)^{-\frac{2{,}51012\sqrt{5n}}{\log(5n)}}$$

tane asal sayı vardır.

Teorem 5.11. (Balliet, 2017) $n \to \infty$ için $[4n, 5n]$ aralığındaki asalların sayısı da sonsuza gider. Yani her bir pozitif *n* tamsayısı için öyle bir pozitif *L* tamsayısı vardır ki her $n \geq L$ için $[4n, 5n]$ aralığında en az *m* tane asal sayı vardır.

KAYNAKLAR

Asar, A.O., Arıkan, A. ve Arıkan, A., “Cebir”, ***Gazi Kitapevi***, (2012).

Bachraoui, M. El., “Primes in The Interval [2n,3n]”, ***Int. J. Contemp. Math. Sci.***, 1: 617–621 (2006).

Balliet, K. D., “On The Prime Numbers in the Interval [4n, 5n]”, ***arXiv***: 1511.04571, (2017).

Chebyshev, P., “M´Emoire Sur Les Nombres Premiers”, ***M´em. Acad. Sci. St. Ptersbourg***, 7: 17–33 (1850).

Conrey, J. B., “The Riemann Hypothesis”, ***Not. Amer. Math. Soc.***, 50: 341-353 (2003).

Cram´er H., “On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers”, ***Acta Arith.***, 2: 23-46 (1936).

Davenport, H., “Multiplicative Number Theory”, 2nd ed., ***Springer-Verlag,*** New York: 1980.

Edwards, H. M., “Riemann's Zeta Function”, New York: Dover, (2001).

Erdös, P., “Beweis Eines Satzes Von Tschebyschef”, ***Acta Litt. Univ. Sci., Szeged, Sect. Math***., 5: 194–198 (1932).

Erdös, P., Sur´anyi, J., “Topics in the Theory of Numbers”, ***Springer Verlag***, (2003).

Grosswald, E. and Schnitzer, F. J., “A class of modified ζ and L-functions”, ***Pacific J. Math.***, 74 (2): 357-364 (1978).

Goldston, D. A., “A lower bound for the second moment of primes in short intervals”, ***Expo. Math***., 13: 366-376 (1995).

Goldston, D. A., Pintz, J. ve Yıldırım, C. Y., "Primes in tuples. I.", ***Ann. of Math.***, 170(2): 819-86 (2009).

Goldston, D. A., Pintz, J. and Yıldırım, C. Y., “Primes in tuples III:On the difference”, ***Funct. Approx. Comment. Math***., 35: 79-89 (2006).

Goldsto D. A., Pintz, J. ve Yıldırım, C. Y., “Primes in tuples. II.” ***Acta Math***., 204(1): 1-47 (2010).

Heath-Brow D. R., “The number of primes in a short interval”, ***J. Reine Angew. Math.***, 389: 22-63 (1988).

Helfgott , H. A., "La Conjecture de Goldbach Ternaire", ***Gaz. Math.***, 140: 5-18 (2014).

Ivic, A. A., “The Riemann Zeta-Function”, New York: Wiley, (1985).

Levy, H., "On Goldbach's Conjecture.", ***Math. Gaz.***, 47:274 (1963).

Loo, A., “On the primes in the interval [3n,4n]”, ***Int. J. Contemp. Math. Sci.***, 6: 1871–1882 (2011).

Maier, H., “Chains of large gaps between consecutive primes”, ***Adv. in Math.***, 39 (3): 257-269 (1981).

Maier, H., “Primes in short intervals”, ***Michigan Math. J.***, 32 (2): 221-225 (1985).

Maier, H. and Pomerance, C., “Unusually large gaps between consecutive prime” ,***Trans. Amer. Math. Soc.***, 322 (1): 201-237 (1990).

Murty, R., “Primes in Certain Arithmetic Progressions”, ***Journal of The Madras University***: 161-169 (1988).

Narkiewicz, W., “Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers”, ***Third Edition Springer*** (1990).

Rankin, R. A., “The Difference between Consecutive Prime Numbers”, ***J. London Math. Soc.***, 13: 242-247 (1938).

Riemann, G. F. B., “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.” ***Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss***., Berlin: 671-680 (1859).

Robbins, H., “A Remark On Stirling’s Formula”, ***Amer. Math. Monthly***, 62: 26–29 (1955).

Rosser, J., Schoenfeld, L., “Approximate Formulas For Some Functions Of Prime Numbers”, ***Illinois J. Math***., 6: 64–94 (1962).

Selberg, A., “On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes”, ***Arch. Math. Naturvid.***, 47 (6): 87-105 (1943).

Yıldırım, C. Y., “The Distribution of Primes: Conjectures vs. Hitherto Provables”, *Further progress in analysis,* ***World Sci. Publ.***, Hackensack, NJ: 75-108 (2009).

Zaccagnini, A., “Primes in Almost All Short Intervals”, ***Acta Arith.***, 84 (3): 225-244 (1998).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:Hasan DAĞLAR
Doğum Yeri ve Tarihi	:Ankara / 1990

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi	:Ömer Halisdemir Üniversitesi, Matematik
Bildiği Yabancı Diller	:İngilizce

İş Deneyimi

Stajlar	:
Projeler	:
Çalıştığı Kurumlar	:

İletişim:

Adres	:Gaziemir/İZMİR
Tel	:
E-posta Adresi	:hasandaglr@gmail.com

Yabancı Dil Bilgisi	İngilizce (Orta Seviye)