

**ESKİŞEHİR  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK  
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

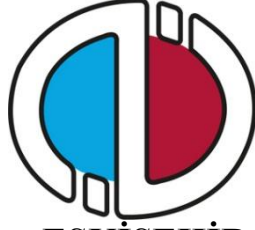
**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı**

**ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON İLE  
İLGİLİ İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİ  
DÜZEYLERİNİN İNCELENMESİ**

**Seda ARAR  
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğr. Üyesi Figen UYSAL**

**BİLECİK, 2019  
Ref. No: : 10264319**



**ESKİŞEHİR  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ  
BİLECİK  
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

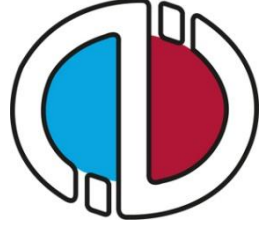
**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı**

**ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON İLE  
İLGİLİ İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİ  
DÜZEYLERİNİN İNCELENMESİ**

**Seda ARAR  
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğr. Üyesi Figen UYSAL**

**BİLECİK, 2019**



**ESKİSEHIR  
ANADOLU UNIVERSITY**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**BİLECİK  
ŞEYH EDEBALI UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences  
Department of Mathematics**

**THE INVESTIGATION OF THE OPERATIONAL AND  
CONCEPTUAL KNOWLEDGE LEVELS OF THE  
UNIVERSITY STUDENTS ABOUT FUNCTION**

**Seda ARAR  
Master's Thesis**

**Thesis Advisor  
Asst. Prof. Dr. Figen UYSAL**

**BİLECİK, 2019**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS**  
**JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 30/05/2019 tarih ve 29-03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 17/06/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Seda ARAR'ın "Üniversite Öğrencilerinin Fonksiyon İle İlgili İşlemsel Ve Kavramsal Bilgi Düzeylerinin İncelenmesi" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

**ÜYE**  
**(TEZ DANIŞMANI):** **JÜRİ**  
Dr. Öğr. Üy. Figen DYSAL

**ÜYE**  
**(JÜRİ BAŞKANI):** Dr. Öğr. Üy. Derya ÇELİK

**ÜYE:** Dr. Öğr. Üy. Basak BARAK

**ONAY**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca konu seçimi, araştırma yöntemi ve benzeri tüm aşamalarda sağladığı katkılarla bana sürekli destek olan değerli hocam ve danışmanım Dr.Öğr.Üyesi Figen UYSAL'a teşekkür ederim. Aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Saygılarımla...

## **BEYANNAME**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

...../...../ **2019**

Seda ARAR

## ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN FONKSİYON İLE İLGİLİ İŞLEMSEL VE KAVRAMSAL BİLGİ DÜZEYLERİNİN İNCELENMESİ

### ÖZET

Fonksiyon kavramı, matematiğin temelini oluşturan ve günlük hayatta da uygulama alanı olan bir yapıdır. Kapsamlı bir kavram olması nedeniyle öğrenilmesi ve öğretilmesi güçtür. Bu nedenle bu kavramın öğrenilmesi ve öğretilmesi süreçleriyle ilgili pek çok çalışma (kavram yanılgıları, öğrenme stratejileri, tarihi gelişimi vb.) yapılmıştır. Bu tez çalışması kapsamında ise üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramına ilişkin sahip oldukları işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri ele alınmıştır. Bu kapsamda "fonksiyonu, fonksiyonun tanım ve değer kümesini belirleme, fonksiyonların temel cebirsel özelliklerini tanıma ve temel cebirsel teknikleri uygulayabilme, fonksiyon grafiklerini çizme" başlıkları altında işlemsel ve kavramsal bilgiyi ölçen 13 adet soru hazırlanmıştır. Bir sorunun hangi öğrenme türünü ( işlemsel veya kavramsal ) ölçmeye yönelik olduğunu belirlemek için literatür taraması yapılarak uygun bir karakterizasyon ölçeği kullanılmış ve cevap anahtarı buna göre oluşturulmuştur. Sorular bir devlet üniversitesinin fen edebiyat ve mühendislik fakültesinde öğrenim gören toplam 65 üniversite öğrencisine uygulanmıştır. Analiz sonuçlarına göre fonksiyon kavramının kapsamı ve zorluğundan dolayı öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgilerinde eksiklerin olduğu görülmüştür. Kavramsal bilginin fonksiyon tanımından itibaren genellikle eksik olduğu ve buna bağlı olarak işlemsel bilginin ezbere yapıldığı sonucuna ulaşılmıştır. İşlemsel bilgiye dayalı soruların daha fazla cevaplandığı ve boş bırakılma oranının kavramsal bilgi içeren sorulara göre daha az olduğu görülmüştür. Bazı sorularda öğrenciler, temel cebirsel teknikleri uygulayabilmiş ve bu soru tiplerini çözebilmiştir. Tanım ve değer kümesi belirleme, fonksiyon olup olmadığını açıklama sorularında kavramsal bilgi eksikliği ve ezber bilgiden dolayı sorular boş bırakılmış veya yanlış cevaplanmıştır. Eksiklerin giderilmesi ve ezber bilgiden uzaklaşmak için sınav sistemleri ile öğretim programları uyumlu olmalıdır. Bu yüzden işlemsel ve kavramsal bilgi, matematiğin temel kavramlarından biri olan fonksiyonun, ortaöğretim ve yükseköğretimde birbirini destekleyecek ve tamamlayacak şekilde öğretilmesi hedeflenebilir.

**Anahtar Kelimeler:** İşlemsel Bilgi; Kavramsal Bilgi; Fonksiyon; Fonksiyon Öğretimi.

**THE INVESTIGATION OF THE OPERATIONAL AND CONCEPTUAL  
KNOWLEDGE LEVELS OF THE UNIVERSITY STUDENTS ABOUT  
FUNCTION  
ABSTRACT**

The concept of function is a structure that forms the basis of mathematics and is also a field of application in daily life. Because it is a comprehensive concept, it is difficult to learn and teach. For this reason, many studies (misconceptions, learning strategies, historical development, etc.) have been made about the processes of learning and teaching this concept. Within the scope of this thesis, the operational and conceptual knowledge levels of the university students about the concept of function are discussed. In this context, 13 questions measuring operational and conceptual information were prepared under the headings "determining function, domain and range of a function, recognizing the basic algebraic properties of functions and applying basic algebraic techniques, drawing function graphs". In order to determine which type of learning (operational or conceptual) a question is intended to measure, an appropriate characterization scale has been used and the answer key has been formed accordingly. The questions were applied to a total of 65 university students studying at the faculty of science, literature and engineering of a state university. According to the results of the analysis, due to the scope and difficulty of the concept of function, it was observed that there were deficiencies in the students' conceptual and operational knowledge. It is concluded that conceptual information is generally incomplete from the definition of function and that the operational information is made by heart. It was seen that the questions based on procedural information were answered more and the rate of blanking was less than the questions containing conceptual information. In some questions, students were able to apply basic algebraic techniques and solve these types of questions. The questions were left blank or incorrectly answered due to lack of conceptual information and memorization information in the questions of defining domain and range of a function, explaining the function or not. In order to eliminate the deficiencies and to get away from memorization information, examination systems and curriculum should be compatible. Therefore, it is aimed to teach functional and conceptual information, one of the basic concepts of mathematics, to support and complement each other in secondary and higher education.

**Key Words:** Operational Knowledge; Conceptual Knowledge; Function; Function Teaching.

## İÇİNDEKİLER

|  | Sayfa No   |
|--|------------|
| <b>TEŞEKKÜR</b> .....  |            |
| <b>BEYANNAME</b> .....   |            |
| <b>ÖZET</b> .....  | <b>I</b>   |
| <b>ABSTRACT</b> .....  | <b>II</b>  |
| <b>İÇİNDEKİLER</b> .....   | <b>III</b> |
| <b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....   | <b>V</b>   |
| <b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....   | <b>VI</b>  |
| <b>1. GİRİŞ</b> .....  | <b>1</b>   |
| 1.1. Araştırmanın Amacı .....  | 2          |
| 1.2. Araştırmanın Önemi .....  | 2          |
| 1.3. Problem Durumu .....  | 3          |
| 1.3.1. Araştırmanın alt problemleri.....   | 3          |
| 1.3.2. Sayıtlılar.....   | 3          |
| 1.3.3. Sınırlılıklar .....   | 4          |
| 1.4. Tanımlar .....  | 4          |
| 1.5. İşlemsel ve Kavramsal Bilgi .....   | 4          |
| 1.5.1. İşlemsel ve kavramsal bilginin tarihsel süreci .....  | 4          |
| 1.5.2. İşlemsel ve kavramsal bilginin ilişkisi ve etkileşimi .....                                   | 7          |
| 1.5.3. İşlemsel ve kavramsal bilginin/anlamanın ölçülmesi .....                                      | 9          |
| 1.5.4. İşlemsel ve kavramsal bilginin/anlamanın matematik öğrenimi ve öğretimi açısından önemi ..... | 10         |
| 1.6. Fonksiyon .....   | 11         |
| 1.6.1. Fonksiyon kavramının matematiksel manası.....   | 11         |
| 1.6.2. Fonksiyon kavramının tarihsel gelişimi.....   | 13         |
| 1.6.3. Fonksiyon öğretiminde karşılaşılan zorluklar.....   | 13         |
| 1.6.4. Fonksiyon öğretimi .....  | 15         |
| 1.7. İlgili Araştırmalar .....   | 16         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2. YÖNTEM</b> .....                                  | <b>21</b> |
| 2.1. Araştırma Deseni.....                              | 21        |
| 2.2. Katılımcılar.....                                  | 21        |
| 2.3. Veri Toplama Aracı.....                            | 21        |
| 2.4. Uygulama .....                                     | 23        |
| 2.5. Verilerin Analizi.....                             | 23        |
| <b>3. BULGULAR</b> .....                                | <b>24</b> |
| <b>4. SONUÇ ve ÖNERİLER</b> .....                       | <b>50</b> |
| 4.1. İşlemsel Bilgi Ağırlıklı Soruların Sonuçları.....  | 50        |
| 4.2. Kavramsal Bilgi Ağırlıklı Soruların Sonuçları..... | 51        |
| 4.3. Öneriler.....                                      | 53        |
| <b>KAYNAKLAR</b> .....                                  | <b>54</b> |
| <b>EKLER</b> .....                                      | <b>59</b> |
| <b>ÖZ GEÇMİŞ</b> .....                                  |           |

**ÇİZELGELER DİZİNİ****Sayfa No**

|   |    |
|---|----|
| <b>Çizelge 1. 1.</b> İlişkisel ve kurala dayalı matematiğin doğası .....                    | 6  |
| <b>Çizelge 1. 2.</b> Kavramsal ve işlemsel bilgilerin ilişkilendirilmesinin faydaları.....  | 7  |
| <b>Çizelge 2. 1.</b> Çalışmaya katılan öğrencilerin bölüm ve sınıf bazında dağılımları..... | 21 |
| <b>Çizelge 3. 1.</b> Soru 5'in cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 25 |
| <b>Çizelge 3. 2.</b> Soru 6'nın cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....            | 27 |
| <b>Çizelge 3. 3.</b> Soru 7'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....            | 29 |
| <b>Çizelge 3. 4.</b> Soru 8'in cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 31 |
| <b>Çizelge 3. 5.</b> Soru 9'un cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 33 |
| <b>Çizelge 3. 6.</b> Soru 1'in cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 35 |
| <b>Çizelge 3. 7.</b> Soru 2'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....            | 37 |
| <b>Çizelge 3. 8.</b> Soru 3'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 41 |
| <b>Çizelge 3. 9.</b> Soru 4'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....             | 43 |
| <b>Çizelge 3. 10.</b> Soru 10'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....           | 45 |
| <b>Çizelge 3. 11.</b> Soru 11'in cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....           | 46 |
| <b>Çizelge 3. 12.</b> Soru 12'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....          | 47 |
| <b>Çizelge 3. 13.</b> Soru 13'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).....           | 49 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|  | <b>Sayfa No</b> |
|--|-----------------|
| Şekil 1. 1. Fonksiyonun şematik gösterimi .....                              | 12              |
| Şekil 1. 2. Fonksiyon makinesi .....   | 13              |
| Şekil 3. 1. Soru 5a için yanlış cevap örneği .....                           | 25              |
| Şekil 3. 2. Soru 5 için uygulama hatası örneği.....                          | 26              |
| Şekil 3. 3. Soru 5 için eksik cevap örneği .....                             | 26              |
| Şekil 3. 4. Soru 5 için yanlış cevap örneği.....                             | 26              |
| Şekil 3. 5. Soru 5 için yanlış cevap örneği.....                             | 27              |
| Şekil 3. 6. Soru 6 yanlış cevap örneği.....                                  | 28              |
| Şekil 3. 7. Soru 6 yanlış cevap örneği.....                                  | 28              |
| Şekil 3. 8. Soru 6 eksik cevap örneği .....                                  | 28              |
| Şekil 3. 9. Soru7 doğru cevap örneği .....                                   | 29              |
| Şekil 3. 10. Soru7 yanlış cevap örneği.....                                  | 30              |
| Şekil 3. 11. Soru7 yanlış cevap örneği.....                                  | 30              |
| Şekil 3. 12. Soru7 yanlış cevap örneği.....                                  | 30              |
| Şekil 3. 13. Soru8 doğru cevap örneği .....                                  | 31              |
| Şekil 3. 14. Soru8 öğrenci cevap örneği .....                                | 32              |
| Şekil 3. 15. Soru8 yanlış cevap örneği.....                                  | 32              |
| Şekil 3. 16. Grafik çözümlü öğrenci cevap örneği.....                        | 32              |
| Şekil 3. 17. Öğrenci cevap örneği .....                                      | 33              |
| Şekil 3. 18. Öğrenci cevap örneği .....                                      | 34              |
| Şekil 3. 19. Eksik notasyon kullanılarak yapılan fonksiyon tanımı. (D) ..... | 35              |
| Şekil 3. 20. Kısmen notasyon kullanılan fonksiyon tanımı.(D).....            | 35              |
| Şekil 3. 21. Notasyon kullanılmayan fonksiyon tanımı.(D) .....               | 35              |
| Şekil 3. 22. İnfomal tanım ve yetersiz açıklama (E).....                     | 36              |
| Şekil 3. 23. Fonksiyon tanımı ve açıklaması yanlış (Y1) .....                | 36              |
| Şekil 3. 24. Fonksiyon tanımı ve açıklaması yanlış (Y1) .....                | 36              |
| Şekil 3. 25. Cevap doğru açıklama yanlış (Y2) .....                          | 37              |
| Şekil 3. 26. Soru 2a öğrenci cevap örneği.....                               | 38              |
| Şekil 3. 27. Soru 2a öğrenci cevap örneği.....                               | 38              |
| Şekil 3. 28. Soru 2a öğrenci cevap örneği.....                               | 38              |

|                     |                                     |    |
|---------------------|-------------------------------------|----|
| <b>Şekil 3. 29.</b> | Soru 2c öğrenci cevap örneği.....   | 39 |
| <b>Şekil 3. 30.</b> | Soru 2d öğrenci cevapları .....     | 39 |
| <b>Şekil 3. 31.</b> | Soru 2f yanlış cevap örneği .....   | 40 |
| <b>Şekil 3. 32.</b> | Soru 2f yanlış cevap örneği .....   | 40 |
| <b>Şekil 3. 33.</b> | Soru 2g 'ye ait öğrenci cevabı..... | 40 |
| <b>Şekil 3. 34.</b> | Soru 4a yanlış cevap örneği .....   | 43 |
| <b>Şekil 3. 35.</b> | Soru 4a yanlış cevap örneği .....   | 43 |
| <b>Şekil 3. 36.</b> | Soru 4a yanlış cevap örneği .....   | 43 |
| <b>Şekil 3. 37.</b> | Soru 4b 'ye ait öğrenci cevabı..... | 44 |
| <b>Şekil 3. 38.</b> | Soru 4b 'ye ait öğrenci cevabı..... | 44 |
| <b>Şekil 3. 39.</b> | Öğrenci cevap örneği .....          | 45 |
| <b>Şekil 3. 40.</b> | Öğrenci cevap örneği .....          | 45 |

## 1. GİRİŞ

Sürekli gelişen bilim ve teknolojiye ayak uydurabilen bireyler yetiştirmek için eğitim ve öğretim süreci yenilenip değiştirilmektedir. Çağımız hazır bilgiyi doğrudan bireylere vermek yerine onların araştırıp ulaşmasını ve ulaştığı bilgileri özümseyerek yeni bilgiler oluşturmasını ön görmektedir. Bu çağa ayak uydurabilmek için bireylerin sürece aktif olarak katılımı gerekmektedir.

Başlı başına bir sistem olan matematik, yapı ve bağıntılardan oluşmakta olup, bu yapı ve bağıntıların oluşturduğu ardışık soyutlamalar ve genelleme süreçlerini içeren soyut bir kavramdır. Soyut kavramların kazanılmasının zor olmasından dolayı, matematiğin öğrencilere zor geldiği de bilinmektedir. Bu nedenle, matematik öğretim yöntemlerinin irdelenmesi çağımızda üzerinde öncelikli olarak durulması gereken bir konudur. Matematiğin yapısına uygun bir öğretimin, öğrencilerin matematikle ilgili kavramları ve işlemleri anlamalarına; bu kavramlar ve işlemler arasındaki bağları kurmalarına yardımcı olmak amacıyla yönelik olması gerekir (Alakoç,2003).

Bu tez çalışması kapsamında ele alınacak olan fonksiyon kavramı da soyut olan birçok matematik kavramından biridir ve diğer matematik kavramlarının temelini oluşturur. Fonksiyonlar konusunun öğretiminde yapılandırmacı yaklaşımla uyumlu öğretim modellerinin (buluş yoluyla öğretim, probleme dayalı öğretim, proje tabanlı öğretim, kavram eksenli öğretim vs.) kullanılması öğrenmenin kalıcılığını artırabilir (Bayazit,2013). Fonksiyon kavramı birçok alt kavramdan oluşması nedeniyle tek bir yöntemle öğretilmesi uygun değildir. Öğrenciler de fonksiyon kavramını diğer matematiksel kavramlarla ilişkilendirdiğinde özümseyebilir ve uygulamada kullanabilir. Öğrencilerin bu ilişkilendirmeyi yapabilmesi için uygun öğrenme ortamları oluşturulması gerekir. Ortam oluşturulmasına katkı sağlayacak en önemli kişi öğreticidir. Öğreticinin fonksiyon bilgisinin tam ve yeterli olmasının yanı sıra öğrencinin seviyesine uyarlaması da gerekir. Seçilen öğretim yöntemi, hazırlanan sınıf içi aktiviteler ve yapılan ölçme-değerlendirme gibi ayrıntılar öğretmenin inisiyatifinde olmalıdır.

Fonksiyon konusunda da sahip olunan bilginin kalite açısından incelenmesi ve izah edilmesi için farklı teorik yapılardan yararlanılabilir. Bunlardan ilki *işlemsel bilgi* ve *kavramsal bilgi* düşüncelerini içermektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Kavramsal ve işlemsel anlamının her ikisi de matematik eğitimi için kritik öneme sahiptir. Hem

kavramsal bilgi hem de işlemsel bilgi türü birbirini desteklediğinden bireyin zihinsel gelişimine katkısı büyüktür (Post ve Cramer, 1989). Matematik eğitiminin genel amaçlarından biri de matematiksel kavramları ve sistemleri anlayabilmek, günlük hayatta ve diğer alanlarda kullanabilmek, herhangi bir alanda ileri bir eğitim alabilmek için gerekli matematiksel bilgi ve becerileri kazanabilmektir. Matematik bilgisinde yeterlilik sağlanabilmesi için kavramsal ve işlemsel anlamının birbirini desteklemesi gerekir.

Kavramsal ve işlemsel bilgi/ anlamının dengeli şekilde öğretilmesindeki zorluk bunların nasıl ölçüleceğine dair zorlukla eşdeğerdir. Günümüz sınav sistemleriyle öğretim programları arasındaki kopukluk öğrencilerin matematiğe karşı olumsuz tutum geliştirmesine neden olmaktadır. Yapılandırmacı yaklaşımın ön planda tutulduğu öğretim programlarında öğrenciler sürece aktif olarak katılım sağlamalıdır. Ancak bunun sadece planlarda yer almaması sınıflarda da uygulanması gerekir. Uygulama için hazırlanan ders kitaplarının, materyallerin, sınavların vs. işlemsel ve kavramsal bilgi /anlamayı temel alması gerekir.

### **1.1. Araştırmanın Amacı**

Bu araştırmanın amacı, üniversite öğrencilerinin matematiğin temel taşı olan fonksiyon konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyini ( hazırlanan işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyini ölçen sorularla) belirleme ve fonksiyon konusundaki eksiklerin nedenlerinin araştırılmasıdır.

### **1.2. Araştırmanın Önemi**

Fonksiyon kavramının birçok matematik konusuyla ilişkisi vardır. Matematiğin temelini oluşturan birleştirici ve bütünleştirici özelliği nedeniyle öğrenciler tarafından fonksiyon konusunun işlemsel ve kavramsal bilgiyi dengeleyerek öğrenilmesi diğer matematik konularını rahat ve daha anlamlı öğrenmelerini sağlayacaktır. Öğrencilerin doğrudan anlatım yöntemiyle matematiği öğrenmesi ve konuları kavrayıp ilişkilendirmesi güç bir durumdur. Öğrenciyi düşünmeye iten, sürece aktif katılımı sağlayan öğretim yöntemleri kullanıldığında matematiksel anlama ve matematiksel düşünme gelişebilir. Matematiksel düşünmeyle beraber kavramsal ve işlemsel anlamayı sağlayan bir öğrenci matematiğe karşı olumlu tutum gösterir.

Sınav sistemlerine uygun olarak çalışan öğrencilerin sadece işlemsel bilgiyi baz alarak ezbere soruları yanıtladığı görülmektedir. Fonksiyon konusunda ezbere, işlemsel ve sembolik olarak öğrenmeden kaynaklanan kavram yanılgılarının oluştuğu ve kavramsal olarak öğrenmenin gerçekleşmediği görülmektedir. Öğrencilerin fonksiyon konusunda farklı soru tipleriyle karşılaştığında işlemsel bilgi içeren soru olsa dahi ezbere işlem yaptığı için çözemedikleri, kavramsal bilgi eksikliğinden dolayı soruyu anlamlandıramadıkları ve işlemsel-kavramsal bilgi arasında ilişki kuramadıkları saptanmıştır ( Baki ve Kartal, 2000; Özdemir Erdoğan, Erdoğan ve Yanık, 2012 ).

İşlemsel ve kavramsal bilgi-anlamanın matematik öğretiminde birbirini destekleyici şekilde kullanılmasıyla öğrencilerin matematik dersine karşı önyargılarının azalacağı ve konular arasında bağ kurmalarının kolaylaşacağı düşünülmektedir. Bu araştırma üniversite öğrencilerinin fonksiyonlar konusunda işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini inceleme amacıyla yapılmıştır. Üniversite öğrencilerinin (fen edebiyat fakültesi matematik bölümü ile mühendislik fakültesi metalurji ve malzeme mühendisliği bölümü) işlemsel ve kavramsal düzeylerinin bilinmesinin öğretim elemanlarının öğretim tasarımı ve uygulamasında kullanılması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

### **1.3. Problem Durumu**

Tez çalışmasının amacına uygun olarak çalışmanın problem durumu ve alt problemleri aşağıda ifade edilmiştir.

Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri nasıldır?

#### **1.3.1. Araştırmanın alt problemleri**

- Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili işlemsel bilgi düzeyleri nasıldır?
- Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili kavramsal bilgi düzeyleri nasıldır?

#### **1.3.2. Sayıtlar**

- Araştırma kapsamında hazırlanan sorular araştırmaya katılan öğrenciler tarafından gönüllü olarak cevaplanmıştır.

### 1.3.3. Sınırlılıklar

- Bu tez çalışması, fonksiyon kavramına ilişkin hazırlanan işlemsel ve kavramsal anlamaya ilişkin test soruları ile sınırlıdır.
- Bu tez çalışmasının katılımcıları, bir devlet üniversitesinin fen-edebiyat ve mühendislik fakültelerinde öğrenim gören öğrenciler ile sınırlıdır.

### 1.4. Tanımlar

Araştırmada kullanılacak olan temel kavramların tanımı aşağıda verilmiştir.

*Kavramsal bilgi:* Kavram bilgisi, herhangi bir kavram, kural, genelleme ve bunlar arasındaki açık veya kapalı ilişkiler olarak tanımlanabilir ( Hiebert ve Lefevre,1986; Rittle-Johnson ve Alibali,1999). En genel haliyle kavram, prensipler ve tanımlar bilgisidir. Kilpatrick, Swafford ve Findell (2001,s.5) kavramsal bilgiyi; matematiksel kavramların, işlemlerin ve ilişkilerin anlaşılması olarak ifade etmiştir.

*Kavramsal anlama:* Matematiksel kavramların prensiplerin ve tanımların zihinde anlamlandırılmasıyla ilgili bir süreci içerir. Yani bu süreç bireyin yeni karşılaştığı bir bilgiyi mevcut bilgileri ve anlayışı ışığında değerlendirip ilişkisel ve sistematik bir yapıya dönüştürme sürecidir (Yanık,2016).

*İşlemsel bilgi:* İşlem bilgisi, alıştırmaları çözmek için kullanılan sembol, aritmetik işlem ve rutin kurallar bilgisidir (Hiebert ve Lefevre,1986; Van de Walle, 2004, s.27-28).

*İşlemsel anlama:* Bireylerin işlemleri esnek, etkili ve bilinçli tercihlere dayalı olarak ve doğru şekilde kullanabilmesidir (Yanık,2016).

### 1.5. İşlemsel ve Kavramsal Bilgi

#### 1.5.1. İşlemsel ve kavramsal bilginin tarihsel süreci

Kavramsal bilgi, kavramın tanımının yanı sıra kavramın diğer kavramlarla ilişkisini ifade etmek ve karşılıklı kavram geçişlerini sağlayabilmektir. Bir kavramın anlamını tek başına ifade etmesi zordur. Kavram ancak içinde bulunduğu grupla ilişkilendirildiğinde anlamını ortaya çıkarır. Matematikte de eski ile yeni bilgiler birleştirilip kullanıldığında kavramla ilgili öğrenme gerçekleşmiş olur (Skemp,1971).

İlişkilendirme yaptığımızda kavrama bağlı küçük bilgiler de anlamlandırılarak öğrenilir. Kavram bilgisi zincirin halkaları gibidir, her halka bir bilgi taşır ve halka

sayısı arttıkça kavram bilgisi de genişler. Her halka bir diğeri için önem taşır ve temsil ettiği kavrama anlamlılık katar (Hiebert ve Lefevre,1986).

Hiebert ve Lefevre'ye,(1986) göre işlemsel bilgi, iki ayrı kısımdan meydana gelmektedir. İşlem bilgisinin birinci kısmını matematiğin sembolleri ve dili oluşturur. Matematiksel semboller konunun yüzeysel özelliklerini verir ancak anlamını vermez. İşlem bilgisinin ikinci kısmı ise kuralları, matematiksel problemleri çözmek için kullanılan bağıntıları, somut nesnelere üzerindeki işlemleri, görsel diyagramları, zihinsel hayalleri veya matematiksel sistemin standart olmayan diğere nesnelere içerir.

İşlemin önemli özelliklerinden, biri bir bütün olarak düşünülmesi, diğeri de algoritmik bir yapıya sahip olmasıdır (Baki ve Kartal,2004). İşlemler mantıklı şekilde sıraya konularak adım adım ilerlenir ve sonuca ulaşılır. Bir işlemin sonucu diğere işlemin başlangıcı olur. Soru çözümünde kullanılan işlemlerde daha önceden kazanılan anlam bilgisi vardır. Kavramsal bilgi işlemsel bilgi içerir. Bu yüzden işlem bilgisine anlamsız öğrenme denilemez ( Baki ve Kartal, 2000).

Kavram bilgisi içinde işlem bilgisi, işlem bilgisi içinde de kavram bilgisi vardır. Dolayısıyla, işlem ve kavram bilgisini ayıran kesin, kalın bir çizgi yoktur ( Baki,1998).

Kavramsal ve işlemsel bilgi/ anlamının tarihsel sürecini Skemp, Post ve Cramer, Hiebert ve Lefevre, Star,Baroody, Feil ve Johnson gibi birçok araştırmacı incelemiştir.

Post ve Cramer (1989); işlemsel ve kavramsal anlamının birbirine zıt olduğunu, ilişkisi olmadığını ifade etmişlerdir. Kavramsal anlamının işlemsel anlamaya göre matematik eğitiminde daha önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Skemp ( 1978,1987), kavramsal ve işlemsel anlamayla ilişkisel ve kurala dayalı anlama arasında benzerliğin olduğunu açıklamıştır. İlişkisel anlama; kavramsal anlamadaki gibi kavramlar arasında ilişki kurma, yapılan işlemin neye dayandırılarak yapıldığı ve o kavramın nereden geldiğini belirtir. Kurala dayalı anlamayı ise işlemsel anlamayla özdeşleştirmiştir. Kavramlar arasında ilişki kurmadan sadece kural ve yöntemlerin kullanıldığı anlama şekli olduğunu düşünmüştür. İlişkisel ve kuralı dayalı anlamının birbirinden tamamen farklı olduğunu da iddia etmiştir. Skemp' e (1978) göre ilişkisel ve kurala dayalı matematiğin doğası Çizelge 1.1.'de verilmiştir (Yanık, 2016,s.104' den alınmıştır).

**Çizelge 1. 1.** İlişkisel ve kurala dayalı matematiğin doğası.

| <b>İlişkisel Matematik</b>   | <b>Kurala Dayalı Matematik</b>  |
|--|---|
| Öğrenmesi zaman alır ve zordur.  | Kendi bağlamında öğrenilmesi, anlaşılması çabuk ve kolaydır.                        |
| İlişkilerin kurulması durumunda hatırlanması kolaydır ve kalıcılığı daha uzundur.  | Her yeni durum için farklı kuralların öğrenilmesi gerekir.                          |
| Yeni durumlara kolay uyarlanabilir.  | Yeni durumlara uyarlanması zordur.  |
| İlişkilerin kurulmasını gerektirdiğinden sonuca ulaşmak zaman alabilir.  | Az bilgi içerdiğinden hızlı ve doğrudan sonuca ulaşılır.                            |
| İçsel bir motivasyon sağladığından dışsal bir ödün gereksinimine olan ihtiyacı düşürür                                   | Sonuca ulaşmak daha hızlı olduğundan öğrenci başarı hissini daha kısa sürede yaşar. |
| İlişkisel anlamadan memnuniyet duyan öğrenciler yeni durumlardaki matematiksel ilişkileri kendiliklerinden araştırırlar. |   |

Hiebert ve Lefevre (1986) de Skemp'in düşüncelerine katılmıştır. Farklı olarak ileri düzeyde ilişki kurabilen, bilgilerini farklı konularda da uygulayabilen ya da uygulanıp uygulanmadığını sorgulayan bireylerin kavramsal bilgi ve anlamaya sahip olabileceğini belirtmiştir. İşlemsel bilginin ise iki bölümden oluştuğunu, birincisinin matematiğin sembolik dili, ikincisini ise kuralları bilme olarak tarif etmiştir.

Başlarda Skemp, Hiebert ve Lefevre kavramsal bilginin işlemsel bilgiye göre daha önemli olduğunu savunmuşlardır. Zaman geçtikçe işlemsel ve kavramsal bilginin birbirine üstünlüğünün olmamasının yanı sıra birbirinden kesin çizgilerle ayırmanın da zor olduğunu ifade etmişlerdir. İşlemsel ve kavramsal bilginin birbiriyle ilişkili olduğunu ve birbirini desteklediğini belirtmişlerdir. Matematik öğretimi ve öğreniminde birinin eksik olması matematiksel açıdan doygunluğa ulaşmayı zorlaştırdığını belirtmişlerdir. Hiebert ve Lefevre'ye (1986) göre kavramsal ve işlemsel bilgilerin ilişkilendirilmesi Çizelge 1.2.' de verilmiştir (Yanık, 2016, s.106'dan alınmıştır).

**Çizelge 1. 2.** Kavramsal ve işlemsel bilgilerin ilişkilendirilmesinin faydaları.

| <b>İşlemsel bilgi açısından</b>  | <b>Kavramsal bilgi açısından</b>   |
|--|--|
| Matematiksel semboller için bir anlam geliştirir (+ sembolünün bir araya getirme anlamına geldiği gibi). | Matematiksel semboller kavramsal bilgilerin düzenlenmesine ve üzerinde çalışılmasına yardımcı olur.      |
| İşlemsel bilginin hafızada uzun süreli kalmasına ve hatırlanmasına yardımcı olur.                        | Matematiksel gösterimler (formüller gibi) ve yeni yöntemler kavramsal bilginin oluşumunu tetikleyebilir. |
| İşlemsel bilginin etkili bir şekilde kullanımına yardımcı olur.  | İlişkilendirme sonucunda kavramsal bilgi işlemsel bilgiye dönüşebilir.                                   |

Hiebert ve Lefevre (1986) işlemsel ve kavramsal anlamayı ilişkilendirmenin zor olduğunu, ilişkilendirme sürecini olumsuz yönde etkileyen faktörlerin bulunduğunu belirtmişlerdir. Bu faktörlerden üçü matematik öğrenimi açısından önemlidir. Bunlar;

- Öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgilerinin eksik olması nedeniyle iki bilgi türü arasında ilişki kuramaması,
- Küçük çocukların problemleri yetişkinler gibi çabuk algılayıp bilgi türleri arasında ilişkiyi fark edememesi,
- Bilginin( konunun) bölümlere ayrılıp birbirinden tamamen ayrı bir şekilde anlatılmaya çalışılmasıdır.

Star (2000), Hiebert ve Lefevre'nin işlemsel ve kavramsal bilgi tanımını yeterli bulmamış özellikle işlemsel bilgiyi sınırlandırdığını ifade etmiştir. Öğrencilerin matematik öğrenimi ve problem çözme sürecinde gerek kavramsal bilgi gerekse işlemsel bilgi açısından derin ve ileri düzeyde bilgi sahibi olması gerekliliğini belirtmiştir.

Baroddy, Feil ve Johnson (2007) Star'ın (2005) düşüncelerine katılmıştır. İşlemsel bilginin ezber bilgi olarak tanımlanmasının yanlış olduğunu ayrıca yapılan işlemsel ve kavramsal bilgi tanımının da yetersiz olduğunu belirtmişlerdir (Yanık,2016).

### **1.5.2. İşlemsel ve kavramsal bilginin ilişkisi ve etkileşimi**

Matematik eğitimde işlemsel ve kavramsal bilginin birbirini nasıl etkilediği ve aralarında nasıl bir ilişki olduğu hakkında farklı görüşler bulunmaktadır. Matematik

eğitmcilerinin çoğu kavramsal bilginin işlemsel bilgiyi desteklediğini savunmasına karşın aralarındaki ilişkiyi netleştiren bir fikir birliği bulunmamaktadır.

Literatür incelendiğinde işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki ilişki dört yaklaşım altında toplanmıştır. Bunlar; önce kavram yaklaşımı (Gelman ve Williams,1998; Haapasalo ve Kadjevich,2000; Rittle-Johnson ve Siegler,1998), önce işlem yaklaşımı (Schneider,Rittle-Johnson ve Star,2011; Siegler ve Stern,1998), bağımsız/ilişkisiz yaklaşım (Haapasalo ve Kadjevich,2000) ve dönüşümlü yaklaşım (Rittle-Johnson ve Alibali,1999; Schneider, Rittle-Johnson ve Star,2011)'dir.

Önce kavram yaklaşımına göre bireyler öncelikle kavramsal bilgiyi çevreden çeşitli yollarla alır ve öğrenirler. Kavramsal bilgi yardımıyla da işlemsel bilgiye ulaşırlar (Haapasalo ve Kadjevich,2000; Rittle-Johnson ve Siegler,1998).

Önce işlem yaklaşımına göre de bireyler öncelikle işlemsel bilgiyi öğrenirler daha sonra genellemeler ve soyutlamalar yaparak kavramsal bilgiyi elde ederler (Schneider,Rittle-Johnson ve Star,2011).

Bağımsız/ilişkisiz görüşe göre işlemsel bilginin gelişimi kavramsal bilginin gelişimine, kavramsal bilginin gelişimi de işlemsel bilginin gelişimine katkı sağlamaz (Haapasalo ve Kadjevich,2000). Kavramsal bilgisi yeterli olan bir bireyin işlemsel bilgisi zayıf olabilir. Ya da işlemsel bilgisi ileri düzeyde birinin kavramsal bilgisi olmayabilir.

Dönüşümlü yaklaşıma göre ise işlemsel ve kavramsal bilgi karşılıklı olarak birbirlerinin gelişimine katkı sağlarlar. Birbirinden bağımsız şekilde gelişmezler (Rittle-Johnson ve Alibali,1999). Bireyler çocukluk döneminden itibaren sürekli bir öğrenme ortamında bulunurlar. Öğrenme ortamlarında işlemsel ve kavramsal bilginin belli bir sırası yoktur, konuya ve duruma göre sıralama değişir.

Günümüzde de dönüşümlü yaklaşım benimsenmiş, ders programları ve öğretimde de kullanılmaya başlanmıştır. Yapılandırmacı yaklaşım ışığında öğrenci yararı esas alınmıştır. Dönüşümlü yaklaşım mantığına uygun kavramsal öğrenme ön plana çıkmıştır. Kavramsal öğrenmede kavram ve işlem bilgisine dengeli şekilde önem verilerek her iki bilgi türü de kullanılır ( Baki,1998). Öğrenci; kavramsal öğrenmede kendi yeteneklerini, sezgilerini problem çözmek ve yeni bilgiler üretmek için verimli bir şekilde çalışan kişidir. Bu yüzden kavramsal öğrenme yaklaşımı matematikteki kavramları birbirine bağlı olarak görür ve bu kavramların öğrencilere dışarıdan hazır

olarak verilmesi yerine kendilerinin özümsemesi-yapısallaştırması gerektiğini önerir (Bell ve Baki, 1997).

### **1.5.3. İşlemsel ve kavramsal bilginin/anlamanın ölçülmesi**

İşlemsel ve kavramsal bilginin tanımı ve etkileşimi üzerine ortak bir kabul olmaması işlemsel ve kavramsal bilginin ölçülebilmesine de yansımıştır. Rittle-Johnson ve Schneider (2015) kavramsal bilginin ölçülmesinde birçok yöntemin olduğunu ancak işlemsel bilginin ölçülmesinde yöntemin az olduğunu belirtmişlerdir.

Öğrencilerde kavram bilgisinin oluşturulması veya ortaya çıkarılması için öncelikle esnek düşünmeyi gerektiren problemler ortaya konmalıdır. Böyle problemler, öğrencilerin kendilerinde var olan bilgi ve becerilerini kullanmalarına, genişletmelerine veya yeni durumlara transfer etmelerine imkân sağlar (NCTM, 2000). Bu nedenle kavram bilgisinin derinliğini, zenginliğini ve kalitesini doğru şekilde ölçmek için öğrencilere alternatifli birçok problem sunulmalıdır (Star, 2000).

Kavram bilgisi sözlü ya da yazılı olarak yapılan standart veya klinik görüşmeler esnasında bireye sorulan sorularla belirlenmeye çalışılır (Ginsburg,1997). Kavramsal soruların tipik özelliği kişinin bu sorulara aşına olmaması ve bundan dolayı cevabını bulurken rutin işlem bilgisinden ziyade kavram bilgisini kullanmasını gerektirmesidir (Rittle-Johnson ve Schneider,2015).

İşlem bilgisini ölçmek kavram bilgisini ölçmeye göre daha kolaydır. Öğrencilerin alışmış oldukları çoktan seçmeli sorularda ve hazırlanan genel sınavlar da genelde işlemsel bilgi ölçülür. Problemin sonucuna, sorunun doğruluğuna, çözüm yöntemine, işlemsel sürece, kaç yolla çözüldüğüne, etkili çözüm olup-olmadığına ve ne kadar kısa sürede cevap verildiğine bakılır (Rittle-Johnson ve Schneider,2015).

Kavram ve işlem bilgisi arasındaki ilişkiyi incelemek için birbirlerinden bağımsız olarak değerlendirme yapmak önemlidir. Fakat bir bilgi türünü ölçmek için hazırlanan bir maddenin sadece bir bilgi türünü ölçtüğünü diğerini ölçmediğini söylemenin zor olduğunu bilmek de önemlidir. Bir madde daha genel olarak hangi bilgi türünü ölçüyorsa, o maddenin o bilgi türünü ölçtüğü düşünülebilir. Şu unutulmamalıdır ki sürekli matematik bilgisi ölçümü yapmak kategorik ölçüm yapmadan daha uygundur. Böyle sürekli ölçümlerle öğrencilerin bilgilerindeki sürekli derin değişimler (bilgilerin kullanılıp kullanılmadığı) yakalayabilir. Hem de insan bilincinin ortak özelliği olarak görülen düşüncelerdeki değişkenlikler görülebilir. Burada önemli bir nokta da

öğrencilerin matematik öğrenim süreçlerinden birbiriyle ilişkili olan kavram ve işlem bilgi türlerini etkili bir şekilde öğrenmesidir. Bunun sağlanabilmesi için matematik eğitimcilerinin, öğretmenlerin öğrencilerinin bu iki bilgi türüne ilişkin gelişimlerini düzenli bir şekilde izlemelerini ve değerlendirmelerini gerekli kılmaktadır. Bu nedenle öğretmenlerin öğrencilerinin başarılarını ve öğrenme düzeylerini belirlerken kullandıkları soru türlerinin hangi bilgi türleriyle ilişkili olduğu tespit edilmelidir. Elde edilen bilgilerle, mevcut durum daha iyi bir hale dönüştürülebilir. Fakat öğretmenlerin, öğrencilerin bilgi tür ve seviyelerini sürekli olarak ölçmelerine rağmen elde ettikleri sonuçları kavram ve işlem bilgisi açısından değerlendirmedikleri bilinmektedir. Yine kavram ve işlem bilgisinin nasıl ölçülmesi gerektiği konusu bilimsel açıdan önemli araştırma ve tartışma konusu olmasına rağmen diğer alanlar ile karşılaştırıldığında bu alandaki araştırmalar yeterli sayıda değildir (Bekdemir ve Baş, 2017).

Kavramsal ve işlemsel anlamının ölçülmesi öğrencilerin hedeflenen matematiksel kazanımlara ne ölçüde ulaşabildiklerinin gözlenmesi, ne tür matematiksel ilişkiler kurabildiklerinin anlaşılması ve öğretmenlerin ders programlarını bu değerlendirmeler ışığında yeniden planlaması açısından önemlidir (Yanık,2016).

#### **1.5.4. İşlemsel ve kavramsal bilginin/anlamanın matematik öğrenimi ve öğretimi açısından önemi**

Yükseköğretim düzeyindeki öğrencileri konu alan matematik eğitimi araştırmalarının temel amaçlarından biri, ilgili dersin içerdiği konuda, kavramsal ve işlemsel bilgi düzeyi gelişmiş, genelleme, sentezleme ve muhakeme süreçlerini yönetebilen bireylerin yetişmesini sağlayacak öğrenme ortamlarını hazırlamak/tasarlamaktır (Dreyfus, 1991).

İşlemsel ve kavramsal anlama öğrencilerin matematik eğitim ve öğreniminde her dönemde zihinsel gelişimi sağladığı için önemlidir. Kilpatrick, Swafford (2001) kavramsal anlamayı (matematiksel kavramların, işlemlerin ve ilişkilerin anlaşılması) ve işlem akıcılığını (işlemlerin doğru ve esnek şekilde kullanılması) matematiksel yeterliliğin beş ana kolundan biri olarak ifade etmişlerdir.

Matematik eğitimcilerinin büyük çoğunluğu tarafından kabul görmüş olan "dönüşümlü yaklaşımda" bilgi türleri birbirinin gelişimine katkı sağlar ve destekler. Çocukluk döneminden itibaren iki bilgi türü de öğrencilere sınıf ortamında tekrarlı şekilde sunulmalıdır. Bu arada en önemli görev öğreticiye düşmektedir. Öğreticinin alan

ve pedagojik bilgisini deneyimleriyle harmanlaması gerekir. Konuya, öğrencinin yaşına, seviyesine, hazır bulunuşluğuna, sınıf ortamına göre işlemsel ve kavramsal bilginin hangi sıra ile ele alınacağına karar verilmelidir.

İşlemsel ve kavramsal bilgiden birini diğerine göre daha önemli bulmak matematik eğitimi açısından gereksizdir. Benimsenmesi gereken yapılandırmacı yaklaşım ışığında öğrencilerin konuya uygun şekilde işlemsel ve kavramsal bilgiyi uyumlu şekilde almasıdır. Böylece kavram yanılgıları ve öğrenme sürecindeki zorluklar azalır, öğrencilerin konular arasında bağ kurmaları kolaylaşır ve matematiğe bakış açısı olumlu yönde değişir. Matematiğin hem kendi içinde hem de diğer alanlarla ilişkisi kurulduğunda, çocuklarda daha kalıcı öğrenmelere yol açacağı öngörülmüştür (NCTM, 2000).

## 1.6. Fonksiyon

Fonksiyon kavramı birçok farklı şekilde tanımlanmıştır. Tanımlamalara bakıldığında benzer düşünceler olsa da bir takım farklılıkların bulunduğu da gözlenmektedir. Farklı tanımlamaların oluşu fonksiyon kavramının matematik, mühendislik vb. alanlarda kullanılmasına fırsat vermiştir. Fonksiyon kavramı genel olarak üç şekilde tanımlanmıştır. Fonksiyon kavramına ilişkin ilk tanım *değişkenler arasındaki ilişkidir. Yani bağımsız değişkendeki değişime bağlı olarak bağımlı değişkende de değişimin olmasıdır* (Bayazit ve Aksoy, 2013). İkinci fonksiyon tanımı ise; *tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyen bir bağıntı* olmasıdır (Kabael ve Tanışlı, 2010). Ders kitaplarında da vurgulanan tanımdır. Son olarak fonksiyon kavramını somutlaştırmak amacıyla da sıkça kullanılan *girdileri çıktılara dönüştüren bir süreç* düşüncesi fonksiyonun informal tanımı olarak da değerlendirilebilir (Bayazit ve Aksoy, 2013).

### 1.6.1. Fonksiyon kavramının matematiksel manası

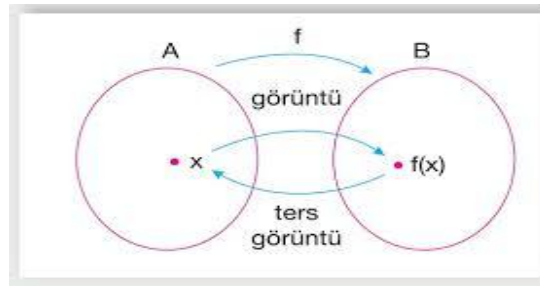
Fonksiyon, matematiğin en temel yapılarından birini oluşturur. Bu yüzden fonksiyon matematik ders programlarının hazırlanması ve uygulanmasında birleştirici ve bütünleştirici bir düşünce olarak kullanılabilir (NCTM,1989; Selden ve Selden,1992).

Matematik eğitimcileri de fonksiyon kavramının matematiksel manasını farklı şekillerde ifade etmektedirler. Bunlar Drihlet-Bourbaki'nin tanımı ve girdi- çıktı sürecidir.

Fonksiyon kavramının matematik kitaplarında sıkça yer alan tanımını 1837'de Drihlet ifade etmiştir. Değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade eden tanım şu şekildedir;

*x ve y belli bir kural çerçevesinde birbirlerine bağlı iki değişken olsun. Eğer, x değişkenindeki her değişime karşın (x'e verilen her değere karşın) y değişkeninde de bir değişim söz konusu oluyorsa ( bir ve yalnız bir y değeri elde ediliyorsa) y'ye x'in bir fonksiyonu denir (Boyer, 1968, s. 600).*

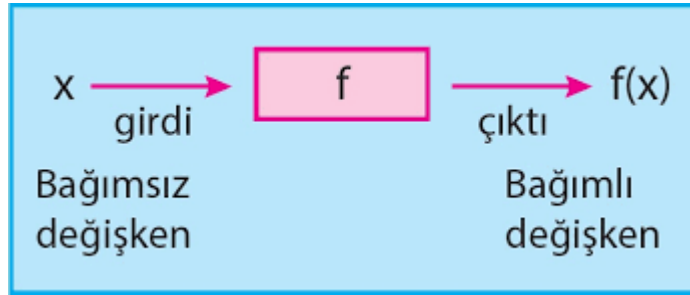
Fonksiyon kavramının bağıntı ile ifade edilen tanımı Bourbaki tarafından tanım ve değer kümeleri üzerine şu şekilde yapılmıştır; A ve B boş olmayan iki küme, f ise A'dan B'ye bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesindeki her elemanı B kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşliyorsa bu bağıntıya A'dan B'ye bir fonksiyon denir. Bağıntı kavramından hareketle fonksiyonu şekil 1.1'deki gibi gösterebiliriz.



**Şekil 1. 1.** Fonksiyonun şematik gösterimi.

Bağıntı kavramına dayalı fonksiyon farklı temsillerle de gösterilebilir. Bunlar; Venn şeması, liste yöntemi, grafikler ve cebirsel gösterimdir. Fonksiyonun ikinci matematiksel manası girdileri çıktılarına dönüştüren bir süreç olmasıdır. Aynı bağıntı kavramında olduğu gibi burada da elemanların eşleşmesi mantığı vardır.

Fonksiyon kavramını DeMarois ve Tall, (1999) oluşturdukları fonksiyon makinesi mantığıyla anlaşılmasını kolaylaştırmıştır (Şekil 1.2. Fonksiyon makinesi). Fonksiyonu hammaddeyi alıp işleyen ürün ortaya koyan bir makine, fabrika olarak görmemizi sağlamıştır.



Şekil 1. 2. Fonksiyon makinesi.

### 1.6.2. Fonksiyon kavramının tarihsel gelişimi

Fonksiyon kavramı matematikçilerin farklı tanımlamalarıyla gelişmiştir. Tarihsel sürece bakıldığında fonksiyon düşüncesinin temelinde değişkenler arası ilişki görülse de 16. yy'da Galileo'nun hareket kavramını incelemesi sırasında dikkat çekmiştir. Galileo, Kepler ve Newton, zamanla mesafe arasında münasebetleri ortaya koymuşlardır. Fonksiyon kelimesini matematiksel terim olarak 1673 yılında kullanan ilk bilim insanı Leibniz'dir (Ponte,1992). Euler, Bernoulli ve Fourier gibi bilim insanları da araştırma yapmasına rağmen sabit terim, parametre ve değişken kavramlarını da matematiğe kazandıran kişi Leibniz'dir.

1837'de Drichlet tarafından fonksiyonun matematiksel manası değişkenler arasındaki ilişki olarak ifade edilmiştir. Cantor'un kümeler teorisiyle fonksiyon iki küme arasındaki eşlemeler olarak farklı bir boyut kazanmıştır (Ponte, 1992). Son olarak 1939'da Bourbaki tarafından fonksiyonun özel bir bağıntı olduğu tanımlanmış ve günümüz matematik kitaplarında da bu düşünceler yer almıştır.

### 1.6.3. Fonksiyon öğretiminde karşılaşılan zorluklar

Lise ve üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramıyla ilgili bilgilerini ölçen ulusal ve uluslararası araştırmalar yapılmıştır (Dubinsky ve Harel,1992; Breidenbach vd.1992; Vidakovic,1996; Hitt,1998, Bayazıt ve Gray,2004; Baki,2006). Vinner ve Dreyfus (1989), öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamada zorlandıklarını ifade etmişler ve buna bağlı olarak kavram yanlışlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Matematik eğitimcilerine göre fonksiyon kavramını anlamayı zorlaştıran temel sebeplerden biri de fonksiyon kavramının birçok alt kavramdan oluşması ve kavram anlatılırken farklı temsillerin kullanılmasıdır. Her kademedeki öğrenci fonksiyon konusunda farklı kavram yanlışları oluşturmuştur. Kavram yanlışlığı; doğru olarak

kabul edilen yanlış kavramsallaşma sonucu oluşan sistematik hata olarak ifade edilir (Zembar, 2010). Kavram imajları Tall ve Vinner (1981) tarafından matematiksel düşünceye ilişkin bireyin hafızasına kodlamış olduğu resimler, grafikler, formüller, semboller, işlemler gibi zihinsel yapılar olarak tanımlamaktadırlar. Öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin kavram imajları problem çözümlerinde fonksiyon tanımının önüne geçebilmektedir. Bunun sonucunda da farklı yanlışlar ve yanlış çözümler ortaya çıkmaktadır (Vinner,1983).

Bayazit (2008) fonksiyonlarla ilgili öğrenci zorluklarını yani öğrencilerin fonksiyon kavramını algılama, anlama ve anlamlandırma süreçlerinde yaşadıkları zihinsel güçlük ile kavram yanlışlarını yani öğrencilerin fonksiyon kavramına karşı oluşturduğu eksik veya yanlış bilgileri yedi başlık altında incelemiştir. Bunlar;

- Fonksiyonu bire bir eşleme yapan bir bağıntı olarak görme,
- Liste biçiminde yazılımlara ilişkin zorluklar,
- Fonksiyon grafiklerine ilişkin öğrenci yanlışları,
- Cebirsel ifadelerle ilişkin öğrenci zorlukları ve yanlışları,
- Fonksiyonlar konusunda kullanılan sembol ve simgelere ilişkin zorluklar,
- Fonksiyonların alt kavramlarına ilişkin zorluklar,
- Fonksiyonun temsilleri arasında manasal ilişkilerin anlaşılmasına ilişkin zorluklardır.

Kabael'e (2010) göre; fonksiyon kavramına ilişkin güçlük ve yanlışları; *kavramın tanımına ilişkin, temsil ve aralarındaki ilişkilere ilişkin ve kavramda kullanılan matematiksel dile ilişkin olmak üzere üç sınıfta belirtmiştir.*

Sidal'da ( 2011) kavrama ilişkin zorluklar ve yanlışları;

- Fonksiyon kavramını yorumlamalarına ilişkin,
- Fonksiyonunun temsilleri (cebirsel, grafiksel, geometrik, nümerik,...) ile fonksiyon kavramını ayırt edememe,
- Temsiller arasındaki geçişlere ilişkin,
- Fonksiyon konusunda kullanılan sembol ve simgelere ilişkin olmak üzere dört sınıfta belirtmiştir.

Yapılan araştırmalara da bakıldığında fonksiyon kavramındaki kavram yanlışlarının nelerden kaynaklandığı saptanmıştır. Yeni araştırmalarda, öğrencilerin çoğunun matematikle ilgili kavram yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin

önceden zihinlerinde oluşturdukları teoriler bu kavram yanlışlarının en büyük sebeplerinden biridir (Mestre, 1989). Kavram yanlışlarının ve öğrenci zorluklarının son bulması için uygun öğretim yaklaşımı belirlenmeli ve öğreticinin de konuyla ilgili pedagojik ve alan bilgisinin yeterli olmasının gerekliliği öne sürülebilir.

#### **1.6.4. Fonksiyon öğretimi**

Öğretim kelime anlamı olarak öğrenmeyi kolaylaştırma amacıyla etkinlikleri düzenleme, araç-gereçleri ve ortamı hazırlama, öğrenmeyi hazırlama işidir. Bilişsel ve sosyal bir süreçtir. Öğretmenler, öğretimi planlayan kişiler olarak ne öğreteceklerini, nasıl öğreteceklerini, konunun içeriğini, araç-gereçleri sınıf düzeyine uygun şekilde tasarlar ve pratiğe dökerler. Her öğretmenin gireceği her sınıfa uygun zihninde oluşturduğu bir öğretim modeli bulunur. Öğretmenlerin; öğrencilere rehberlik etmesini ve yardımcı olmasını kolaylaştıracak alan bilgisi ve alan temelli pedagoji bilgisine sahip olması gerekir. Ayrıca öğretmenlerin öğrencileriyle sınıf içi ve dışındaki sosyal ilişkisi, adaletli ve demokratik sınıf yönetimi, sınıf hakimiyeti gibi etkenlerde öğrencilerin konuyu anlamalarına dolaylı olarak da olsa katkı sağlar.

Öğretimde gerekli olan yeterlilikler tüm matematik konularında olduğu gibi fonksiyonlarda da geçerlidir. Her öğretmenin öğretim modelinin farklılığı öğretimde tek bir modelle başarıya ulaşamayacağını kanıtıdır. Fonksiyon kavramının birçok alt kavramdan oluşması, farklı şekillerde tanımlanması, öğrencilerin öğrenmedeki zorlukları ve oluşturdukları kavram yanlışları nedeniyle belli başlı bir öğretim modelini önermek zordur. Tek bir öğretim yöntemi kullanmak yerine farklı öğretim modellerini içeriğe uygun olarak bir arada kullanmak veya seçmek her öğretmenin kendi tercihi olmalıdır. En uygun öğretim modelini öğretmenin belirleyeceği düşüncesinin yanı sıra tek yönlü bilgi akışının olduğu öğrencinin sürekli pasif şekilde dinlediği davranışçı öğretim yaklaşımlarının kullanılması da kavramsal bilgiyi öğrenmeyi zorlaştırır. Bu nedenle yapılandırmacı yaklaşım modellerinin ( buluş yoluyla öğretim, probleme dayalı öğretim, proje tabanlı öğretim vs.) öğretimde kullanılması daha verimli olabilir. Teknoloji destekli öğretim modelleri de yapılandırmacı yaklaşım ışığında verimliliği arttırabilir.

Bayazıt (2008), fonksiyon öğretiminde yapılandırmacı yaklaşıma en uygun öğretim modelinin 'kavram eksenli öğretim modeli' olduğunu ifade etmiştir. Kavram eksenli öğretimde amaç fonksiyon kavramının temel özelliklerinin anlaşılmasıdır. İşlem

bilgisi kavram eksenli öğretimin doğru uygulanması sonucunda kendiliğinden ortaya çıkacaktır. Kavram eksenli öğretim modelinin iki temel özelliği vardır.

Birinci temel özelliği kavramsal bilginin ilişkiler kurularak gelişeceği (Hiebert ve Lefevre,1986). Fonksiyonlar konusunda da ilişkilendirme dört kademe yapılabilir. Fonksiyonlar ile alt kavramları arasında, fonksiyonlar ile ilgili kullanılan temsiller arasında, kurallar ile nereden geldikleri arasında ve fonksiyonların diğer matematiksel kavramlar ve gerçek yaşamla arasında ilişkilendirilme yapılabilir.

İkincisi ise dilin etkili ve doğru kullanılmasıdır. Fonksiyonlar konusunda da iki farklı dil kullanılabilir: işlemsel bilgilere ağırlık veren işlemsel dil ile kavramsal bilgileri vurgulayan kavramsal dil. İşlem eksenli dilde aritmetik ön planda iken kavram eksenli dil de fonksiyon tanımı ve temel özellikleri özümserir.

Kavram eksenli öğretimin verimliliğini arttırmanın yolları araştırılmaya devam edilmekte ve öğretim de olan eksikler de tamamlanmaya çalışılmaktadır.

### 1.7. İlgili Araştırmalar

Tez çalışması sürecinde incelenen ve yararlanılan işlemsel bilgi, kavramsal bilgi, fonksiyon ile ilgili araştırmalar aşağıda verilmiştir.

Baki ve Kartal (2000), tarafından lise öğrencilerinin kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında cebir bilgileri değerlendirilmiştir. 250 öğrenciye 20 sorudan oluşan; bağıntı-fonksiyon-işlem, sayılar, polinomlar ve birinci derece denklemler gibi konuları barındıran iki sınav yapılmıştır. Birinci sınavdaki sorular işlem bilgisini, ikinci sınavdaki sorular ise kavram bilgisini ölçecek şekilde hazırlanmıştır. Cevaplar için bir karakterizasyon ölçeği geliştirilmiş ve çözümler buna göre değerlendirilip yorumlanmıştır. Birçok öğrencinin işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyinin cebir konusunda yetersiz olduğu, işlemsel bilginin öne çıktığı belirlenmiştir. Matematik öğretimi sırasında işlemsel ve kavramsal bilginin dengeli şekilde verildiği kavramsal öğrenmeye dayalı bir öğretimin daha etkili ve kalıcı olacağı savunulmuştur.

Soylu ve Aydın da (2006) matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma yapmıştır. 100 sınıf öğretmenliği bölümü 3.sınıf öğrencisine, araştırmacı tarafından oluşturulan 10 açık uçlu sorudan oluşan test uygulanmıştır. Kağıtların değerlendirilmesi ve mülakatların sonucunda işlemsel ve kavramsal öğrenmenin dengelenmediği ve bu yüzden öğrenmenin kavrama düzeyinde gerçekleşmediği görülmüştür. Matematik öğretiminde

öğrencilerin matematiksel kavramları ve işlemleri anlamasının yanı sıra bunlar arasında bağ kurmalarını sağlamanın önemini belirtmişlerdir.

Sarı (2012), 7.sınıf cebirsel ifadeler ve denklemler konusunun üst bilişin desteklendiği bir yöntemle öğretiminin kavramsal ve işlemsel öğrenmeye etkisini araştırmıştır. 80 katılımcıdan oluşan çalışma, ön-test son-test kontrol gruplu yarı deneysel bir araştırmadır. Elde edilen bilgiler sonucunda öğrencilerin, uygulanan öğretim sürecini verimli buldukları ve derslerde de üst biliş becerilerini geliştirecek etkinliklerin yapılmasını tavsiye ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmada cebirsel öğrenmenin anlamlı olması, işlemsel bilginin kavramsal bilgiyle desteklenmesi için, öğretim süreçlerinde diğer öğretim yöntemleri ile birlikte üst bilişsel etkinliklere yer verilmesi önerilmektedir.

Bekdemir ve Baş (2017), matematik öğretmenlerinin sınavlarda kullandıkları soruların kavramsal ve işlemsel bilgi boyutunda analizini yapmışlardır. Araştırma 13 matematik öğretmenin 8.sınıf öğrencilerini değerlendirmek için hazırlamış olduğu birinci ve üçüncü sınav sorularını içeren 26 sınav kağıdı ile bu sınav sorularına ilişkin öğretmenler tarafından doldurulacak açık uçlu sorudan oluşan 13 anketten elde edilen verilerle yapılmıştır. Betimsel analiz sonucunda soruların çoğunluğunun işlem bilgisini, çok az kısmının da kavram bilgisini ölçtüğü görülmüştür. Kavram bilgisini ölçen sorularda açık ve kapalı kavram bilgisini ölçen soruların oranı neredeyse aynıdır. Açık kavram bilgisi içeren sorularda tanımlarla sınırlı kalmıştır. Öğrencilerin farklı yöntemleri kullanacağı, yeni yöntem oluşturmasını sağlayan ya da yöntemin nasıl çalıştığını açıklamaya yönelik sorulara yer verilmemiştir. İnternette bulunan hazır soruların kullanıldığı ve genelde soruların resim, geometrik şekil ile desteklendiği belirlenmiştir. Tüm öğretmenlerin verdiği cevaplar doğrultusunda elde edilen en belirgin sonuç ise derste çözdükleri sorulara benzer sınav soruları hazırlamalarıdır.

Sidal (2011), fonksiyon öğretiminde tablo kullanımı ve öğrenmeye etkisini araştırmıştır. Bursa'da bir devlet lisesinde 9. sınıftan 26, 12. sınıftan 24 öğrenci alınarak özel durum çalışması yapılmıştır. Öğrencilerin tablo okuma becerilerini ölçen sorular hazırlanıp uygulanmış. Cevaplar kategorilere ayrılarak yarı yapılandırılmış görüşmelerle öğrenci cevapları daha iyi anlaşılmasına çalışılmıştır. Çalışma sonucuna göre öğrencilerin tablo okuma becerilerinin yeterli olmadığı tespit edilmiştir. Özellikle tablo grafik geçişlerinde öğrencilerin zorlandıkları, 9. ve 12.sınıfların grafik çizimlerinde farklılıklar

olduğu ve daha önce karşılaşmadıkları soru tiplerinde çözüm üretemedikleri görülmüştür. Kavramsal öğrenmenin tam anlamıyla gerçekleşebilmesi için fonksiyonların temsiller arası geçişlerine daha fazla önem verilmeli, açık uçlu sorularla desteklenmesi önerilmiştir.

Birgin ve Gürbüz (2009), ilköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini incelemiştir. Trabzon ilinin bir ilçesinde 2006-2007 güz döneminde 50 altıncı, 50 yedinci ve 60 sekizinci sınıf olmak üzere toplam 160 öğrenciden oluşan bir özel durum çalışmasıdır. 6 işlemsel, 6 kavramsal bilgi düzeyini ölçen toplam 12 sorudan oluşan iki aşamalı çoktan seçmeli test gruplarına uygulanmış ve nitel-nicel analiz yöntemleriyle araştırma sonuçlanmıştır. Elde edilen verilere göre öğrencilerin işlemsel bilgi içeren sorularda kavramsal bilgi içeren sorulara göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Ancak öğrenciler iki bilgi türünde de istenilen seviye ulaşamamıştır. Bunun sebebi ise, hatalı öğrenmeler sonucunda yanlış çözümler yapmaları olarak görülmüştür. Bu sıkıntıyı öğretmenlerin rasyonel sayıları öğretirken işlemsel ve kavramsal bilgiyi dengeli şekilde verebilecekleri ortamlar oluşturarak çözebilecekleri düşünülmüştür.

Erdoğan, Erdoğan ve Yanık (2012) , ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşluk düzeylerini incelemiştir. Fonksiyon kavramını her yönden ele alan kapsamlı bir anket (üniversitede okutulacak genel matematik gibi dersler ile alan yazın incelenerek) hazırlanarak 79 öğrenciye uygulanmıştır. Veriler sonucunda fonksiyon kavramını tanımlamada, fonksiyon belirtip-belirtmeme durumlarını ayırt etmede zorlandıkları görülmüştür. Buna rağmen cebirsel teknikler içeren sorularda daha başarılı olmuşlardır. Bu başarının nedenini ise kavramsal öğrenmeden çok işlemsel öğrenmenin gerçekleşmesine bağlamıştır.

Ural (2006), fonksiyon öğretiminde kavramsal zorlukları araştırmıştır. Fonksiyon matematikteki birçok kavramın temelinde yer alır. Kavramlar arasındaki geçişi ve anlamayı kolaylaştırır. Öğrenciler fonksiyon kavramını yapısal olarak tanıırken zorlanırlar ve çeşitli kavram yanılgıları oluştururlar. Bu kavram yanılgılarının bazıları şunlardır: Fonksiyonların çeşitli gösterimleri ve bunlar arasındaki geçişler, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon, fonksiyon ile ilgili notasyonlar, sembolik yazılımlar ve bunlarla ilgili kavramsal bilgilerdir. Bu zorlukların ve kavram yanılgılarının ortadan

kalkması için öğretmenin kullanacağı öğretim materyallerinin ve öğretim yöntemlerin önemi büyüktür. Bu çalışmada da öğretmenin fonksiyonun sadece işlemsel değil aynı zamanda yapısal taraflarını da vermesi gerektiği ve fonksiyon öğretimi sırasında işbirlikli öğrenmenin etkili olduğu ortaya çıkmıştır.

Özkaya ve İşleyen (2012), ilköğretim matematik öğretmenliği 1.sınıfta öğrenim gören 57 öğrenci ile fonksiyonlarda tanım ve görüntü kümesi ile ilgili sahip oldukları kavram yanlışlarını belirlemek amacıyla betimsel yöntem kullanarak araştırma yapmışlardır. Araştırmacılar tarafından hazırlanan kavram yanlışları testi ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen sonuçlara göre kavram yanlışlarını cebirsel ve geometriksel olarak ikiye ayırmışlardır. Tanım ve görüntü kümesini cebirsel olarak belirlemede en belirgin kavram yanlışları aşırı genelleme, geometriksel olarak belirlemede ise öğrencilerin tanım ve görüntü kümesini grafik altında veya üstünde kalan alan olarak göstermeleridir. Bu sıkıntıların önüne geçmek için kavramsal öğretimin ön plana çıkarılması önerilmiştir.

Yavuz ve Hangül (2014), mühendislik bölümü 1.sınıfta öğrenim gören 77 öğrencinin fonksiyon kavramına yönelik kavram imajlarını belirleyip bu kavrama ilişkin algılarını tespit etmek amacıyla açık uçlu sorulardan oluşan yazılı anket uygulamıştır. Öğrenci cevapları doğrultusunda zihinlerinde oluşturdukları imajlar 10 kategoride toplanmıştır. Bunlar; makine / işlem mekanizması / dönüştürme / sistem, kural, adres tarifi, fonksiyon olma koşulu, bağıntı/ eşleştirme, sebep sonuç ilişkisi, küme, terim, grafik, denklemdir. Ayrıca öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin yanlış algılamaları da saptanmış ve fonksiyon kavramını tanımlamada yetersiz kaldıkları görülmüştür. Fonksiyon öğretiminde kavramı sadece bir ünite ile sınırlandırmadan tüm matematiksel kavramlarla ilişkilendirerek fonksiyonel bir düşünce tarzı olarak ele alınması önerilmiştir.

Bayazit ve Aksoy (2013), fonksiyon; ilköğretimden üniversiteye kadar matematik ders programları içinde yer alan ve birleştirici bir düşünce tarzı olan kapsamlı bir kavramdır. Bu nedenle makale geniş bir alan yazı taramasından oluşmaktadır. İçeriğinde fonksiyon kavramının epistemolojisi, ders kitaplarında yer alan şekliyle fonksiyon kavramı ve algı türleri, fonksiyon kavramının zihinsel gelişimi, öğrenimi sırasında karşılaşılan güçlükler, kavram yanlışları ve kavram yanlışlarının

nedenleri bulunmaktadır. Ayrıca fonksiyonun öğretim boyutuna değinilerek öğretiminde kavram eksenli öğretim yaklaşımı önerilmiştir.

Uygur Kabael ( 2010), çalışmasında fonksiyon konusu ile ilgili çalışmaları baz alarak fonksiyonun tarihsel gelişimine, öğrenilme sürecine, kavram yanlışlarına ve bu kavram yanlışlarını ortadan kaldırmak için önerilen belli başlı öğretim stratejilerine yer vermiştir. Fonksiyon öğrenimindeki güçlüğün sorgulanması gerektiği sonucuna varmış ve bazı öneriler sunmuştur. Bunlar; çalışmalarla belirlenen eksikler göz önüne alınarak ders programları geliştirilmesi ve geliştirilen kaynakları içeren öğretim programları ile ilgili olarak öğretmenlerin de eğitilmesidir.

## 2. YÖNTEM

### 2.1. Araştırma Deseni

Üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyini belirlemeyi amaçlayan bu tez çalışmasında tarama modeli kullanılmıştır. Tarama modelinde geçmişte ya da halen var olan bir durum var olduğu şekliyle betimlenir (Karasar, 2008). Bu çalışmada da üniversite öğrencilerinin sahip olduğu işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri ortaya konmaya çalışılmıştır.

### 2.2. Katılımcılar

Bu tez çalışmasının katılımcıları bir devlet üniversitesinin fen edebiyat fakültesi matematik ve mühendislik fakültesi metalurji ve malzeme bölümlerinde öğrenim gören 65 üniversite öğrencisinden oluşmaktadır. Katılımcıların bölüm ve sınıflara göre dağılımı Çizelge 2.1.'de verilmiştir.

**Çizelge 2. 1.** Çalışmaya katılan öğrencilerin bölüm ve sınıf bazında dağılımları.

| Fakülte -Bölüm                              | Sınıf   | Kişi sayısı |
|---|---------|-------------|
| Fen Edebiyat Fakültesi- Matematik Bölümü    | 1.Sınıf | 20          |
|   | 2.Sınıf | 11          |
|   | 3.Sınıf | 13          |
|   | 4.Sınıf | 8           |
| Mühendislik Fakültesi- Metalurji ve Malzeme | 1.Sınıf | 13          |

Katılımcıların seçiminde kolay ulaşılabilir örneklem seçimi yönteminden yararlanılmıştır.

### 2.3. Veri Toplama Aracı

Üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini belirlemek için beşi işlemsel bilgiye sekizi ise kavramsal bilgiye yönelik olmak üzere toplam 13 sorudan oluşan bir test hazırlanmıştır. Çoğunluğu açık uçlu olacak şekilde seçilen soruları belirlemek için öncelikle alanyazında fonksiyon kavramı ile ilgili önemli özellikler araştırılmıştır. Buna bağlı olarak Erdoğan, Erdoğan ve Yanık (2012,s.6) tarafından verilen aşağıdaki ana ve alt başlıklardan yararlanılmıştır:

#### 1. Fonksiyon belirten durumları tanıma ve fonksiyon kavramını tanımlama

##### a. Cebirsel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma

- b. Grafiksel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtenleri tanıma
  - c. Fonksiyonu tanımlayabilme
2. Fonksiyonların temel cebirsel özelliklerini tanıma ve temel cebirsel teknikleri uygulayabilme
    - a. Verilen iki fonksiyonun bileşkesini hesaplayabilme
    - b. Verilen bir fonksiyonun tersi olan fonksiyonu bulabilme
    - c. Bir fonksiyonun tek/çift olup olmadığına karar verebilme
  3. Fonksiyonların temel grafiksel özelliklerini tanıma ve grafiksel teknikleri uygulayabilme
    - a. Grafiği verilen bir fonksiyonun tersinin grafiğini çizebilme
    - b. Grafiği verilen bir fonksiyonu iki fonksiyonun bileşkesi olarak ifade edebilme
    - c. Tek ve çift fonksiyonların grafiklerini tanıyabilme
    - d. Artan ve azalan fonksiyonların grafiklerini tanıyabilme

Her bir alt başlığa ilişkin soruların bir kısmı Erdoğan, Erdoğan ve Yanık'ın (2012) çalışmalarında kullandıkları sorulardan (1,5,9 ve 10.soru), bir kısmı ise Prof. Dr. H.Hilmi Hacısalihoğlu'nun temel ve genel matematik ile analiz kitaplarından seçilmiştir. Testte yer alan soruların işlemsel ve kavramsal anlamaya yönelik olmasına ilişkin karakteristiklere ait tanımlamalar için ise Baki ve Kartal (2004,s.6) tarafından geliştirilen karakterizasyon ölçeği kullanılmıştır. İşlemsel ve kavramsal bilgiyi karakterize edilen kriterler aşağıda verilmektedir:

#### İşlemsel Bilgiyi Karakterize Eden Kriterler

1. İşlemleri adım adım yapma.
2. Önceden öğrenilen matematik bilgilerini (teorem, tanım, önerme, özellik ve bağıntı) bilgi düzeyinde kullanma
3. Cebirsel bağıntıyı kullanabilme ve temel işlemleri yürütebilme.

#### Kavramsal Bilgiyi Karakterize Eden Kriterler

1. Matematikteki temel kavramları ve bu kavramların anlamını bilme.
2. Sorunun özünü kavrayarak verilenle istenilen arasında mantıklı ilişki kurarak çözüm yolu bulma.
3. Önceden öğrenilen matematik bilgilerini (tanım, önerme ve teorem) kavrama veya uygulama düzeyinde kullanma.

4. Soruyu bir bütün olarak algılayarak verilen ipuçlarını yerinde ve doğru bir şekilde değerlendirme.
5. Problemi alt ve basit basamaklara ayırma.
6. Karmaşık ve zor görünen bir probleme yardımcı olacak şekiller çizme veya genellemelerde bulunma.
7. Problemi verilen şekil ve grafikte eşleştirme.
8. Problemin özelliklerini ortaya koyarak problemi bu özellikleri içeren bilgilerle eşleştirme.

#### **2.4. Uygulama**

Fonksiyon testi 2017-2018 öğretim yılının bahar döneminde, bölüm derslerinden hemen önce, dersleri veren öğretim elemanın da izni ile araştırmaya gönüllü olarak katılan öğrencilere uygulanmıştır. Testi cevaplamak için öğrencilere 45 dakika süre verilmiştir.

#### **2.5. Verilerin Analizi**

Öğrencilerin ankete verdikleri cevaplar araştırmacı tarafından tek tek bireysel olarak incelenip değerlendirilmiştir. Verilen cevaplar analiz edilmiş ve gruplandırılarak bir kodlama listesi oluşturulmuştur. Kodlama listeleri oluşturulduktan sonra araştırmacı ve danışman öğretim üyesi cevapları bireysel olarak kodlamıştır. Daha sonra kodlamalar karşılaştırılmış, görüş ayrılığı olan kodlamalar için ortak karar verilmiştir. Soruların yapısı itibarıyla kodlamalar sorudan soruya farklılık göstermektedir. Bazı sorularda açıklama ve çözüm istenirken bazılarında sadece doğru cevabı seçmek yeterli olmuştur. Bu nedenle her sorunun kodlamasına ait açıklama o soruya ilişkin bulgularda ve tabloda belirtilmiştir. Ayrıca tablolarda kodlamalar sonucunda her bir soru için elde edilen cevaplara ilişkin yüzdeler ve frekans değerleri bulunmaktadır.

### 3. BULGULAR

Üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini belirlemek amacıyla gerçekleştirilen bu çalışmadan elde edilen bulgular yukarıda ifade edilen araştırma problemlerinin sırasına göre aşağıda verilmiştir:

*Araştırma problemi 1: Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili işlemsel bilgi düzeyleri nasıldır?*

Fonksiyon kavramı bağlamında öğrencilerin işlemsel bilgi düzeylerini belirlemeye yönelik beş adet soru mevcut literatüre bağlı olarak seçilmiş ve öğrencilere yöneltilmiştir. Bu sorulardan biri verilen iki fonksiyonun bileşkesinin bulunması, üç tanesi verilen bir fonksiyonun tersinin bulunması ve ters fonksiyonun grafiğinin çizilmesi ve bir tanesi de fonksiyonun tek ya da çift olup olmadığının belirlenmesi konularını içermektedir. Bu beş soruya öğrencilerin verdiği cevaplar analiz edildiğinde elde edilen bulgular aşağıda soru bazında verilmektedir. Öğrencilere uygulanan testte işlemsel ve kavramsal bilgi soruları karışık bir sırada yer almaktadır. Bulgular sunulurken kullanılan soru numarası sorunun testteki numarasıdır. Dolayısıyla bulgulardaki sorular 1, 2, 3,.. şeklinde sıralanmamaktadır. Testteki soru numaraları 5,6,7,8 ve 9 'dur.

Verilen iki fonksiyonun bileşkesinin bulunmasına ilişkin soru şu şekildedir:

#### SORU 5.

$$f: R \rightarrow R, f(x) = \sqrt{x-2} - 3, g: R \rightarrow R, g(x) = 1 + x$$

*fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:*

- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

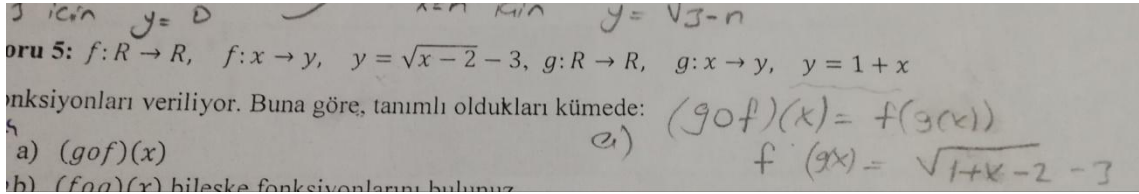
Öğrencilerin bu soruya ilişkin yanıtları doğru (D), yanlış (Y), eksik (E) ve boş (B) olmak üzere dört kategoride değerlendirilmiştir. Sorunun a ve b şıklarına ilişkin bulguları Çizelge 3.1.'de verilmektedir.

**Çizelge 3. 1.** Soru 5'in cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU 5            | a         |      | b         |      |
|-------------------|-----------|------|-----------|------|
|                   | f         | %    | f         | %    |
| <b>D</b> (Doğru)  | <b>23</b> | 35.3 | <b>19</b> | 29.2 |
| <b>Y</b> (Yanlış) | <b>12</b> | 18.5 | <b>12</b> | 18.4 |
| <b>E</b> (Eksik)  | <b>7</b>  | 10.9 | <b>7</b>  | 10.8 |
| <b>B</b> (Boş)    | <b>23</b> | 35.3 | <b>27</b> | 41.6 |

Çizelge 3.1.'den görüldüğü üzere, beşinci sorunun a şıkkına 23 öğrenci doğru, 12 öğrenci yanlış, 7 öğrenci ise eksik cevap vermiştir. 23 öğrenci ise birinci sorunun a şıkkını boş bırakmıştır. Birinci sorunun b şıkkına ise 19 öğrenci doğru, 12 öğrenci yanlış, 7 öğrenci ise eksik cevap vermiştir. 27 öğrenci ise bu şıkkı boş bırakmıştır.

Birinci sorunun a şıkkına doğru cevap verenlerin oranı ile boş bırakanların oranının eşit olduğu görülmektedir. Soruyu cevaplayan öğrencilerin %50'si bileşke fonksiyonun tanımını doğru ifade etmiş ve  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  gösterimini kullanmışlardır. 3 öğrenci ise  $(g \circ f)(x)$  ile  $(f \circ g)(x)$  in tanımlarını karıştırmış ve birbirleri yerine yazarak yanlış cevap vermiştir. Buna ait bir öğrenci cevabı Şekil 3.1.'de verilmektedir.



**Şekil 3. 1.** Soru 5a için yanlış cevap örneği.

Eksik cevap veren 7 öğrenci ise  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  tanımını yaptıktan sonra işlem hatası yapmıştır. Bir öğrenci ise Şekil 3.2'den de görüleceği üzere her iki şık için bileşke fonksiyonun tanımını doğru yazmasına rağmen bunu uygulamada hataya düşmüştür.

Soru 5:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: x \rightarrow y$ ,  $y = \sqrt{x-2} - 3$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $y = 1+x$

Fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:

a)  $(g \circ f)(x)$   $g(f(x))$

b)  $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

a-)  $f(x) = \sqrt{x-2} - 3$   $g(f(x)) \Rightarrow \sqrt{x-2} - 3 = 1+x \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = (1+x)^2$   
 $\Rightarrow x-2 = 1+8x+x^2$   
 $\Rightarrow 12+7x+x^2=0$

b-)  $g(x) = 1+x$   $f(g(x)) \Rightarrow 1+x = \sqrt{x-2} - 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 4+x$   
 $\Rightarrow 12+7x+x^2=0$

Şekil 3. 2. Soru 5 için uygulama hatası örneği.

Beşinci sorunun b şikkını boş bırakanların oranı (% 41.5), doğru yapanların oranından (%29.2) daha fazladır. Soruya eksik cevap veren öğrencilerden 5 tanesi tanımın ilk adımını uygulayıp  $f(g(x))=f(1+x)$  yazdıktan sonra devam etmemiştir. Buna örnek Şekil 3.3.'te verilmiştir.

Soru 5:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: x \rightarrow y$ ,  $y = \sqrt{x-2} - 3$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $y = 1+x$

Fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:

a)  $(g \circ f)(x)$

b)  $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

a-)  $g(f(x)) = g(\sqrt{x-2} - 3)$

b-)  $f(g(x)) = f(1+x)$

Şekil 3. 3. Soru 5 için eksik cevap örneği.

Bu şikka yanlış cevap veren öğrencilerin oranı % 18.4'tür. Yanlış öğrenci cevaplarına örnekler Şekil 3.4. ve şekil 3.5.de verilmektedir. Bu cevaplarda öğrencilerin iki fonksiyonu birbirine eşitlenerek bir denklem elde etmeye çalıştıkları görülmektedir.

Soru 5:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: x \rightarrow y$ ,  $y = \sqrt{x-2} - 3$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $y = 1+x$

Fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:

a)  $(g \circ f)(x) \rightarrow g(f(x)) \rightarrow$

b)  $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

$y = \sqrt{y-2} - 3$   $y^2 - 7y + 12 = f \circ g(x)$

$y-3 = \sqrt{y-2}$

$y^2 - 6x + 9 = y-3$

$\sqrt{x-2} - 3 = 1+x$

$\sqrt{x-2} = (x+4)^2$

$x-2 = x^2 + 8x + 16$

$(x-2)^2 = x^2 + 2x + 16$

Şekil 3. 4. Soru 5 için yanlış cevap örneği.

Şekil 3.5. de eşitliğin bir tarafı 0'a eşitlenerek denklem çözmeye çalışılmıştır.

**Soru 5:**  $f: R \rightarrow R$ ,  $f: x \rightarrow y$ ,  $y = \sqrt{x-2} - 3$ ,  $g: R \rightarrow R$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $y = 1+x$   
 fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:  
 a)  $(g \circ f)(x)$   
 b)  $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

⊙  $1+x = \sqrt{x-2} - 3$   
 $4+x = \sqrt{x-2}$   
 $x^2 + 7x + 20 = 0$

⊙  $\sqrt{x-2} - 3 = 1+x \Rightarrow \sqrt{x-2} = 4+x$   
 $x-2 = 16+8x+x^2$   
 $x^2 + 2x + 20 = 0$

Şekil 3. 5. Soru 5 için yanlış cevap örneği.

Öğrencilere verilen bir fonksiyonun tersinin bulunması ve ters fonksiyonun grafiğinin çizilmesine ilişkin yöneltilen sorular soru6, soru7 ve soru9'dur. Bu sorular ve sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular aşağıda sırasıyla verilmektedir:

**SORU 6.**  $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{5\}$ ,  $f(x) = \frac{5x+8}{x-3}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

Bu soruya öğrencilerin verdikleri yanıtlar beşinci soruda olduğu gibi doğru, yanlış, eksik ve boş olmak üzere dört kategoride analiz edilmiştir. Bu soruya ilişkin öğrencilerin cevaplarından elde edilen bulgular Çizelge 3.2. de verilmektedir:

Çizelge 3. 2. Soru 6'nın cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU 6    | f  | %    |
|-----------|----|------|
| D (Doğru) | 22 | 34   |
| Y(Yanlış) | 21 | 32.3 |
| E (Eksik) | 4  | 6.1  |
| B (Boş)   | 18 | 27.6 |

Çizelge 3.2.'de görüldüğü üzere, Soru6'ya doğru cevap veren öğrenci sayısı (22) ile yanlış cevap veren öğrenci sayısı (21) hemen hemen aynıdır. Bu soruya dört öğrenci eksik cevap verirken 18 öğrenci ise soruya cevap vermemiştir.

Yanlış cevap veren öğrencilerden 10 tanesinin verilen fonksiyonun tersini bulmak için " $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  iken  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ " formülünü kullanmak istedikleri ancak formülü doğru yazamadıkları yada uygulayamadıkları tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu

öğrenciler yanlış sonuca ulaşmışlardır. Bu duruma ilişkin bir öğrenci cevabı şekil 3.6.'da verilmiştir.

u 6:  $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{5\}$ ,  $f(x) = \frac{5x+8}{x-3}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$y(x-3) = 5x+8$$

$$\frac{5x+8}{x-3} = \frac{-x-5}{-x-5}$$

$$\frac{3x-8}{-x-5}$$

Şekil 3. 6. Soru 6 yanlış cevap örneği.

Soru 6'ya yanlış cevap veren öğrencilerin bazılarının ise, fonksiyonun tersini bulurken izlenen " $y=f(x)$  ifadesinden  $x$  yalnız bırakılır,  $x$  görülen yere  $y$ ,  $y$  görülen yere  $x$  yazılarak fonksiyonun tersi bulunur" kuralını uygularken cebirsel işlem hatası yaptıkları görülmüştür. Şekil 3.7'de bu duruma ilişkin bir öğrenci cevabı verilmiştir.

Soru 6:  $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{5\}$ ,  $f(x) = \frac{5x+8}{x-3}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$y = \frac{5x+8}{x-3} \Rightarrow y(x-3) = 5x+8$$

$$xy - 3y = 5x + 8$$

$$xy - 5x - 8 = 3y$$

$$x(y - 5) = 3y + 8$$

$$x = \frac{3y + 8}{y - 5}$$

Şekil 3. 7. Soru 6 yanlış cevap örneği.

Fonksiyonun tersinin olabilmesi için birebir ve örten olma şartını sağlaması gerektiğini belirten bir öğrenci son adımda ortak çarpan parantezine alırken işlem hatası yapmıştır. Bu yüzden cevap eksik olarak değerlendirilmiştir. Öğrencinin cevabı Şekil 3.8.'de verilmiştir.

Soru 6:  $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{5\}$ ,  $f(x) = \frac{5x+8}{x-3}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$\frac{5x+8}{x-3} = y$$

$$5x+8 = y(x-3)$$

$$5x+8 = 5x-3y$$

$$5x-3y = 5x+8$$

$$5x-5x = 3y+8$$

$$x = \frac{3y+8}{5-5}$$

Şekil 3. 8. Soru 6 eksik cevap örneği.

**SORU 7.**  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

7. soruda da 6. soruda olduğu gibi fonksiyonun tersini bulmayı sağlayan işlem becerisi ve fonksiyonun tersini bulma kuralı sorgulanmıştır. 7. soruya ait öğrenci cevaplarının analizi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Çizelge 3. 3.** Soru 7'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).

| <b>SORU 7</b>     | <b>f</b>  | <b>%</b> |
|-------------------|-----------|----------|
| <b>D (Doğru)</b>  | <b>22</b> | 34       |
| <b>Y (Yanlış)</b> | <b>18</b> | 27.6     |
| <b>E (Eksik)</b>  | <b>0</b>  | 0        |
| <b>B (Boş)</b>    | <b>25</b> | 38.4     |

Çizelge 3.3. genel olarak incelendiğinde 7. Sorunun doğru cevap sayısının 6. soru ile aynı olduğu görülmektedir. Soruyu doğru cevaplayan öğrenciler ters fonksiyonun özelliğini kullanarak cevaba ulaşmışlardır. Buna ilişkin bir öğrenci cevabı Şekil 3.9.'da verilmiştir.

Soru 7:  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$f(a) = x$

$f^{-1}(x) = a \rightarrow f^{-1}(x) = 3x - 4$

**Şekil 3. 9.** Soru7 doğru cevap örneği.

Genelde bir fonksiyonun tersinin bulunması istenilen sorularda  $f(x)$  kuralı verilir. Soru7'de  $f$  fonksiyonunun kuralı  $(3x-4)$ 'e göre verilir ve tersi istendiği için öğrenciler  $f(3x-4)$  formunu  $f(x)$  formuna getirmeye çalışmışlar ancak bunu fonksiyonun tersi olarak aldıklarından yanlış cevap vermişlerdir. Şekil 3.10'da bu duruma ilişkin bir örnek verilmektedir.

u 7:  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$f(x) = 3x - 4$$

$$y = 3x - 4$$

$$\frac{y+4}{3} = x$$

x ile y'nin yerini değiştirir

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

Şekil 3. 10. Soru7 yanlış cevap örneği.

Karşılaşılan yanlış cevaplarda dikkat hatalardan biri de "3x+4" ifadesinin "0" veya "x" e eşitlenmesidir. Şekil 3.11. ve Şekil 3.12.'de örnekleri verilmiştir.

7:  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$3x - 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{3}$$

Şekil 3. 11. Soru7 yanlış cevap örneği.

u 7:  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

$$3x - 4 = x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Şekil 3. 12. Soru7 yanlış cevap örneği.

Soru8 ile öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili temel cebirsel özelliklerini işlemsel bilgi düzeyinde kullanabilme becerisinin tespit edilmesi amaçlanmıştır. Soru8'de öğrencilerden cebirsel temsil ile verilen dört fonksiyonun tek veya çift olup olmadıklarını incelemeleri istenmiştir.

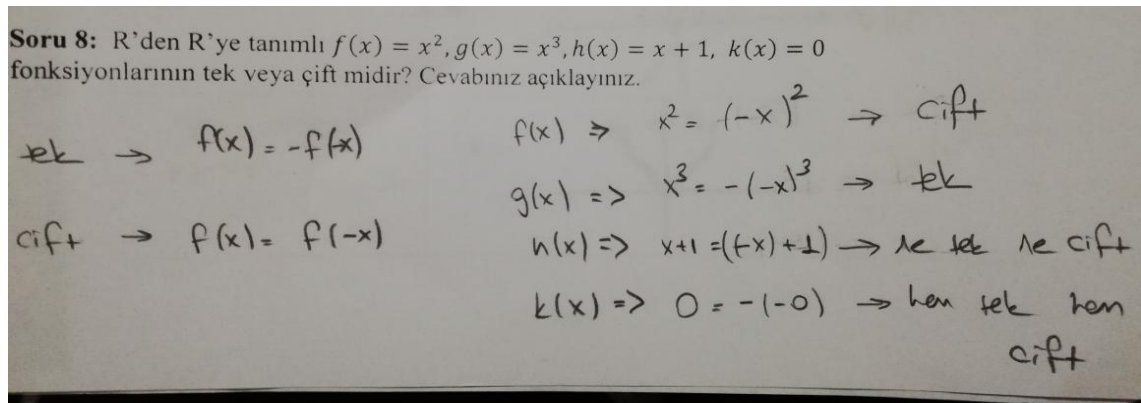
**SORU 8.**  $R$  ' den  $R$  'ye tanımlı  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x + 1$ ,  $k(x) = 0$  fonksiyonlarının tek veya çift olup olmadığını araştırınız?

8. soruya ait öğrenci cevapları doğru, yanlış ve boş olmak üzere üç kategori altında analiz edilmiştir. Bu soruya ait bulgular Çizelge 3.4.'te verilmektedir:

**Çizelge 3.4.** Soru 8'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdeler oranlar).

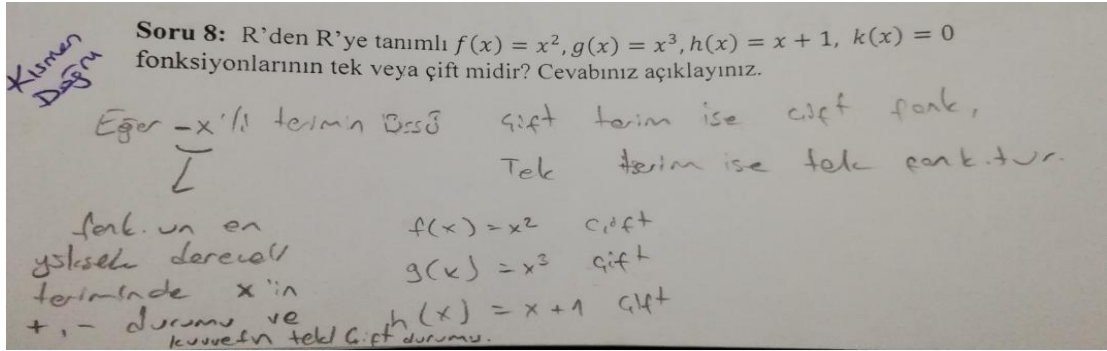
| SORU 8     | $f(x) = x^2$ |      | $g(x) = x^3$ |      | $h(x) = x + 1$ |      | $k(x) = 0$ |      |
|------------|--------------|------|--------------|------|----------------|------|------------|------|
|            | f            | %    | f            | %    | f              | %    | f          | %    |
| D (Doğru)  | 38           | 58.5 | 33           | 50.8 | 6              | 9.3  | 5          | 7.8  |
| Y (Yanlış) | 4            | 6.1  | 7            | 10.8 | 31             | 47.7 | 30         | 46.1 |
| B (Boş)    | 23           | 35.4 | 25           | 38.4 | 28             | 43.0 | 30         | 46.1 |

Çizelgeye genel olarak bakıldığında  $R'$  den  $R$  'ye tanımlı  $f(x) = x^2$ 'in çift fonksiyon ve  $g(x) = x^3$  'in tek fonksiyon olduğu öğrenciler tarafından % 50 'nin üzerinde doğru cevaplanmasına rağmen  $h(x) = x + 1$  'in ne tek ne de çift fonksiyon ve  $k(x) = 0$  'ın hem tek hem de çift fonksiyon olduğu öğrenciler tarafından % 10'un altında doğru cevaplanmıştır. Sadece 1 öğrenci sorudaki fonksiyonların tamamını doğru cevaplayıp açıklamada bulunmuştur. Şekil 3.13'te öğrencinin cevabı verilmiştir.



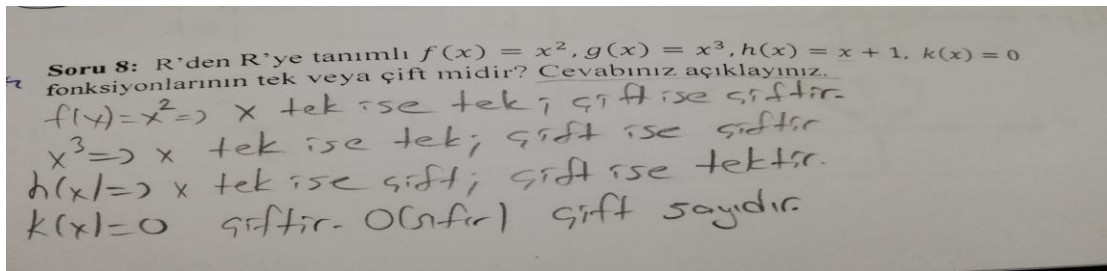
**Şekil 3. 13.** Soru8 doğru cevap örneği.

Liselerde test tekniğine uygun olan ve hızlı çözüm ile zamandan tasarruf için pratik kurallar verilmektedir. Bu kuralı kullanmaya çalışan bir öğrenci bu yolu tercih etmiş ve  $f(x) = x^2$  fonksiyonu hariç diğer fonksiyonlara yanlış cevap vermiştir. Şekil 3.14'te öğrencinin cevabı görülmektedir.



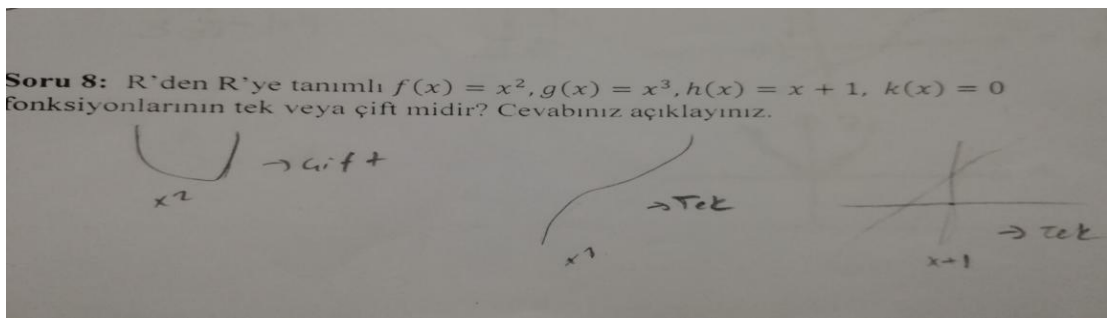
**Şekil 3.14.** Soru8 öğrenci cevap örneği.

$k(x) = 0$  fonksiyonunda "0" çift sayı olduğu için fonksiyon çift fonksiyondur şeklinde yazarak yanlış cevap veren 5 öğrenci bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi şekil 3.15 'de örneklendirilmiştir.



**Şekil 3. 15.** Soru8 yanlış cevap örneği.

Öğrencilerden bazıları ise soruda verilen fonksiyonların grafiklerini çizerek tek veya çift olduklarını araştırma yolunu seçmişlerdir. Grafiklere bakarak “ tek fonksiyonlar orijine göre, çift fonksiyonlar y- eksenine göre simetriktir” bilgisi göz önüne alınmış ve fonksiyonların tek veya çift olduğu bulunmaya çalışılmıştır. Şekil 3.16'da bu duruma ilişkin bir örneğe yer verilmiştir.



**Şekil 3.16.** Grafik çözümlü öğrenci cevap örneği.

Öğrencilerin işlemsel bilgi düzeylerini belirlemek için yöneltilen bir diğer soru fonksiyonun tersinin bulunarak grafiğinin çizilmesidir. Soru 9 ve bu soruya ilişkin bulgular aşağıda verilmektedir:

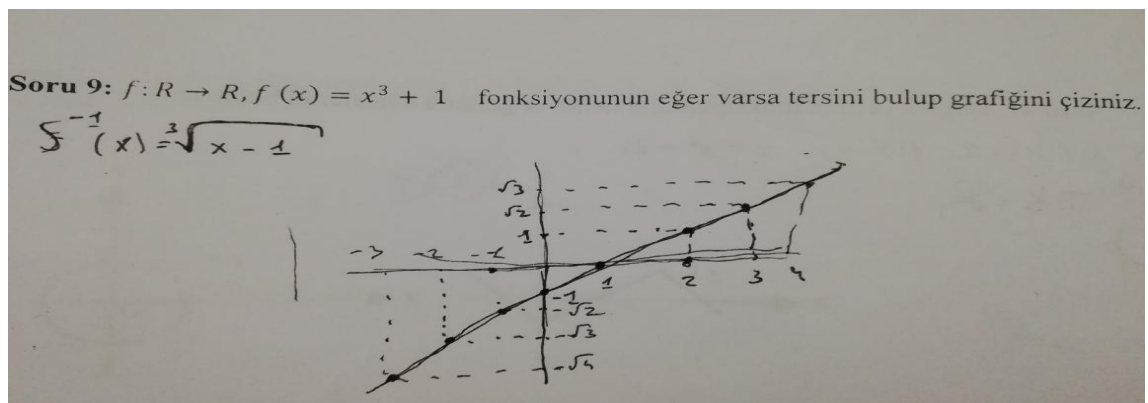
**SORU 9.**  $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 1$   
*fonksiyonunun eğer varsa tersini bulup grafiğini çiziniz.*

9. soruya öğrencilerin verdiği cevaplar doğru, yanlış ve boş olmak üzere üç kategoriye göre analiz edilmiştir.

**Çizelge 3. 5.** Soru 9'un cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

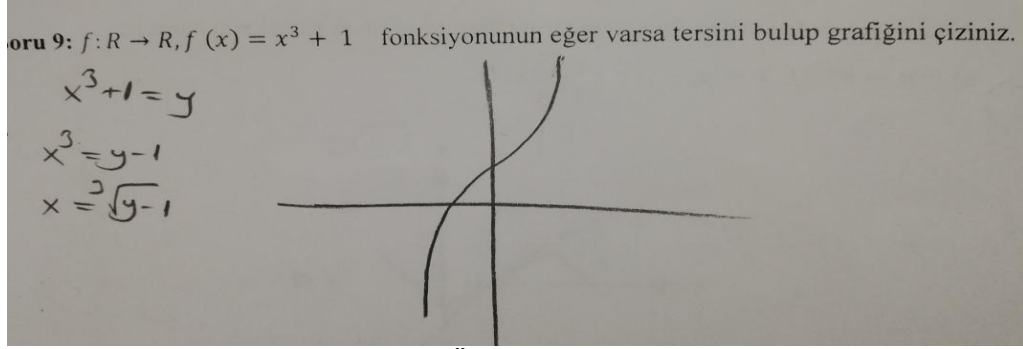
| SORU 9     | f  | %    |
|------------|----|------|
| D (Doğru)  | 26 | 40   |
| Y (Yanlış) | 9  | 13.9 |
| B (Boş)    | 30 | 46.1 |

65 öğrenci arasından 26'sı fonksiyonun tersini doğru olarak bulmuştur. Fonksiyonun tersini bulanlar arasından 10 öğrenci ise grafiği yanlış çizmiştir. Yanlış çizilen grafiklerden 3 tanesi doğru grafiği şeklinde, 2 tanesi ise  $f(x) = x^3 + 1$  grafiği şeklinde çizilmiştir. Şekil 3.17 ve Şekil 3.18'de öğrenci cevapları verilmiştir.



**Şekil 3. 17.** Öğrenci cevap örneği.

Şekil 3.18.'de fonksiyonun tersi cebirsel işlemlerle bulunmuş fakat ters fonksiyonun yerine  $f(x)$ 'in grafiği çizilmiştir.



Şekil 3.18. Öğrenci cevap örneği.

*Araştırma problemi 2: Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili kavramsal bilgi düzeyleri nasıldır?*

Üniversite öğrencilerinin fonksiyon ile ilgili kavramsal bilgi düzeylerini belirleme amacıyla hazırlanan testteki soruların numaraları 1,2,3,4,10,11,12 ve 13 'tür. Sorulardan ilki fonksiyon tanımıdır. Diğer iki soru cebirsel olarak verilen temsillerden fonksiyon belirtene belirleme ve yine verilen grafiğin fonksiyon olup olmadığını tespit etmedir. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulma, grafiği verilen fonksiyonu bileşke fonksiyon olarak yazma, grafiklerden tek, çift, artan ve azalan fonksiyonları belirleyebilme ile fonksiyonla grafiği eşleştirme sorularından oluşur. Kavramsal bilgi ağırlıklı olan 8 soruya öğrencilerin verdiği cevaplar doğrultusunda ulaşılan bulgular aşağıda soru bazında verilmektedir.

**SORU 1:** Fonksiyon nedir? Fonksiyon tanımı için gerekli olanları belirterek tanımını yapınız.

Bu soru ile öğrencilerin hangi tanım bilgisine (formal- informal) sahip oldukları tespit edilmeye çalışılmıştır. Fonksiyon tanımında ifade edilen özellikler ile ifadede kullanılan temsiller ve gösterimler incelenmiştir. 1. soruya ait öğrenci cevapları 5 kategoriye ayrılarak analiz edilmiştir.

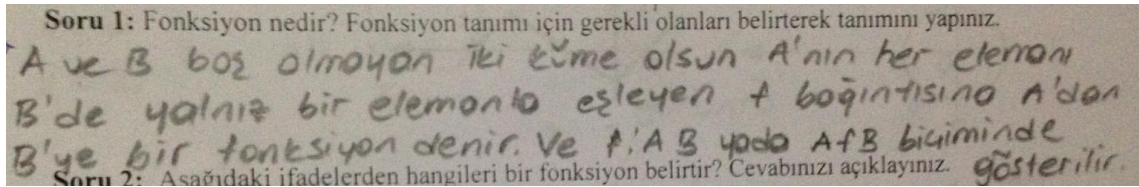
Bu soruya ait öğrenci cevaplarının analizi aşağıdaki tabloda verilmektedir.

**Çizelge 3. 6.** Soru 1'in cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

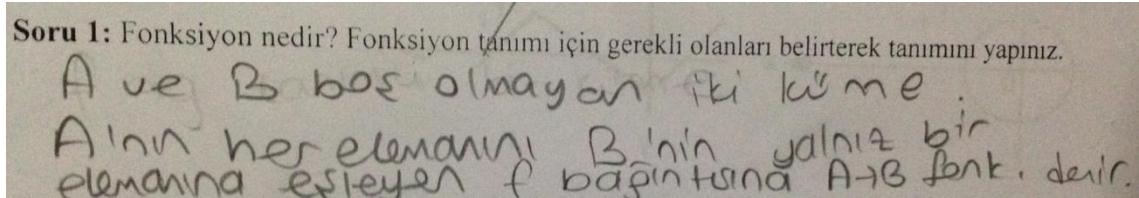
| SORU 1                          | f  | %    |
|---------------------------------|----|------|
| D: Cevap ve açıklama doğru      | 10 | 15.3 |
| E:Eksik ( Açıklama yetersiz)    | 14 | 21.5 |
| Y1: Cevap ve açıklama yanlış    | 29 | 44.7 |
| Y2: Cevap doğru açıklama yanlış | 3  | 4.7  |
| B: Cevaplanmamış                | 9  | 13.8 |

Birinci soruya tam ve doğru cevap veren toplam 10 öğrenci vardır.

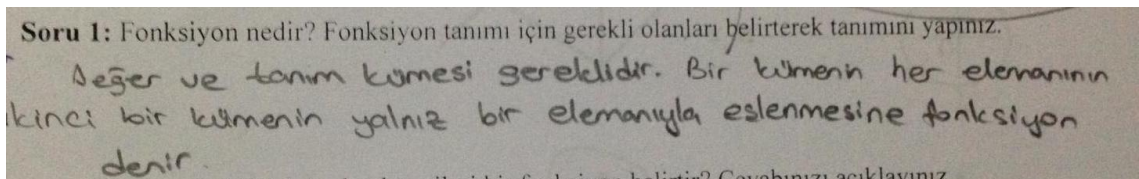
Bunlardan sadece 1 öğrenci tanımlı notasyon kullanarak ifade etmiştir.

**Şekil 3.19.** Eksik notasyon kullanılarak yapılan fonksiyon tanımı (D).

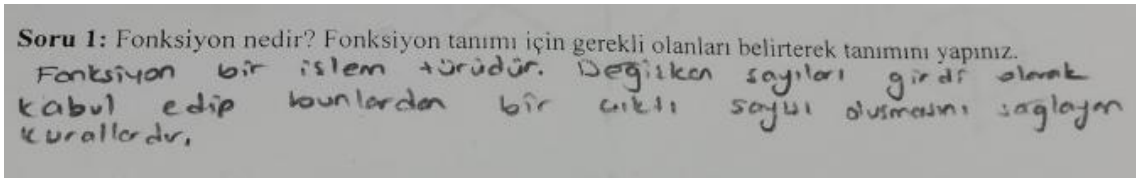
Şekil 3.20'de öğrencinin kısmen matematiksel gösterimlerden faydalandığı gösterilmiştir.

**Şekil 3. 20.** Kısmen notasyon kullanılan fonksiyon tanımı (D).

Diğer 8 öğrenci ise tanımı doğru yapmasına rağmen matematiksel gösterim kullanmamıştır. Şekil 3.21.' de öğrenci cevabı verilmektedir.

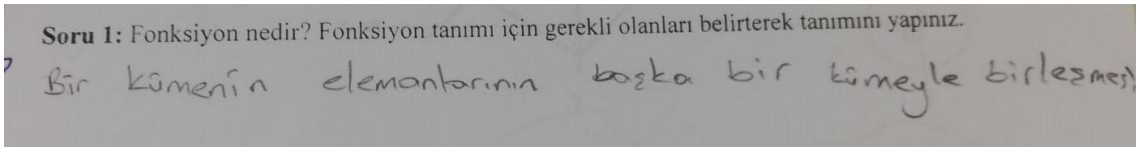
**Şekil 3. 21.** Notasyon kullanılmayan fonksiyon tanımı (D).

Öğrencilerden 14 tanesi fonksiyon tanımını açıklamada yetersiz kalmıştır. Tanım ve değer kümelerini karıştırdıkları saptanmıştır. Eksik cevaplarda birebir ve örteliklikle ilgili kavram yanlışlarına ulaşılmıştır. En çok kullanılan ifadeler ‘ tanım ve değer kümesi, girdi-çıkı sayısı, eşleme, bağıntı, işlem ve kuraldır. Tanım, değer ve görüntü kümeleri venn şeması kullanılarak gösterilmiştir. Fonksiyonun informal tanımı da öğrenciler tarafından sıkça kullanılmıştır. Fonksiyonun informal tanımını yaparak açıklamada yetersiz kalan öğrenci cevabına örnek Şekil 3.22'de verilmiştir.



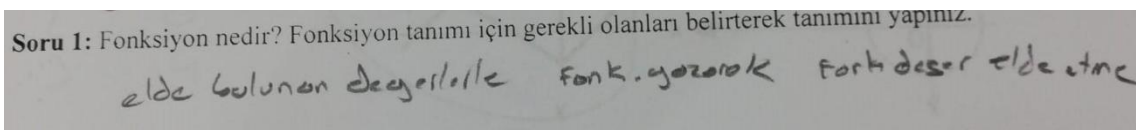
**Şekil 3. 22.** İnformal tanım ve yetersiz açıklama (E).

Öğrencilerin 29 'u fonksiyon tanımını ve açıklamasını yanlış yapmıştır. Şekil 3.23.'te öğrenci cevaplarından örnekler verilmiştir.



**Şekil 3.23.** Fonksiyon tanımı ve açıklaması yanlış (Y1).

Şekil 3.24.'te fonksiyon ile ilgisi olmayan ifadeler kullanılmıştır.



**Şekil 3. 24.** Fonksiyon tanımı ve açıklaması yanlış. (Y1)

Cevabı doğru olup açıklamasını yanlış yapan 3 öğrenci bulunmaktadır. Şekil 3.25'de buna örnek gösterilmiştir.

**Soru 1:** Fonksiyon nedir? Fonksiyon tanımı için gerekli olanları belirterek tanımını yapınız.  
 A ve B  $\emptyset$  farklı iki küme olsun. A'nın her elemanı B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşkiye f bağıntısına A'da B'ye bir fonksiyon olur.  
 Yani fonksiyon olmas için A kümesindeki eleman B kümesinde bulunmalıdır.

**Şekil 3. 25.** Cevap doğru açıklama yanlış (Y2).

Soruyu boş bırakan 9 öğrenci mevcuttur.

**SORU 2:** Cebirsel ifadelerden fonksiyon olanları belirleme ve açıklamaya yöneliktir.

Bu soru Erdoğan, Erdoğan ve Yanık (2012)'in 'İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Birinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonlar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları' makalesindeki anketin 1. sorusudur.

| SORU 2. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir fonksiyon belirtir. Cevabınızı açıklayınız. |          |            |         |             |              |                           |
|---|----------|------------|---------|-------------|--------------|---------------------------|
| a   | b        | c          | d       | e           | f            | g                         |
| $3x+4=-2$   | $2x+y=4$ | $x^2+3x+2$ | $y=x^2$ | $x^2+y^2=1$ | $g(x)=x^2+e$ | $x=a^2, a \in \mathbb{R}$ |

Soru 2'ye ait öğrenci cevapları 5 kategoride değerlendirilerek aşağıdaki çizelge oluşturulmuştur.

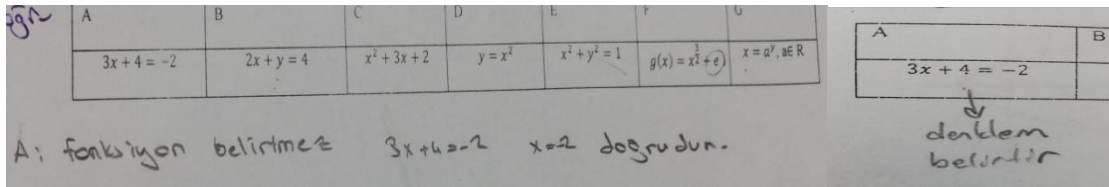
**Çizelge 3. 7.** Soru 2'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| Soru 2 | a  |      | b  |      | c  |      | d  |      | e  |      | f  |      | g  |      |
|--------|----|------|----|------|----|------|----|------|----|------|----|------|----|------|
|        | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    |
| D1     | 3  | 4.6  | 4  | 6.1  | 0  | 0    | 7  | 10.7 | 3  | 4.6  | 0  | 0    | 2  | 3    |
| D2     | 23 | 35.3 | 29 | 44.6 | 26 | 40   | 41 | 63   | 25 | 38.4 | 33 | 50.7 | 18 | 27.9 |
| Y1     | 29 | 44.6 | 22 | 34   | 31 | 47.6 | 8  | 12.3 | 25 | 38.6 | 23 | 35.3 | 31 | 47.6 |
| Y2     | 1  | 1.5  | 0  | 0    | 1  | 1.7  | 0  | 0    | 0  | 0    | 0  | 0    | 1  | 1.5  |
| B      | 9  | 14   | 10 | 15.3 | 7  | 10.7 | 9  | 14   | 12 | 1.4  | 9  | 14   | 13 | 20   |

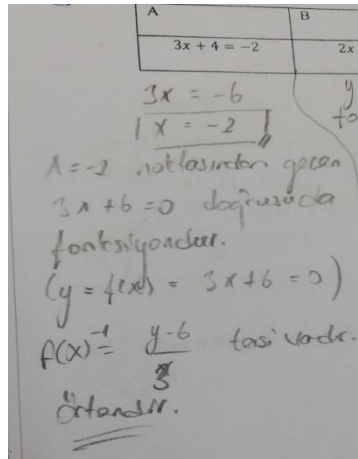
**D1:** Cevap ve açıklama doğru. **D2:** Cevap doğru, açıklama yok. **Y1:** Cevap ve açıklama yanlış. **Y2:** Cevap doğru, açıklama yanlış. **B:** Cevap verilmemiş.

Tablo genel olarak incelendiğinde 2. sorunun 'c' ve 'f' şıklarına doğru cevap verip açıklamayı yapabilen öğrenci olmadığı görülmüştür. 'd' ve 'f' şıklarına doğru cevap vermesine karşın açıklamaya yapamayanlar %50 'nin üstündedir (D2). En çok doğru cevaplandırılıp açıklama yapılabilen 'd' şıkkı, en çok yanlış cevaplandırılan ise 'c' ve 'g' şıklarıdır.

**Soru 2a)** ( $3x+4=-2$ ) Bu soruda öğrencilerin %44,6 'sı yanlış, %35,3' ü doğru cevap vermiştir. Ancak doğru cevap verip açıklama yapabilen öğrenciler sadece %4,6'dır. Soruya doğru cevap veren öğrenciler bu ifadenin şekil 3.26. ve şekil 3.27.'de denklem olduğunu ve bir doğru ifade ettiğini yazmışlardır.



**Şekil 3. 26.** Soru 2a öğrenci cevap örneği. **Şekil 3. 27.** Soru 2a öğrenci cevap örneği.



**Şekil 3. 28.** Soru 2a öğrenci cevap örneği.

Şekil 3.28.'de gösterildiği gibi bir öğrenci  $x=-2$  doğrusunu bulmasına karşın fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Fonksiyonun örten ve tersinin olduğunu ifade ederek kavram yanlışlığına da düşmüştür.

**Soru 2b)** ( $2x+y=4$ ) Öğrencilerin % 6,1 'i soruya doğru cevap verip açıklama yapmıştır. Bu açıklamalardan bir tanesi 'iki değişkenli denklem' dir.  $x'e$  0 verip  $y'$  yi;  $y'$ ye 0 verip  $x'$ i bularak grafiği çizmiştir. Bir öğrencide doğrusal fonksiyondur şeklinde

bir ifade yazmıştır. Sadece doğrudur diyerek açıklama yapmayanlar %44,6 'lık bir dilimi oluşturmaktadır. % 33,8'lik kısmı ise fonksiyon olmadığını belirterek yanlış cevaplamıştır. % 15,3'ü ise boş bırakmıştır.

**Soru 2c)** ( $x^2+3x+2$ ) Bu ifadeye doğru cevap verip açıklama yapabilen öğrenci yoktur. Öğrencilerin % 40'ı sadece fonksiyon olmadığını belirtmiştir. %47,6'sı yanlış cevap vermiş, %10,7'si ise boş bırakmıştır. Yanlış yapılma oranının en fazla olduğu şıktır. En çok yapılan yanlış ifadeyi 0'a eşitleyip kök bulmaktır. Şekil 3.29.'da bir tanesi örnek olarak gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & \underline{C} \\ & \rightarrow x^2 + 3x + 2 \\ & (x+2)(x+1) \\ & x = -2 \\ & x = -1 \end{aligned}$$

Şekil 3. 29. Soru 2c öğrenci cevap örneği.

**Soru 2d)** ( $y=x^2$ ) Öğrencilerin en çok doğru cevap verdikleri şıktır. %10,7'si doğru cevap verip açıklamalarda bulunmuş, % 63'ü doğru cevap vermesine karşın açıklama yapmamıştır. Açıklamalardan birinde öğrenci ifadenin parabol olduğu belirtmiş, diğer öğrenci ise parabol grafiği çizmiştir. Şekil 3.30.'da öğrencilerin doğru cevapları örneklendirilmiştir.

$$\begin{aligned} & D) y = x^2 \\ & x=0 \text{ için } y=0 \\ & y=0 \text{ için } x=0 \\ & x=y \rightarrow \text{fonksiyon belirtir.} \end{aligned}$$

$$D) \begin{array}{|c|} \hline D \\ \hline y = x^2 \\ \hline \text{parabol} \\ \hline \end{array}$$

Şekil 3. 30. Soru 2d öğrenci cevapları.

**Soru 2e)** ( $x^2 + y^2 = 1$ ) Bu şıkta verilen doğru cevaplarla (D2), yanlış cevapların (Y1) sayısı birbirine eşit ve % 38,4'tür. Doğru cevap verip açıklama yapan 3

öğrenci (%4,6) bulunmaktadır. Doğru cevap veren öğrencilerden 2'si birim çember olduğu için fonksiyon olmadığını belirtmiş, 1 tanesi ise grafiği çizmiştir.

**Soru 2f)** ( $g(x) = x^{3/2} + e$ ) Öğrencilerden hiçbiri soruyu doğru cevaplayıp açıklamada bulunamamıştır. %13,8 'i soruyu cevaplamamış ve % 35,3' ü fonksiyon belirtmediğini yazarak yanlış cevap vermiştir. Şekil 3.31.'de öğrencinin yanlış cevabına bakıldığında verilen ifadedeki  $x$ 'in üssünün tamsayı olması gerekliliği belirtilmiştir. Öğrencinin bu cevabından polinom fonksiyonu tanımını esas aldığını bu yüzden fonksiyon belirtmediğini savunduğunu görmekteyiz. Şekil 3.32.'deki yanlış cevapta ise öğrenci 'e' sayısını da değişken olarak düşünmüştür. Bunlara benzer yanılgılarla fonksiyon tanımına uymadığını belirterek fonksiyon olmadığını ifade eden öğrenciler yanlış cevaplar vermiştir.

f:  $g(x) = x^{3/2} + e$   
belirtmez tam bitirilmeyen  $x$ 'e bağlı

|   | F                    | G                           |
|---|----------------------|-----------------------------|
| 1 | $g(x) = x^{3/2} + e$ | $x = a^y, a \in \mathbb{R}$ |

$x-1=0$   
fons. belirtmez

Şekil 3. 31.Soru 2f yanlış cevap örneği.

Şekil 3. 32. Soru 2f yanlış cevap örneği.

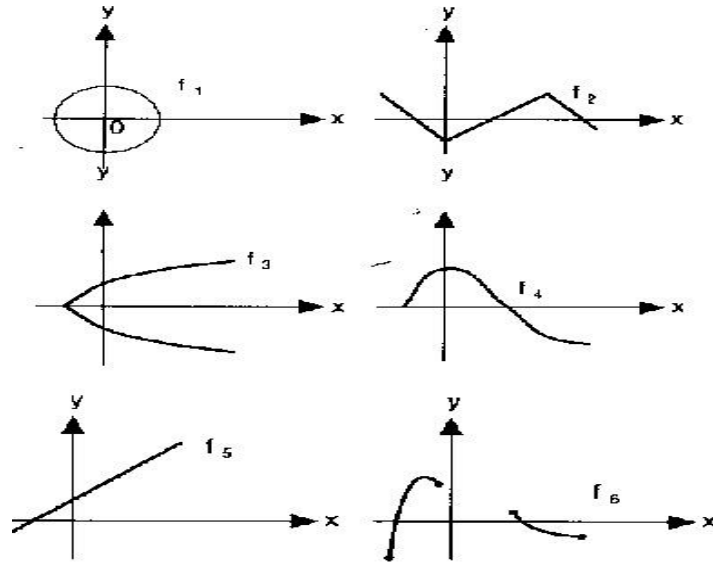
**Soru 2g)** ( $x = a^y, a \in \mathbb{R}$ ) Bu ifade %47,6 ile en fazla yanlış cevap verilen şıklardan biridir. Öğrencilerden %27,6 'sı sadece doğru cevaplamış açıklamada bulunmamıştır. %20'si ise cevaplamamıştır. % 3 'ü doğru cevaplayıp açıklamalarında verilen ifadeyi logaritma fonksiyonuna dönüştürüp , logaritma fonksiyonu tanımını ele alarak incelemiştir. Şekil 3.33.'te öğrenci cevabı örneklendirilmiştir.

Eğer  $x = a^y$  ise  $\log_a x = y$

Şekil 3. 33. Soru 2g 'ye ait öğrenci cevabı.

Kavramsal bilgi ağırlıklı sorulardan biri de aşağıda verilen 3. sorudur.

**SORU 3:** Aşağıda, grafik olarak gösterilen  $R \times R$ 'de tanımlı bağıntıların hangileri aynı zamanda bir fonksiyon belirtir?



3. soru reel sayılarda tanımlı 6 tane bağıntı grafiğinden hangilerinin fonksiyon belirttiğini belirlemeye yöneliktir. Soruda açıklama istenmediğinden doğru (D), yanlış (Y) ve boş (B) olarak 3 kategoride değerlendirilmiştir. Soru 3'e ait öğrenci cevaplarının frekans ve yüzdelik olarak analizi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Çizelge 3. 8.** Soru 3'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU<br>3            | f1 |      | f2 |      | f3 |      | f4 |      | f5 |      | f6 |      |
|----------------------|----|------|----|------|----|------|----|------|----|------|----|------|
|                      | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    | f  | %    |
| <b>D</b><br>(Doğru)  | 33 | 50.8 | 46 | 70.8 | 26 | 40   | 58 | 89.2 | 58 | 89.2 | 39 | 60   |
| <b>Y</b><br>(Yanlış) | 29 | 44.6 | 16 | 24.6 | 36 | 55.3 | 4  | 6.1  | 4  | 6.1  | 22 | 33.9 |
| <b>B</b><br>(Boş)    | 3  | 4.6  | 3  | 4.6  | 3  | 4.7  | 3  | 4.7  | 3  | 4.7  | 4  | 6.1  |

Çizelge genel olarak incelendiğinde f3 hariç diğerlerinin doğru cevap oranı % 50' nin üzerindedir. f3, %55.3 ile en çok yanlış cevap verilen grafiklerdir. En çok doğru cevap verilen grafikler ise %89.2 ile f4 ve f5 grafikleridir.

**Soru 3 f1)** Doğru cevaplayan öğrenci sayısı (33) ile yanlış cevaplayan öğrenci sayısı (29) birbirine çok yakındır. En çok yanlış cevap verenlerin kağıtlarında "

$x^2 + y^2 = 1$  olduğundan birim çember belirtir. Birim çember grafiği de bir fonksiyon grafiğidir " şeklinde ifadeler gözlemlenmiştir. Doğru cevap verenler ise dikey çizgiler çizerek dikey çizgi testinden faydalanmışlardır.

**Soru 3 f2)** f2 grafiğini fonksiyondur diyerek doğru cevaplayan öğrenci sayısı %70.7'dir. Doğru cevaplayanların çoğu yine dikey çizgi testini kullanmışlardır. 1 öğrenci ise mutlak değer fonksiyonu ile karıştırarak yanlış cevap vermiştir. Yanlış cevap verenlerin bir kısmında ise yatay çizgiler çizilerek fonksiyon olup olmadığı anlaşılmaya çalışılmıştır. Fakat dikey çizgi testi ile karıştırıldığı için yanlış cevaplanmıştır.

**Soru 3 f3)** Doğru cevaplanma oranı % 40 ile en az olan grafiktir. Yanlış cevaplarda en çok dikkat çeken  $y=x^2$  parabol grafiği yazılarak fonksiyon grafiği kabul edilmiştir.

**Soru 3 f4)** %89.2 ile en çok doğru cevaplanan fonksiyon grafiğidir. Doğru cevap verenler dikey çizgi testini kullanmışlardır.

**Soru 3 f5)** f5 grafiğine doğru denklemleri fonksiyon grafiği olarak cevap verenler %89.2'dir. f4 ile f5 grafiğinin sonuçlarının doğru, yanlış ve boş oranları aynıdır.

**Soru 3 f6)** f6 grafiğinde kopma olduğu için fonksiyon belirtmediği yazılarak %60 oranında doğru cevaplanmıştır.

4. soru fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini buldurmaya yöneliktir. Burada öğrencilerin tanım, değer ve görüntü kümeleri ile ilgili kavram bilgisi yoklanmıştır.

**SORU 4:** Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a)  $f: R \rightarrow R, f: x \rightarrow y, y = x^2 - 2x$

b)  $f: R \rightarrow R, f: x \rightarrow y, y = \sqrt{3-x}$

Aşağıdaki tabloda 4. sorunun a ve b şıklarına ait öğrenci cevaplarının analizi 4 kategoride verilmiştir.

**Çizelge 3. 9.** Soru 4'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU 4     | a  |      | b  |      |
|------------|----|------|----|------|
|            | f  | %    | f  | %    |
| D (Doğru)  | 0  | 0    | 1  | 1.6  |
| Y (Yanlış) | 33 | 50.8 | 32 | 49.3 |
| E (Eksik)  | 8  | 12.3 | 2  | 3.0  |
| B (Boş)    | 24 | 36.9 | 30 | 46.1 |

**Soru 4a)** Bu sorunun cevabını doğru yapan öğrenci yoktur. 24 öğrenci (%36.9) boş bırakmıştır ve % 50.7'si yanlış cevap vermiştir. Yanlış cevap verenlerin ortak hataları  $y = x^2 - 2x$  ifadesini 0'a eşitleyerek kök bulmaktır. Bu hatayı içeren öğrenci cevaplarına örnekler aşağıda Şekil 3.34., Şekil3.35., Şekil3.36.'da verilmiştir.

Soru 4: Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = x^2 - 2x$

$$x^2 - 2x$$

$$x \quad x(x-2)$$

$$x=0 \quad x=2$$

Soru 4: Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = x^2 - 2x$

$y=0$  için  $x^2 - 2x = 0$   
 $x(x-2) = 0$   
 $x=0$  ve  $x=2$

$x=0$  için  $y=0$

Tanım kümesi:  $\mathbb{R}$  Görüntü kümesi:  $\{0\}$

T.K. =  $\{0, 2\}$  G.K. =  $\{0\}$

**Şekil 3. 34.** Soru 4a yanlış cevap örneği.

**Şekil 3. 35.** Soru 4a yanlış cevap örneği.

Soru 4: Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = x^2 - 2x$

$$0 = x(x-2)$$

$$\boxed{x=0} \quad \boxed{x=2}$$

$$\boxed{y=0}$$

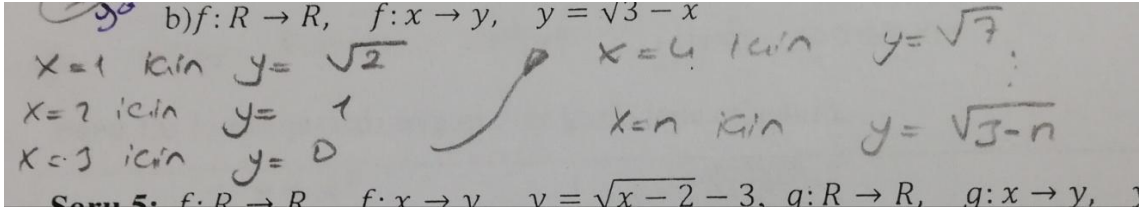
$(0,0)$   $(0,2)$   
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 Tam görüntü  $\downarrow$  tam görüntü

$x \rightarrow y$

$\{0, 2\}$   $\{0\}$

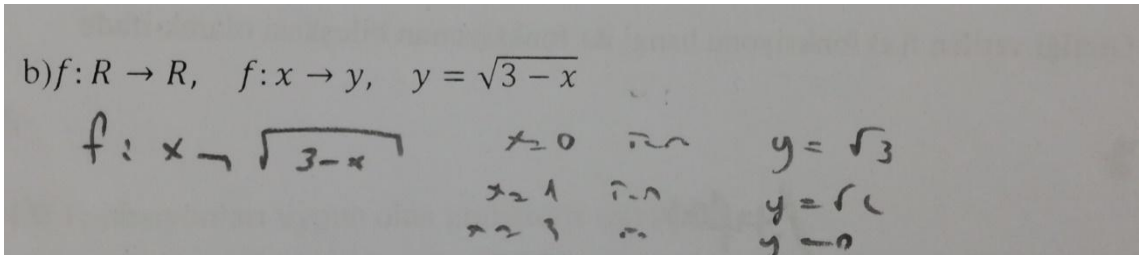
**Şekil 3. 36.** Soru 4a yanlış cevap örneği.

**Soru 4b)** Soruya doğru cevap veren 1 öğrenci bulunmaktadır. Soruyu boş bırakanların oranı %46.1 iken yanlış yapanların oranı ise %49.2'dir. Yanlış yapanlar ise  $x$ 'e değerler vererek  $y$ 'yi bulmuşlardır. Şekil 3.37. ve şekil 3.38.'de öğrenci kağıtlarından örnekler verilmiştir



b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = \sqrt{3-x}$   
 $x=1$  için  $y = \sqrt{2}$   
 $x=2$  için  $y = 1$   
 $x=3$  için  $y = 0$   
 $x=4$  için  $y = \sqrt{3-4}$   
 $x=n$  için  $y = \sqrt{3-n}$   
 Soru 5:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = \sqrt{x-2} - 3, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: x \rightarrow y, ...$

Şekil 3. 37. Soru 4b 'ye ait öğrenci cevabı.

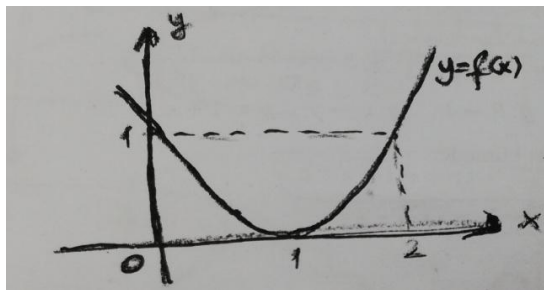


b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = \sqrt{3-x}$   
 $f: x \rightarrow \sqrt{3-x}$   
 $x=0$  için  $y = \sqrt{3}$   
 $x=1$  için  $y = \sqrt{2}$   
 $x=3$  için  $y = 0$

Şekil 3. 38. Soru 4b 'ye ait öğrenci cevabı.

10. soru grafik okuma ve bileşke fonksiyon bilgisinin sentezlenmesiyle oluşmuştur. Fonksiyon grafiğinden cebirsel temsile geçiş aşamaları incelenmek istenmiştir.

**SORU 10:** Grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu hangi iki fonksiyonun bileşkesi olarak ifade edilebilir?

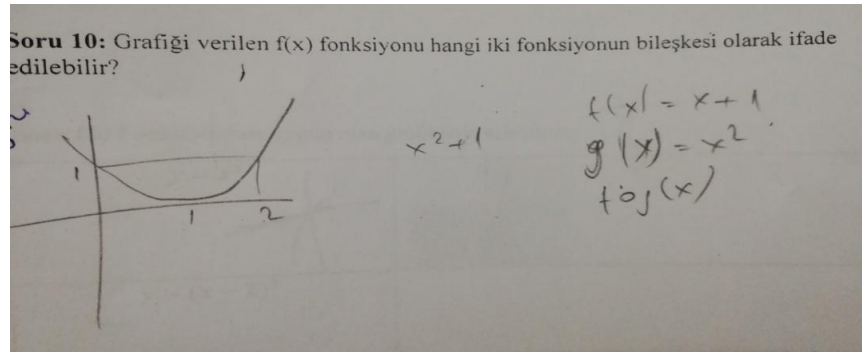


10. soruya ait öğrenci cevapları doğru, yanlış, eksik ve boş olmak üzere 4 kategoride analiz edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir.

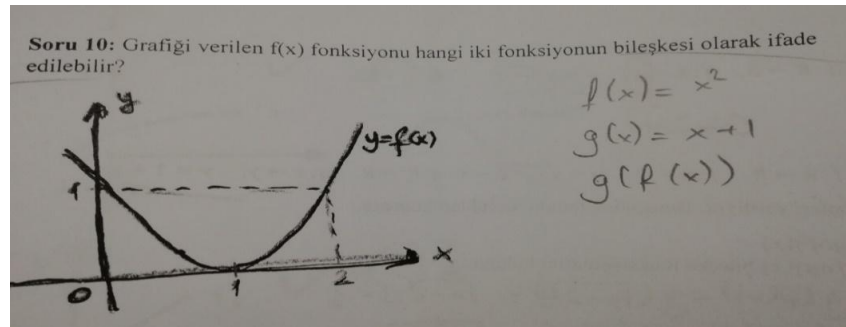
**Çizelge 3. 10.** Soru 10'un cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU 10    | f  | %    |
|------------|----|------|
| D (Doğru)  | 0  | 0    |
| Y (Yanlış) | 12 | 18.4 |
| B (Boş)    | 50 | 77   |
| E (Eksik)  | 3  | 4.6  |

Çizelge genel olarak incelendiğinde öğrencilerin %76.9 'u soruyu cevaplamamış, %18.4'ü ise yanlış cevaplamıştır. Soruya doğru cevap veren öğrenci olmamasına karşın sadece 3 öğrenci eksik cevap vermiştir. Eksik cevap olarak kabul edilen çözümlerde öğrenciler iki fonksiyondan sadece birinin ( $x^2$ ) cebirsel ifadesini tanımlayabilmiştir. Diğer fonksiyonun "x-1" olması gerekirken "x+1" , " $x^2 + 1$ " fonksiyonu şeklinde cebirsel ifadesi yanlış tanımlanmıştır. Tanımlanan fonksiyonlardan birinin doğru birinin yanlış olması nedeniyle bileşke fonksiyon doğru tanımlanamamıştır. Şekil 3.39 ve Şekil 3.40 'da öğrenci cevapları verilmiştir.



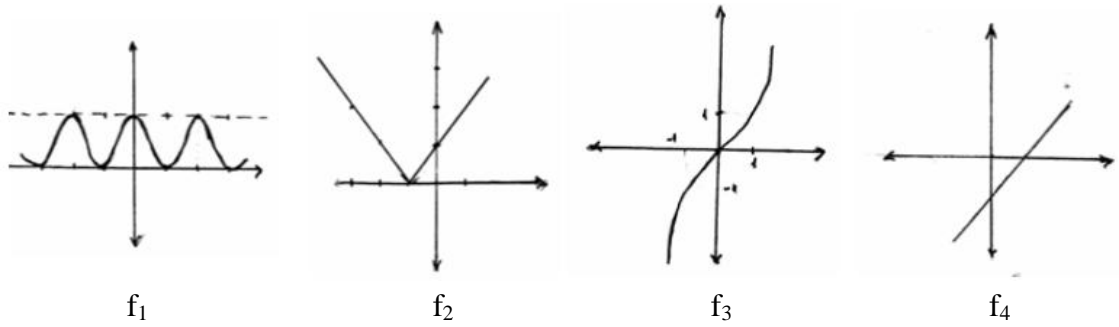
**Şekil 3.39.** Öğrenci cevap örneği.



**Şekil 3. 40.** Öğrenci cevap örneği.

11. soruda fonksiyon grafiğinin tek veya çift olduğunu belirlerken kavramsal bilgidен yararlanılır. Fonksiyon y eksenine göre simetrik ise çift fonksiyon, orijine göre simetrik ise tek fonksiyondur. İki durum da söz konusu değil ise ne tek ne de çift fonksiyondur.

**SORU 11:** Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri çift hangileri tek fonksiyondur?



Soruda açıklama istenmediğinden verilen cevaplar doğru, yanlış ve boş olarak 3 kategoride değerlendirilmiş ve 11. soruya ait öğrenci cevaplarının analizi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Çizelge 3. 11. Soru 11'in cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).**

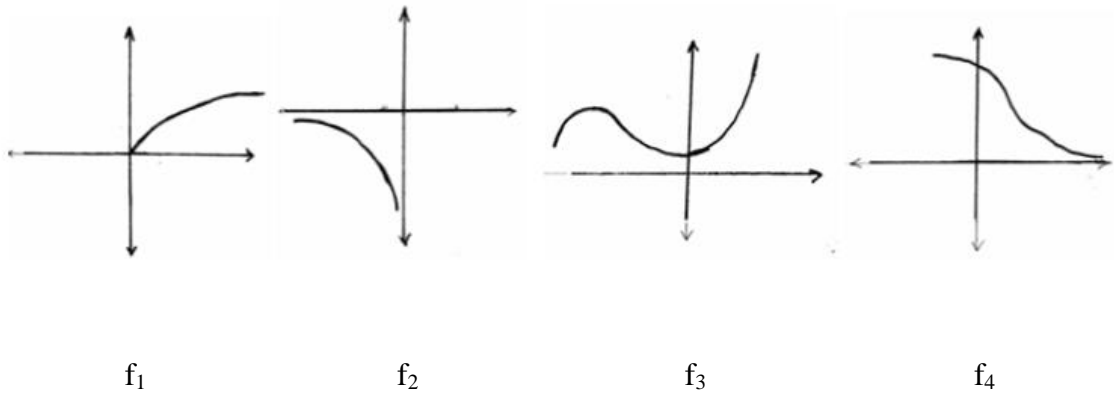
| SORU 11           | $f_1$     |      | $f_2$     |      | $f_3$     |      | $f_4$     |      |
|-------------------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|
|                   | f         | %    | f         | %    | f         | %    | f         | %    |
| <b>D</b> (Doğru)  | <b>46</b> | 70.8 | <b>0</b>  | 0    | <b>47</b> | 72.3 | <b>1</b>  | 1.5  |
| <b>Y</b> (Yanlış) | <b>9</b>  | 13.9 | <b>55</b> | 84.7 | <b>11</b> | 17   | <b>53</b> | 81.5 |
| <b>B</b> (Boş)    | <b>10</b> | 15.3 | <b>10</b> | 15.3 | <b>7</b>  | 10.7 | <b>11</b> | 17   |

Sorudaki  $f_1$  fonksiyonu çift,  $f_2$  ve  $f_4$  fonksiyonları ne tek ne de çift,  $f_3$  fonksiyonu ise tektir. Tablo genel olarak incelendiğinde en fazla doğru cevaplanan %72.3 ile  $f_3$  fonksiyonudur. Soruya doğru cevap veren öğrenciler  $f_3 = x^3$  grafiği olduğunu belirtmişlerdir.  $f_1$  ve  $f_3$  fonksiyonları %70'in üzerinde doğru cevaplanırken  $f_4$  fonksiyonu 1 kişi tarafından doğru cevaplanmıştır.  $f_2$  fonksiyonunu doğru cevaplayan öğrenci bulunmamaktadır. Öğrencilerin  $f_2$  fonksiyonuna ait yanlış cevapları incelendiğinde "mutlak değer fonksiyonu" ifadesine sık sık rastlanmıştır. Buna bağlı olarak verilen

yanlış cevap  $f_2$  fonksiyonunun mutlak değerden ötürü çift fonksiyon olmasına yöneliktir.

12. soruda grafiği bakılarak fonksiyonun artan-azalanlığının belirlenebilme düzeyi incelenmek istenmiştir. Bu soru Erdoğan vd. (2012)'nin 'İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Birinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonlar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları' makalesindeki anketin 10. sorusudur.

**SORU 12:** Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri artan hangileri azalan fonksiyondur, açıklayınız.



12. soruya ait öğrenci cevapları doğru , yanlış ve boş olmak üzere 3 kategoride analiz edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Çizelge 3. 12.** Soru 12'nin cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

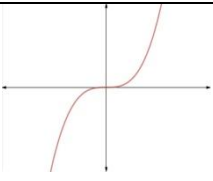
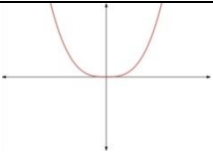
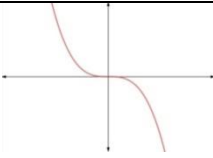
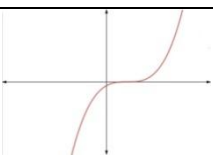
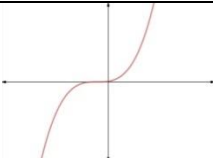
| SORU 12           | $f_1$     |      | $f_2$     |      | $f_3$     |      | $f_4$     |      |
|-------------------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|
|                   | f         | %    | f         | %    | f         | %    | f         | %    |
| <b>D</b> (Doğru)  | <b>56</b> | 86.1 | <b>54</b> | 83.0 | <b>12</b> | 18.5 | <b>53</b> | 81.6 |
| <b>Y</b> (Yanlış) | <b>0</b>  | 0    | <b>1</b>  | 1.6  | <b>41</b> | 63.0 | <b>2</b>  | 3.0  |
| <b>B</b> (Boş)    | <b>9</b>  | 13.9 | <b>10</b> | 15.4 | <b>12</b> | 18.5 | <b>10</b> | 15.4 |

12. soruda  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_4$  fonksiyonları %80'nin üzerinde doğru cevaplanmıştır. Öğrencilerden %70'i x artarken y artıyorsa artan, y azalıyorsa azalandır şeklinde açıklama yazarak soruya doğru cevap vermişlerdir. 1 öğrenci grafiğe çizdiği teğetin eğimine bakarak cevaplamış, 1 öğrenci ise " kollar yukarı artan, kollar aşağı azalan"

şeklinde test tekniği için önerilen yöntemi kullanmıştır.  $f_3$  fonksiyon grafiği ise en çok yanlış cevaplanan grafiklerdir. İnceleme yapılırken grafiğin 3 kısma ayrılması gerekiyordu. Öğrenciler sadece bir kısma bakarak grafiğin artan ya da azalan olduğu kanısına varmışlardır. Oysaki grafik 1. kısımda artan, 2. kısımda azalan, 3. kısımda ise artan olduğundan hem artan hem azalan olarak ifade edilmeliydi.

13. soru karışık olarak verilen fonksiyon ve grafiklerin doğru şekilde eşleştirilmesine yöneliktir. Bilinen  $y = x^3$  fonksiyon grafiğinden yola çıkılarak diğer grafiklerin tahmin edileceği düşünülmüştür.

**SORU 13:** Fonksiyonları uygun olan grafiklerle eşleştirin.

|                 |   |
|-----------------|---|
| $y = x^3$       |    |
| $y = (x - 2)^3$ |  |
| $y = (x + 1)^3$ |  |
| $y =  x^3 $     |  |
| $y = -x^3$      |  |

13. soruya ait öğrenci cevapları doğru, yanlış ve boş olmak üzere 3 kategoride analiz edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Çizelge 3. 13.** Soru 13'ün cevap tablosu (frekans ve yüzdelik oranlar).

| SORU 13           | $y = x^3$ |      | $y = (x - 2)^3$ |      | $y = (x + 1)^3$ |      | $y =  x^3 $ |      | $y = -x^3$ |      |
|-------------------|-----------|------|-----------------|------|-----------------|------|-------------|------|------------|------|
|                   | f         | %    | f               | %    | f               | %    | f           | %    | f          | %    |
| <b>D</b> (Doğru)  | <b>50</b> | 77   | <b>21</b>       | 32.3 | <b>18</b>       | 27.7 | <b>46</b>   | 70.7 | <b>45</b>  | 69.2 |
| <b>Y</b> (Yanlış) | <b>9</b>  | 13.8 | <b>32</b>       | 49.2 | <b>36</b>       | 55.3 | <b>11</b>   | 17   | <b>13</b>  | 20   |
| <b>B</b> (Boş)    | <b>6</b>  | 9.2  | <b>12</b>       | 18.5 | <b>11</b>       | 17   | <b>8</b>    | 12.3 | <b>7</b>   | 10.8 |

Tablo genel olarak incelendiğinde  $y = x^3, y = |x^3|, y = -x^3$  fonksiyon grafiklerinin doğru cevaplanma oranlarının %70 civarında olduğu görülmektedir. Öğrenci cevapları incelendiğinde  $y = (x - 2)^3$  ile  $y = (x + 1)^3$  grafiklerinin birbiri ile karıştırıldığı göze çarpmaktadır.

#### 4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Üniversite öğrencilerinin (matematik ve mühendislik bölümü öğrencileri) fonksiyon ile ilgili işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerini inceleme amacıyla yapılan bu araştırmada 13 soru hazırlanarak (kavramsal bilgi ağırlıklı sorular 1,2,3,4,10,11,12,13; işlemsel bilgi ağırlıklı sorular 5,6,7,8,9) belirlenen kriterler doğrultusunda her öğrencinin kağıdı bireysel olarak incelenmiş ve sonuçlar iki alt başlık altında toplanmıştır.

##### 4.1. İşlemsel Bilgi Ağırlıklı Soruların Sonuçları

İşlemsel bilgiyi sahip olan öğrencilerin problem çözümlerinde sorgulamadan ve önceki bilgilerle ilişkilendirmeden hatırladıkları kadarıyla cebirsel işlemler yaparak sonuca ulaştığı belirlenmiştir. İşlemsel bilgi ağırlıklı 5, 6, 7, 8 ve 9. sorularda bileşke fonksiyonu bulma, çift ve tek fonksiyon olup olmadığını belirleme, fonksiyonun eğer varsa tersini bulma ile ilgili sorulan sorulardan alınan cevaplara göre öğrencilerin genel olarak işlemsel bilgi düzeylerinin yaklaşık olarak % 35 olduğu belirlendi. Bu bilgi türünde işlemler, kurallar ve formüllerin arkasında duran matematiksel düşünceler öğrenciler tarafından anlaşılmamıştır.(Hiebert ve Lefevre,1986). İşlemsel bilgi çoğunlukla ezber bilgi olduğundan farklı soru tiplerine öğrenciler tarafından uyarlanamaz.

Öğrenciler; fonksiyonlar konusunda temel cebirsel özellikleri tanıma ve teknikleri uygulayabilmede diğer sorulara göre daha başarılı olmuşlardır. Öğrenci fonksiyonun tersini bulurken  $x$ 'i yalnız bırakarak  $x$  yerine  $y$  ve  $y$  yerine  $x$  yazarak ters fonksiyonun kuralını bir rutin olarak gerçekleştirir. Fakat neden  $x$  ile  $y$ 'nin yerlerini değiştirdiğini açıklayamaz ( Vidakovic,1996). Eisenberg'in (1991) yılında yapmış olduğu araştırmasında analiz dersi okumuş 40 üniversite öğrencisinin % 90'ının verilen cebirsel bir fonksiyonun tersinin kuralını bulabildiği ancak % 55'inin yaptığı işlemlerle ters fonksiyon kavramının anlamını bağdaştırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Yaptığımız araştırmada da öğrencilerin ters fonksiyonlarla ilgili işlemsel bilgi düzeylerinin kavramsal bilgi düzeylerine göre daha iyi olduğuyula örtüşmektedir. Kurallar bilgisi bileşke fonksiyonu bulurken de kullanılmış ve işlem adımları sırasıyla gerçekleştirilmiştir. Tek ve çift fonksiyonu belirlerken de tek değilse çifttir mantığı güdülmüştür. Fonksiyonun ne tek ne de çift ya da hem tek hem çift olabileceği

düşüncesi yok sayılmıştır. Aynı şekilde "varsa fonksiyonun tersini bulup, grafiğini çiziniz" şeklindeki testteki 9. soruda da tersinin olup olmadığı kontrol edilmeden direk tersi bulunmaya çalışılmış ve grafik de çoğunlukla çizilmemiştir. Buradan eksik tanımların varlığı Erdoğan ve arkadaşlarının (2012) araştırmasında da belirtildiği gibi göze çarpmaktadır. Ayrıca soruyu tam ve doğru olarak okuyup anlayamadıkları sonucuna da varılmıştır.

#### **4.2. Kavramsal Bilgi Ağırlıklı Soruların Sonuçları**

Bireyler matematiksel düşünceler arasında ilişkilendirmeler yaparak ve matematiksel kavramlar arasında bulunan benzerlik ve farklılıklar üzerinde düşünüp kavramsal bilgiler geliştirebilir. Kavramsal bilgiye sahip öğrenciler bilgilerini farklı alanlarda kullanabilir ve kavramlar arasında geçişler yapabilir (Hiebert ve Lefevre,1986). Bu bağlamda kavramsal bilgi ağırlıklı 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13' teki sorular incelendiğinde kavramsal bilgi düzeylerinin %30 olduğu belirlendi.

Birinci soruda fonksiyon tanımına baktığımızda öğrencilerin %15 'i tanımı doğru şekilde yapmasına rağmen %44'lük kısmı yanlış tanımlamıştır. Yapılan doğru tanımlar arasında informal tanımların varlığı da dikkat çekmektedir. Tanımlarda en çok kullanılan ifadeler ‘ tanım ve değer kümesi, girdi-çıktı sayısı, eşleme, bağıntı, işlem ve kuraldır.’Tanım, değer ve görüntü kümeleri venn şeması kullanılarak gösterilmiştir. Buna benzer sonuçlar Bayazıt ve arkadaşlarının (2010) eğitim fakültesinde farklı sınıf seviyelerinde bulunan ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışma ile Erdoğan ve arkadaşlarının (2012) İlköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşlukları çalışmasında da elde edilmiştir.

2. soruda verilen ifadelerde 3.soruda ise grafiklerde fonksiyon belirten belirleme ile kavramsal bilgi düzeyi sorgulanmıştır. Thompson'a (1994) göre fonksiyonun sunumunda kullanılan temsillerin görsel özelliklerinden kaynaklanan farkları aşip bu temsillere anlamını veren mananın aynı kaldığını görmek fonksiyonun özünü anlamaktır. Kavramsal bilgiye sahip olan her öğrenci bu geçişi yapabilmelidir. Ancak yaptığımız çalışmada çok az sayıda fonksiyonu mana olarak özümseyebilen öğrenci olduğunu görmekteyiz. Markovist ve diğerlerinin (1986) yapmış olduğu çalışma ile Even'ın (1998) yapmış olduğu çalışma da benzer sonuçları göstermektedir. Bayazıt'ın (2013) fonksiyonlar konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri

çalışmasında fonksiyonlar konusunda cebirsel ifadelerin çok kullanılması 'her cebirsel ifadenin bir fonksiyon' olması şeklinde yanlış bir algıya sebep olduğunu ortaya çıkarmıştır. Çalışmamızda ve Erdoğan, Erdoğan ve Yanık (2012) çalışmasında ( $x^2+3x+2$  vb.) cebirsel ifadesinin fonksiyon olarak kabul edildiği hatası diğer çalışmalarını destekler niteliktedir. Tall ve Bakar'ın (1992) çalışmasına katılan üniversite öğrencilerinin %62'si ( $x^2 + y^2=1$ ) çember denklemini fonksiyon olarak kabul etmiş. (Yaptığımız çalışmada birim çember denkleminin fonksiyon olmadığını söyleyerek doğru cevap verenler %5'e yakındır.) Araştırmacılar bu bilgi eksikliğini matematik eğitiminde çok değişkenli ve kapalı fonksiyon kavramlarının yanlış kullanılması ile ilişkilendirmişlerdir. Buradan çıkarılacak sonuçlardan biri de Erdoğan vd., (2012) çalışmasında da belirlenen denklem ve fonksiyonun birbirinden ayıramamasıdır.

Öğrenciler 3. soruda grafik üzerinden fonksiyonu belirlerken kavramsal bilgi kullanmamıştır. Bunun yerine dikey çizgi testini kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Bunun yanı sıra fonksiyon grafiğinin düzgün ve sürekli bir eğri veya doğru olması gerektiği şeklinde yanlış düşünce içerisinde oldukları çalışmalarla belirlenmiştir. (Vinner,1983; Leinhard vd.1990; Tall ve Bakar,1992; Janvier,1998). Ayrıca parçalı fonksiyon grafiklerinin fonksiyon olamayacağı yanlış düşüncesi de yaygındır.(Vinner;1983, Dubinsky ve Harel,1992).

Fonksiyonların temel grafiksel özelliklerini tanıma ve teknikleri uygulayabilmeyi içeren 10, 11, 12 ve 13. sorulardır. 10. soruda öğrencinin hem grafik okuma hem de bileşke fonksiyonu beraberce analiz etmesi gerekiyordu. Ancak bu soruya doğru cevap veren öğrenci yoktur. Ayrıca öğrencilerin % 77'ye yakını da soruyu boş bırakmıştır. Buradan öğrencilerin grafik ve bileşke fonksiyon bilgilerini birbirine uyarlayamadığını ve analiz edemediğini görmekteyiz. Fonksiyon grafiğinde tek ve çift fonksiyonu belirleme olan 11. soruda, artan -azalan fonksiyonu belirlemeyi amaçlayan 12. soruda ve grafik ile fonksiyonu eşleme olan 13. soruda öğrenciler kavramsal bilgiden çok ezber bilgiden yararlanmışlardır. Daha önceden bildikleri grafikleri göz önüne alarak yorumlamışlar ve kavramsal bilgiyi işlemsel bilgi haline getirmişlerdir. Öğrenciler çoğunlukla işlemleri rutin olarak yürütmekte ve yaptıkları işlemlerin ne anlama geldiğini anlamamaktadır (Eisenberg,1991).

### 4.3. Öneriler

Matematikte tüm konularda olduğu gibi fonksiyon konusunda da tek bir öğretim yöntemiyle başarı sağlanamayacağı bilinmektedir. Fonksiyon konusunun alt kavramları, temsil şekilleri öğrencilerin fonksiyonlar konusunu öğrenmesini zorlaştırmış ve farklı kavram yanlışlarını ortaya çıkarmıştır. Bu nedenle farklı öğretim yöntemleri birbirini destekleyecek şekilde kullanılmak zorundadır. Öğretim modelini belirleyen öğretmenlerin öğrencileri sürece aktif olarak katacak, sorgulamasını sağlayacak yapılandırmacı yaklaşımı benimsemesi gereklidir. Çünkü davranışçı öğretim yaklaşımında kavramsal bilgiye katkı sağlanamamaktadır. Yapılandırmacı yaklaşım modelini barındıran 'buluş yoluyla öğretim, probleme dayalı öğretim, proje tabanlı öğretim, kavram eksenli öğretim' modelleri ile teknoloji destekli öğretim modeli fonksiyon konusunun öğrenimini kolaylaştırmaktadır (Bayazit,2013).

Fonksiyonlar ve diğer tüm matematik konuları ile ilgili hazırlanan ders programları işlemsel ve kavramsal bilgiyi dengeleyecek şekilde biçimlendirilmelidir. Belirlenen müfredatı içeren ders kitaplarında sınıf içi öğretim aktiviteleri ve bunların uygulanması için yeterli süre olmalıdır. Ölçme ve değerlendirme konunun tümünü kapsayacak şekilde hem işlemsel hem de kavramsal bilgiyi barındıran sorularla yapılmalıdır. Sadece işlemsel bilgiyi ölçen sınav sistemlerinde öğrenciler hızlı soru çözmeyi başarı ile bağdaştırmıştır. İşlemsel bilgi öğrenciler için değerli olmuştur. Ancak kısa süreli başarı sağlanmıştır. Öğrencilerin kısa süreli başarıyı önemsemek yerine kalıcı öğrenmeyi istemesi için sınav sistemlerinin de yapılandırmacı yaklaşıma uygun olarak yapılması gerekmektedir. Kavramsal bilgi ağırlıklı öğretim yapıldığında işlemsel bilgi de doğal olarak ortaya çıkacaktır. Kalıcı başarı için kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi her matematik konusunda olduğu gibi fonksiyon konusunda da dengeli şekilde verilmelidir.

## KAYNAKLAR

- Alakoç, Z. (2003). Matematik öğretiminde teknolojik modern öğretim yaklaşımları. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(1), 1-7.
- Baki, A. (1998). Matematik Öğretiminde İşlemsel Ve Kavramsal Bilginin Dengelenmesi. *Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu'na Sunulmuş Bildiri*.
- Baki, A., Kartal, T. (2000). *Kavramsal Ve İşlemsel Bilgi Bağlamında Lise Öğrencilerinin Cebir Bilgilerinin Değerlendirilmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon.
- Baki, A., Kartal, T. (2004). *Kavramsal Ve İşlemsel Bilgi Bağlamında Lise Öğrencilerinin Cebir Bilgilerinin Değerlendirilmesi*, 2 (1).
- Baki, A. (2006). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi (5. Baskı). Trabzon: Derya Kitapevi.
- Bayazit, I., & Gray, E. (2004). Understanding Inverse Functions: The Relationship between Teaching Practice and Student Learning. In M. J. Honies & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 2, 103-110.
- Bayazit, İ.&Aksoy,Y.2008. Fonksiyon kavramının matematiksel manası ve tarihsel gelişimi.Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar, Pegem akademi
- Bayazit, İ. (2010). Fonksiyonlar konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. E. Bingölbali, M.F. Özmantar, H. Akkoç (editörler). *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.
- Bayazit, İ. ve Aksoy, Y. (2013). Fonksiyon kavramı: Epistemolojisi, algı türleri ve zihinsel gelişimi. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 29(1), 1-9.
- Bekdemir, M. (2012). Öğretmen adaylarının çember ve daire konularında kavram ve işlem bilgilerinin değerlendirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43 (43), 83-95. Retrieved from <http://dergipark.org.tr/hunefd/issue/7795/102014>
- Baş, F , Bekdemir, M . (2017). Matematik Öğretmenlerin, Öğrencilerinin Matematik Bilgi ve Becerilerini Ölçerlerken Kavram ve İşlem Bilgileri Kullanma Düzeyleri. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 36 (1), 95-113. Retrieved from <http://dergipark.org.tr/omuefd/issue/30333/327392>
- Bell, A.; Baki, A. (1997). *Ortaöğretim Matematik Öğretimi* Cilt I., YÖK, Ankara.

### KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Birgin,O;Gürbüz,R.(2009). *İlköğretim II. Kademe Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Konusundaki İşlemsel ve Kavramsal Bilgi Düzeylerinin İncelenmesi*. Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi XXII (2),529-550.
- Boyer, C. B. (1968). *A history of Mathematics* John Wiley & Sons. Inc New York, London, Sydney.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285. Breidenbach, D., Dubinsky, Ed., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & Behr, M. J. (1989). Cognitive restructuring ability, teacher guidance, and perceptual distracter tasks: An aptitude-treatment interaction study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 103-110. <http://dx.doi.org/10.2307/749101>
- DeMarios, P., & Tall, D. (1999). Function: Organizing principle or cognitive root. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-257).
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, TheNetherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, Ed. & Harel, G. (Eds.). (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*. 17 (1), 105-121.
- Gelman, R., & Williams, EM (1998). Bilişsel gelişim ve öğrenme için kısıtlamaları etkinleştirme: etki alanı özgüllüğü ve epigenezi. D. Kuhn ve RS Siegler'de (Eds), *Çocuk Psikolojisi El Kitabı: Biliş, Algılama ve Dil* (5. basım, Cilt 2, s. 575-630). New York: John Wiley.
- Ginsburg,P.H.(1997).*Mathematics Learning Disabilities: A View From Developmental Psychology*. Volume: 30 issue: 1, page(s): 20-33 .
- Haapasalo,L.,& Kadjevich,D.(2000).Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik Didaktik*, 21(2),139-157.

### KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Hiebert, J. ve Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* içinde (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- Kabael, T. U. (2010). Fonksiyon kavramı: Tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanılgıları ve öğretim stratejileri. *TÜBAV Bilim Dergisi*, 3(1), 128-136.
- Karasar, N. (2008). Bilimsel araştırma yöntemi: kavramlar, ilkeler, teknikler (Onsekizinci baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., and Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, 6(2), 18-28.
- Mestre, J. (1989). Hispanic and Anglo students' misconceptions in mathematics eric digest. *ERIC Clearinghouse on Rural Education and Small Schools Charleston WV*, 1-7.
- NCTM,(1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.
- NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.
- Özdemir Erdoğan, E., Erdoğan, A. ve Yanık, B. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Birinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonlar Konusundaki Hazır Bulunuşlukları, *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, 11(4), 1121-1149.
- Özkaya, M., İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla İlgili Bazı Kavram Yanılgıları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*. 3(1), 01-32.
- Ponte, J. P. (1992). The history of the function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3-8.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). London: Psychology Press.

### KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 99, 175-189.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook*
- Sarı,S.(2012).7. *Sınıf cebirsel ifadeler ve denklemler konusunun üstbilişin desteklendiği bir yöntemle öğretiminin kavramsal ve işlemsel öğrenmeye etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 1-16.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538. doi: 10.1037/a0024997.
- Sidal,Y.;Yavuz,İ. (2011).*Fonksiyon öğretiminde tablo kullanımı ve öğrenmeye etkisi*. T.C. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Siegler, R. S. & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: a micro genetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127, 377-397.
- Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Boks. Middlesex. England.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics* (Expanded American ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Soylu, Y., & AYDIN, S. (2006). A Study On Importance Of The Conceptual And Operational Knowledge Are Balanced In Mathematics Lessons. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 83-95.
- Star, J. R. (2000). On the relationship between knowing and doing in procedural learning. In B. Fishmann & S. O' Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth International Conference of Learning Sciences* (pp.88-86). Mahwah, NJ.
- Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

### KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, (Issues in Mathematics Education, 4, 21-44).
- Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi*, 7 (2), 75-94.
- Kabael, T. U. (2010). Fonksiyon kavramı: tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanlışları ve öğretim stratejileri, *Türk Bilim Araştırma Vakfı Bilim Dergisi*, 3 (1), 128-136.
- Van de Walle, J., A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*, ( Fifth Edition). USA: Pearson Education, Inc.
- Vidakovic,D.(1996). Learning the concept of inverse function.Journal of Computers in mathematics and science teaching 15(3),295-318.
- Vinner, S. (1983). Concept definition concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Yanık, H. B. (2016). Matematik Eğitiminde Teoriler 6. Bölüm Kavramasal ve İşlemsel Anlama (ss. 101- 116) PegemA Yayıncılık
- Yavuz,İ.;Hangül,T.(2014).*Öğrencilerin fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramlarına yönelik algıları*.Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul.
- Zembat İ. Ö. (2010). Kavram Yanılgısı Nedir?. Özmantar, M. F., Bingölbali, E. ve Akkoç, H. (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 1-8). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

## EKLER

### EK 1: İŞLEMSEL BİLGİ KARAKTERİZE ETMEK İÇİN SORULAN 5 SORU VE KRİTERLERİN DAĞILIMI

**Soru 5:**  $f: R \rightarrow R$ ,  $f: x \rightarrow y$ ,  $y = \sqrt{x-2} - 3$ ,  $g: R \rightarrow R$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $y = 1 + x$   
Fonksiyonları veriliyor. Buna göre, tanımlı oldukları kümede:

- a)  $(g \circ f)(x)$
- b)  $(f \circ g)(x)$  bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

(Kriterler: D, Y, E, B)

**Soru 6:**  $f: R - \{3\} \rightarrow R - \{5\}$ ,  $f(x) = \frac{5x+8}{x-3}$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

(Kriterler: D, Y, E, B)

**Soru 7:**  $f(3x - 4) = x$  ise  $f^{-1}(x) = ?$

(Kriterler: D, Y, E, B)

**Soru 8:**  $R$ 'den  $R$ 'ye tanımlı  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x + 1$ ,  $k(x) = 0$   
fonksiyonlarının tek veya çift midir? Cevabınız açıklayınız.

(Kriterler: D, Y, B)

**Soru 9:**

$f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^3 +$

1 fonksiyonunun eğer varsa tersini bulup grafiğini çiziniz.

(Kriterler: D, Y, B)

**EK 2: KAVRAMSAL BİLGİ KARAKTERİZE ETMEK İÇİN SORULAN 8 SORU VE KRİTERLERİN DAĞILIMI**

**Soru 1:** Fonksiyon nedir? Fonksiyon tanımı için gerekli olanları belirterek tanımını yapınız.

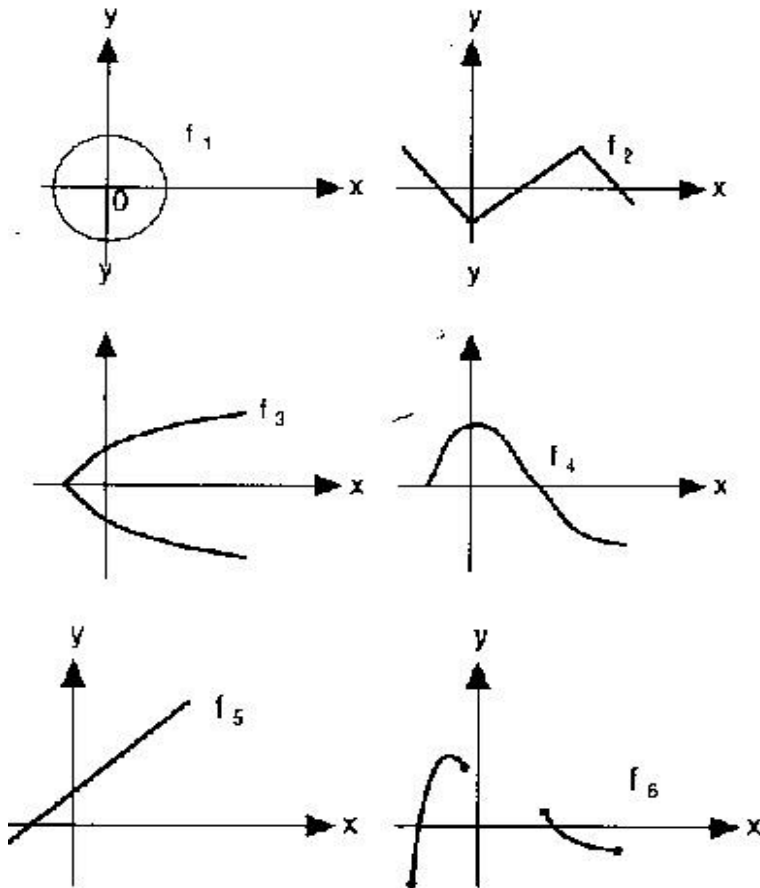
(Kriterler: D, E, Y1, Y2, B)

**Soru 2:** Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir fonksiyon belirtir? Cevabınızı açıklayınız.

| A         | B        | C          | D       | E           | F                        | G                         |
|-----------|----------|------------|---------|-------------|--------------------------|---------------------------|
| $3x+4=-2$ | $2x+y=4$ | $x^2+3x+2$ | $y=x^2$ | $x^2+y^2=1$ | $g(x)=x^{\frac{3}{2}}+e$ | $x=a^y, a \in \mathbb{R}$ |

(Kriterler: D1, D2, Y1, Y2, B)

**Soru 3:** Aşağıda, grafik olarak gösterilen  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'de tanımlı bağıntıların hangileri aynı zamanda bir fonksiyon belirtir?



(Kriterler: D, Y, B)

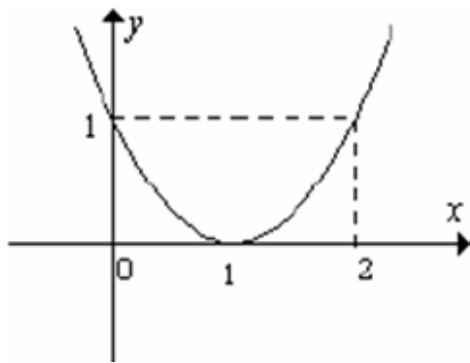
**Soru 4:** Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = x^2 - 2x$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \rightarrow y, y = \sqrt{3-x}$

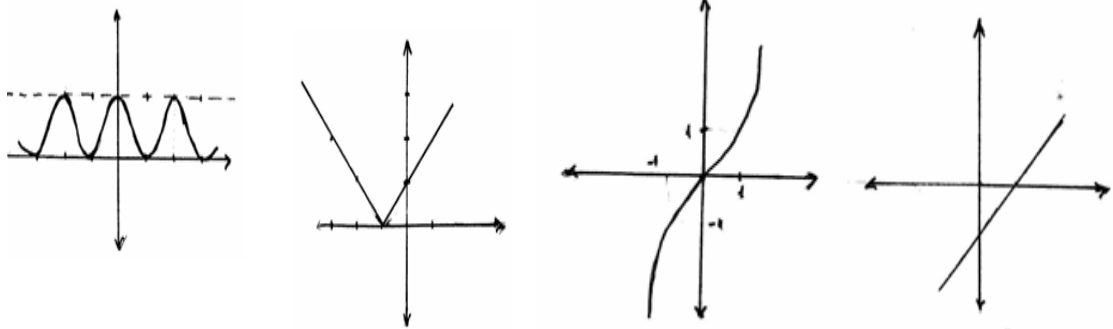
(Kriterler: D, Y, E,B)

**Soru 10:** Grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonu hangi iki fonksiyonun bileşkesi olarak ifade edilebilir?



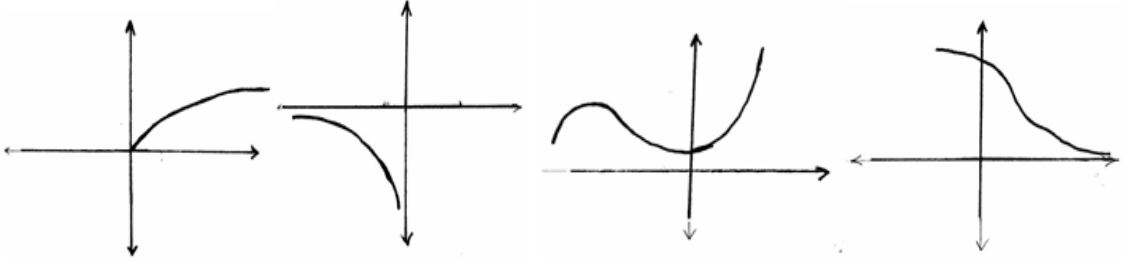
(Kriterler: D, Y, E,B)

**Soru 11:** Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri çift hangileri tek fonksiyondur?



(Kriterler: D, Y, B)

**Soru 12:** Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri artan hangileri azalan fonksiyondur, açıklayınız.



(Kriterler: D, Y, B)

**Soru 13 :** Fonksiyonları uygun olan grafiklerle eşleştirin.

|                 |  |
|-----------------|--|
| $y = x^3$       |  |
| $y = (x - 2)^3$ |  |
| $y = (x + 1)^3$ |  |
| $y =  x^3 $     |  |
| $y = -x^3$      |  |

(Kriterler: D, Y, B)

## ÖZ GEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seda ARAR  
Doğum Yeri ve Tarihi : Sakarya, 16/03/1991



### Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi :Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2009-2013)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri :

### İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Osmangazi Ortaokulu(BİLECİK)  
İlköğretim matematik öğretmeni 2013-2014  
16 Mayıs Ortaokulu (BATMAN)  
İlköğretim matematik öğretmeni 2014-2017  
Çayırova İmam Hatip Ortaokulu (KOCAELİ)  
İlköğretim matematik öğretmeni 2018-Devam ediyor

### İletişim

Adres : İsmetpaşa Mah. Yeni yol Sk. No:14 Kat:3 Merkez/BİLECİK  
E-Posta Adresi : seda\_arar\_11@hotmail.com

**Akademik Çalışmaları** 13. Ankara Matematik Günleri - AMG 2018,  
TOBB ETÜ - Ankara  
Üniversite Öğrencilerinin Fonksiyon ile İlgili İşlemsel ve Kavramsal Bilgi Düzeylerinin İncelenmesi (Poster sunumu)

**Tarih: 17/06/2019**