T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\mathbb{E}_2^4$ YARI ÖKLİD UZAYINDA YARI REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALPEREN KIZILAY

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2020
10373756

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\mathbb{E}_2^4$ YARI ÖKLİD UZAYINDA YARI REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALPEREN KIZILAY

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2020
10373756

BEYAN

Yarı Öklideyen Uzaylarda Yarı Reel Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu Üzerine adlı yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezi/dönem projesinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td>■</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen Kurum:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td>1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td></td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2- TÜBİTAK</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer; ....</td></tr>
</table>

ALPEREN KIZILAY

6.11.2020

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ' a, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen başta sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU olmak üzere Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma ve Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT hocama teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme ve değerli eşim Elanur KIZILAY'a en derin duygularımla teşekkür ederim.

Alperen Kızılay
05.01.2021

ÖZET

$\mathbb{E}_2^4$ YARI ÖKLİD UZAYINDA YARI REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci kısımda Öklid uzayı ve yarı-Öklid uzayında temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca reel kuaterniyolar ve yarı-reel kuaterniyonlar kümesinde temel kavramlar verilmiş olunup reel kuaterniyonik eğriler ve yarı-reel kuaterniyonik eğrilerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde *n*-boyutlu Öklid uzayında ve *3*-boyutlu Minkowski uzayında eğrinin elastik olmayan akışı incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde reel kuaterniyonik eğrinin elastik olmayan akışı incelenmiş olunup, kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı ve eğrilikleri ile ilgili evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca eğri akışı kullanılarak integrallenebilme koşulu verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde yarı-reel kuaterniyonik eğrilerin elastik olmayan akışı incelenmiştir. Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı ve eğrlikleri ile ilgili evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Elastik olmayan yarı-reel kuaterniyonik eğri akışı kullanılarak integrallenme koşulu verilmiştir. Son olarak eğriliklerin evolüsyon denklemleri ile alakalı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Öklid Uzayı, Yarı-Reel Kuaterniyon, Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğri, Elastik Olmayan Eğri Akışı, Evolüsyon.

ABSTRACT

ON THE EVOLUTION OF SEMI REAL QATERNIYONIC CURVES IN THE SEMI EUCLIDEAN SPACE $\mathbb{E}_2^4$

This study consists of four parts. The first chapter includes the introduction. In the second part, basic concepts in Euclidean space and semi-Euclidean space are given. In addition, the basic concepts in the set of real quaternions and semi-real quaternions are given, and real quaternionic curves and semi-real quaternionic curves are mentioned.

In the third chapter, the inextensible flow of curve in *n*-dimensional Euclidean space and 3-dimensional Minkowski space has been investigated. In addition, in this section, the inextensible flow of real quaternionic curve has been examined, the evolution equations related to the Frenet frame and curvatures of the quaternionic curve have been obtained, and the condition of integration has been provided by using the curve flow.

The fourth part is the original part of this study. In this section, inextensible flow of semi-real quaternionic curves have been investigated. The evolution equations related to the Frenet frame and curvatures of the semi-real quaternionic curve flow is given. Finally, examples related to the evolution equations of curvatures are given.

Keywords: Semi-Euclidean Space, Semi-Real Quaternion, Semi-Real Quaternionic Curve, Inextensible Curve Flow, Evolution.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖN SÖZ .... **i**

ÖZET .... **ii**

ABSTRACT .... **iii**

İÇİNDEKİLER .... **iv**

ŞEKİLLER LİSTESİ .... **v**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **2**

2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler **2**

2.2. Yarı-Öklid Uzayı ve Eğriler **6**

2.3. Reel Kuaterniyonlar ve Reel Kuaterniyonik Eğriler **9**

2.4. Yarı-Reel Kuaterniyonlar ve Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğriler **15**

3. EĞRİ EVOLÜSYONU **19**

3.1. $\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}$ de Eğrilerin Evolüsyonu **19**

3.2. $\mathbb{E}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}}$ de Eğrilerin Evolüsyonu **26**

3.3. $\mathbb{E}^{\boldsymbol{4}}$ de Kuaterniyonik Eğrinin Evolüsyonu **33**

4. $\mathbb{E}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}}$ DE YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU **41**

KAYNAKÇA LİSTESİ **52**

ÖZ GEÇMİŞ **54**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. $\kappa(s,t)$ evolüsyonu **49**

Şekil 4.2. $k(s,t)$ evolüsyonu.................... **50**

Şekil 4.3. $(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s,t)$ evolüsyonu.................... **50**

Şekil 4.4. $\kappa(s,t)$ evolüsyonu.................... **51**

Şekil 4.5. $k(s,t)$ evolüsyonu.................... **51**

Şekil 4.6. $(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s,t)$ evolüsyonu.................... **51**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

$\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}$	: *n*-Boyutlu Öklid Uzayı
$\boldsymbol{V}$	: Vektör Uzayı
$\langle\, ,\rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\boldsymbol{\chi}(\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}})$	: $\mathbb{E}^n$ de Vektör Alanların Kümesi
$\boldsymbol{T}_{\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{P})$	: $\mathbb{E}^n$ in *P* Noktasındaki Tanjant Uzayı
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$\wedge$	: Vektörel Çarpım
$\boldsymbol{d}$	: Metrik
$\boldsymbol{V_i}$	: $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında *i*- yinci Frenet Vektörü
$\boldsymbol{k_i}$	: $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında *i*- yinci Frenet Eğriliği
$\{\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{b}(\boldsymbol{s})\}$	: $\mathbb{E}^3$ Eğrisinin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{s})\}$	: $\mathbb{E}^3$ Eğrisinin Eğriliği ve Burulması
$\boldsymbol{q}$	: Kuaterniyon
$\mathbb{Q}$	: Reel Kuaterniyonlar kümesi
$\boldsymbol{S_q}$	: Kuaterniyonun Skaler Kısmı
$\boldsymbol{V_q}$	: Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
$\widehat{\boldsymbol{q}}$	: Kuaterniyonun Eşleniği
$\boldsymbol{q^{-1}}$	: Kuaterniyonun Tersi
$\boldsymbol{q_0}$	: Birim Kuaterniyon
$\boldsymbol{h}(,)$	: Kuaterniyonik İç Çarpım
$\Vert\boldsymbol{q}\Vert$	: Kuaterniyonun Normu
$\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$	: Uzaysal Kuaterniyonik Eğrilerin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}, \boldsymbol{N_3}\}$	: Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{k}, (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\kappa})\}$	: Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Eğrilikleri
$\mathbb{Q}_{\boldsymbol{v}}$	: Yarı-Reel Kuaterniyonların Kümesi
$\frac{\boldsymbol{\partial\rho}}{\boldsymbol{\partial t}}$	: $\mathbb{E}^4_2$ de Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğri Akışı
$\{\boldsymbol{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\mathcal{N}_1}, \boldsymbol{\mathcal{N}_2}, \boldsymbol{\mathcal{N}_3}\}$	: Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{k}, (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa})\}$	: Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğrinin Frenet Eğrilikleri

1. GİRİŞ

Eğriler teorisinin fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte birçok uygulaması mevcuttur. Bu çalışmaların çoğunda dış etkenler göz ardı edilmiştir. Ancak son zamanlarda yapılan çalışmalarda ise bu alışıla gelmişin dışında zaman parametresi yani dış etkenler aktif rol oynamaktadır. Bu da eğrilerin zamana göre değişimini yani eğri akışını daha önemli hale getirmiştir. Özellikle fizikte ve mühendislikte, bilgisayar animasyonlarında hatta yapısal mekanik alanında bile birçok değişim eğrilerinin uygulamaları mevcuttur.

Zaman parametreli eğri aileleri, değişim eğrileri olarak düşünülebilir. Eğriye karşılık gelen akış tarafından oluşturulan bir eğrinin zamana göre değişimlerini bu çalışma boyunca eğri evolüsyonlarını akış olarak ifade edilecektir. Literatürde eğri akışı hakkında birçok çalışma mevcuttur. Esnek olmayan eğri akışı ve 3-boyutlu Öklid uzayındaki eğriler Kwon and Park tarafından çalışmıştır (Kwon vd., 2005: 1156) ve *n*-boyutlu esnek olmayan eğri akışı tarafından çalışmıştır (Yıldız vd., 2013: 118). Ayrıca Kuaterniyonik eğriler içinde esnek olmayan eğri akışları çalışılmıştır. Bunlardan bazıları yarı-reel kuaterniyonik eğriler ve esnek olmayan kuaterniyonik eğrilerin akışıdır. (Körpınar ve Bas, 2016: 1680)

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}_2^4$ Yarı Öklid uzayında yarı-reel kuaterniyonik eğrilerin evolüsyonları incelenmiştir ve yarı-reel kuaterniyonik eğrilerin akışları için bazı gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Frenet çatısı evolüsyon denklemi ile ifade edilmiştir. Ayrıca düşünülen model için integrallenebilirlik koşulu (sıfır eğrilik durumu) elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler

Bu kısımda n-boyutlu Öklid uzayı ve bu uzayda eğriler ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır.

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir küme ve V, R cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun; $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f: \ Ax\, A \ \rightarrow \ V$$

$$(P, Q) \ \rightarrow \ f\,(P, Q) = \ PQ$$

dönüşümü

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f\,(P, R) = \ f\,(P, Q) + \ f\,(Q, R)$

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall v \in V$ için $f\,(P, Q) = v$ olmak üzere A kümesinde bir tek Q noktası vardır, afin aksiyomları sağlanıyorsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2000: 1).

Tanım 2.1.2. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A$, $v \ \in V$ için (P, v) ikilisine A afin uzayında bir tanjant vektör denir ve v_p ile gösterilir. $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ bir reel vektör uzayıdır ve bu uzaya tanjant uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2000: 1).

Tanım 2.1.3. $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzaylarının birleşimi

$$\bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$$

olmak üzere

$$X: \mathbb{E}^n \rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$$

$$P \ \ \rightarrow X_p$$

dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ de bir vektör alanı denir ve $\mathbb{E}^n$ deki vektör alanlarının kümesi de $\chi(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir. $\chi(\mathbb{E}^n)$ vektör alanlarının kümesi reel vektör uzayıdır ve bu uzaya vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2000: 3).

Tanım 2.1.4. V kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall x, y \in V$ için V de bir

$$\langle , \rangle: \ V \, x \, V \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına, tanımlanan fonksiyon ile beraber bir iç çarpım uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2000: 4).

Tanım 2.1.5.

$$\langle , \rangle: \ \mathbb{R}^n \, x \, \mathbb{R}^n \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \ \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denilir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000: 4).

Tanım 2.1.6. $X \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere X vektörünün normu

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.7. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ olacak biçimde

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

eşitliği ile tanımlı $d: \mathbb{R}^n x \, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir denir (Sabuncuoğlu, 2017: 1).

Tanım 2.1.8. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ olacak şekilde

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

eşitliği ile tanımlı $\wedge: \mathbb{R}^3 x \, \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna vektörel çarpım denir (Hacısalihoğlu 2000: 6).

Tanım 2.1.9. n-boyutlu bir Öklid uzayı alınsın ve $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir alt aralık olmak üzere;

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$$
$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir ise α ya $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu bir Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri denir ve M ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000: 139).

Tanım 2.1.10. $\alpha: I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verils'in. Her $t \in . I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Hacısalihoğlu,2000: 150).

Tanım 2.1.11. α, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet (hız) vektörü denir (Shifrin, 2011: 1).

Tanım 2.1.12. $I \subseteq \mathbb{R}$ de tanımlı bir α eğrisi ve J açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon $h: J \to I$ ise $\beta = \alpha \circ h: J \to I$ bileşke fonksiyonu bir diferansiyellenebilir eğridir ve β ya h ile α nın yeniden parametrizasyonu denir (Hacısalihoğlu,2000: 142).

Tanım 2.1.13. α, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri olsun. Lineer bağımsız $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sisteminden elde edilmiş olan $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(t) \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı veya Frenet çatısı denir. Burada her $\alpha(t)$ için $\forall V_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ vektörlerinin her biri $\alpha(t)$ noktasında bir Frenet vektörü belirtir. (Hicks, 1965: 18).

Tanım 2.1.14. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere,

$$k_i : I \to \mathbb{R}$$

$$s \to k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle, \ 1 \leq i \leq r$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna eğrinin i-inci eğrilik fonksiyonu $k_i \in \mathbb{R}$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-inci eğriliği denir. Burada $(\,')$ ile eğrinin yay parametresine göre türev gösterilmektedir (Hicks, 1965: 18).

Teorem 2.1.1. (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subseteq \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi için, M birim hızlı eğrisinin birim teğet vektör alanı $t(s)$ asal normal vektör alanı $n(s)$ ve binormal vektör alanı $b(s)$ olmak üzere $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet vektörleri

$$t(s) = \alpha'(s)$$

$$n(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \qquad (2.1)$$

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

şeklindedir (Hicks, 1965: 19).

Teorem 2.1.2. (I,α) koordinat komşuluğu ile $M \subseteq \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \tag{2.2}$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

dir (Hicks, 1965: 189).

Teorem 2.1.3. $M \subseteq \mathbb{E}^4$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere M eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ Frenet vektörleri

$$T(s) = \frac{1}{\|\xi'(s)\|}\,\xi'(s)$$

$$N_1(s) = \frac{\|\xi'(s)\|^2\,\xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s) \rangle\,\xi'(s)}{\|\|\xi'(s)\|^2\,\xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s) \rangle\,\xi'(s)\|}$$

$$N_2(s) = \eta N_3(s) \wedge T(s) \wedge N_1(s)$$

$$N_3(s) = \eta\,\frac{T(s) \wedge N_1(s) \wedge \xi'''(s)}{\|T(s) \wedge N_1(s) \wedge \xi'''(s)\|} \tag{2.3}$$

şeklinde hesaplanır (Özyılmaz ve Yılmaz, 2009: 170).

Buradaki vektörel çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.15. A, B ve $C \in \mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ olmak üzere

$$A \wedge B \wedge C = \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 & N_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad , \qquad \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ C = (c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases}$$

şeklindeki çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında bir vektörel çarpım veya dış çarpım denir (Özyılmaz ve Yılmaz, 2009: 170).

Teorem 2.1.4. (I,ξ) koordinat komşuluğunda $M \subseteq \mathbb{E}^4$ eğrisi verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere $\xi(s)$ noktasındaki M eğrisinin Frenet eğrilikleri,

$$\kappa(s) = \frac{\left\| \| \xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s) \right\|}{\| \xi'(s)\|^4}$$

$$\tau(s) = \frac{\|T(s) \wedge N_1(s) \wedge \xi'''(s)\| \| \xi'(s)\|}{\|\| \xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s)\|} \tag{2.4}$$

$$\sigma(s) = \frac{\langle \xi^{(\iota v)}(s), E(s)\rangle}{\|T(s) \wedge N_1(s) \wedge \xi'''(s)\| \| \xi'(s)\|}$$

olarak hesaplanır (Özyılmaz ve Yılmaz, 2009: 171).

Tanım 2.1.16. $\mathbb{E}^n$ de (I,α) koordinat komşuluğu ile bir M eğrisi verilmiş olsun. Eğrinin yay parametresi $s \in I$ olacak biçimde α eğrisinin Frenet r-ayaklısı da $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ şeklinde verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s), 1 \leq i \leq r$ olmak üzere bu eğrinin Frenet Formülleri

i. $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

ii. $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), i \neq 1$ (2.5)

iii. $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

şeklinde tanımlıdır. Frenet formülleri

$$E = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$E_s = QE$$

şeklinde de ifade edilebilir (Hacısalihoğlu, 2000: 155).

2.2 Yarı-Öklid Uzayı ve Eğriler

Bu kısımda n-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve bu uzayda eğriler ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır.

Tanım 2.2.1. *V* vektör uzayı üzerindeki bir simetrik bi-lineer form g olsun. g simetrik bi-lineer formu eğer

i. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g pozitif tanımlı,

ii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g negatif tanımlı,

iii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g yarı-pozitif tanımlı,

iv. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g yarı-negatif tanımlı,

v. $\forall v, w \in V$ için $g(v, w) = 0$ olduğunda $v = 0$ olmak zorunda ise g non dejenere

değilse dejeneredir, denir (O'Neill, 1983: 126).

Tanım 2.2.2. *n*-boyutlu bir vektör uzayı *V* olsun ve *V* üzerinde simetrik bi-lineer form da g olsun. *W* da *V* nin bir alt uzayı ve g nin *W* altuzayına kısıtlanmış hali $g|_W$ ise

$$g|_W : W \, x \, W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bi-lineer formun indeksi denir ve g nin indeksi $0 \leq p \leq n$ olmak üzere p ile gösterilir (O'Neill, 1983: 126).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^n$ *n*-boyutlu standart reel vektör uzayı ve $0 \leq p \leq n$ olacak biçimde g non-dejenere, simetrik bi-lineer formu

$$g(u, v) = -\sum_{i=1}^{p} u_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n} u_i v_i$$

biçimde tanımlıysa, $\mathbb{R}^n$ ye yarı-Öklid uzayı denir ve yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}^n_p$ ile gösterilir. Eğer p=1 ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}^n_1$ uzayı *n*- boyutlu Minkowski uzayı adını alır (O'Neill, 1983: 127).

Tanım 2.2.4. $v \in \mathbb{R}^n_p$ olmak üzere

i. $g(u, v) > 0$ ya da $v = 0$ ise v vektörüne spacelike vektör,

ii. $g(u, v) < 0$ ise v timelike vektör,

iii. $g(u, v) = 0$ ise v null vektör,

denir (O' Neill, 1983: 127).

Tanım 2.2.5. $u, v \neq 0$, $u, v \in \mathbb{R}^n_p$ olmak üzere $g(u, v) = 0$ ise u ile v vektörleri ortogonal vektörlerdir denir ve $u \perp v$ biçiminde gösterilir (O' Neill, 1983: 127).

Tanım 2.2.6. $\forall v \in \mathbb{R}_p^n$ olmak üzere

$$\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

şeklinde tanımlanan $\| \ \|: \mathbb{R}_p^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir normdur ve $\|v\|$ sayısına v vektörünün normudur denir (O'Neill, 1983: 128).

Tanım 2.2.7. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$**,** $\mathbb{R}_p^n$ uzayının ortonormal bir bazı ve $g(e_i, e_i) = \varepsilon_{i-1}$ olmak üzere $\forall v \in \mathbb{R}_p^n$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i-1}\, g(v, e_i) e_i$$

şeklinde tek türlü bellidir (O'Neill,1983: 128).

Tanım 2.2.8. ρ, $\mathbb{E}_1^n$ de bir sıfırdan farklı bir eğri olacak şekilde $\rho: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^n$ dönüşümü verilsin. $\rho(s)$ eğrimiz $\langle \rho(s), \rho'(s) \rangle = \varepsilon_0$ ise eğrisi birim hızlıdır. ρ birim hızlı eğrisi boyunca hareket eden Frenet çatısının elamanlarını $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, eğrinin eğrilik fonksiyonlarını k_i $(i = 1,2,3, \dots, n-1)$ olacak şekilde seçilsin.

Böylece Frenet formülleri

$$V_1{}' = k_1 V_2$$

$$V_i' = -\varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1}k_{i-1}V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \quad 1 < i < n, \tag{2.7}$$

$$V_n' = -\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}k_{n-1}V_{n-1},$$

şeklindedir, burada

$$\langle V_i, V_i \rangle = \varepsilon_{i-1} = \mp 1 \text{ dır.}$$

Frenet formülleri

$$V = [V_1\ V_2 \dots V_n]^T$$

ve

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

olmak üzere $V_s = QV$ şeklinde ifade edilebilir (İlarslan, 2002: 21).

Özel Hal $n = 3,\ p = 1$ özel halinde; eğer eğrimiz timelike normalli spacelike eğri ise (2.7) denklemlerinden

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

eğer eğrimiz spacelike normalli timelike eğri ise (2.7) denkleminden

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

eğer eğrimiz spacelike binormalli timelike eğri ise (2.7) denkleminden

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada *1*-inci eğrilik olan $k_1(s) = \kappa(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve *2*-inci eğrilik olan $k_2(s) = \tau(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir (İlarslan, 2002: 22).

2.3. Reel Kuaterniyonlar ve Reel Kuaterniyonik Eğriler

Bu bölümde kuaterniyonlar ve kuaterniyonik eğriler ile alakalı temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.3.1. Bir Reel kuaterniyon, dört reel sayının, $+1, e_1, e_2, e_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Dört birimden $+1$ ile gösterilen reel bir sayı olmak üzere diğer birimler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

i. ${e_1}^2 = {e_2}^2 = {e_3}^2 = -1,$

ii. $e_2 \wedge e_3 = e_1,\ e_3 \wedge e_1 = e_2,\ e_1 \wedge e_2 = e_3,$

iii. $e_3 \wedge e_2 = -e_1\ , e_1 \wedge e_3 = -e_2, e_2 \wedge e_1 = -e_3$

$a,\ b,\ c,\ d$ reel sayı ve e_1, e_2, e_3 birimleri *3*-boyutlu reel vektör uzayının dik koordinat sistemindeki baz vektörleri olmak üzere

$$q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$$

şeklinde gösterilir.

q kuaterniyonunun S_q skaler ve V_q vektörel kısmı olmak üzere

$$S_q = d,\ \ V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$$

şeklinde iki kısma ayrılır. Yani bir reel kuaterniyon

$$q = S_q + V_q$$

biçiminde ifade edilir. Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{Q} = \{q | q = ae_1 + be_2 + ce_3 + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_{1-3} \in \mathbb{R}^3\}$$

şeklinde tanımlıdır. (Hacısalihoğlu, 1983: 79).

Tanım 2.3.2. Reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi

$$S_{q_1} + S_{q_2} = S_{q_1 \oplus q_2} \quad \text{ve} \quad V_{q_1} + V_{q_2} = V_{q_1 \oplus q_2}$$

olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{Q} \, x \, \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$q_1 + q_2 \to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada $S_{q_1} + S_{q_2}$ işlemindeki "+" $\mathbb{R}$ üzerindeki toplama işlemi, $V_{q_1} + V_{q_2}$ işlemindeki "+" ise $\mathbb{R}^3$ uzayındaki toplama işlemidir.

O halde $(\mathbb{Q}, \oplus)$ ikilisi değişmeli gruptur. Bu grubun etkisiz elemanı sıfır kuaterniyonu ismini alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsünden oluşur (Hacısalihoğlu, 1983: 80).

Tanım 2.3.3. $\mathbb{Q}$ kuaterniyonlar kümesi üzerindeki skalarla çarpma işlemi;

$$\odot : \mathbb{R} \, x \, \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$,

ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) + (\lambda_2 \odot q)$, $\forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in \mathbb{Q}$,

iii. $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$,

iv. $1 \odot q = q$.

O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayı olur. Bundan sonra $\mathbb{Q}$ daki toplama $\oplus$ ve $\odot$ skalarla çarpma işlemleri, sırasıyla "+" ve "." ile gösterilecektir (Hacısalihoğlu, 1983:81).

Tanım 2.3.4. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$,

$$q_1 = d_1 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3,$$

$$q_2 = d_2 + a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$$

olmak üzere;

$$x: \mathbb{Q} \; x \; \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \to q_1 x \; q_2$$

$$q_1 x \; q_2 = (d_1 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3) x \; (d_2 + a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3)$$

$$= d_1 d_2 - (a_1 a_{2+} b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) e_1$$

$$+ (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2) \; e_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \; e_3$$

biçiminde tanımı işleme kuaterniyonik çarpma işlemi denir (Hacısalihoğlu, 1983: 82).

Kuaterniyonik çarpma işlemi

$$q_1 x \; q_2 = S_{q_1} + S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + \; S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2}$$

şeklinde de verilebilir.

Kuaterniyoniyonik çarpma işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. İki kuaterniyonun çarpımları bir kuaterniyondur.

ii. Kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğine sahiptir.

iii. Kuaterniyon çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.

Bunlara ek olarak kuaterniyon çarpımının değişme özelliğine sahip olmadığı da söylenebilir. O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot, x\}$ kümesinin asosyatif (birleşimli) bir cebirdir ve bu cebire kuaterniyon cebiri denir. Bu cebirin bir tabanı $\{+1, e_1, e_2, e_3\}$ dir ve boyutu da 4 tür. Özel olarak

$$q_1 x \; q_2 = q_2 x \; q_1$$

olabilmesi için q_1 ve q_2 birer skalar veya vektör kısımları $\left(V_{q_2} = \lambda V_{q_1}\right)$ orantılı olmalıdır (Hacısalihoğlu, 1983: 83).

Tanım 2.3.5. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için eşitlik bağıntısı

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2}$$

biçiminde tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.3.6. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere iki kuaterniyonun farkı

$$q_1 - q_2 = \left(S_{q_1} - S_{q_2}\right) + \left(V_{q_1} - V_{q_2}\right)$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 1983: 83).

Tanım 2.3.7. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere eşlenik $q = S_q + V_q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$\wedge : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$q \to \hat{q} = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\hat{q}$ kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniğidir denir.

Bir kuaterniyonun eşleniği ile çarpımı

$$q\ x\ \hat{q} = (d + ae_1 + be_2 + ce_3)\ x\ (d - ae_1 + be_2 + ce_3)$$

$$= d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

dır. Buradan

$$\hat{q}\ x\ q = q\ x\ \hat{q} > 0, q \neq 0$$

$$\hat{q}\ x\ q = q\ x\ \hat{q} = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

olduğu kolayca görülür. Eşlenik işlemi

i. $a\widehat{q_1 + b}q_2 = a\hat{q}_1 + b\hat{q}_2$

ii. $(\widehat{q_1 + q_2}) = \hat{q}_1 + \hat{q}_2$

iii. $\hat{\hat{q}} = q$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.3.8. $\mathbb{Q}$ Reel kuaterniyonlar kümesinde reel değerli, simetrik, bilineer h fonksiyonu

$$h: \mathbb{Q}\ x\ \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

$$(q_1, q_2) \to h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 x \hat{q}_2\ x\ q_2\ x\ \hat{q}_1)$$

şeklinde tanımlıdır. h fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 507).

Tanım 2.3.9. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonları için $h(q_1, q_2) = 0$ şartını sağlanıyorsa q_1, q_2 kuaterniyonlarına h-ortogonal denir (Hacısalihoğlu, 1983: 84).

Tanım 2.3.10. $\mathbb{Q}$ üzerindeki norm tanımı $q \in \mathbb{Q}$ için

$$\|q\|^2 = h(q_1, q_2) = \ q \ x \ \hat{q} = \ d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 1983: 86).

Tanım 2.3.11. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun tersini

$$(\ )^{-1} : \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\hat{q}}{\|q\|}$$

biçiminde tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 1983: 86).

Böylece $\mathbb{Q}$ üzerinde bölme işlemi tanımlanmış olur.

Tanım 2.3.12. $q_2 \neq 0$ olmak üzere q_1 kuaterniyonunu q_2 kuaterniyonuna bölebilmek için q_1 kuaterniyonu ${q_2}^{-1}$ ile sağdan ve soldan çarpılır. Bunun nedeni ise kuaterniyon çarpımının değişme özelliğinin olmamasıdır. O halde

$$r_1 = q_1 \ x \ {q_2}^{-1}$$

$$r_2 = {q_2}^{-1} \ x \ q_1$$

ifadeleri elde edilir. Burada r_1 kuaterniyonuna, q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile sağdan bölümü, r_2 kuaterniyonuna, q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Burada r_1 ve r_2 birbirinden farklı kuaterniyonlardır (Hacısalihoğlu, 2000: 86).

Tanım 2.3.13. Birim kuaterniyonlar q_0 ile gösterilir ve normu "1" dir. (Hacısalihoğlu, 1983: 86).

Vektörlerde olduğu gibi herhangi bir birim kuaterniyon

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \ x \ \hat{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

olmak üzere

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

şeklinde elde edilir.

r ve q_0 birim kuaterniyonu

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \text{ , } \sin\theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olmak üzere;

$q_0 = \cos\theta + S_0 \sin\theta$

şeklinde yazılabilir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ için

$S_0 = \frac{ae_1+be_2+ce_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1983: 87).

Tanım 2.3.14. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesi ve $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$

$$s \to \alpha(s) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(s) e_i, \quad (1 \leq i \leq 3)$$

şeklinde tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj 1987: 510).

Teorem 2.3.1. Uzaysal kuaterniyonik eğri α olsun. $s \in I = [0,1]$, α eğrisinin yay parametresi olmak biçimde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet vektörleri;

$$t(s) = \frac{1}{v(s)}\alpha'(s), \qquad \|\alpha'(s)\| = v(s)$$

$$n(s) = b(s)\ x\ t(s) \tag{2.9}$$

$$b(s) = \frac{\alpha'(s)\ x\ \alpha''(s) + v(s)v'(s)}{\|\alpha'(s)\ x\ \alpha''(s) + v(s)v'(s)\|}$$

şeklinde elde edilir (Bharathi ve ve Nagaraj, 1987: 510).

Teorem 2.3.2. $s \in I = [0,1]$ yay parametresi ile verilen α uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet *3*-ayaklısını $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ve eğriliklerini de $k(s), r(s)$ olmak üzere,

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) + r(s)b(s) \tag{2.10}$$

$$b'(s) - r(s)n(s)$$

formüllerine Frenet formülleri denir ve Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

Şeklinde gösterilebilir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511)

Tanım 2.3.15. $\mathbb{Q}$ Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\beta: I = [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q},$$

$$s \to \beta(s) == \sum_{i=1}^{4} a_i(s) e_i, \quad (1 \leq i \leq 4), \quad e_4 = 1$$

biçiminde tanımlanan eğriye bir reel kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511).

Teorem 2.3.3. $\beta: I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi $s \in I = [0,1]$ yay parametresi ile verilmiş olsun. β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ile eğrilikleri $\kappa(s), k(s)\ ve\ (r(s) - \kappa(s))$ arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
&T'(s) = \kappa(s) N_1(s), \qquad \kappa(s) = \|T'(s)\|, \qquad N_1(s) = t(s)\ x\ T(s),\\
&{N_1}'(s) = -\kappa(s) T(s) + k(s) N_2(s), \qquad N_2(s) = n(s)\ x\ T(s),\\
&{N_2}'(s) = -k(s) N_1(s) + \big(r(s) - \kappa(s)\big) N_3(s), \qquad N_3(s) = b(s)\ x\ T(s),\\
&{N_3}'(s) = -\big(r(s) - \kappa(s)\big) N_2(s)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklindedir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 511).

$$V = \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, V_s = \begin{bmatrix} T' \\ {N_1}' \\ {N_2}' \\ {N_3}' \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-\kappa) \\ 0 & 0 & -(r-\kappa) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

olmak üzere $V_S = Q.V$ şeklinde de ifade edilebilir.

Verilen ifadede $\beta(s)$ eğrisi seçilirken eğrinin birim teğet vektörü $T(s)$ vektörü için $t(s) = N_1(s)\ x\ \hat{T}(s)$ dir. Buradan da $\beta(s)$ eğrisinin burulması, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Burada $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması $r(s)$ ve $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisinin asli eğrliği $\kappa(s)$ olmak üzere $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisinin üçüncü eğriliği $(r(s) - \kappa(s))$ dir (Bharathi ve Nagaraj, 1987: 512).

2.4. Yarı-Reel Kuaterniyonlar ve Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğriler

Bir yarı reel kuaterniyon $+1, e_1, e_2, e_3$ gibi dört birime sıralı dört reel sayının eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada +1 reel sayı olmak üzere diğer üç birim için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

i. $e_i\ x_L\ e_i = -\varepsilon_{e_i}$,

ii. $e_i\ x_L\ e_j = \varepsilon_{e_i} \varepsilon_{e_j} e_k$, $(\mathbb{R}_1^3)$,

iii. $e_i \, x_L \, e_j = -\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j} e_k$, $(\mathbb{R}_2^4)$.

Eğer $\varepsilon_{e_i} = 1$ ise e_i spacelike, $\varepsilon_{e_i} = -1$ ise e_i timeliketır. Böylece bir yarı reel kuaterniyon, bileşenleri $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ şeklinde ifade edilir. *3*-boyutlu yarı reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak e_1, e_2, e_3 birimleri alınabilir.

S_q skaler kısmı, V_q vektörel kısmı göstermek üzere bir yarı reel q kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde yazılabilir. Yarı reel kuaterniyonların kümesi $\mathbb{Q}_v$ ile gösterilir (Tuna, 2002: 5).

Tanım 2.4.1. $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$, $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2} \in \mathbb{Q}_v$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{Q}_v$ üzerinde sırasıyla, toplama (iç işlem) ve skaler ile çarpma (dış işlem) işlemleri

$$\oplus : \ \mathbb{Q}_v \, x \, \mathbb{Q}_v \ \rightarrow \ \mathbb{Q}_v$$

$$(q_1, q_2) \ \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}$$

$$\odot : \ \mathbb{R} \, x \, \mathbb{Q}_v \ \rightarrow \ \mathbb{Q}_v$$

$$(\lambda, q) \ \rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

şeklinde tanımlanır. $\{\mathbb{Q}_v, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır (Tuna, 2002: 6).

Tanım 2.4.2. $d_1, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ için $q_1 = d_1 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3$ ve $d_2, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ için $q_2 = d_2 + a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$ gibi iki yarı-reel kuaterniyonun çarpımı

$$\begin{aligned} q_1 \, x_L \, q_2 = {} & d_1 d_2 - \left(\varepsilon_{e_1} a_1 a_2 + \varepsilon_{e_2} b_1 b_2 + \varepsilon_{e_3} c_1 c_2\right) \\ & + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + \varepsilon_{e_2}\varepsilon_{e_3}(\, b_1 c_2 - c_1 b_2)) e_1 \\ & + \left(d_1 b_2 + b_1 d_2 + \varepsilon_{e_1}\varepsilon_{e_3}(c_1 a_2 - a_1 c_2)\right) e_2 \\ & + \left(d_1 c_2 + d_2 c_1 + \varepsilon_{e_1}\varepsilon_{e_2}(a_1 b_2 - b_1 a_2)\right) e_3 \end{aligned}$$

Şeklinde tanımlıdır. Eğer $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ şeklinde ifade edilir ise

$$q_1 \, x_L \, q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle_L + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge_L V_{q_2}$$

dir (Tuna, 2002: 6).

Tanım 2.4.3. $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ herhangi iki yarı-reel kuaterniyon olsun.

İki yarı-reel kuaterniyon için eşitlik bağıntısı

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2}$$

biçiminde tanımlıdır (Tuna, 2002: 6).

Tanım 2.4.4. $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ herhangi iki yarı-reel kuaterniyon olmak üzere

$$q_1 - q_2 = \left(S_{q_1} - S_{q_2}\right) + \left(V_{q_1} - V_{q_2}\right)$$

biçiminde tanımlıdır (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.5. $q = S_q + V_q$ herhangi bir yarı-reel kuaterniyonunun eşleniği

$$K: \mathbb{Q}_v \, x \, \mathbb{Q}_v \rightarrow \mathbb{Q}_v$$

$$q \rightarrow K(q) = S_q - V_q$$

biçiminde tanımlıdır (Tuna, 2002: 8).

Tanım 2.4.6. $q = S_q + V_q$ herhangi bir yarı-reel kuaterniyonunun normu

$$N: \mathbb{Q}_v \, x \, \mathbb{Q}_v \rightarrow \mathbb{Q}_v$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = \left| q \ x_L \, K_q \right|$$

şeklinde tanımlıdır (Tuna, 2002: 8).

Tanım 2.4.7. Herhangi iki yarı-reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere

$$h_v: \mathbb{Q}_v \, x \, \mathbb{Q}_v \rightarrow \mathbb{Q}_v$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow h_v(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{K_{q2}}\left(q_1 \ x_L \, K_{q_2}\right) + \varepsilon_{q_2}\varepsilon_{K_{q1}}\left(q_2 \ x_L \, K_{q_1}\right)\right)$$

reel değerli, simetrik, bilineer h_v fonksiyonuna yarı-reel kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Tuna, 2002: 8).

Tanım 2.4.8. Herhangi iki yarı-reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere $h_v(q_1, q_2) = 0$ ise q_1 ve q_2 yarı-reel kuaterniyonlarına h_v-ortogonaldir denir (Tuna, 2002: 6).

Tanım 2.4.9. Herhangi q yarı-reel kuaterniyonu için

$$N_q = 1$$

ise q yarı-reel kuaterniyonuna yarı-reel birim kuaterniyon denir (Tuna, 2002: 6).

Tanım 2.4.10. $\mathbb{E}_1^3$ te uzaysal yarı-reel kuaterniyonların uzayı $\{q \in \mathbb{Q}_v \,:\, q + \gamma q = 0\}$ olsun. $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ için, $s \in I$ yay parametresi olmak üzere

$$\alpha \,:\, I \subset \mathbb{R} \;\to \mathbb{Q}_v$$

$$s \to \alpha(s) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(s) e_i$$

ile tanımlanan diferansiyellenebilir α eğrisine uzaysal yarı-reel kuaterniyonik eğri denir (Tuna, 2002: 7).

Tanım 2.4.11. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \;\to \mathbb{Q}_v$ birim hızlı uzaysal yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $\{\kappa, k, (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\}$ ve Frenet çatısı $\{\mathcal{T}(s), \mathcal{N}_1(s), \mathcal{N}_2(s), \mathcal{N}_3(s)\}$ olmak üzere Frenet Formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}'(s) \\ \mathcal{N}_1{}'(s) \\ \mathcal{N}_2{}'(s) \\ \mathcal{N}_3{}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N \kappa & 0 & 0 \\ -\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa & 0 & \varepsilon_n k & 0 \\ 0 & -\varepsilon_t k & 0 & \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) \\ \mathcal{N}_1(s) \\ \mathcal{N}_2(s) \\ \mathcal{N}_3(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $h(\mathcal{T},\mathcal{T}) = \varepsilon_T$, $h(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_1) = \varepsilon_N$, $h(\mathcal{N}_2,\mathcal{N}_2) = \varepsilon_n \varepsilon_T$, $h(\mathcal{N}_3,\mathcal{N}_3) = \varepsilon_b \varepsilon_T$, ve $\varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N = 1$ dir (Tuna, 2002: 22).

Frenet formülleri

$$V = \begin{bmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{N}_3 \end{bmatrix} \text{ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N \kappa & 0 & 0 \\ -\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa & 0 & \varepsilon_n k & 0 \\ 0 & -\varepsilon_t k & 0 & \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

olmak üzere $V_S = Q.V$ şeklinde ifade edilebilir.

3. EĞRİ EVOLÜSYONU

3.1. $\mathbb{E}^n$ de Eğrilerin Evolüsyonu

$\rho(u)$, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $\rho(u)$ eğrisinin t anındaki yer vektörü $\rho(u,t)$ olsun. ρ eğrisi için metrik

$$g(u,t) = \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle \tag{3.1}$$

şeklinde verilebilir. $\rho(u,t)$ eğrisinin yay uzunluğu ise

$$L(u,t) = \int_0^u \sqrt{g(\sigma,t)}du, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{u,t\}$ eğri üzerindeki koordinat fonksiyonlarıdır. $\mathbb{E}^n$ de eğrinin akışı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j V_j \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada ω_j ler çatı boyunca hız fonksiyonlarını temsil eder. Bu hız fonksiyonları sadece $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}\}$ şeklindeki eğriliklere bağlıdır (Yıldız vd., 2013: 2).

Önerme 3.1.1. g metriği için evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2g(\frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1\omega_2) \tag{3.4}$$

şeklindedir (Yıldız vd., 2013: 3).

İspat (3.1) denkleminde t parametresine göre, (3.3) denkleminde de u parametresine göre türev alır ve $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevlerinin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= 2\,\langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right) \rangle \\ &= 2g\,\langle \frac{\partial \rho}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \rangle \\ &= 2g\,\langle V_1, \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial s} V_j + \sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{\partial V_j}{\partial s}\right) \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Frenet formülleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = 2g\langle V_1, \lambda V_1 + \sum_{j=2}^{n} A_j V_j \rangle, \\ \lambda = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial s} - k_1 w_2\right), \\ A_j = \omega_{j,s} + k_{j-1}w_{j-1} - k_j w_{j+1}, \\ j = 2,3,\dots,n, k_0 = k_n = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

elde edilir. Yani $\frac{\partial g}{\partial t} = 2g\lambda$ dir.

Önerme 3.1.2. ρ eğrisinin yay uzunluğunun evolüsyon denklemi;

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1 w_2\right) du,\ u \in [0, L] \tag{3.6}$$

dir. (Yıldız vd., 2013: 3).

Tanım 3.1.1. ρ, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve ρ nin yay uzunluğu varyasyonu $L(u,t)$ olsun. ρ nun zamanla bağlantılı hiç bir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} L(u,t) = 0 \text{ yani } g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

olmalıdır (Yıldız vd., 2013: 3).

Teorem 3.1.1 ρ, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve ρ nın akışı $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akışının elastik olmaması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1\omega_2$ olmasıdır (Yıldız vd., 2013 :4).

İspat (⇒) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın (3.2) den yay uzunluğunun değişimi

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \frac{g_t}{2\sqrt{g}}\, du \tag{3.7}$$

dir. (3.4) denklemini (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1\omega_2\right) du$$

elde edilir. Akış, elastik olmadığından dolayı $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ dır. Buradan da $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1\omega_2$ elde edilir.

(⇐) Kabul edelim ki $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1\omega_2$ olsun. Bu eşitlik (3.4) denkleminde yerine yazılırsa $g_t = 0$, yani $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ elde edilir. Bu da eğrinin yay uzunluğunun korunduğu anlamına gelir. Böylece eğrinin akışı, esnek değildir.

Teorem 3.1.2 ρ, $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve ρ eğrisinin akışı $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \omega_j V_j$ olsun.

i. Frenet vektörlerinin *t* zaman parametresine göre türevleri

$$V_t = MV \tag{3.8}$$

şeklindedir. Burada *M* evolüsyon matrisi

$$M=\begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -M_{1n} & -M_{2n} & -M_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{cases} M_{1j}=A_j=\omega_{j,s}+k_{j-1}w_{j-1}-k_jw_{j+1}, \ j=2,3,\dots,n \\ M_{\alpha\mu}=\frac{1}{k_{\alpha-1}}\left(M_{(\alpha-1)\mu,s}+k_{\mu-1}M_{(\alpha-1)(\mu-1)}-k_\mu M_{(\alpha-1)(\mu+1)}+k_{\alpha-2}M_{(\alpha-2)\mu}\right) \\ \alpha=2,3,\dots,n-1, \ \alpha<\mu<n, \ k_0=k_n=0 \end{cases}$$

dir.

ii. ρ eğrisinin eğrilikleri için evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} k_{1,t}=M_{12,s}-k_1\lambda-k_2M_{13} \\ k_{\alpha,t}=M_{\alpha\mu,s}-k_\alpha\lambda-k_{\alpha-1}M_{(\alpha-1)\mu}-k_{\alpha+1}M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases}$$

şeklindedir (Abdell-All vd., 2014: 2282).

İspat (3.3) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa;

$$\rho_{tu}=\sqrt{g}\rho_{t,s}=\sqrt{g}\left(\lambda V_1+\sum_{j=2}^{n}A_jV_j\right) \tag{3.9}$$

elde edilir.

$$\rho_{tu}=\sqrt{g}\rho_s=\sqrt{g}V_1$$

ρ_u eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\rho_{u,t}=\sqrt{g}\left(\frac{g_t}{2g}V_1+V_{1,t}\right) \tag{3.10}$$

elde edilir. Buradan

$$\rho_{tu}=\rho_{ut}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa ve (3.5), (3.9) ve (3.10) denklemleri kullanılırsa

$$V_{1,t}=\sum_{j=2}^{n}A_jV_j \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa;

$$V_{1,tu}=\sqrt{g}\left((k_1A_2)V_1+\left(A_{2,s}-k_2A_3\right)V_2+\sum_{j=3}^{n}\left(A_{j,s}+k_{j-1}A_{j-1}-k_jA_{j+1}\right)V_j\right) \tag{3.12}$$

denklemi elde edilir.

$$V_{1,u}=\sqrt{g}V_{1,s}=\sqrt{g}(k_1V_2)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$V_{1,ut} = \sqrt{g}\left(\frac{g_t}{2g}k_1 + k_{1,t}\right)V_2 + k_1 V_{2,t} \tag{3.13}$$

elde edilir. $V_{1,tu} = V_{1,ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur, (3.12) ve (3.13) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{1,t} = A_{2,s} - k_1\lambda - k_2 A_3 \\ V_{2,t} = -A_2 V_1 + \sum_{j=3}^{n} B_j V_j \\ B_j = \frac{1}{k_1}\left(A_{j,s} + k_{j-1}A_{j-1} - k_j A_{j+1}\right),\ j = 3,4,\dots,n \end{cases} \tag{3.14}$$

elde edilir.

$$V_{2,u} = \sqrt{g}V_{2,s} = \sqrt{g}(-k_1 V_1 + k_2 V_3)$$

olduğundan bu denklemin *t* parametresine göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} V_{2,ut} = \sqrt{g}(&-\left(k_1\lambda + k_{1,t}\right)V_1 - (k_1 A_2)V_2 + \left(-k_1 A_3 + k_2\lambda + k_{2,t}\right)V_3 + k_2 V_{3,t} \\ &-k_1 \textstyle\sum_{j=4}^{n} A_j V_j) \end{aligned} \tag{3.15}$$

denklemleri elde edilir. (3.15) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} V_{2,tu} = \sqrt{g}(&-A_{2,s}V_1 - (k_1 A_2 + k_2 B_3)V_2 + \left(B_{3,s} - k_3 B_4\right)V_3 + \left(B_{4,s} - k_3 B_3 - k_4 B_5\right)V_4 \\ &+ \cdots + \left(B_{n-1,s} + k_{n-2}B_{n-2} - k_{n-1}B_n\right)V_{n-1} + \left(B_{n,s} - k_{n-1}B_{n-1}\right)V_n) \end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. $V_{2,ut} = V_{2,tu}$ olduğu göz önünde bulundurulur, (3.15) ve (3.16) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{2,t} = B_{3,s} - k_2\lambda - k_3 B_4 + k_1 A_3 \\ V_{3,t} = -A_3 V_1 - B_3 V_2 + \sum_{j=4}^{n} C_j V_j \\ C_j = \frac{1}{k_2}\left(B_{j,s} + k_1 A_j - k_{j-1}B_{j-1} - k_j B_{j+1}\right),\ j = 4,5,\dots,n \end{cases} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} V_{3,tu} = (\sqrt{g}&\left(-A_{3,s} + k_1 B_3\right)V_1 - \left(B_{3,s} - k_1 A_3\right)V_2 - (k_2 B_3 + k_3 C_4)V_3 \\ &+\left(C_{4,s} - k_4 C_5\right)V_4 + \left(C_{5,s} - k_4 C_4 - k_5 C_6\right)V_5 \\ &+ \cdots + \left(C_{n-1,s} + k_{n-2}C_{n-2} - k_{n-1}C_n\right)V_{n-1} + \left(C_{n,s} - k_{n-1}C_{n-1}\right)V_n) \end{aligned} \tag{3.18}$$

denklemi elde edilir.

$$V_{3,u} = \sqrt{g}V_{3,s} = \sqrt{g}(-k_2 V_2 + k_3 V_4)$$

olduğundan bu denklemin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$V_{3,ut} = \sqrt{g}((k_2A_2)V_1 + \left(-B_{3,s}+k_3B_4-k_1A_3\right)V_2 - (k_2B_3)V_3 + \left(k_3\lambda, k_{3,t} - k_2B_4\right)V_4$$
$$+k_3V_{4,t} - k_2\textstyle\sum_{j=5}^{n} B_jV_j) \tag{3.19}$$

elde edilir. $V_{3,tu} = V_{3,ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur, (3.18) ve (3.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{3,t} = C_{4,s} - k_3\lambda + k_2B_4 + k_4C_5 \, , \\ V_{4,t} = -A_4V_1 - B_4V_2 + C_4V_3 \sum_{j=5}^{n} D_jV_j, \\ D_j = \frac{1}{k_3}\left(C_{j,s} + k_2B_j - k_{j-1}C_{j-1} - k_jC_{j+1}\right), \; j = 5,6,\dots,n \end{cases} \tag{3.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde geri kalan Frenet vektörleri için hesaplamalar yapılırsa *n*. adım sonunda $V = [V_1\ V_2\ V_3 \dots V_n]^T$ ve

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_n \\ -A_2 & 0 & B_3 & B_4 & \dots & B_n \\ -A_3 & -B_3 & 0 & C_4 & \dots & C_n \\ -A_4 & -B_4 & -C_4 & 0 & \dots & D_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_n & -B_n & -C_n & -D_n & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

olmak üzere

$$V_t = MV$$

elde edilir. *M* matrisinin bileşenleri

$$\begin{cases} A_j = M_{1j}, & 1 < j \le n, \\ B_j = M_{2j}, & 2 < j \le n, \\ C_j = M_{3j}, & 3 < j \le n, \\ D_j = M_{4j}, & 4 < j \le n, \end{cases}$$

olacak biçimde yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases} M_{1j} = A_j = \omega_{j,s} + k_{j-1}\omega_{j-1} - k_j\omega_{j+1}, \; J = 2,3,\dots,n \\ M_{\alpha\mu} = \frac{1}{k_{\alpha-1}}(M_{(\alpha-1)\mu,s} + k_{\mu-1}M_{(\alpha-1)(\mu-1)} - k_\mu M_{(\alpha-1)(\mu+1)} + k_{\alpha-2}M_{(\alpha-2)\mu}) \\ \alpha = 2,3,\dots,n-1, \; \alpha < \mu < n, \; k_0 = k_n = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (3.21) denklemi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -M_{1(n-1)} & -M_{2(n-1)} & -M_{3(n-1)} & \dots & -M_{(n-1)n} \\ -M_{1n} & -M_{2n} & -M_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Benzer şekilde eğriliklerin evolüsyon denklemleri de

$$\begin{cases} k_{1,t} = M_{12,s} - k_1\lambda - k_2 M_{13}, \\ k_{\alpha,t} = M_{\alpha\mu,s} - k_\alpha\lambda - k_{\alpha-1}M_{(\alpha-1)\mu} - k_{\alpha+1}M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases} \tag{3.23}$$

şeklinde elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 3.1.3. ρ eğrisinin $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} k_{1,t} = M_{12,s} - k_2 M_{13}, \\ k_{\alpha,t} = M_{\alpha\mu,s} - k_{\alpha-1}M_{(\alpha-1)\mu} - k_{\alpha+1}M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases}$$

şeklindedir (Abdell-All vd., 2014: 2287).

İspat $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$g_t = 0 \text{ yani } \lambda = 0 \tag{3.24}$$

dır. Öyleyse (3.24) eşitliği (3.23) denkleminde yerine yazılırsa önerme ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3. ρ, $\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}$ de bir eğri ve ρ nin akışı $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ elastik değildir gerek ve yeter şart $[Q,M]$ Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$Q_t - M_s + [Q,M] = 0$$

dır (Abdell-All vd., 2014: 2287).

İspat İspata başlamadan ispatta ihtiyaç duyacağımız bazı eşitlikler elde edelim. ρ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ olsun. $V = [V_1\ V_2\ V_3 \dots V_n]^T$ nın *u* parametresine göre türevi

$$V_u = \sqrt{g}V_s = \sqrt{g}QV \tag{3.25}$$

dir. (3.25) denkleminin *t* parametresine göre türeve alınır ve (3.9) denklemi kullanılırsa

$$V_{ut} = \sqrt{g}\left(\frac{g_t}{2g}Q + Q_t + QM\right)V \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.9) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınır ve (3.25) denklemi kullanılırsa

$$V_{tu} = \sqrt{g}(M_s + MQ)V \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.26) ve (3.27) denklemlerinden

$$V_{ut} - V_{tu} = \sqrt{g}\left(\frac{g_t}{2g}Q + Q_t - M_s + [Q,M]\right)V$$

elde edilir. Şimdi ispatımıza başlayabiliriz.

(⇒) Kabul edelim ki akış elastik olmasın. O halde $g_t = 0$ dır. u parametresine ve t parametresine göre kısmi türevlerin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

elde edilir.

(⇐) Kabul edelim integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın, yani

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0 \tag{3.28}$$

olsun. (2.1.6) ve (3.21) denklemlerinden

$$[Q, M] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_2 M_{13} & M_{13,s} & \dots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} & 0 & -k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \dots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \dots & k_{n-2} M_{n-2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

elde edilir. (2.1.6) denklemini t parametresine göre (3.22) denkleminin s parametresine göre türevini alıp (3.23) denklemi kullanılırsa

$$M_s - Q_t =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_2 M_{13} & M_{13,s} & \dots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} + \lambda k_1 & 0 & -\lambda k_2 - k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \dots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \dots & -\lambda k_{n-1} - k_{n-2} M_{n2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.29) ve (3.30) denklemleri (3.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda k_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda k_1 & 0 & -\lambda k_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $k_1 = 0,\ k_2 = 0, \dots, k_{n-1} = 0$ elde edilir. $m = 1,2,3, \dots, n$ olduğundan $\lambda = 0$ dır. Yani $g = 0$ dır. Eğri akışımız elastik değildir.

Teorem 3.1.4. *n*-boyutlu Öklid uzayında, $\rho(u, t)$ elastik olamayan bir eğri olsun. Q ve M matrisleri değişmeli ise, M evolüsyon matrisindeki elemanlar

$$M_{(\alpha-1)\mu} = 0,\ \ \alpha = 2,3, \dots, n-1 \quad \mu = \alpha + 1$$

dir (Abdel-All vd., 2014: 2385).

İspat Q ve M matrisleri değişmeli olduğundan $[Q, M] = 0$ öyleyse integrallenebilirlik durumu (3.28) denkleminden

$$M_s - Q_t = 0 \tag{3.31}$$

olur. Eğri akışı elastik olmayan bir eğri akışı olduğundan $\lambda = 0$ dır, yani

$$M_s - Q_t = \begin{bmatrix} 0 & k_2 M_{13} & M_{13,s} & \dots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} & 0 & -k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \dots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \dots & k_{n-2} M_{n-2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

dır (3.32) denklemi (3.31) denkleminde yazılırsa $n = 10$ için;

$$M_{13} = M_{35} = M_{57} = M_{79} = 0, \quad M_{24} = M_{46} = M_{68} = M_{8(10)} = 0$$

olur. Benzer şekilde önceki sonuçlar *n*-inci adıma genişletilirse;

$$M_{(\alpha-1)\mu} = 0, \quad \alpha = 2,3, \dots, n-1, \ \ \mu = \alpha + 1$$

elde edilir.

3.2. $\mathbb{E}_1^n$ de Eğrilerin Evolüsyonu

$\mathbb{E}_1^n$ uzayında başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olsun. Bu taktirde

$$\rho : [0, l] x\, [0, w] \rightarrow \mathbb{E}_1^n$$

$$(u\,, t) \ \rightarrow \rho(u, t)$$

ile verilen diferansiyellenebilir eğrilerin *1*-parametreli bir ailesini göz önüne alalım. u eğrilerin değişken parametreleri ve $0 \leq u \leq l$ olmak üzere ρ eğrisi için metrik

$$v(u, t) = \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle$$

şeklinde verilebilir.

Böylece $\rho(u, t)$ eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu ise,

$$l(u, t) = \int_0^u \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u} \right\| du = \int_0^u \sqrt{|v(u, t)|}\, du$$ dır, Ayrıca $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial}{\partial u}$ dır.

Tanım 3.2.1. $\mathbb{E}_1^n$ de ρ sıfırdan farklı diferansiyellebilir bir eğri ve $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, ρ nun Frenet çatısı olsun. Sıfırdan farklı bir eğrinin akışı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} q_i V_i \tag{3.33}$$

şeklinde tanımlıdır. Bununla birlikte eğride herhangi bir uzama veya kısalma olmaması için $\forall u \in [0, l]$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u,t) = \int_0^u \frac{\partial \sqrt{|v|}}{\partial t} \, du = 0 \tag{3.34}$$

koşulunu sağlaması ile verilir.

Tanım 3.2.2. $\mathbb{E}_1^n$ *n*-boyutlu uzayında bir eğri ailesi $\rho(u,t)$ olmak üzere, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akış için $\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial \rho}{\partial u}\right\| = 0$ koşulu sağlanıyorsa bu akışa elastik olmayan eğri akışı denir.

Önerme 3.2.1. $\mathbb{E}_1^n$ de ρ eğrisinin akışı $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^n q_i V_i$ ve sıfırdan farklı ρ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ olsun. Böylece *v* nin değişim denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_t = 2|v|\left(\left(\varepsilon_0 \frac{\partial q_1}{\partial s} - \varepsilon_1 q_2 k_1\right)\right) \tag{3.35}$$

İspat $v = \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle$ eşitliğin *t* parametresine göre türevi alınır, $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$ 'nin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle \\
&= 2 \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle \\
&= 2 \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n q_i V_i\right) \rangle \\
&= 2|v| \langle V_1, \eta V_1 + \textstyle\sum_{i=2}^n A_i V_i \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\eta = \left(\frac{\partial q_1}{\partial s} - \varepsilon_0 \varepsilon_1 q_2 k_1\right)$$

$$A_i = \frac{\partial q_i}{\partial s} + k_{i-1} q_{i-1} - \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i k_i q_{i+1}; \quad i = 2,3,\dots,n; \; k_n = 0 \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\varepsilon_0 \varepsilon_1 q_2 k_1$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1. Esnek olmayan eğri akışı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial q_1}{\partial s} = \varepsilon_1 q_2 k_1$$

dır.

İspat. (⇒) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın. Denklem (3.34) ve (3.35) den

$$\frac{\partial}{\partial t}s(u,t)=\int_0^u \frac{|v_t|}{2\sqrt{|v|}}\,du=0 \qquad u\in[0,l]$$

elde edilir. Buradan da

$$\varepsilon_0\frac{\partial q_1}{\partial s}-\varepsilon_1 q_2 k_1=0 \Rightarrow \frac{\partial q_1}{\partial s}=\varepsilon_0\,\varepsilon_1 q_2 k_1$$

elde edilir.

(⇐) Farz edelim ki $\frac{\partial q_1}{\partial s}=\varepsilon_0\,\varepsilon_1 q_2 k_1$ olsun. $\frac{\partial q_1}{\partial s}$ (3.35) denkleminde yazılırsa $|v|_t=0$ elde edilir. Böylece $v_t=0$ bulunur. Bu ise eğrimizin esnek olmadığı anlamına gelir.

Teorem 3.2.2. $\rho(u,t)$ eğrisinin akışı $\frac{\partial\rho}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$ olmak üzere

i. Frenet vektörlerinin *t* zaman parametresine göre türevleri

$$V_t=MV$$

dir. Bunada

$$M=\begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 M_{12} & 0 & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\varepsilon_0\varepsilon_{n-1}M_{1n} & -\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}M_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.37)$$

$$M_{1i}=q_{i,s}+k_{i-1}q_{i-1}-\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i q_{i+1};\ \ i=2,3,\dots,n;$$

$$M_{\alpha\beta}=\frac{1}{k_{\alpha-1}}(M_{(\alpha-1)\beta,s}-\varepsilon_{\alpha-3}\varepsilon_{\alpha-2}k_{\alpha-2}M_{(\alpha-2)\beta}+k_{\beta-1}M_{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$-\varepsilon_{\beta-1}\varepsilon_\beta k_\beta M_{(\alpha-1)(\beta+1)}),$$
$$\alpha=2,\dots,n-1;\ \ \beta=3,\dots,n;\ \ \alpha<\beta;\ \ k_0=k_n=0.$$

ii. Eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$k_{1,t}=M_{12,s}-\eta k_1-\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 M_{13},$$

$$k_{\alpha,t}=M_{\alpha(\alpha+1),s}-\eta k_\alpha+\varepsilon_{(\alpha-2)}\varepsilon_{(\alpha-1)}k_{(\alpha-1)}M_{(\alpha-1)(\alpha+1)} \qquad (3.38)$$

dir.

İspat. ρ eğrisi alınsın. (3.33) denkleminin *u* parametresine göre türevini alınırsa

$$\rho_{tu}=\sqrt{|v|}\rho_{ts}=\sqrt{|v|}(\eta V_1+\textstyle\sum_{i=1}^{n}A_iV_i) \text{ elde edilir.} \qquad (3.39)$$

$\rho_u=\sqrt{|v|}\rho_s=\sqrt{|v|}V_1$ olduğundan ρ_u un *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\rho_{ut} = \sqrt{|v|}\left(\frac{|v|_t}{2|v|}V_1 + V_{1,t}\right) \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.36), (3.39), (3.40) ve $\rho_{ut} = \rho_{tu}$ kullanılarak

$$V_{1,t} = \sum_{i=2}^{n} A_i V_i \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.41) denkleminin u parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} V_{1,tu} = \sqrt{|v|}((&\varepsilon_0\varepsilon_1 q_2 k_1)V_1 + \left(A_{2,s} - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 A_3\right)V_2 \\ &+\left(\sum_{i=3}^{n} k_{i-1}A_{i-1} + A_{2,s} - \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i A_{i+1}\right)V_i) \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. $V_{1,u}$ nun t parametresine göre türevi alınırsa

$$V_{1,ut} = \sqrt{|v|}\left(\left(\frac{|v|_t}{2|v|}k_1 + k_{1,t}\right)V_2 + k_1 V_{2,t}\right) \tag{3.43}$$

(3.42), (3.43) denklemleri ve $V_{1,tu} = V_{1,ut}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &k_{1,t} = A_{2,s} - \eta k_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 A_3 \\ &V_{2,t} = -\varepsilon_0\varepsilon_1 A_2 V_1 + \sum_{i=3}^{n} B_i V_i \\ &B_i = \frac{1}{k_1} = \left(A_{i,s} + k_{i-1}A_{i-1} - \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i A_{i+1}\right); \;\; i = 3, \dots, n \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.44) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} V_{2,tu} = \sqrt{|v|}((&-\varepsilon_0\varepsilon_1 A_{2,s})V_1 + (-\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_3)V_2 + \left(B_{3,s} - \varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 B_4\right)V_3 \\ &+ \cdots + \left(k_{n-2}B_{n-2} + B_{(n-1),s} - \varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}k_{n-1}B_n\right)V_{n-1} \\ &+\left(k_{n-1}B_{n-1} + B_{n,s}\right)V_n) \end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Sonrasında $V_{2,u}$ un *t* parametresine göre türevini alınırsa

$$\begin{aligned} V_{2,ut} = \sqrt{|v|}(&-\left(\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1\eta + \varepsilon_0\varepsilon_1 k_{1,t}\right)V_1 - (\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 A_2)V_2 \\ &+\left(k_2\eta + k_{2,t} - \varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 A_3\right)V_3 + k_2 V_{3,t} - \varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 \sum_{i=4}^{n} A_i V_i) \end{aligned} \tag{3.46}$$

(3.45) ve (3.46) denklemleri ve $V_{2,tu} = V_{2,ut}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &k_{2,t} = B_{3,s} - \eta k_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 B_4 + \varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 A_3 \\ &V_{3,t} = -\varepsilon_0\varepsilon_1 A_3 V_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 B_3 V_2 + \sum_{i=4}^{n} C_i V_i \\ &C_i = \frac{1}{k_2} = \left(B_{i,s} + k_{i-1}B_{i-1} - \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i B_{i+1} + \varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 A_i\right); \;\; i = 4, \dots, n \end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir. $V_{3,t}$ nin *u* parametresine göre türevini alalım.

$$V_{3,tu} = \sqrt{|v|}((-\varepsilon_0\varepsilon_2 A_{3,s} + \varepsilon_0\varepsilon_2 k_1 B_3)V_1 - (\varepsilon_0\varepsilon_2 k_1 A_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2 B_{3,s})V_2$$
$$-(\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 C_4)V_3 + (C_{4,s} - \varepsilon_3\varepsilon_4 k_4 C_5)V_4$$
$$+(k_4 C_4 + C_{5,s} - \varepsilon_4\varepsilon_5 k_5 C_6)V_5$$
$$+\cdots + (k_{n-2}C_{n-2} + C_{(n-1),s} - \varepsilon_{n-1}\varepsilon_{b-1}k_{n-1}C_n)V_{n-1}$$
$$+(k_{n-1}C_{n-1} + C_{n,s})V_n) \quad (3.48)$$

dır. $V_{3,u}$ nun t parametresine göre türevi alınırsa

$$V_{3,ut} = \sqrt{|v|}((-\varepsilon_0\varepsilon_2 A_2)V_1 + (-\varepsilon_1\varepsilon_2 B_{3,s} + \varepsilon_1\varepsilon_3 k_3 B_4 - \varepsilon_0\varepsilon_2 k_1 A_3)V_2$$
$$-(\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_3)V_3 + (-\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_4 + k_{3,t})V_4 + k_3 V_{4,t} - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 \textstyle\sum_{i=5}^{n} B_i V_i) \quad (3.49)$$

elde edilir. (3.48) ve (3.49) denklemleri ve $V_{3,tu} = V_{3,ut}$ eşitliğinden

$$k_{3,t} = C_{4,s} - \varepsilon_0\eta k_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_4 - \varepsilon_3\varepsilon_4 k_4 C_5$$
$$V_{4,t} = -\varepsilon_0\varepsilon_3 A_4 V_1 - \varepsilon_1\varepsilon_3 B_4 V_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 C_4 V_3 + \textstyle\sum_{i=5}^{n} D_i V_i \quad (3.50)$$
$$D_i = \frac{1}{k_3} = (C_{i,s} + k_{i-1}C_{i-1} - \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i C_{i+1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 B_i);\ \ i = 4, \dots, n$$

elde edilir. Buradan,

$$V_t = M.V$$

elde edilir. Böylece

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_n \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 A_2 & 0 & B_3 & B_4 & \dots & B_n \\ -\varepsilon_0\varepsilon_2 A_3 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 B_3 & 0 & C_4 & \dots & C_n \\ -\varepsilon_0\varepsilon_3 A_4 & -\varepsilon_1\varepsilon_3 B_4 & -\varepsilon_2\varepsilon_3 C_4 & 0 & \dots & D_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon_0\varepsilon_{n-1}A_n & -\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}B_N & -\varepsilon_2\varepsilon_{n-1}C_N & -\varepsilon_3\varepsilon_{n-1}D_n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dır. A_i, B_i, C_i , D_i, ... yerine aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A_i = M_{1i}, \quad 1 < i \leq n$$

$$B_i = M_{2i}, \quad 2 < i \leq n$$

$$C_i = M_{3i}, \quad 3 < i \leq n$$

$$D_i = M_{4i}, \quad 4 < i \leq n$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

yazılır. Elde edilen eşitlikler tekrardan düzenlenirse

$$M_{1i} = q_{i,s} + k_{i-1}q_{i-1} - \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i q_{i+1} \quad i = 2,3,\dots,n.$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{k_{\alpha-1}}(M_{(\alpha-1)\beta,s} - \varepsilon_{\alpha-3}\varepsilon_{\alpha-2}k_{\alpha-2}M_{(\alpha-2)\beta} + k_{\beta-1}M_{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$-\varepsilon_{\beta-1}\varepsilon_\beta k_\beta M_{(\alpha-1)(\beta+1)})$$
$$\alpha = 2,\dots,n-1; \quad \beta = 3,\dots,n; \quad \alpha < \beta; \quad k_0 = k_n = 0$$

bulunur buradan

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \cdots & M_{1(n-1)} & M_{1n} \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 M_{13} & 0 & \cdots & M_{2(n-1)} & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon_0\varepsilon_{n-2}M_{1(n-1),s} & -\varepsilon_1\varepsilon_{n-2}M_{2(n-1),s} & \cdots & 0 & M_{(n-1)n} \\ -\varepsilon_0\varepsilon_{n-1}M_{1n,s} & -\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}M_{2n,s} & \cdots & -\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}M_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

ve (3.44), (3.47) ve (3.50) denklemlerinden

$$k_{1,t} = M_{12,s} - \eta k_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 M_{13},$$

$$k_{\alpha,t} = M_{\alpha(\alpha+1),s} - \eta k_\alpha + \varepsilon_{(\alpha-2)}\varepsilon_{(\alpha-1)}k_{(\alpha-1)}M_{(\alpha-1)(\alpha+1)}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. ρ eğrisinin $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise evolüsyon denklemleri

$$k_{1,t} = M_{12,s} - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 M_{13},$$

$$k_{\alpha,t} = M_{\alpha(\alpha+1),s} + \varepsilon_{(\alpha-2)}\varepsilon_{(\alpha-1)}k_{(\alpha-1)}M_{(\alpha-1)(\alpha+1)}$$

şeklindedir.

İspat Kabul edelim ki $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik olmasın. O halde

$$|v|_t = 0 \text{ yani } \eta = 0 \tag{3.51}$$

dır. (3.51) denklemi (3.38) denkleminde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.3 ρ, $\mathbb{E}_1^n$ de bir eğri ve ρ nun akışı $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eğrisinin akışı elastik değildir. Gerek ve yeter şart $[Q,M]$ Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$Q_t - M_s + [Q,M] = 0$$

dır.

İspat İspata başlamadan ispatta ihtiyaç duyacağımız bazı eşitlikler elde edelim. ρ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ olsun. $V = [V_1\ V_2\ V_3 \dots V_n]^T$ nın *u* parametresine göre türevi

$$V_u = \sqrt{|v|}V_s = \sqrt{|v|}QV \tag{3.52}$$

dir. (3.52) denkleminin t parametresine göre türevi alınır ve (3.37 da kullanılırsa

$$V_{ut} = \frac{|v|_t}{2\sqrt{v}} QV + \sqrt{v}(Q_t V + QV_t) = \sqrt{v}\left(\frac{|v|_t}{2v} Q + Q_t + QM\right) V \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.37) denkleminin u parametresine göre türevi alınır ve (3.52) denklemi kullanılırsa

$$V_{ut} = \sqrt{|v|} V_{ts} = \sqrt{v}(M_s V + MQV) = \sqrt{|v|}(M_s + MQ)V \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.53) ve (3.54) denklemlerinden

$$\begin{aligned} V_{ut} - V_{tu} &= \sqrt{v}\left(\frac{|v|_t}{2v} Q + Q_t + QM - M_s - MQ\right) V \\ &= \sqrt{v}\left(\frac{|v|_t}{2v} Q + Q_t - M_s + [Q, M]\right) V \end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Şimdi ispata başlanırsa,

(⇒) Kabul edelim ki $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akışı elastik olmasın. O halde $V_t = 0$ dır. $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevleri değişmeli olduğu göz önüne alınırsa

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

elde edilir.

(⇐) Kabul edelim ki integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın. Yani

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0 \tag{3.56}$$

olsun. (2.8) ve (3.37) denklemlerinden

$$[Q, M] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 M_{13} & \dots & M_{1n,s} \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_2 M_{13} & 0 & \dots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_{n-2} M_{1(n-1),s} & -\varepsilon_1 \varepsilon_{n-2} M_{2(n-1),s} & \dots & -\varepsilon_{n-3}\varepsilon_{n-2} k_{n-2} M_{(n-2)n} \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_{n-1} M_{1n,s} & -\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} M_{2n,s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

elde edilir. Q ‘un t parametresine göre türevi ve M ‘nin s parametresine göre türevleri alınarak ve (3.38) teoremi kullanılarak

$$M_s - Q_t =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \eta k_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 M_{13} & \dots & M_{1n,s} \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \eta k_1 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 k_2 M_{13} & 0 & \dots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_{n-2} M_{1(n-1),s} & -\varepsilon_1 \varepsilon_{n-2} M_{2(n-1),s} & \dots & nk_{n-1} - \varepsilon_{n-3}\varepsilon_{n-2} k_{n-2} M_{(n-2)n} \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_{n-1} M_{1n,s} & -\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} M_{2n,s} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

elde edilenler (3.56) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\eta k_1 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_0\varepsilon_1\eta k_1 & 0 & -\eta k_2 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_0\varepsilon_1\eta k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\eta k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.59}$$

elde edilir. (3.59) denkleminden de görüleceği üzere $\eta = 0$ ve $v = sabit$ olduğundan akış elastik değildir.

3.3. $\mathbb{E}^4$ de Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu

$\rho(u)$, $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğri ve $\rho(u)$ kuaterniyonik eğrisinin t anındaki yer vektörü $\rho(u,t)$ olsun. ρ kuaterniyonik eğrisi için metrik

$$v(u,t) = h\left\langle \frac{\partial\rho}{\partial u}, \frac{\partial\rho}{\partial u} \right\rangle \tag{3.60}$$

şeklinde verilebilir. $\rho(u,t)$ eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu ise,

$$l(u,t) = \int_0^u \left\| \frac{\partial\rho}{\partial u} \right\| du = \int_0^u \sqrt{v(u,t)}\, du, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial}{\partial u} \tag{3.61}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{u,t\}$ eğri üzerindeki koordinat fonksiyonlarıdır. $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğrinin akışı

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = f_1 T + f_2 N_1 + f_3 N_2 + f_4 N_3 \tag{3.62}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada f_1, f_2, f_3 ve f_4 kuaterniyonik ρ eğrimizin skaler hız fonkiyonları. Bu hız fonksiyonları sadece $\{\kappa, k, r-\kappa\}$ şeklindeki eğriliklere bağlıdır (Körpınar ve Baş, 2016: 1680).

Tanım 3.3.1. $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğri $\rho(u,t)$ olsun. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı, elastik değil ise

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial\rho}{\partial u} \right\| = 0$$

dir (Körpınar ve Baş, 2016: 1680)

Elastik olmayan eğri akışı için gerekli ve yeterli şartı söyleyebilmek için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 3.3.1. v metriği için evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta \tag{3.63}$$

dır. Burada $\eta = \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2\kappa$ dır (Körpınar ve Baş, 2016: 1680)

İspat (3.60) denklemini *t* parametresine göre, (3.62) denklemini de *u* parametresine göre türev alınıp $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevlerinin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} h \langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u} \rangle$$

$$= 2vh(T, \eta T + \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_i N_i)$$

elde edilir. Frenet formülleri yardımıyla

$$\begin{cases} \eta = \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa\right) \\ A_1 = f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 k \\ A_2 = f_2 k + \frac{\partial f_3}{\partial s} - f_4 (r - \kappa) \\ A_3 = \left(f_3 (r - \kappa) + \frac{\partial f_4}{\partial s}\right) \end{cases}$$

elde edilir. Yani $\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta$ dır.

Tanım 3.3.2. ρ, $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğri ve ρ nın yay uzunluğu varyasyonu $l(u,t)$ olsun. ρ nın zamanla bağlantılı hiç bir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} l(u,t) = 0 \text{ yani } v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

olmalıdır (Körpınar ve Baş, 2016: 1681)

Teorem 3.3.1. ρ, $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğri ve ρ nın akışı $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akışının elastik olmaması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$ olmasıdır.

İspat (⇒) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın, (3.61) den yay uzunluğunun değişimi

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \frac{v_t}{2\sqrt{v}} du \qquad (3.64)$$

dur. (3.63) denklemi, (3.64) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \sqrt{v} \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa\right) du$$

elde edilir. Akış elastik olmadığından dolayı $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$ dır. Buradan da $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$ elde edilir.

(⇐) Kabul edelim ki $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$ olsun. Bu eşitlik (3.63) denkleminin de yerine yazılırsa $v_t = 0$ ve $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$ elde edilir. Bu da eğrinin yay uzunluğun korunduğu anlamına gelir.Yani eğrinin akışı elastik değildir.

Teorem 3.3.2. ρ, $\mathbb{E}^4$ de kuaterniyonik bir eğri ve ρ eğrisinin akışı

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = f_1 T + f_2 N_1 + f_3 N_2 + f_4 N_3$$

olsun.

i. $V = \{T, N_1, N_2, N_3\}$ Frenet çatısının $[T\ N_1\ N_2\ N_3]^T$ evolüsyon denklemi

$$V_t = MV \tag{3.65}$$

şeklindedir. Burada *M* evolüsyon matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & 0 & B_2 & B_3 \\ -A_2 & -B_2 & 0 & C_3 \\ -A_3 & -B_3 & -C_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

$$\begin{cases} A_i = f_{i+1}k_i + k_i f_i - f_{i+2}k_{i+1}\,;\ \ i = 1,2,3, \\ B_j = \frac{1}{k_1}\left(A_{j,s} + k_j A_{j-1} - k_{j+1}A_{j+1}\right);\ \ j = 2,3, \\ C_3 = \frac{1}{k_2}\left(B_{3,s} + k_1 A_3 + k_3 B_2\right), \\ k_1 = \kappa,\ k_2 = k,\ k_3 = (r-\kappa),\ k_4 = 0 \end{cases}$$

dir.

ii. ρ eğrisinin eğrilikleri için evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = A_{1,s} - \eta\kappa - kA_2, \\ k_t = B_{2,s} - \eta\kappa - (r-\kappa)B_3 - \kappa A_2, \\ (r-\kappa)_t = C_{3,s} - \eta(r-\kappa) + kB_3 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat (3.62) denkleminin *u* parametresine göre türev alınırsa

$$\rho_{tu} = \sqrt{v}\rho_{ts} = \sqrt{v}\left(\eta T + \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_i N_i\right)$$

elde edilir. $\rho_u = \sqrt{v}\rho_s = \sqrt{v}T$ eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\rho_{ut} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}T + T_t\right) \tag{3.67}$$

elde edilir. $\rho_{ut} = \rho_{tu}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve önerme (3.60) dikkate alınırsa

$$T_t = \textstyle\sum_{i=1}^{3} A_i N_i$$

elde edilir. (3.3.67) in *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{tu} = \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}\left(A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3\right)$$

$$= \sqrt{v}(A_{1,s}N_1 + A_1(-\kappa T + kN_2) + A_{2,s}N_2 + A_2(-kN_1 + (r-\kappa)N_3)$$
$$+A_{3,s}N_3 + A_3(-(r-\kappa)N_2))$$

$$T_{tu} = \sqrt{v}((-A_1\kappa)T + \left(A_{1,s} - A_2k\right)N_1 + \left(A_1k + A_{2,s} + A_3\left(-(r-\kappa)\right)\right)N_2$$
$$+ \left(A_{3,s} + A_2(r-\kappa)\right)N_3) \tag{3.68}$$

denklemi elde edilir.

$$T_{u=}\sqrt{v}T_s = \sqrt{v}(\kappa N_1)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{ut} = \sqrt{v}\left(\left(\frac{v_t}{2v}\kappa + \kappa_t\right)N_1 + \kappa N_{1,t}\right) \tag{3.69}$$

elde edilir. $T_{tu} = T_{ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve (3.68) ve (3.69) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} \kappa_t = A_{1,s} - \eta\kappa - A_2k, \\ N_{1,t} = -A_1T + \sum_{j=2}^{3} B_jN_j, \\ B_j = \frac{1}{\kappa}\left(A_{j,s} + A_{j-1}k_j - A_{j+1}k_{j+1}\right) \end{cases} \tag{3.70}$$

elde edilir.

$$N_{1,u} = \sqrt{v}N_{1,s} = \sqrt{v}(-\kappa T + kN_2)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$N_{1,ut} = \frac{v_t}{2\sqrt{v}}(-\kappa + kN_2) + \sqrt{v}(-\kappa T + kN_2)'$$

$$= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}(-\kappa T + kN_2) + (-\kappa T + kN_2)'\right)$$

$$= \sqrt{v}(\eta(-\kappa T + kN_2) + (-\kappa T + kN_2)')$$

$$= \sqrt{v}\left(-\kappa\eta T + k\eta N_2 - \kappa_t T - \kappa T_t + k_tN_2 + kN_{2,t}\right)$$

$$= \sqrt{v}((-\kappa\eta - \kappa_t)T + (-\kappa A_1)N_1 + (k\eta - \kappa A_2 + k_t)N_2 + (-\kappa A_3)N_3$$
$$+kN_{2,t})$$

elde edilir. (3.70) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$N_{1,tu} = \sqrt{v}N_{1,ts} = \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}(-A_1T + B_2N_2 + B_3N_3)$$

$$= \sqrt{v}(\left(-A_{1,s}T\right) - A_1\kappa N_1 + B_{2,s}N_2 + B_2\left(-kN_1 + (r-\kappa)N_3 + B_{3,s}N_3\right)$$
$$+B_3(-(r-\kappa)N_2))$$

$$N_{1,tu} = \sqrt{v}(T(-A_{1,s}) - N_1(\kappa A_1 + kB_2) + N_2(B_{2,s} - (r-\kappa)B_3)$$
$$+N_3(B_2(r-\kappa) + B_{3,s})) \tag{3.71}$$

denklemleri elde edilir. $N_{1,tu} = N_{1,ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur, (3.16) ve (3.17) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_t = B_{2,s} - (r-\kappa)B_3 - k\eta + \kappa A_2, \\ N_{2,t} = -A_2 T - B_2 N_1 + C_3 N_3, \\ C_3 = \frac{1}{k}\left(\kappa A_3 + (r-\kappa)B_2 + B_{3,s}\right) \end{cases} \tag{3.72}$$

elde edilir.

$$N_{2,u} = \sqrt{v}N_{2,s} = \sqrt{v}(-kN_1 + (r-\kappa)N_3)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$N_{2,ut} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}(-kN_1 + (r-\kappa)N_3) + (-kN_1 + (r-\kappa)N_3)'\right)$$

$$N_{2,ut} = \sqrt{v}(\frac{v_t}{2v}(-kN_1 + (r-\kappa)N_3) \ + k_t N_1 - kN_{1,t} + (r-\kappa)_t N_3 + (r-\kappa)N_{3,t})$$
$$= \sqrt{v}(-kN_1 + (r-\kappa)N_3 + (-N_1(B_{2,s} - (r-\kappa)B_3 - k\eta + \kappa A_2)$$
$$-k(-A_1 T + B_2 N_2 + B_3 N_3) + (r-\kappa)_t N_3 + (r-\kappa)N_{3,t}))$$
$$N_{2,ut} = \sqrt{v}(T(kA_1) + N_1(-B_{2,s} + (r-\kappa)B_3 - \kappa A_2) + N_2(-kB_2)$$
$$+(\eta(r-\kappa) - kB_3 + (r-\kappa)_t) + (r-\kappa)N_{3,t}) \tag{3.73}$$

(3.72) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$N_{2,tu} = \sqrt{v}N_{2,ts} = \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}(-A_2 T - B_2 N_1 + C_3 N_3)$$
$$= \sqrt{v}((-A_{2,s}T - A_2(\kappa N_1 - B_{2,s}N_1 - B_2(-\kappa T + kN_2) + C_{3,s}N_3$$
$$+C_3(-(r-\kappa)))$$
$$= \sqrt{v}((-A_{2,s} - B_2\kappa)T - (A_2\kappa + B_{2,s})N_1 + (-B_2 k - C_3(r-\kappa))N_2$$
$$+C_{3,s}N_3) \tag{3.74}$$

elde edilir. $N_{2,ut} = N_{2,tu}$ olduğu göz önünde bulundurulur (3.73) ve (3.74) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} (r-\kappa)_t = C_{3,s} + kB_3 - \eta(r-\kappa), \\ N_{3,t} = -A_3 T - B_3 N_1 - C_3 N_2 \end{cases}$$

elde edilir. Elde edilen denklemler

$$V = [T\ N_1\ N_2\ N_3]^T \text{ ve } M = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & 0 & B_2 & B_3 \\ -A_2 & -B_2 & 0 & C_3 \\ -A_3 & -B_3 & -C_3 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$V_t = MV$$

şeklinde ifade edilebilir. M matrisinin bileşenleri açık olarak

$$\begin{cases} A_i = f_{i+1}k_i + k_i f_i - f_{i+2}k_{i+1}\ ;\ \ i = 1,2,3, \\ B_j = \frac{1}{k_1}\left(A_{j,s} + k_j A_{j-1} - k_{j+1}A_{j+1}\right),\ j = 2,3, \\ C_3 = \frac{1}{k_2}\left(B_{3,s} + k_1 A_3 + k_3 B_2\right), \\ k_1 = \kappa,\ k_2 = k,\ k_3 = (r-\kappa),\ k_4 = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = A_{1,s} - \eta\kappa - kA_2, \\ k_t = B_{2,s} - (r-\kappa)B_3 - k\eta + \kappa A_2, \\ (r-\kappa)_t = C_{3,s} + kB_3 - \eta(r-\kappa) \end{cases} \tag{3.75}$$

şeklinde elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1. ρ eğrisinin $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = A_{1,s} - kA_2, \\ k_t = B_{2,s} - (r-\kappa)B_3 + \kappa A_2, \\ (r-\kappa)_t = C_{3,s} + kB_3 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eğri akışı elastik değil ise

$$v_t = 0 \text{ yani } \eta = 0 \tag{3.76}$$

dır. Öyleyse (3.76) denklemi (3.75) denkleminde yerine yazılırsa önerme sağlanmış olur.

Teorem 3.3.3 ρ, $\mathbb{E}^4$ de bir eğri ve ρ nın akışı $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eğrisinin akışı elastik değildir gerek ve yeter şart $[Q, M]$ Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

dır.

İspat İspata başlamadan ispatta ihtiyaç duyacağımız bazı eşitlikler elde edelim. ρ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ olsun. $V = [T\ N_1\ N_2\ N_3]^T$ nın *u* parametresine göre türevi

$$V_u = \sqrt{v}V_s = \sqrt{v}QV \tag{3.77}$$

dir. Bu denklemin *t* parametresine göre türevi alınır ve (3.65) denkleminde kullanılırsa

$$V_{ut} = \frac{v_t}{2\sqrt{v}}QV + \sqrt{v}(Q_tV + QV_t) = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t + QM\right)V \tag{3.78}$$

elde edilir. (3.65) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınır ve (3.77) denklemi kullanılırsa

$$V_{ut} = \sqrt{v}V_{ts} = \sqrt{v}(M_sV + MQV) = \sqrt{v}(M_s + MQ)V \tag{3.79}$$

bulunur ve (3.78) ve (3.79) denklemlerinden

$$V_{ut} - V_{tu} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t + QM - M_s - QM\right)V$$

$$= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t - M_s + [Q, M]\right)V$$

elde edilir. Şimdi ispata başlanabilir.

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ elastik olmasın. O halde $V_t = 0$ dır. $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevleri değişmeli olduğu göz önüne alınırsa

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın. Yani

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0 \tag{3.80}$$

olsun.

(2.12) ve (3.66) denklemlerinden aşağıdaki matris elde edilir.

$$[Q, M] = \begin{bmatrix} 0 & kA_2 & A_{2,s} & A_{3,s} \\ -kA_2 & 0 & -\kappa A_2 + (r - \kappa)B_3 & B_{3,s} \\ -A_{2,s} & \kappa A_2 - (r - \kappa)B_3 & 0 & kB_3 \\ -A_{3,s} & -B_{3,s} & -kB_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

Q nun *t* parametresine göre M nin de s parametresine göre türevi alınır ve (3.75) denklemi kullanılırsa

$[Q_t - M_s] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \eta\kappa - kA_2 & -A_{2,s} & -A_{3,s} \\ \eta\kappa + kA_2 & 0 & -\eta\kappa + \kappa A_2 - (r-\kappa)B_3 & -B_{3,s} \\ A_{2,s} & \eta\kappa - \kappa A_2 + (r-\kappa)B_3 & 0 & -\eta(r-\kappa) + kB_3 \\ A_{3,s} & -B_{3,s} & \eta(r-\kappa) - kB_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

elde edilir. (3.81) ve (3.82) denklemleri (3.80) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\eta\kappa & 0 & 0 \\ \eta\kappa & 0 & -\eta\kappa & 0 \\ 0 & \eta\kappa & 0 & -\eta(r-\kappa) \\ 0 & 0 & \eta(r-\kappa) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. Son denklemden $\eta = 0$ için v nin sabit olduğu görülür. Yani akış elastik değildir.

Sonuç 3.3.2. $\mathbb{E}^4$ de $\rho(u,t)$ nun akışı elastik olmasın. Q ve M matrisleri değişmeli ise Q evolüsyon matrisinin A_2 ve B_3 bileşenleri

$$A_2 = B_3 = 0$$

dır.

İspat Q ve M matrisleri değişmeli olduğundan $[Q, M] = 0$ dır. Öyleyse (3.80) den

$$M_s - Q_t = 0 \quad (3.83)$$

elde edilir. Eğri akışı elastik olmayan bir eğri akışı olduğundan $\eta = 0$, yani

$$M_S - Q_t = \begin{bmatrix} 0 & kA_2 & -A_{2,s} & -A_{3,s} \\ kA_2 & 0 & -\kappa A_2 + (r-\kappa)B_3 & B_{3,s} \\ -A_{2,s} & \kappa A_2 - (r-\kappa)B_3 & 0 & kB_3 \\ -A_{3,s} & -B_{3,s} & -kB_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

dir. (3.83) ve (3.84) eşitliklerinden

$$A_2 = B_3 = 0$$

elde edilir.

4. $\mathbb{E}_2^4$ DE YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU

$\rho(u)$, $\mathbb{E}_2^4$ de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve bu eğrinin *t* anındaki yer vektörü $\rho(u,t)$ olsun. $\rho(u,t)$ için metrik

$$v(u,t) = h\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) \tag{4.1}$$

şeklinde verilebilir. $\rho(u,t)$ eğrisinin yay uzunluğu ise

$$l(u,t) = \int_0^u \left\|\frac{\partial \rho}{\partial u}\right\| du = \int_0^u \sqrt{v(u,t)}\, du, \qquad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{v}}\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{u,t\}$ eğri üzerindeki koordinat fonksiyonlarıdır. $\mathbb{E}_2^4$ de $\rho(u)$ yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ olmak üzere akışı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{q}_1\mathcal{T} + \mathrm{q}_2\mathcal{N}_1 + \mathrm{q}_3\mathcal{N}_2 + \mathrm{q}_4\mathcal{N}_3 \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3, \mathrm{q}_4$ yarı-reel kuaterniyonik ρ eğrimizin skaler hız fonksiyonlarıdır (Yıldız vd., 2017: 325).

Tanım 4.1. $\mathbb{E}_2^4$ de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri $\rho(u,t)$ olsun. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial \rho}{\partial u}\right\| = 0$$

dir (Yıldız vd., 2017: 325).

Elastik olmayan eğri akışı için gerekli ve yeterli şartı verebilmek için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 4.1. *v* metriği için evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta \tag{4.4}$$

dır. Burada $\eta = \varepsilon_T\left(\frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s} - \varepsilon_t\varepsilon_N\mathrm{q}_2\kappa\right)$ dır.

İspat (4.1) denkleminde *t* parametresine göre, (4.3) denkleminde de u parametresine göre türev alınıp $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevlerinin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} h\left\langle\frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial u}\right\rangle \\ &= 2h\left\langle\frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial u}\right\rangle \\ &= 2h\left\langle\frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\rangle\end{aligned}$$

$= 2h\,\langle \frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{q}_1\mathcal{T} + \mathrm{q}_2\mathcal{N}_1 + \mathrm{q}_3\mathcal{N}_2 + \mathrm{q}_4\mathcal{N}_3)\rangle$

$= 2h\,\langle \sqrt{v}\frac{\partial \rho}{\partial s}, \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{q}_1\mathcal{T} + \mathrm{q}_2\mathcal{N}_1 + \mathrm{q}_3\mathcal{N}_2 + \mathrm{q}_4\mathcal{N}_3)\rangle$

$=2vh\,\langle \frac{\partial \rho}{\partial s}, \frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s}\mathcal{T} + \mathrm{q}_1(\varepsilon_N\kappa\mathcal{N}_1) + \frac{\partial \mathrm{q}_2}{\partial s}\mathcal{N}_1 + \mathrm{q}_2(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2) + \frac{\partial \mathrm{q}_3}{\partial s}\mathcal{N}_2 +$

$\mathrm{q}_3(-\varepsilon_t k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3) + \frac{\partial \mathrm{q}_4}{\partial s}\mathcal{N}_3 + \mathrm{q}_4(-\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_2\rangle$

$= 2vh\langle \mathcal{T}, \eta\mathcal{T} + \sum_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i\mathcal{N}_i\rangle$

elde edilir. Frenet formülleri yardımıyla

$$\begin{cases} \eta = \varepsilon_T\left(\frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s} - \varepsilon_t\varepsilon_N\mathrm{q}_2\kappa\right), \\ \mathcal{A}_1 = \varepsilon_N\mathrm{q}_1\kappa + \frac{\partial \mathrm{q}_2}{\partial s} - \varepsilon_t\mathrm{q}_3 k, \\ \mathcal{A}_2 = \varepsilon_n\mathrm{q}_2 k + \frac{\partial \mathrm{q}_3}{\partial s} - \varepsilon_b\mathrm{q}_4(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa), \\ \mathcal{A}_3 = \left(\varepsilon_n\mathrm{q}_3(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa) + \frac{\partial \mathrm{q}_4}{\partial s}\right) \end{cases} \tag{4.5}$$

elde edilir. Yani $\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta$ dır.

Tanım 4.2. ρ, $\mathbb{E}_2^4$ de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve ρ nın yay uzunluğu varyasyonu $l(u,t)$ olsun. ρ nın zamanla bağlantılı hiçbir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t}l(u,t) = 0 \text{ yani } v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{4.6}$$

olmalıdır.

Teorem 4.1. ρ, $\mathbb{E}_2^4$ de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve ρ nın akışı $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ akışının elastik olmaması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s} = \varepsilon_t\varepsilon_N\mathrm{q}_2\kappa$ dır.

İspat (⇒) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın, (4.2) den yay uzunluğunun değişimi

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \frac{v_t}{2\sqrt{v}}du \tag{4.7}$$

dur.(4.4) denklemi (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \sqrt{v}\varepsilon_T\left(\frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s} - \varepsilon_t\varepsilon_N\mathrm{q}_2\kappa\right)du$$

elde edilir. Akış elastik olmadığından dolayı $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$ dır. Buradan da $\frac{\partial \mathrm{q}_1}{\partial s} = \varepsilon_t\varepsilon_N\mathrm{q}_2\kappa$ elde edilir.

(⇐) Kabul edelim ki $\frac{\partial q_1}{\partial s} = \varepsilon_t \varepsilon_N \mathrm{q}_2 \kappa$ olsun. Bu eşitlik (4.4) denkleminin de yerine yazılırsa $v_t = 0$ ve $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$ elde edilir. Bu da eğrinin yay uzunluğun korunduğu anlamına gelir. Böylece eğrinin akışı elastik değildir.

Teorem 4.2. ρ, $\mathbb{E}_2^4$ de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve ρ eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{q}_1 \mathcal{T} + \mathrm{q}_2 \mathcal{N}_1 + \mathrm{q}_3 \mathcal{N}_2 + \mathrm{q}_4 \mathcal{N}_3$$

olsun.

i. $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3\}$ Frenet çatısının $[\mathcal{T}\ \mathcal{N}_1\ \mathcal{N}_2\ \mathcal{N}_3]^T$ evolüsyon denklemi

$$V_t = \mathcal{R} V \tag{4.8}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{R}$ evolüsyon matrisi

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ -\varepsilon_t \mathcal{A}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \\ -\varepsilon_n \mathcal{A}_2 & -\varepsilon_t \varepsilon_n \mathcal{B}_2 & 0 & \mathcal{C}_3 \\ -\varepsilon_b \mathcal{A}_3 & -\varepsilon_t \varepsilon_b \mathcal{B}_3 & -\varepsilon_n \varepsilon_b \mathcal{C}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \varepsilon_N \mathrm{q}_1 \kappa - \varepsilon_t \mathrm{q}_3 k + \mathrm{q}_{2,s}, \\ \mathcal{A}_2 = \varepsilon_n \mathrm{q}_2 k + \mathrm{q}_{3,s} - \varepsilon_b \mathrm{q}_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa), \\ \mathcal{A}_3 = \varepsilon_n \mathrm{q}_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \mathrm{q}_{4,s}, \\ \mathcal{B}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N \mathcal{A}_{2,s} + \varepsilon_n \varepsilon_N k \mathcal{A}_1 - \varepsilon_b \varepsilon_N (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \mathcal{A}_3\right), \\ \mathcal{B}_3 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N \mathcal{A}_{2,s} + \varepsilon_n \varepsilon_N (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \mathcal{A}_2\right), \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k}\left(\varepsilon_n \mathcal{B}_{3,s} + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_3 + (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \mathcal{B}_2\right), \\ k_1 = \kappa,\ k_2 = k,\ k_3 = (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa),\ k_4 = 0 \end{cases}$$

dir.

ii. ρ eğrisinin eğrilikleri için evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = \varepsilon_N \mathcal{A}_{1,s} - \eta \kappa - \varepsilon_t \varepsilon_N k \mathcal{A}_2, \\ k_t = \varepsilon_n \mathcal{B}_{2,s} - \eta \kappa - \varepsilon_n \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \mathcal{B}_3 + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_2, \\ (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)_t = \varepsilon_n \mathcal{C}_{3,s} - \eta (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_t \varepsilon_n k \mathcal{B}_3 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat (4.3) denkleminden *u* parametresine göre türev alınırsa

$$\rho_{tu} = \sqrt{v} \rho_{ts} = \sqrt{v}\left(\eta \mathcal{T} + \textstyle\sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \mathcal{N}_i\right) \tag{4.10}$$

elde edilir. $\rho_u = \sqrt{v} \rho_s = \sqrt{v} \mathcal{T}$ eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\rho_{ut} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}\mathcal{T} + \mathcal{T}_t\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. $\rho_{ut} = \rho_{tu}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.5), (4.10) ve (4.11) denklemleri kullanılırsa

$$\mathcal{T}_t = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \mathcal{N}_i \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) in *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{tu} &= \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{A}_1\mathcal{N}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{N}_2 + \mathcal{A}_3\mathcal{N}_3) \\
&= \sqrt{v}(\mathcal{A}_{1,s}\mathcal{N}_1 + \mathcal{A}_1(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2) + \mathcal{A}_{2,s}\mathcal{N}_2 \\
&\quad +\mathcal{A}_2(-\varepsilon_t k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3) + \mathcal{A}_{3,s}\mathcal{N}_3 \\
&\quad +\mathcal{A}_3(-\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_2)) \\
&= \sqrt{v}((-\varepsilon_t\varepsilon_N\mathcal{A}_1\kappa)\mathcal{T} + \left(\mathcal{A}_{1,s} - \varepsilon_t\mathcal{A}_2 k\right)\mathcal{N}_1 \\
&\quad +\left(\varepsilon_n\mathcal{A}_1 k + \mathcal{A}_{2,s} - \varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_3\right)\mathcal{N}_2 \\
&\quad +\left(\mathcal{A}_{3,s} + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_2\right)\mathcal{N}_3)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

denklemi elde edilir.

$$\mathcal{T}_u = \sqrt{v}\mathcal{T}_s = \left(\varepsilon_N\sqrt{v}(\kappa\mathcal{N}_1)\right)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{T}_{ut} = \sqrt{v}\left(\varepsilon_N\eta\kappa\mathcal{N}_1 + \varepsilon_N\kappa_t\mathcal{N}_1 + \varepsilon_N\kappa\mathcal{N}_{1,t}\right) \tag{4.14}$$

elde edilir. $\mathcal{T}_{tu} = \mathcal{T}_{ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.13) ve (4.14) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases}
\kappa_t = \varepsilon_N\mathcal{A}_{1,s} - \eta\kappa - \varepsilon_t\varepsilon_N k\mathcal{A}_2, \\
\mathcal{N}_{1,t} = -\varepsilon_t\mathcal{A}_1\mathcal{T} + \sum_{j=2}^{3}\mathcal{B}_j\mathcal{N}_j, \\
\mathcal{B}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N\mathcal{A}_{2,s} + \varepsilon_n\varepsilon_N k\mathcal{A}_1 - \varepsilon_b\varepsilon_N(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_3\right), \\
\mathcal{B}_3 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N\mathcal{A}_{3,s} + \varepsilon_n\varepsilon_N(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_2\right)
\end{cases} \tag{4.15}$$

elde edilir.

$$\mathcal{N}_{1,u} = \sqrt{v}\mathcal{N}_{1,s} = \sqrt{v}(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{N}_{1,ut} = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{v}(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2)$$

$$= \sqrt{v_t}(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2) + \sqrt{v}(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa_t)\mathcal{T} + \sqrt{v}(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa)\mathcal{T}_t$$

$$+\varepsilon_n k_t\mathcal{N}_2 + \varepsilon_n k\mathcal{N}_{2,t})$$

$$= \sqrt{v}((-\varepsilon_t\mathcal{A}_{1,s} + \mathcal{A}_2)\mathcal{T} + (-\varepsilon_t\varepsilon_N k\mathcal{A}_1)\mathcal{N}_1 + (\eta\varepsilon_n k - \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 + \varepsilon_n k_t)\mathcal{N}_2$$

$$+(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_3)\mathcal{N}_3 + \varepsilon_n k\mathcal{N}_{2,t}) \qquad (4.16)$$

(4.15) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{N}_{1,tu} = \sqrt{v}\mathcal{N}_{1,ts} = \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}\left(-\varepsilon_t\mathcal{A}_1\mathcal{T} + \sum_{j=2}^{3}\mathcal{B}_j\mathcal{N}_j\right)$$

$$= \sqrt{v}((-\varepsilon_t\mathcal{A}_{1,s}\mathcal{T}) - \varepsilon_t\mathcal{A}_1\kappa\mathcal{N}_1 + \mathcal{B}_{2,s}\mathcal{N}_2$$

$$+\mathcal{B}_2\left(-\varepsilon_t k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3 + \mathcal{B}_{3,s}\mathcal{N}_3\right)$$

$$+\varepsilon_b\mathcal{B}_3(-(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_2)) \qquad (4.17)$$

denklemleri elde edilir. $\mathcal{N}_{1,tu} = \mathcal{N}_{1,ut}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.16) ve (4.17) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_t = \varepsilon_n\mathcal{B}_{2,s} - \varepsilon_n\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_3 - k\eta + \varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2, \\ \mathcal{N}_{2,t} = -\varepsilon_n\mathcal{A}_2\mathcal{T} - \varepsilon_t\varepsilon_n\mathcal{B}_2\mathcal{N}_1 + \mathcal{C}_3\mathcal{N}_3\,, \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k}\left(\varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_3 + (r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_2 + \varepsilon_n\mathcal{B}_{3,s}\right) \end{cases} \qquad (4.18)$$

elde edilir.

$$\mathcal{N}_{2,u} = \sqrt{v}\mathcal{N}_{2,s} = \sqrt{v}(-\varepsilon_t k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3)$$

eşitliğinin *t* parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{N}_{2,ut} = \frac{v_t}{2\sqrt{v}}(-\varepsilon_t k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3)$$

$$+\sqrt{v}\left(-\varepsilon_t k_t\mathcal{N}_1 - \varepsilon_t k\mathcal{N}_{1,t} + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N)_t\mathcal{N}_3 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N)\mathcal{N}_{3,t}\right)$$

$$= \sqrt{v}(-\varepsilon_t\eta k\mathcal{N}_1 + \varepsilon_n\eta(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{N}_3 - \varepsilon_t k_t\mathcal{N}_1 - \varepsilon_t k\mathcal{N}_{1,t}$$

$$+\varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N)_t\mathcal{N}_3 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N)\mathcal{N}_{3,t}) \qquad (4.19)$$

(4.18) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathcal{N}_{2,tu} = \sqrt{v}\mathcal{N}_{2,ts} = \sqrt{v}\frac{\partial}{\partial s}(-\varepsilon_n\mathcal{A}_2\mathcal{T} - \varepsilon_t\varepsilon_n\mathcal{B}_2\mathcal{N}_1 + \mathcal{C}_3\mathcal{N}_3)$$

$$= \sqrt{v}(-\varepsilon_n\mathcal{A}_{2,s}\mathcal{T} - \varepsilon_n\mathcal{A}_2(\varepsilon_N\kappa\mathcal{N}_1) - \varepsilon_t\varepsilon_n\mathcal{B}_{2,s}\mathcal{N}_1$$

$$-\varepsilon_t\varepsilon_n\mathcal{B}_2(-\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{T} + \varepsilon_n k\mathcal{N}_2 + \mathcal{C}_{3,s}\mathcal{N}_3 + \mathcal{C}_3\left(-\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\right))$$

$$= \sqrt{v}((-\varepsilon_n \mathcal{A}_{2,s} - \varepsilon_n \varepsilon_N \mathcal{B}_2 \kappa)\mathcal{T} - \left(\varepsilon_n \varepsilon_N \mathcal{A}_2 \kappa + \varepsilon_t \varepsilon_n \mathcal{B}_{2,s}\right)\mathcal{N}_1$$
$$+ \left(-\varepsilon_t \mathcal{B}_2 k - \varepsilon_b \mathcal{C}_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\right)\mathcal{N}_2 + \mathcal{C}_{3,s}\mathcal{N}_3) \tag{4.20}$$

elde edilir. $\mathcal{N}_{2,ut} = \mathcal{N}_{2,tu}$ olduğu göz önünde bulundurulur (4.19) ve (4.20) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)_t = \varepsilon_n \mathcal{C}_{3,s} + \varepsilon_t \varepsilon_n k \mathcal{B}_3 - \eta (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa), \\ \mathcal{N}_{3,t} = -\varepsilon_b \mathcal{A}_3 \mathcal{T} - \varepsilon_t \varepsilon_b \mathcal{B}_3 \mathcal{N}_1 - \varepsilon_n \varepsilon_b \mathcal{C}_3 \mathcal{N}_2 \end{cases}$$

elde edilir. Elde edilen denklemler matris formunda,

$$V = [\mathcal{T}\ \mathcal{N}_1\ \mathcal{N}_2\ \mathcal{N}_3]^T$$

ve

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ -\varepsilon_t \mathcal{A}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \\ -\varepsilon_n \mathcal{A}_2 & -\varepsilon_t \varepsilon_n \mathcal{B}_2 & 0 & \mathcal{C}_3 \\ -\varepsilon_B \mathcal{A}_3 & -\varepsilon_t \varepsilon_b \mathcal{B}_3 & -\varepsilon_n \varepsilon_b \mathcal{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$V_t = \mathcal{R}V$$

şeklinde ifade edilir. $\mathcal{R}$ matrisinin bileşenleri açık olarak

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \varepsilon_N \mathfrak{q}_1 \kappa - \varepsilon_N \mathfrak{q}_3 k + \mathfrak{q}_{2,s}, \\ \mathcal{A}_2 = \varepsilon_n \mathfrak{q}_2 k + \mathfrak{q}_{3,s} - \varepsilon_b \mathfrak{q}_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa), \\ \mathcal{A}_3 = \varepsilon_n \mathfrak{q}_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \mathfrak{q}_{4,s}, \\ \mathcal{B}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N \mathcal{A}_{2,s} + \varepsilon_n \varepsilon_N k \mathcal{A}_1 - \varepsilon_b \varepsilon_N (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{A}_3\right), \\ \mathcal{B}_3 = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_N \mathcal{A}_{3,s} + \varepsilon_n \varepsilon_N (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{A}_2\right), \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k}\left(\varepsilon_n \mathcal{B}_{3,s} + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_3 + (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{B}_2\right), \\ k_1 = \kappa,\ k_2 = k,\ k_3 = (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa),\ k_4 = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = \varepsilon_N \mathcal{A}_{1,s} - \eta \kappa - \varepsilon_t \varepsilon_N k \mathcal{A}_2, \\ k_t = \varepsilon_n \mathcal{B}_{2,s} - \eta \kappa - \varepsilon_n \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{B}_3 + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_2, \\ (r - \kappa)_t = \varepsilon_n \mathcal{C}_{3,s} - \eta (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_t \varepsilon_n k \mathcal{B}_3 \end{cases} \tag{4.21}$$

şeklinde elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. ρ eğrisinin $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ akışı elastik değil ise evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases}\kappa_t = \varepsilon_N \mathcal{A}_{1,s} - \varepsilon_t \varepsilon_N k \mathcal{A}_2, \\ k_t = \varepsilon_n \mathcal{B}_{2,s} - \varepsilon_n \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{B}_3 + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_2, \\ (r-\kappa)_t = \varepsilon_n \mathcal{C}_{3,s} + \varepsilon_t \varepsilon_n k \mathcal{B}_3\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eğri akışı elastik değil ise

$$v_t = 0 \text{ yani } \eta = 0 \tag{4.22}$$

dır. Öyleyse (4.22) denklemi (4.21) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. ρ, $\mathbb{E}_2^4$ de bir eğri ve ρ nın akışı $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eğrisinin akışı elastik değildir gerek ve yeter şart $[\mathcal{Q},\mathcal{R}]$ Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s + [\mathcal{Q},\mathcal{R}] = 0$$

dır.

İspat İspata başlamadan önce bazı eşitlikler kullanır. ρ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathcal{T},\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2,\mathcal{N}_3\}$ ve $V = [\mathcal{T}\ \mathcal{N}_1\ \mathcal{N}_2\ \mathcal{N}_3]^T$ olsun. *V* nin *u* parametresine göre türevi

$$V_u = \sqrt{v} V_s = \sqrt{v}\mathcal{Q}V \tag{4.23}$$

dir. (4.23) denkleminin *t* parametresine göre türevi alınır ve (4.8) denkleminde kullanılırsa

$$V_{ut} = \frac{v_t}{2\sqrt{v}}\mathcal{Q}V + \sqrt{v}(\mathcal{Q}_t V + \mathcal{Q}V_t) = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_t + \mathcal{Q}\mathcal{R}\right)V \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.8) denkleminin *u* parametresine göre türevi alınır ve (4.23) denklemi kullanılırsa

$$V_{tu} = \sqrt{v}V_{ts} = \sqrt{v}(\mathcal{R}_s V + \mathcal{R}\mathcal{Q}V) = \sqrt{v}(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}\mathcal{Q})V \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) denklemlerinden

$$\begin{aligned} V_{ut} - V_{tu} &= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_t + \mathcal{Q}\mathcal{R} - \mathcal{R}_s - \mathcal{R}\mathcal{Q}\right)V \\ &= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s + [\mathcal{Q},\mathcal{R}]\right)V \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Şimdi ispata başlanabilir.

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ elastik olmasın. O halde $g_t = 0$ dır. *u* parametresine ve *t* parametresine göre kısmi türevlerin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s + [\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın. Yani

$$\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s + [\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = 0 \tag{4.27}$$

olsun. (2.13) ve (4.9) denklemlerinden

$$[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_t k\mathcal{A}_2 & \varepsilon_N \kappa \mathcal{B}_2 - \varepsilon_n k\mathcal{A}_1 + \varepsilon_b (r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_3 & \varepsilon_N \kappa \mathcal{B}_3 - \varepsilon_n (r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_2 \\ -k\mathcal{A}_2 & \varepsilon_n\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 - \varepsilon_t\varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_3 & -\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 + \varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_3 & -\varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_3 + \varepsilon_n k\mathcal{C}_3 + \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_2 \\ k\mathcal{A}_1 - \varepsilon_n\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 - \varepsilon_n\varepsilon_N(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_3 & \varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_2 - \varepsilon_b\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_3 + \varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_b k\mathcal{C}_3 & 0 & -\varepsilon_t k\mathcal{B}_3 \\ \varepsilon_n\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_2 - \varepsilon_b\varepsilon_N\kappa\mathcal{B}_3 & \varepsilon_N\kappa\mathcal{B}_3 - \varepsilon_n(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{A}_2 & \varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_b k\mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

elde edilir. $\mathcal{Q}$ nun t parametresine göre $\mathcal{R}$ nin de s parametresine göre türevi alınıp (4.21) kullanılırsa

$$[\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N\eta\kappa - \varepsilon_t k\mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_{2,s} & -\mathcal{A}_{3,s} \\ -\varepsilon_t\varepsilon_N\eta\kappa + k\mathcal{A}_2 & 0 & -\varepsilon_n\eta\kappa + \varepsilon_t\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 - \varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_3 & -\mathcal{B}_{3,s} \\ \varepsilon_n\mathcal{A}_{2,s} & -\varepsilon_n\eta\kappa - \varepsilon_n\varepsilon_N\kappa\mathcal{A}_2 + \varepsilon_t\varepsilon_n\varepsilon_b(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)\mathcal{B}_3 & 0 & -\varepsilon_n\eta(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa) + \varepsilon_t k\mathcal{B}_3 \\ \varepsilon_b\mathcal{A}_{3,s} & -\varepsilon_t\varepsilon_b\mathcal{B}_{3,s} & \varepsilon_b\eta(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa) - \varepsilon_t\varepsilon_n k\mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) denklemleri (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N\eta & 0 & 0 \\ -\varepsilon_t\varepsilon_N\eta\kappa & 0 & -\varepsilon_n\eta\kappa & 0 \\ 0 & -\varepsilon_n\eta\kappa & 0 & -\varepsilon_n\eta(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa) \\ 0 & 0 & \varepsilon_b\eta(r - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. Son denklemden $\eta = 0$ için v=sabit olduğu görülür. Yani akış elastik değildir.

Sonuç 4.2 $\rho(u, t)$ nun akışı elastik olmasın. $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ matrisleri değişmeli ise $\mathcal{Q}$ evolüsyon matrisinin $\mathcal{A}_2$ ve $\mathcal{B}_3$ bileşenleri

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_3 = 0$$

dır.

İspat $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ matrisleri değişmeli olduğundan $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = 0$ dır. İntegralllenebilirlik durumu (4.27) denklemi için aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s = 0 \tag{4.30}$$

Eğri akışı elastik olmayan bir eğri akışı olduğundan $\eta = 0$, yani

$$\mathcal{Q}_t - \mathcal{R}_s =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_t k \mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_{2,s} & -\mathcal{A}_{3,s} \\ k\mathcal{A}_2 & 0 & \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_2 + \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{B}_3 & -\mathcal{B}_{3,s} \\ -\varepsilon_n \mathcal{A}_{2,s} & -\varepsilon_n \varepsilon_N \kappa \mathcal{A}_2 + \varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\mathcal{B}_3 & 0 & \varepsilon_t k \mathcal{B}_3 \\ -\varepsilon_b \mathcal{A}_{3,s} & \varepsilon_t \varepsilon_b \mathcal{B}_{3,s} & -\varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_b k \mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

dir.

(4.30) ve (4.31) eşitliklerinden

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_3 = 0$$

dır.

Örnek 4.1. $\mathbb{E}_2^4$ de yarı reel kuaterniyonik eğri

$$\rho(s) = \left(coshs, sin\sqrt{2s}, sins, sin\sqrt{2s}\right),$$

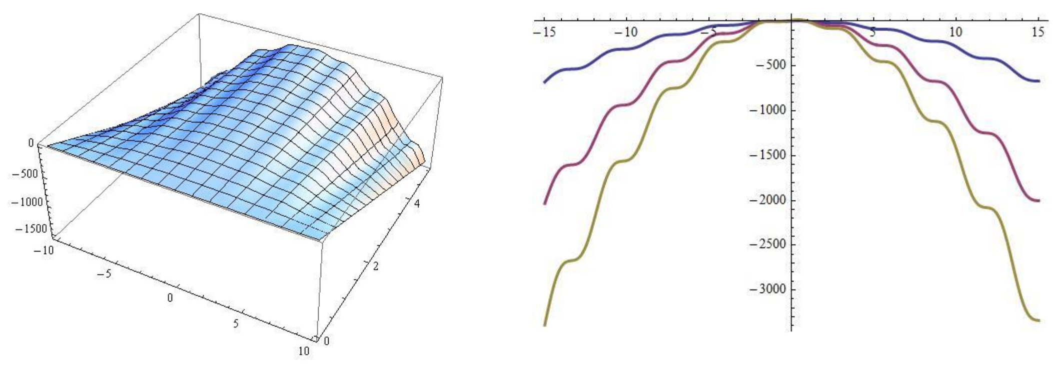
olsun. $\rho(s)$ eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa = -1, k = \sqrt{2}, (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) = 0.$$

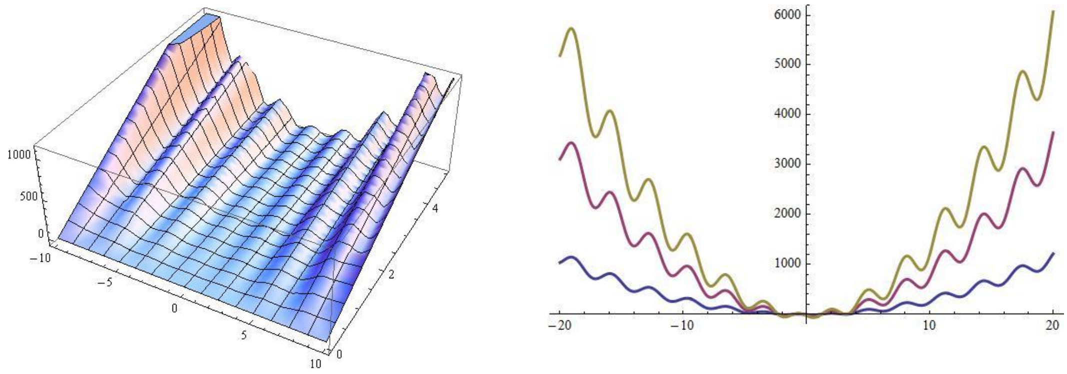
şeklinde elde edilir. Eğer skalar hız fonksiyonları $\mathfrak{q}_1 = s^2, \mathfrak{q}_2 = s^2, \mathfrak{q}_3 = s.sinscoss$ ve $\mathfrak{q}_4 = s^2.coss$ seçilirse eğriliklerin evolüsyon denklemlerinin,

$$D: \begin{cases} -10 < s < 10 \\ 0 < t \leq 5 \end{cases}$$

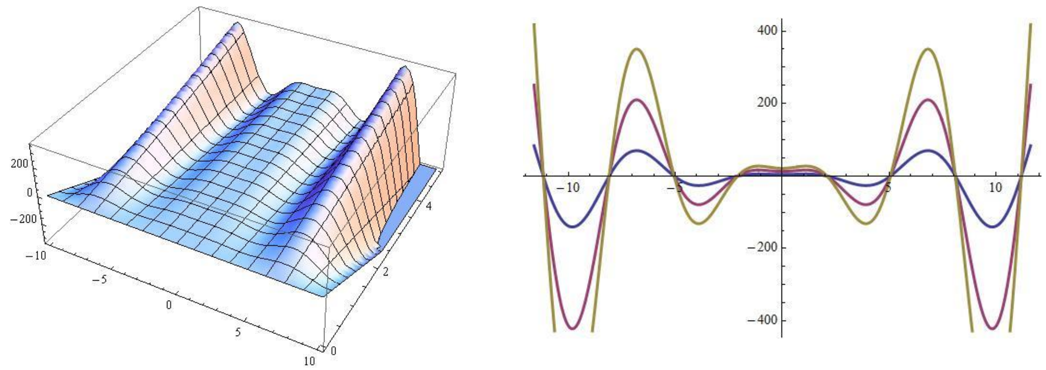
için grafikleri (Şekil 4.1.) (Şekil 4.2.) ve (Şekil 4.3.) deki gibidir.



Şekil 4.1. $\kappa(s,t)$ evolüsyonu



Şekil 4.2. $k(s,t)$ evolüsyonu

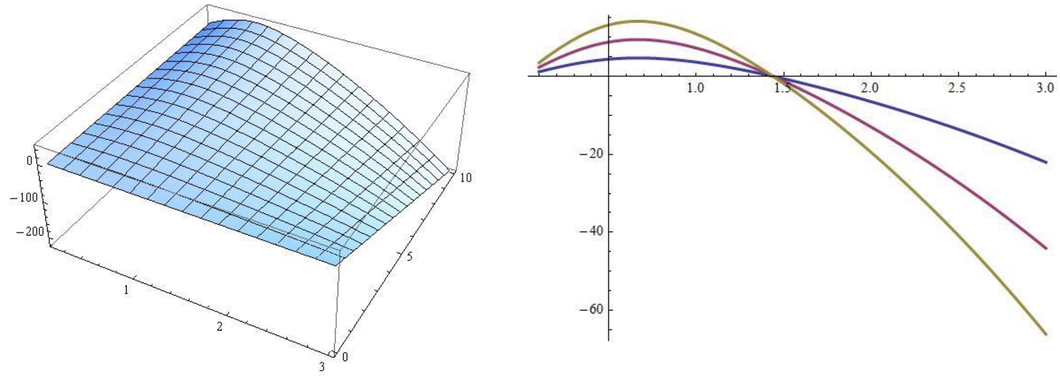


Şekil 4.3. $(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s,t)$ evolüsyon

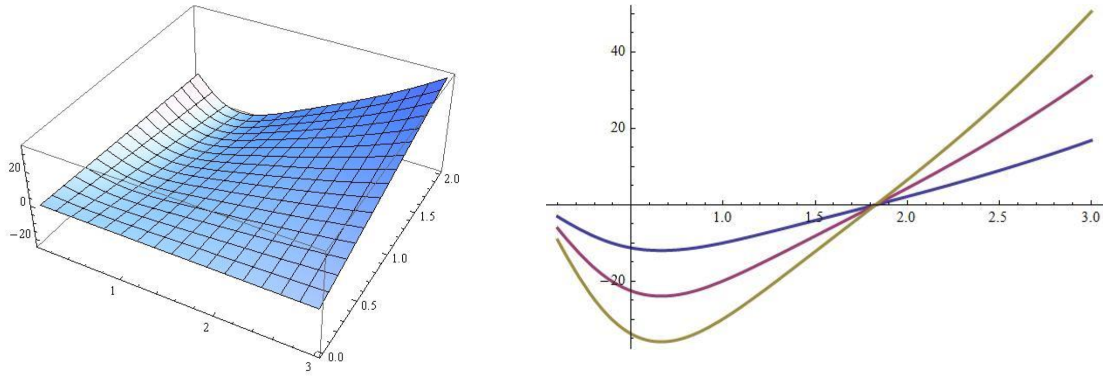
Eğer $q_1 = s^2.cosh^2 s, q_2 = s^2.tanhs, q_3 = s.tanhs$ ve $q_4 = s^4 + s^2$ alınırsa eğrilerin evolüsyon denklemlerinin,

$$D\colon\begin{cases} 0 < s < 3 \\ 0 < t \le 3 \end{cases}$$

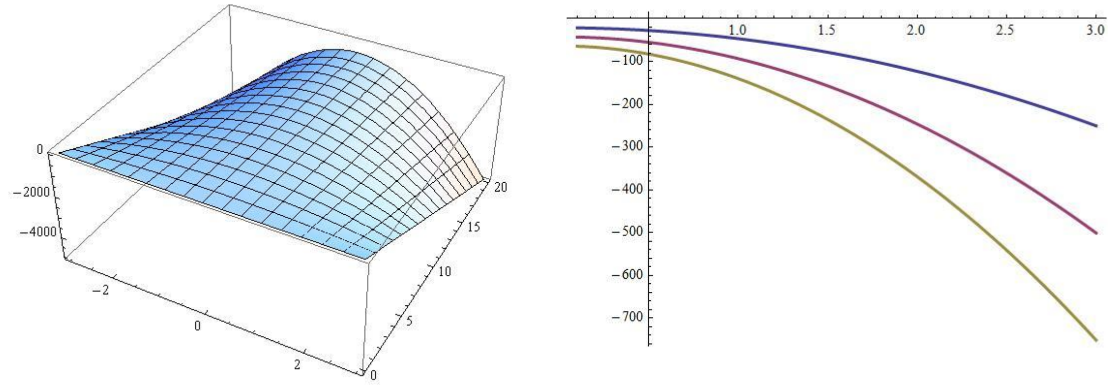
için grafikleri (Şekil 4.4.) (Şekil 4.5.) ve (Şekil 4.6.) deki gibidir.



Şekil 4.4. $\kappa(s,t)$ evolüsyonu



Şekil 4.5. $\kappa(s,t)$ evolüsyonu



Şekil 4.6. $(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa)(s,t)$ evolüsyonu

KAYNAKÇA LİSTESİ

Abdel-All, N. H., Mohamed, S. G., & Al-Dossary, M. T. (2014). Evolution of generalized space curve as a function of its local geometry. *Applied Mathematics, 2014*. 5(15), 2382-2390

Bharathi, K., & Nagaraj, M. (1987). Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula. *Indian J. Pure Appl. Math*, *18*(6), 507-511.

Gage, M., & Hamilton, R. S. (1986). The heat equation shrinking convex plane Curves. *Journal of Differential Geometry*, *23*(1), 69-96.

Grayson, M. A. (1987). The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential Geometry*, *26*(2), 285-314.

Gürbüz, N. (2009). Inextensible flows of spacelike, timelike and null curves. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *4*(32), 1599-1604.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1-335

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri I.* Ankara Üniversitesi, Ankara, 1-270.

Hicks, N. J. (1965). *Notes on differential geometry* (Vol. 3). Princeton: van Nostrand. 18-46

İlarslan, K. (2002). *Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki bazı özel eğriler* (Doctoral dissertation, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 118 s., Ankara). 8-112.

Körpınar, T., & Bas, S. (2016). Characterization of quaternionic curves by inextenaible flows. *Prespacetime Journal*, *7*(12). 1680-1684.

Kwon, D., Park, F. C., & Chi, D. P. (2005). Inextensible flows of curves and developable surfaces. *Applied Mathematics Letters*, *18*(10), 1156-1162.

O.Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1-468.

O'Neill, B. (1997). *Elementary Differential Geometry Second Edition*, Academic Press, New York, 1-482.

Özyılmaz, E., & Yılmaz, S. (2009). Involute-evolute curve couples in the euclidean 4-Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, *2*(2), 168-174.

Sabuncuoğlu, A. (2004). Diferensiyel Geometri II. *Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara*, 1-556.

Sabuncuoğlu, A. (2017). Diferansiyel Geometri. *Nobel Yayınları, Ankara*, 1-522.

Shifrin, T. (2015). Differential geometry: a first course in curves and surfaces. *University of Georgia*. 1-128.

Tandoğan, F. (2009). Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketleri. *Beykent Üniversitesi, İstanbul*. 3-35.

Tuna, A. (2002). *Yarı Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri* (Doctoral dissertation, Fen Bilimleri Enstitüsü, Süleyman Demirel Üniversitesi). 1-47.

Yıldız, Ö., Tosun, M., & Karakuş, S. (2013). A note on inextensible flows of curves in En. *International Electronic Journal of Geometry*, *6*(2), 118-124.

Yıldız, A. F., Okuyucu, O. Z., & Yıldız, Ö. G. (2017) Inextensible flow of a semi-real quaternionic curve in semi-euclidean space R42.2. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, *67*(1). 323-331.

ALPEREN KIZILAY
ARAŞTIRMA GÖREVLİSİ

E-Posta Adresi : alperenkizilay@ohu.edu.tr

Orcid Numarası : https://orcid.org/0000-0002-8612-5351

Öğrenim Bilgisi

Yüksek Lisans 2019	BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ/MATEMATİK (YL) (TEZLİ) Tez adı: Yarı Öklideyen Uzaylarda Yarı Reel Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu Üzerine. Tez Danışmanı:(ÖNDER GÖKMEN YILDIZ)
Yüksek Lisans 2017	BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ/MATEMATİK (YL) (TEZLİ) (ANADOLU ÜNİV. ORTAK) Tez adı: Yarı Öklideyen Uzaylarda Yarı Reel Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu Üzerine. Tez Danışmanı:(ÖNDER GÖKMEN YILDIZ)
Lisans 2013 9/Ağustos/2017	BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ/MATEMATİK BÖLÜMÜ/MATEMATİK PR.

Eserler

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

1. KIZILAY ALPEREN,YILDIZ ÖNDER GÖKMEN,OKUYUCU OSMAN ZEKİ (2020). Evolution of quaternionic curve in the semi-Euclidean space E24. Mathematical Methods in the Applied Sciences (Yayın No: 6188993)

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler :

1. KIZILAY ALPEREN,YILDIZ ÖNDER GÖKMEN,OKUYUCU OSMAN ZEKİ (2019). Evolution of Quaternionic Curve in the Semi-Euclidean Space E 4 2. 8th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (Özet Bildiri/Poster)(Yayın No:5517114)