

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

DEVANEY ANLAMDA KAOTİK FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENGİN FURAT

TEZ DANIŐMANI
PROF. DR. NEDİM DEĞİRMENCİ

BİLECİK, 2021

10407557

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

DEVANEY ANLAMDA KAOTİK FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENGİN FURAT

TEZ DANIŐMANI
PROF. DR. NEDİM DEĞİRMENCİ

BİLECİK, 2021

10407557

BEYAN

“Devaney Anlamda Kaotik Fonksiyonlar” adlı yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezi/dönem projesinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmamın, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR <input checked="" type="checkbox"/>
Destek alındı ise;	
Destekleyen Kurum:	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;	

Engin FURAT

Tarih

İmza

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmanın yürütülmesinde bilgi ve önerileriyle beni yönlendirerek bana yol gösteren ve desteğini benden esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ'ye,

Yüksek lisansım boyunca birlikte geçirdiğimiz süre için ve bana verdikleri sonsuz destekleri için değerli hocam Doç. Dr. İlker İNAM'a ve sevgili Elif TERCAN'a sevgili Kübra ŞEKER'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca lisans hayatım boyunca matematik öğrenimim ve eğitimimde emekleri olan Es-kişehir Teknik Üniversitesi'ndeki değerli hocalarıma bana kattıkları her şey için teşekkür ederim.

Yüksek lisansımın özellikle tez döneminde kendilerinden görmüş olduğum motivasyon desteği ve ümit verici konuşmalarıyla beni rahatlatan tüm yakın çevreme gönülden teşekkür ederim.

Bu çalışma çocukluğumdan bu yana üzerimde sonsuz emeği olan, beni büyük bir itina ve özveriyle büyütüp sağlam bir karaktere sahip olmamı sağlayan ve hayatın her alanında kararlarım daima saygı gösteren değerli annem Türkan FURAT'a ithaf edilmiştir.

Engin FURAT

2021

ÖZET

DEVANEY ANLAMDA KAOTİK FONKSİYONLAR

Kesikli dinamik sistemler teorisinde çeşitli kaotik fonksiyon tanımları mevcuttur (Crannell, 1995). Devaney'in kaos tanımı matematikçiler arasında en popüler tanımlardan biridir. Devaney'in kaos tanımı üç ana unsurdan oluşmaktadır. Periyodik noktaların yoğunluğu, topolojik geçişgenlik, başlangıç şartlarına hassas bağımlılıktır ve bunlar kaos koşulları olarak adlandırılır. Bu çalışmada Devaney anlamında kaotik fonksiyon örnekleri verilmiştir. Öncelikle Lojistik dönüşüm, Tent dönüşümü ve Shift dönüşümü gibi iyi bilinen kaotik fonksiyon örnekleri listelenmiştir. Shift dönüşümü ayrıntılı olarak incelenmiştir. Kaos koşulları arasındaki ilişkilere ve alternatif bazı koşullara değinilmiştir. Çalışmanın ana kısmında çarpım yöntemiyle yüksek boyutlu uzaylarda kaotik fonksiyonlar elde edilmiştir. Ayrıca topolojik eşleniklik kavramı kullanılarak n-boyutlu birim disk üzerinde kaotik fonksiyon inşa edilmiştir. Son bölümde genel topolojik uzaylar üzerinde kaos koşulları tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kaotik Fonksiyon, Topolojik Geçişgenlik, Topolojik Eşleniklik, Başlangıç Şartlarına Hassas Bağlılık.

ABSTRACT

CHAOTIC FUNCTIONS IN SENSE OF DEVANEY

There are various definitions of a chaotic function in the theory of discrete dynamical systems. The Devaney's definition of chaos is the most popular one among the mathematicians. Devaney's definition is consist of three main ingredients. Namely, density of periodic points, topological transitivity and sensitive dependence on initial conditions which are called the chaos conditions. In this work we give examples of chaotic functions in the sense of Devaney. Firstly we list the well known examples such as Logistic map, Tent map and Shift map. We study on the Shift map in details. We point out some relationships between chaos conditions and alternative conditions to chaos conditions. In the main body of this work we obtain chaotic functions in higher dimensional spaces by using product technique. We also construct chaotic functions on n -dimensional unit disc by using the topological conjugacy argument. In the last chapter we discuss chaotic functions in general topological spaces.

Keywords: Chaotic Functions, Topological Conjugacy, Topological Transitivity, Sensitive Dependence Initial Conditions.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
GRAFİKLER LİSTESİ	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER	1
1.1. Kesikli Dinamik Sistem	1
1.2. Bir Noktanın Yörüngesi	1
1.3. Bir Fonksiyonun Sabit Noktası	1
1.4. Bir Fonksiyonun Periyodik Noktası	1
1.5. Akıbeti Periyodik Nokta	1
1.6. Akıbeti Sabit Nokta	2
1.7. Yörüngesi Yoğun Nokta.....	2
1.8. Topolojik Geçişken Fonksiyon	2
1.9. Total Geçişken Fonksiyon	2
1.10. Topolojik Blending.....	2
1.11. Leo Özelliğine Sahip Fonksiyon.....	3
1.12. Başlangıç Koşullarına Hassas Bağımlı Fonksiyon	3
2. DEVANEY'İN KAOS TANIMI.....	4
3. TOPOLOJİK EŞLENİK DİNAMİK SİSTEMLER	12
3.1. Topolojik Eşleniklik	12
3.2. Topolojik Yarı Eşleniklik	12
4. KAOS KOŞULLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER.....	16

4.1. Topolojik Geçişkenlik ve Yoğun Yörünge ilişkileri	16
4.2. Topolojik Geçişkenlik ve Blending ilişkisi	17
4.3. Total Geçişkenlik ve Leo Özelliği	19
4.4. Touhey Özelliği ve Kaos	21
5. ÇARPIM UZAYLARINDA KAOTİK FONKSİYONLAR	23
6. n -BOYUTLU BİRİM DİSK ÜZERİNDE KAOTİK FONKSİYONLAR.....	27
7. TOPOLOJİK UZAYLARDA KAOS	32
KAYNAKÇA	36



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Q Kaotik Fonksiyonunun Elde Edilişi	14
Şekil 3.2. f Kaotik Fonksiyonunun Elde Edilişi.....	15
Şekil 6.1. Birim Kare	27
Şekil 6.2. Birim Disk.....	28
Şekil 6.3. Birim Kare ile Birim Disk Arasındaki Homeomorfizm	28



GRAFİKLER LİSTESİ

	Sayfa
Grafik 4.1. t Fonksiyonunun Grafiği	18
Grafik 4.2. f Fonksiyonunun Grafiği.....	20
Grafik 4.3. $f \circ f$ Fonksiyonunun Grafiği.....	21

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

f^n : f fonksiyonunun n defa bileşkesi

$Orb_f(x_0)$: x_0 noktasının f fonksiyonu altındaki yörüngesi

S^1 : Birim çember

$f \times g$: f ve g fonksiyonlarının cross çarpımı

\mathbb{R} : Reel Sayılar Kümesi



1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

Bu bölümde kullanılan tanımlar Devaney'in An Introduction to Chaotic Dynamical Systems adlı kitabında detaylı bir şekilde açıklanmıştır. (Devaney, 1989).

1.1. Kesikli Dinamik Sistem

X bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. (X, f) ikilisine kesikli dinamik sistem denir.

Burada f üzerinde sürekli olma koşulu yoktur, ancak ileride görüleceği üzere genelde sürekli fonksiyonlar ele alınmaktadır.

1.2. Bir Noktanın Yörüngesi

X bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin.

$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ defa}}$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun n defa bileşkesi denir.

$x_0 \in X$ verilsin. $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0) \dots\}$ kümesine, x_0 noktasının yörüngesi ya da orbiti denir.

$Orb_f(x_0)$ ile gösterilir.

Kesikli Dinamik Sistemler Teorisinin temel amaçlarından biri farklı noktaların yörüngelerinin davranışlarının incelenmesidir.

1.3. Bir Fonksiyonun Sabit Noktası

$f(x) = x$ koşulunu sağlayan yani, f fonksiyonu altındaki görüntüsü yine kendisine eşit olan noktalara, f fonksiyonunun sabit noktaları denir.

1.4. Bir Fonksiyonun Periyodik Noktası

$f^n(x) = x$ koşulunu sağlayan yani, f fonksiyonu altındaki n defa görüntüsü yine kendisine eşit olan noktalara, f fonksiyonunun periyodik noktaları, n doğal sayısına da x noktasının periyodu denir.

1.5. Akıbeti Periyodik Nokta

$x_1 \in X$, f fonksiyonunun n periyotlu bir noktası ve $x_0 \in X$ noktası için

$f^n(x_0) = x_1$ oluyorsa, x_0 noktasına, akıbeti periyodik nokta denir.

1.6. Akıbeti Sabit Nokta

$x_2 \in X$, f fonksiyonunun sabit bir noktası ve $x_0 \in X$ noktası için

$f^k(x_0) = x_2$ oluyorsa, x_0 noktasına, akıbeti sabit nokta denir.

1.7. Yörüngesi Yoğun Nokta

$x_0 \in X$ verilsin. $Orb_f(x_0)$ kümesi X 'in yoğun bir alt kümesi ise, yani $Orb_f(x_0)$ kümesinin kapanışı X 'e eşit ise, x_0 noktasının yörüngesi X 'de yoğundur denir.

Örnek 1.1 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu verilsin.

1) $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ noktaları, f 'nin sabit noktalarıdır.

2) $x'_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ve $x'_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ noktaları, f 'nin akıbeti sabit noktalarındandır.

3) $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ noktaları, f 'nin peridoyu 2 olan noktalarıdır.

4) $x' = \sqrt{2}$, $x' = -\sqrt{2}$, $x' = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ve $x' = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ f 'nin akıbeti 2 periyotlu noktalarındandır.

1.8. Topolojik Geçişken Fonksiyon

X uzayının boştan farklı, her bir U, V açık kümeleri için

$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde, $\exists n \in \mathbb{N}$ varsa, f fonksiyonuna topolojik geçişken fonksiyon denir.

1.9. Total Geçişken Fonksiyon

$f: X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $n > 0$ sayısı için $f^n: X \rightarrow X$ fonksiyonu topolojik geçişken ise f fonksiyonuna total geçişken fonksiyon denir.

1.10. Topolojik Blending

$X \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer boştan farklı ve açık her bir $U, V \subset X$ için

$$f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna zayıf blending denir.

$X \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer boştan farklı ve açık her bir $U, V \subset X$ için

$$f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$$

kümesi, boştan farklı bir açık küme içerecek şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna güçlü blending denir.

1.11. Leo Özelliğine Sahip Fonksiyon

X uzayının boştan farklı, her bir U açık alt kümeleri için; $n \geq n_0$ için, $f^n(U) = X$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, f fonksiyonuna leo özelliğine sahip fonksiyon denir.

1.12. Başlangıç Koşullarına Hassas Bağımlı Fonksiyon

$0 < \varepsilon \leq 1$ sabit bir sayı olmak üzere, $\forall x \in X$ noktasının her N komşuluğu için

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in N$ ve $k > 0$ varsa, f fonksiyonuna başlangıç koşullarına hassas bağımlı fonksiyon denir.

$a > 1$, $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ $f(x) = ax$ fonksiyonu başlangıç koşullarına hassas bağımlı fonksiyondur.

2. DEVANEY'İN KAOS TANIMI

Literatürde pek çok kaos tanımı olduğuna işaret etmiştik. Devaney tarafından 1988 yılında verilen kaos tanımı matematikçiler tarafından yaygın olarak kabul görmektedir. Devaney'in kaos tanımı herhangi bir metrik uzayda geçerlidir (Devaney, 1989).

Tanım 2.1

X bir metrik uzay olmak üzere, $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa, f fonksiyonuna Devaney anlamında kaotik fonksiyon denir.

1) f , X uzayı üzerinde, topolojik geçişkendir.

2) f 'nin periyodik noktalarının kümesi X uzayında yoğun; başka bir deyişle X uzayında hangi $a \in X$ noktası alınırsa alınsın a noktasının her bir komşuluğunda f fonksiyonunun en az bir periyodik noktası vardır.

3) f , X uzayı üzerinde, başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.

Şimdi Devaney anlamında kaotik olan sıklıkla kullanılan bazı fonksiyonları sırasıyla vereceğiz. Ancak bu örneklerin birisi dışında detaylı olarak kaos koşullarını sağladığını ispatlamayacağız. Bu örneklerle ilgili detaylı açıklama (Devaney, 1989), (Gulick, 2002), ve (Elaydi, 2007) kaynaklarında mevcuttur. Bu örneklerin kabul gören isimleri vardır. İleride yeni örnekler oluşturmak için bu fonksiyonları kullanacağız. Dizi uzayındaki Shift dönüşümü detaylı olarak ele alınacaktır.

Örnek 2.1

S^1 , kompleks düzlemdeki birim çember olsun. S^1 'in elemanlarını θ ile ifade edersek, ($0 \leq \theta < 2\pi$).

$$g : S^1 \rightarrow S^1, \quad g(\theta) = 2\theta \text{ mod } 2\pi$$

fonksiyonu Devaney anlamında kaotik bir fonksiyondur.

Örnek 2.2

$$T : [0,1] \rightarrow [0,1], \quad T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dönüşümüne çadır (tent) dönüşümü denir. Bu dönüşüm, Devaney anlamında kaotiktir.

Örnek 2.3

$f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = 4x(1 - x)$ dönüşümüne lojistik dönüşüm denir ve bu dönüşüm kaotiktir

Örnek 2.4

$B : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonuna Baker dönüşümü denir ve kaotik bir fonksiyondur.

Örnek 2.5

$D : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $D(x) = \begin{cases} 2x & , & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & , & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & , & x = 1 \end{cases}$

fonksiyonu Katlama dönüşümü olup kaotiktir.

Dizi Uzayı ve Shift Dönüşümü

$\Sigma_2 = \{s = s_0s_1s_2 \dots \mid s_i \in \{0,1\}\}$ kümesine dizi uzayı ya da sembol uzayı denir. Bu uzayın bazı elemanları;

$$x = 000 \dots, x = 111 \dots, x = 010101 \dots, x = 001001 \dots, x = 101010 \dots$$

şeklinde.

Önerme 2.1

Σ_2 uzayı sayılabilir değildir. Başka bir deyişle,

birebir örten olacak şekilde $f : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımlanamaz.

Önerme 2.2

$d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow [0, \infty)$; $x = x_0x_1x_2 \dots$, $y = y_0y_1y_2 \dots \in \Sigma_2$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

fonksiyonu Σ_2 uzayı üzerinde bir metriktir.

Teorem 2.1 :

(Σ_2, d) metrik uzayında;

$x = x_0x_1x_2 \dots$, $y = y_0y_1y_2 \dots \in \Sigma_2$ olsun.

$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ise $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$ 'dir.

2) Eğer $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ ise $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = y_i$ 'dir.

$S : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ $S(s_0s_1s_2 \dots) = s_1s_2 \dots$ dönüşümü Shift dönüşümü olup kaotiktir.

Şimdi bu örneği ayrıntılı olarak inceleyelim, bu örnek şimdiye kadar yapmış olduğumuz tanımların hepsini sağlar.

Önerme 2.3

S fonksiyonu herhangi bir $a = a_0a_1a_2 \dots$ noktasında süreklidir.

Kanıt:

$\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $d(a, x) < \delta$ iken $d(S(a), S(x)) < \varepsilon$ koşulunun sağlandığını göstermeliyiz.

$\varepsilon > 0$ sayısına karşılık yeterince büyük n doğal sayısını $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olarak alalım.

İddia: Bu durumda $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ seçmek yeterlidir.

Gerçekten $x \in B(a, \frac{1}{2^{n+1}})$ ise $d(a, x) < \frac{1}{2^{n+1}} = \delta$ olacağı için

$x = a_0a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} x_{n+2} \dots$ formundadır.

Bu noktanın görüntüsü

$S(x) = S(a_0a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} x_{n+2} \dots) = a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} x_{n+2} \dots$ olur, öte yandan a 'nın görüntüsü

$S(a) = S(a_0a_1a_2 \dots) = a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$ dır. Dikkat edilirse $S(a)$ ve $S(x)$ noktalarının ilk $n + 1$ terimi çakışmaktadır.

$$d(S(a), S(x)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon \text{ olur. (Teorem 2.1)}$$

Shift Dönüşümünün Sabit Noktaları

$x = x_0x_1x_2 \dots$ noktası için $S(x) = x$ denkleminin çözümleri, S fonksiyonunun sabit noktaları olacaktır.

$$S(x_0x_1x_2 \dots) = x_1x_2x_3 \dots = x_0x_1x_2 \dots \text{ bu durumda}$$

$$x_0 = x_1$$

$$x_1 = x_2$$

...

olup $x = 000 \dots$, $x = 111 \dots$ olmalıdır.

Shift Dönüşümünün Periyodik Noktaları

1) 2 periyotlu noktaları bulalım . $S^2(x) = x$ denkleminin çözümü, fonksiyonun 2 periyotlu noktaları olacaktır.

$$S^2(x_0x_1x_2 \dots) = S(x_1x_2x_3 \dots) = x_2x_3x_4 \dots = x_0x_1x_2 \dots \text{ olacaktır.}$$

$$x_0 = x_2$$

$$x_1 = x_3$$

...

$x = 101010 \dots$, $x = 010101 \dots$ S fonksiyonun 2 periyotlu noktalarıdır.

2) 3 periyotlu noktaları bulmak istiyorsak da $S^3(x) = x$ denkleminin kökleri 3 periyotlu noktalarıdır.

$x = x_0x_1x_2x_0x_1x_2 \dots$ fonksiyonun 3 periyotlu noktalarıdır. $x = 011011 \dots$

fonksiyonun 3 periyotlu noktalarından biridir.

3) n periyotlu noktaları bulalım. Bu durumda, $S^n(x) = x$ denkleminin çözümünü bulmak gerekir.

$$x = x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2 \text{ için } S^n(x) = x_nx_{n+1}x_{n+2} \dots \text{ dir.}$$

$S^n(x) = x$ eşitliğinden $x_nx_{n+1}x_{n+2} \dots = x_0x_1x_2 \dots$ denklemi elde edilir. Buradan da

$x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, \dots, x_{2n+1} = x_0 \dots$ eşitlikleri elde edilir. O halde

$S^n(x) = x$ ise yani x , n -periyotlu nokta ise

$$x = x_0x_1x_2 \dots x_{n-1}x_0x_1x_2 \dots x_{n-1} \dots$$

formunda bir noktadır.

Sonuç olarak,

$$Per_1(S) = \{000 \dots, 111 \dots\}$$

$$Per_2(S) = \{000 \dots, 111 \dots, 0101 \dots, 1010 \dots\}$$

$$Per_3(S) = \{x_0x_1x_2x_0x_1x_2 \dots \mid x_i \in \{0,1\}\}$$

⋮

$$Per_n(S) = \{x_0x_1x_2 \dots x_{n-1}x_0x_1x_2 \dots x_{n-1} \dots \mid x_i \in \{0,1\}\}$$

Önerme 2.4

S fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi Σ_2 uzayında yoğundur. Başka bir deyişle, $\forall x \in \Sigma_2$ için $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $B(x, \varepsilon)$ komşuluğunda mutlaka S fonksiyonunun en az bir tane periyodik noktası bulunur.

Kanıt :

Yeterince büyük bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde seçelim. $x \in \Sigma_2$, $B(x, \varepsilon)$ komşuluğunu göz önünde bulunduralım.

$x = x_0x_1x_2 \dots$ noktası aracılığıyla, $y = x_0x_1 \dots x_{n+1}x_0 \dots$ elemanını tanımlayalım, bu durumda x 'in ilk $n + 2$ terimi ile y 'nin ilk $n + 2$ terimi aynıdır ve y noktası, S 'nin $n + 2$ periyotlu noktası olup;

$$d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$$

olur ve bu durumda $y \in B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq B(x, \varepsilon)$ olması demektir. Sonuç olarak, S 'nin periyodik noktalarının kümesi Σ_2 uzayında yoğundur.

Önerme 2.5

$S : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ $S(s_0s_1s_2 \dots) = s_1s_2 \dots$ fonksiyonu topolojik geçişkendir.

Kanıt :

Öncelikle, $\varepsilon > 0$; $x, y \in \Sigma_2$ için $B(x, \varepsilon)$ ve $B(y, \varepsilon)$ açık yuvarları alındığında $S^k(B(x, \varepsilon)) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ olup olmadığını inceleyelim. Başka bir deyişle, $S^k(a) \in B(y, \varepsilon)$ olacak şekilde, $k \in \mathbb{N}$ sayısı ve $a \in B(x, \varepsilon)$ bulabilir miyiz?

$$a = a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} y_0 y_1 \dots$$

$$S^1(a) = a_1 a_2 \dots$$

$$S^2(a) = a_2 a_3 \dots a_{n+1} \dots$$

⋮

$$S^n(a) = a_n a_{n+1} y_0 y_1 \dots$$

$$S^{n+1}(a) = a_{n+1} y_0 y_1 \dots$$

$$S^{n+2}(a) = y_0 y_1 y_2 \dots \in B(y, \frac{1}{2^{n_0}})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

$$B(x, \frac{1}{2^{n_0}}) \subset B(x, \varepsilon)$$

$$B(y, \frac{1}{2^{n_0}}) \subset B(y, \varepsilon)$$

$$a = a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} y_0 y_1 y_2 \dots y_{n+1} \dots$$

$$a = a_0 a_1 \dots a_{n_0+1} y_0 y_1 \dots \in B(x, \frac{1}{2^{n_0}}), \quad S^{n+2}(a) = y_0 y_1 y_2 \dots$$

$$S^{n_0+2}(a) \in B(y, \frac{1}{2^{n_0}}) \subset B(y, \varepsilon) \text{ olacaktır. Bu durumda, } S^k(B(x, \varepsilon)) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ve $k = n_0 + 2$ dir.

$U, V \subseteq \Sigma_2$ $U, V \neq \emptyset$ açık kümeler ve $x \in U, y \in V$ olsun. Bu kümeler açık olduğundan,

$\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ sayıları $B(x, \varepsilon_1) \subset U, B(y, \varepsilon_2) \subset V$ olacak şekilde vardır.

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

diyelim, bu durumda $B(a, \varepsilon) \subset U$ ve $B(b, \varepsilon) \subset V$ olur. $f^k(B(a, \varepsilon)) \cap B(b, \varepsilon) \neq \emptyset$

olacak şekilde $k > 0$ sayısının varlığını göstermiştik; $B(a, \varepsilon) \subset U, B(b, \varepsilon) \subset V$

olduğundan dolayı da $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olur.

Sonuç olarak, S fonksiyonu topolojik geçişkendir.

Tanım 2.2

(X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyon olsun. Her bir $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$f^k(B(a, \varepsilon)) = X$ olacak şekilde $k > 0$ mevcut ise f 'ye uzayı kaplayan fonksiyon denir.

Önerme 2.6

$S: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ shift dönüşümü uzayı kaplayandır.

Kanıt:

$\varepsilon > 0$ olsun ve $a = a_0a_1a_2\dots \in \Sigma_2$ noktasını alalım. $S^k(B(a, \varepsilon)) = \Sigma_2$ olacak şekilde k var mıdır?

Bu durumda yeterince büyük bir n sayısını $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde seçelim.

$S^k\left(B\left(a, \frac{1}{2^n}\right)\right) = \Sigma_2$ olacak şekilde k sayısını bulmak yeterli olur. Bunun için $y = y_0y_1y_2\dots \in \Sigma_2$ keyfi noktasını alalım. $y \in S^k\left(B\left(a, \frac{1}{2^n}\right)\right)$ olacak şekilde k sayısının mevcut olduğunu göstermeliyiz. Yani $S^k(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in B\left(a, \frac{1}{2^n}\right)$ noktasının mevcut olduğunu göstermeliyiz.

İddia: $x = a_0a_1a_2\dots a_na_{n+1}y_0y_1\dots$ seçmek yeterlidir.

Gerçekten seçilen bu x noktasının ilk $n+2$ terimi, a noktasının ilk $n+2$ terimi çakıştığı için, Teoremden dolayı $d(a, x) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ olup, $x \in B\left(a, \frac{1}{2^n}\right)$ dir. Diğer yandan $S^{n+2}(x) = y$ olur. Bu da,

$k = n + 2$ için $S^k\left(B\left(a, \frac{1}{2^n}\right)\right) = \Sigma_2$ olması demektir.

Önerme 2.7

S altındaki yörüngesi, Σ_2 'da yoğun bir $c \in \Sigma_2$ vardır.

Kanıt:

Σ_2 uzayının

$c = 010001101100000110001010101011110111\dots$

şeklinde tanımlı elemanın yörüngesi bu uzayda yoğundur.

$x = x_0x_1\dots x_n\dots \in \Sigma_2$ keyfi nokta ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $B(x, \varepsilon) \cap Orb_s(c) \neq \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda yeterince büyük bir n sayısını $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde seçelim. c 'nin tanımlanışında her blokta, mümkün bütün kombinasyonlar yer aldığından dolayı $n+1$ 'lerin oluşturduğu bloktaki terimlerden bir tanesi $x_0x_1\dots x_n$ 'dir. Buna göre yeterince büyük

bir k sayısı için $S^l(c) = x_0x_1 \dots x_n \dots$ olur. Dikkat edilirse x noktasının ilk $n + 1$ terimi ile $S^k(c)$ noktasının ilk $n + 1$ terimi çakışmaktadır.

Teoremden dolayı

$$d(S^k(c), x) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow S^k(c) \in B(x, \varepsilon) \text{ 'dir.}$$

Yani $B(x, \varepsilon) \cap Orb_s(c) \neq \emptyset$ olur.



3. TOPOLOJİK EŞLENİK DİNAMİK SİSTEMLER

Matematikte yeni bir yapı tanımlandığında bu yapılar arasında denklik de tanımlanır. Mesela iki topolojik uzayın homeomorfluğu, iki vektör uzayının izomorfluğu ya da iki grubun izomorfluğu buna örnektir. İki dinamik sistemin denkliği de tanımlanır ve buna topolojik eşleniklik denir.

3.1. Topolojik Eşleniklik

$f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. $h \circ f = g \circ h$ olacak şekilde, $h : X \rightarrow Y$ homeomorfizmi varsa, f ve g fonksiyonlarına topolojik eşlenik denir.

Örnek 3.1

$X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ uzaylarını; $f: X \rightarrow X, f(x) = e \cdot x$, $g: Y \rightarrow Y, g(x) = 1 + x$ ve $h: X \rightarrow Y, h(x) = \ln x$ fonksiyonlarını düşünelim.

$$\begin{array}{ccc} (0, \infty) & \xrightarrow{f} & (0, \infty) \\ \downarrow h & & \uparrow h^{-1} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Burada, $f(x) = e \cdot x$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı bir fonksiyon olmasına rağmen, $g(x) = 1 + x$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.

$f: X \rightarrow X$ ve $g: Y \rightarrow Y$ fonksiyonları topolojik eşlenik fonksiyonlar ise f fonksiyonu X uzayında topolojik geçişken ise g fonksiyonu da Y uzayında topolojik geçişken; f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X uzayında yoğun ise g fonksiyonunun periyodik noktaları kümesi de Y uzayında yoğundur.

3.2. Topolojik Yarı Eşleniklik

$f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. $h \circ f = g \circ h$ olacak şekilde, $h : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten fonksiyonu varsa, f ve g fonksiyonlarına “yarı topolojik eşlenik” denir.

Lemma 3.1

f fonksiyonunun periyodik noktaları X uzayında yoğun ise g fonksiyonunun da periyodik noktaları Y uzayında yoğun olur.

Kanıt :

f fonksiyonunun periyodik noktaları X uzayında yoğun olsun. Bu da X uzayındaki her bir açığın f fonksiyonunun periyodik noktalarından en az birisini içermesi demektir. Keyfi bir $U \subset Y$ açığı alalım. h fonksiyonu sürekli olduğu için $h^{-1}(U) \subset X$ açık kümedir. Hipotezde $\exists x_0 \in f^{-1}(U)$ noktası için $h(x_0) \in U$ olur. Bu durumda, $x_0 \in h^{-1}(U)$ noktası için $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0)) = h(x_0)$ koşulu sağlanır. Bu da g fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesinin Y uzayında yoğun olması demektir.

Lemma 3.2

f fonksiyonu X uzayında topolojik geçişken ise g fonksiyonu da Y uzayında topolojik geçişken olur.

Kanıt :

f fonksiyonu X uzayında topolojik geçişken olsun. Bu durumda X uzayında boştan farklı hangi U_i, V_i açık kümelerini alırsak alalım $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ olacaklardır.

h fonksiyonu sürekli olduğu için $U_1 = h^{-1}(U)$ ve $V_1 = h^{-1}(V)$ kümeleri de X uzayında açık kümeler olup; f fonksiyonu X uzayında topolojik geçişken olduğu için $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, öyle bir $x_0 \in U_1$ vardır ki $f^k(x_0) \in f^k(U_1) \cap V_1$ olur. Bu da $f^k(x_0) \in f^k(U_1)$ ve $f^k(x_0) \in V_1 = h^{-1}(V)$ demektir. $y_0 = h(x_0)$ diyelim. $g^k(y_0) = g^k(h(x_0)) = h(f^k(x_0))$ buradan da $f^k(x_0) \in V_1 = h^{-1}(V)$ olduğu için $h(f^k(x_0)) \in V$ olacaktır. Sonuçta, aynı $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$ koşulu sağlanır, bu da g fonksiyonunun Y uzayında topolojik geçişken olması anlamına gelir.

Örnek 3.2:

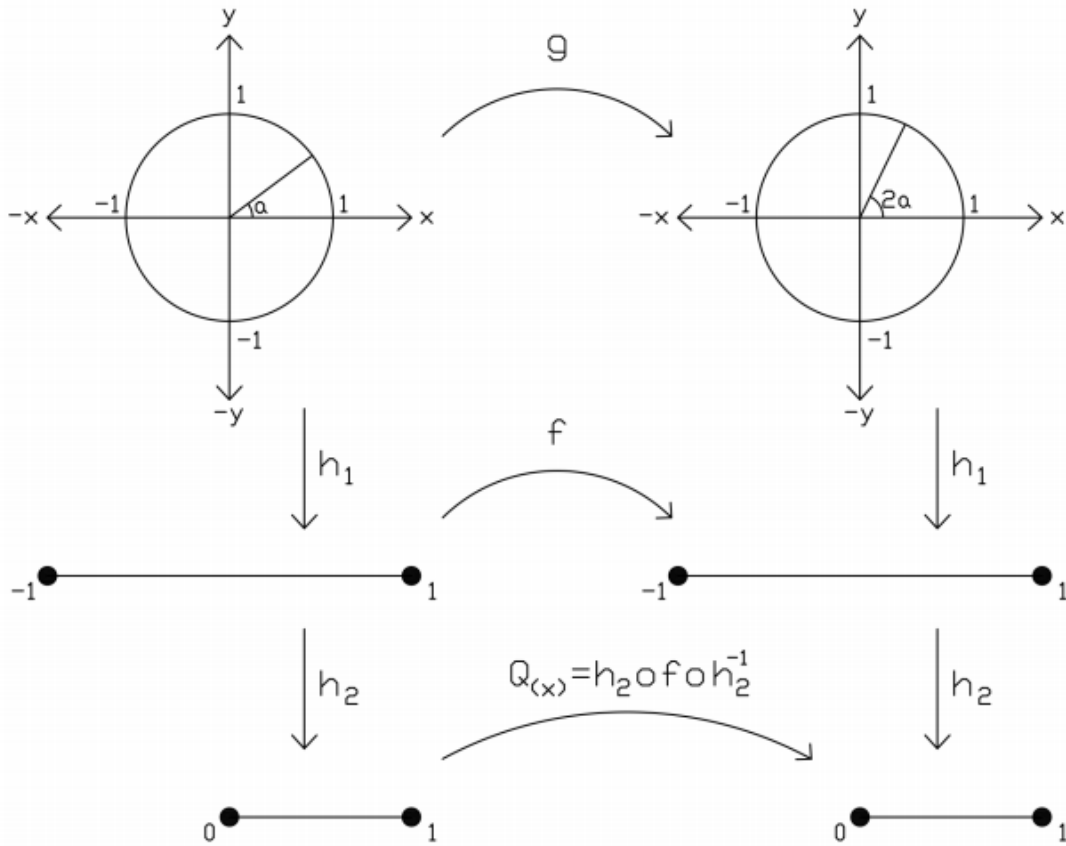
$g: S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ ve $Q: [0,1] \rightarrow [0,1], Q(x) = 4x(1-x)$ fonksiyonları kaotik fonksiyonlar olup, g fonksiyonun yardımıyla bir kaotik fonksiyon elde edip o kaotik fonksiyonun yardımıyla da $Q(x) = 4x(1-x)$ kaotik fonksiyonunu elde edeceğiz. Öncelikle g fonksiyonunu kullanarak kaotik fonksiyon elde etmeye çalışalım. Aradığımız kaotik fonksiyon f olsun. $h_1: [0, \pi] \rightarrow [-1,1] h_1(\theta) = \cos(\theta)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. $h_1 \circ g = f \circ h_1$ olacak şekildeki h_1 fonksiyonunu arıyoruz. $\cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1 = f(h_1(\theta)) = f(\cos(\theta))$ olacak şekildeki f fonksiyonu $f: [-1,1] \rightarrow [-1,1], f(x) = 2x^2 - 1$ dir. Bu fonksiyonun yardımıyla Q kaotik fonksiyonunu elde edelim.

$h_2: [-1,1] \rightarrow [0,1]$, $h_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1)$ bir homeomorfizmdir. Bu durumda, $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Q(x) = h_2 \circ f \circ h_2^{-1}(x) = h_2(f(h_2^{-1}(x))) = 4x(1-x)$ olacaktır.

Şimdi de $h_2(f(x)) = Q(h_2(x))$ koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$h_2(f(x)) = h_2(2x^2 - 1) = -\frac{1}{2}(2x^2 - 1 - 1) = 1 - x^2$$

$$\begin{aligned} Q(h_2(x)) &= Q\left(-\frac{1}{2}(x-1)\right) = 4\left(-\frac{1}{2}(x-1)\right) - 4\left(-\frac{1}{2}(x-1)\right)^2 \\ &= -2(x-1) - 4 \cdot \frac{1}{4}(x-1)^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$



Şekil 3.1. Q Kaotik Fonksiyonunun Elde Edilişi

Örnek 4.2:

$g: S^1 \rightarrow S^1$, $g(\theta) = 3\theta$ kaotik fonksiyonu yardımıyla da bir kaotik bir fonksiyon inşa edebiliriz. $h: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $h(\theta) = \cos\theta$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

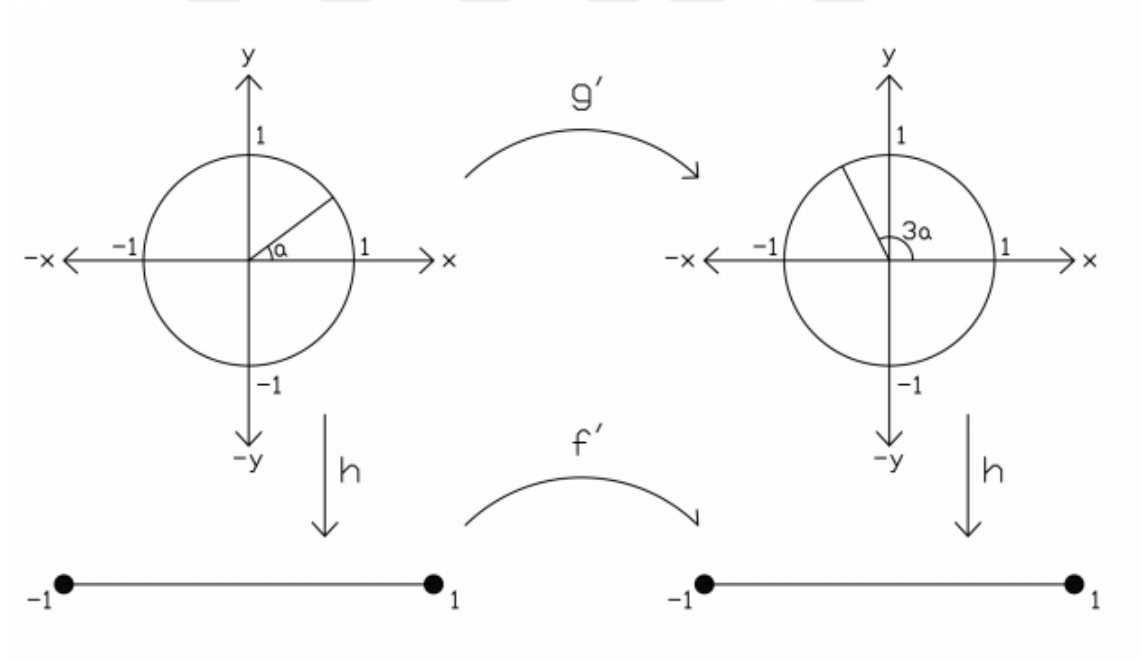
$h \circ g(\theta) = g(h(\theta))$ olacak şekilde f fonksiyonunu arıyoruz.

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \text{olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned} h \circ g(\theta) &= h(g(\theta)) = \cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ &= \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta (2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 3 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 3 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ &= f(\cos \theta) \\ &= f(h(\theta)) \end{aligned}$$

olacak şekildeki f fonksiyonu $f: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$, $f(x) = 4x^3 - 3x$ dir .
 g fonksiyonu kaotik bir fonksiyon olduğu için f fonksiyonu da kaotik olur.



Şekil 3.2. . f Kaotik Fonksiyonunun Elde Edilişi

4. KAOS KOŞULLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Kaos tanımında geçen üç koşul en genel durumda birbirinden bağımsızdır. Yani herhangi birinden veya herhangi ikisinden diğerleri elde edilemez (Değirmenci, Kaos Koşullarının İrdelenmesi, 1992), (Emek, 2007). Ancak 1992 de Banks ve ekibi makul koşullar altında topolojik geçişkenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu koşullarının başlangıç şartlarına hassas bağımlılığı gerektirdiğini göstermişlerdir (Banks, Brooks, Cairns, Davis, & Stacey, 1992). Bir teorem olarak ifade edecek olursak;

Teorem 4.1.

X sonlu olmayan bir metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. f topolojik geçişken ve f 'nin periyodik noktaları X 'de yoğun ise f fonksiyonu X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Periyodik noktaları yoğun ve topolojik geçişken olup, başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmayan bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir;

Örnek 4.1. $X = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde ayrık metriği gözönüne alalım.

$f: X \rightarrow X$ fonksiyonu da $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 1$ şeklinde tanımlansın. X 'deki tüm noktalar periyodik olup periyodik noktaların kümesi yoğundur. X 'deki boş olmayan U, V açık altkümeleri verilsin. U boş olmadığından bir $x \in U$ noktası mevcuttur. f nin tanımı gereği x noktasının yörüngesi X uzayının tamamıdır. Bu nedenle $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla f topolojik geçişkendir. Özel olarak $x = 1$ noktasını ve bu noktanın $N = \{1\}$ açık komşuluğunu gözönüne alırsak, x noktasının N komşuluğunda $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$ özelliğinde bir y noktası yoktur, çünkü bu komşulukta x 'in kendisinden başka nokta yoktur. (Assaf & Gadbois, 1992) makalesinde kaos koşullarının bağımsızlığına dair farklı örnekler verilmiştir.

4.1. Topolojik Geçişkenlik ve Yoğun Yörünge ilişkileri

Genellikle topolojik geçişkenlik ve yoğun yörünge varlığı birbirlerini gerektirmezler. Yani bir fonksiyon topolojik geçişken olmasına rağmen, yoğun yörüngeye sahip olmayabilir veya yoğun yörüngeye sahip olup, topolojik geçişken olmayabilir. Bununla ilgili detaylı bir inceleme (Değirmenci & Koçak, Existence of Dense Orbit and Topological Transitivity: When Are They Equivalent?, 2003) 'de bulunmaktadır

Örnek 4.2.

$X = \{1,2,3\}$ uzayı ayrık topoloji ile inşa edilsin. $f: X \rightarrow X, f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$ fonksiyonu altında, $orb_f(3) = X$ olduğu için yoğun yörüngeye sahiptir fakat f fonksiyonu topolojik geçişken olamaz; $U = \{1\}$ ve $V = \{3\}$ açıkları için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ bulunamaz.

Örnek 4.3.

$X = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau), f(x) = x$ birim fonksiyonu topolojik geçişken olmasına rağmen yoğun yörüngeye sahip bir nokta mevcut değildir.

4.2. Topolojik Geçişkenlik ve Blending ilişkisi

Topolojik blending özelliği, bazı yazarlarca topolojik geçişgenlik özelliğine alternatif bir özellik olarak ele alınır (Crannell, 1995)

Önerme 4.1.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyonunun periyodik noktaları yoğun ve f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu topolojik güçlü blending ise topolojik geçişkendir.

Kanıt :

f fonksiyonu blending ve periyodik noktaları yoğun olan bir fonksiyon olsun. U ve V boştan farklı açıklarını alındığında $N \subset f^k(U) \cap f^k(V)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Blend sözcüğü harmanlama, karıştırma anlamına geliyor; topolojik blending fonksiyonlar uzayın bazı elemanlarını belli bir iterasyondan sonra karıştırdığı için U ve V kümelerinde bir takım elemanlar blend olur. V açığının U ile blend olmuş noktalarının kümesine V' diyelim.

$V' = f^{-n}(N) \cap V$ kümesi, f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğu için açık bir kümedir. f fonksiyonunun periyodik noktaları X uzayında yoğun olduğu için V' kümesi en az bir periyodik nokta içerir ve bu periyodik noktaya x diyelim.

x periyodu $p > k$ olan bir nokta olsun. Bu durumda, $f^k(x) \in N$ olacaktır; bazı $y \in U$ elemanları $f^k(x) = f^k(y)$ koşulunu sağlar.

$$\begin{aligned} f^p(y) &= f^{p-k}(f^k(y)) \\ &= f^{p-k}(f^k(x)) \end{aligned}$$

$$= f^p(y)$$

$$= x$$

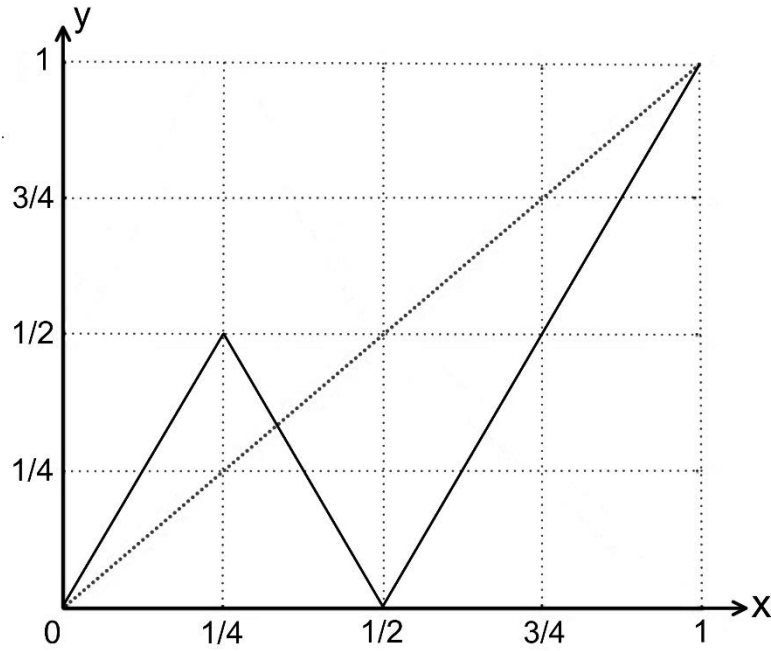
Buradan da, $f^p(U) \cap V \neq \emptyset$ sonucuna ulaşırız. f topolojik geçişkendir.

Örnek 4.4.

Güçlü blending bir fonksiyon, topolojik geçişken olmayabilir.

$$t: [0,1] \rightarrow [0,1], t(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu topolojik blending fonksiyon olup geçişken değildir.



Grafik 4.1. t Fonksiyonunun Grafiği

t fonksiyonunun $[0, \frac{1}{2}]$ kapalı aralığı üzerine kısıtlanmış hali çadır dönüşümüne denk olduğu için t fonksiyonu bu bölgede leo özelliğine sahiptir. Bu sebeple, her bir U ve V açıkları $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. Eğer bu U, V açıkları $[\frac{1}{2}, 1]$ kapalı aralığında iseler, bu açıkların fonksiyon altındaki birkaç adım sonrasındaki görüntüleri $[0, \frac{1}{2}]$

aralığına düşeceği için yine blending özelliği sağlanacaktır. $U \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, $V \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ olması durumunda da yine V 'nin birkaç adım sonrasındaki görüntüleri $[0, \frac{1}{2}]$ aralığına düşeceği için $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır.

Fakat, $U = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \subset [0, \frac{1}{2}]$ ve $V = (\frac{3}{4}, 1) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ açık kümeleri için

$f^k(U) \cap (V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunamaz. Bu sebeple de topolojik geçişken olmaz.

Önerme 4.2. (Jakobi) (Devaney, 1989)

λ bir irrasyonel sayı olmak üzere, $T_\lambda: S^1 \rightarrow S^1, T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda \pmod{2\pi}$ şeklinde tanımlı T_λ fonksiyonu altında her noktanın yörüngesi S^1 'de yoğundur.

Örnek 4.5.

Topolojik geçişken bir fonksiyon, blending olmak zorunda değildir.

S^1 'de U ve V boştan farklı açıkları alalım. Jakobi önermesi gereği U açıklarındaki herhangi bir θ elemanı için $orb_{T_\lambda}(\theta)$ kümesi S^1 'de yoğun olduğu için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $T_\lambda^k(\theta) \in V$ olur ki bu durumda $T_\lambda^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olup topolojik geçişken olur. Öte yandan T_λ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmadığı için herhangi bir $\theta^1 \in S^1$ elemanının N komşuluğu için

$|T_\lambda(\theta) - T_\lambda(\theta^1)| = |\theta + 2\pi\lambda - \theta^1 - 2\pi\lambda| = |\theta - \theta^1|$ olacaktır bu da T_λ fonksiyonunun uzaklığı koruduğunu gösterir. Bu sebeple, her bir U ve V boştan farklı açıkları için $T_\lambda^k(U) \cap T_\lambda^k(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde, $k \in \mathbb{N}$ bulunamaz, dolayısıyla blending olamaz.

4.3. Total Geçişkenlik ve Leo Özelliği

Önerme 4.3.

X uzayında total geçişken bir $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu aynı zamanda da topolojik geçişkendir.

Önerme 4.4

X metrik uzayı üzerinde, leo özelliğine sahip $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır

Önerme 4.5.

X metrik uzayında, $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu leo özelliğine sahip ise total geçişkendir.

Örnek 4.6.

Topolojik geçişken bir $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

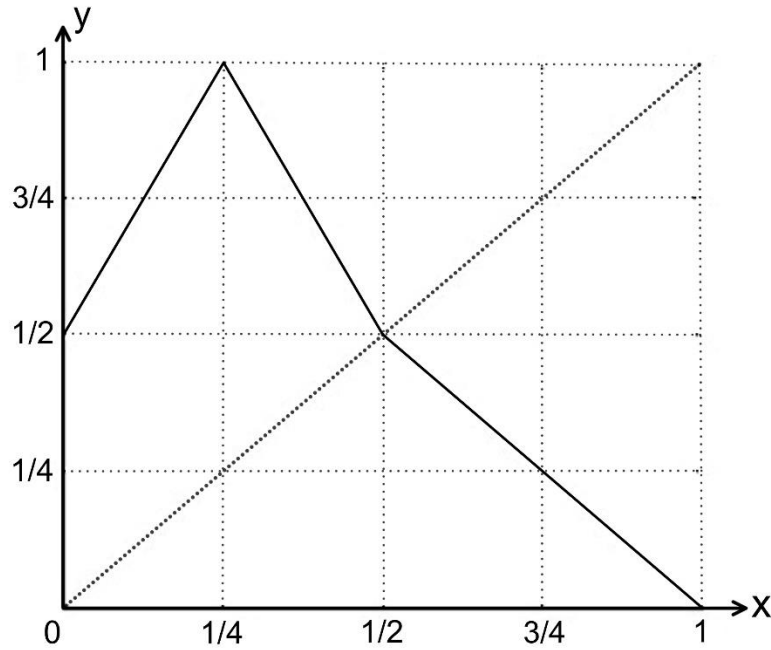
$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + \frac{3}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu total geçişken bir fonksiyon değildir.

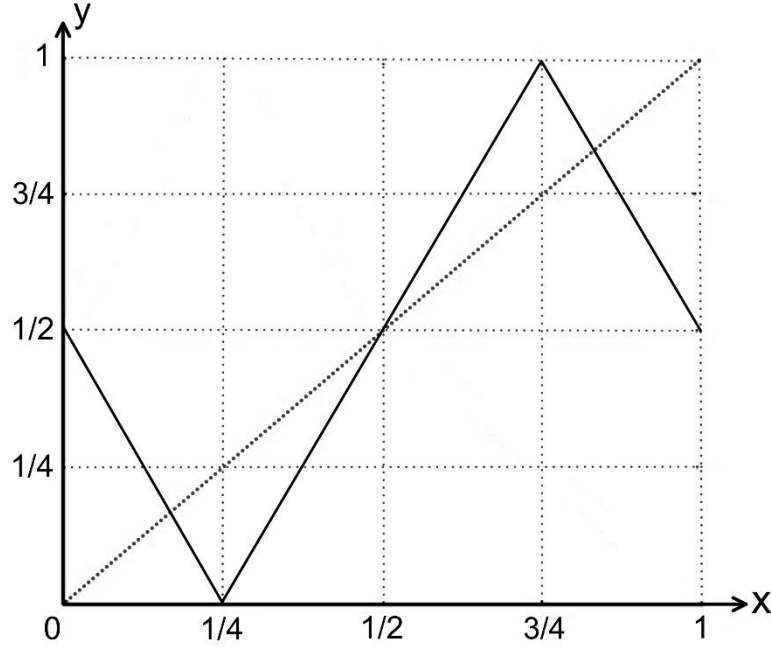
$f^2: [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -2x + \frac{5}{2}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.



Grafik 4.2. f Fonksiyonunun Grafiği



Grafik 4.3. $f \circ f$ Fonksiyonunun Grafiği

4.4. Touhey Özelliği ve Kaos

Tanım 4.4.1: (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. X uzayının boştan farklı her U, V altkümesi için $Orb_f(x_0) \cap U \neq \emptyset$ ve $Orb_f(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ periyodik noktası mevcut ise f fonksiyonu Touhey özelliğine sahiptir denir.

Bu özellik ilk bakışta kaos çağrışımı yapmamaktadır, ancak belli koşullar altında bu koşul kaos tanımına denktir. Bu denklik aşağıdaki teoremle ifade edili (Touhey, 1997).

Teorem 4.4.2: X sonlu olmayan bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Bu durumda f 'nin kaotik olması için gerek ve yeter koşul f 'nin Touhey özelliğine sahip olmasıdır.

Örnek 4.7. (Tüm yörüngeleri periyodik olan kaotik fonksiyonlar)

1. $Q: [0, 1] \rightarrow [0, 1], Q(x) = 4x(1 - x)$ kuadratik dönüşümü göz önüne alalım. Bu fonksiyonun kaotik olduğundan dolayı Q 'nun periyodik noktalarının kümesi $X = \{x \in [0, 1]: x, Q \text{ nun periyodik noktası}\}$, $[0, 1]$ de yoğun bir kümedir. Q nun X e kısıtlanmışına q diyelim, yani $q = Q|_X$ olsun. Bu durumda $q: X \rightarrow X, q(x) = 4x(1 - x)$ fonksiyonunun tüm noktaları periyodik olur. Üstelik q fonksiyonu kaotiktir. Bunu göstermek için Touhey özelliğine

sahip olduğunu ispatlamak yeterlidir. X 'in boş olmayan keyfi U, V açık altkümelerini alalım. Bu durumda $[0,1]$ aralığında U_1, V_1 açık altkümeleri $U = U_1 \cap X, V = V_1 \cap X$ olacak şekilde vardır. Q fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde kaotik olduğundan Touhey özelliğini sağlar. Bu nedenle Q 'nun bir $x_0 \in [0,1]$ periyodik noktası $Orb_Q(x_0) \cap U_1 \neq \emptyset$ ve $Orb_Q(x_0) \cap V_1 \neq \emptyset$ olacak şekilde vardır. x_0 periyodik nokta olduğundan $x_0 \in X$ olur. q fonksiyonu, Q 'nun periyodik noktalara kısıtlanmış olduğundan $Orb_Q(x_0) = Orb_q(x_0)$ dir. x_0 periyodik nokta olduğundan $Orb_q(x_0) \subset X$ olur. O halde $Orb_q(x_0) \cap U_1 \neq \emptyset$ ve $Orb_q(x_0) \cap V_1 \neq \emptyset$ ifadelerinden ve $Orb_q(x_0) \subset X$ oluşundan dolayı $Orb_q(x_0) \cap U \neq \emptyset$ ve $Orb_q(x_0) \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. Yani q fonksiyonu X üzerinde Touhey özelliğine sahiptir. Yani q, X üzerinde kaotik bir fonksiyondur.



5. ÇARPIM UZAYLARINDA KAOTİK FONKSİYONLAR

Tanım 5.1

(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları verilsin. $f: X \rightarrow X$ ve $g: Y \rightarrow Y$ fonksiyonlarının kartezyen çarpımı,

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y, \quad (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyondur. Bu bölümde $f \times g$ fonksiyonunun topolojik dinamik açısından bazı özelliklerine değinilecektir. $X \times Y$ üzerinde,

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ şeklindeki çarpım metriği dikkate alınacaktır.

(X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzayları verilsin. $f: X \rightarrow X$ ve $g: Y \rightarrow Y$ fonksiyonlarının kartezyen çarpımı diye

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y, \quad (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona denir. Bu bölümde $f \times g$ fonksiyonunun topolojik dinamik açısından bazı özelliklerine değineceğiz. $X \times Y$ üzerinde $d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$ eşitliği ile verilen çarpım metriği göz önüne alınacaktır.

Kaos koşullarından periyodik noktaların yoğunluğu ve başlangıç şartlarına hassas bağımlılık çarpım uzaylarına taşınır. Ancak topolojik geçişkenlik özelliği çarpım uzaylarına taşınmaz (Değirmenci, N. 1992).

Çarpım fonksiyonlarının kaotik özellikleri (Değirmenci & Koçak, Chaos in Product Maps, 2010) makalesinde detaylı olarak ele alınmıştır.

Teorem 5.1

$f: X \rightarrow X$ ve $g: Y \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin.

i) f 'nin X uzayında ve g 'nin Y uzayında periyodik noktalarının yoğun olması için gerek ve yeter koşul $f \times g$ 'nin $X \times Y$ uzayındaki periyodik noktalarının yoğun olmasıdır.

ii) f veya g fonksiyonlarından biri başlangıç şartlarına hassas bağımlı ise $f \times g$ çarpım fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Aşağıdaki örnek topolojik geçişken iki fonksiyonun çarpımının topolojik geçişken olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.1.

$$f: [0,2] \rightarrow [0,2], \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x + 3 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur. Ancak $[0,2] \times [0,2]$ karesel bölgesi üzerinde tanımlanan $f \times f$ fonksiyonu topolojik geçişken değildir. Dolayısıyla $f \times f$ fonksiyonu kaotik değildir (Değirmenci & Koçak, Chaos in Product Maps, 2010).

Bu örneğe dayanarak kaotik iki fonksiyonun çarpımının kaotik olmadığını söyleyebiliriz. Diğer yandan belli koşullar altında kaotik iki fonksiyonun çarpımı kaotik olabilmektedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 5.2

$f: X \rightarrow X$ ve $g: Y \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin.

i) f , X üzerinde ve g , Y üzerinde kaotik fonksiyonlar olsun. Ayrıca f ve g fonksiyonları LEO özelliğine sahip fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $f \times g$ çarpım fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde kaotik bir fonksiyondur.

ii) f , X üzerinde sürekli ve kaotik bir fonksiyon ve g , Y üzerinde kaotik ve LEO özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \times g$ çarpım fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde kaotik bir fonksiyondur.

Bilindiği üzere daha önce listelenmiş olan klasik kaos örneklerinin hepsi aynı zamanda LEO özelliğine de sahiptirler.

Yukarıdaki teoremleri kullanarak çarpım uzaylarında yeni kaotik fonksiyonlar elde edebiliriz.

Örnek ($[0,1] \times [0,1]$ Birim Karesi Üzerinde Kaotik Fonksiyonlar)

1. $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Q(x) = 4x(1 - x)$ kuadratik dönüşüm olmak üzere,

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], F(x, y) = (4x(1 - x), 4y(1 - y))$$

fonksiyonu kaotiktir. Çünkü $F = Q \times Q$ olup çarpım fonksiyonudur ve Q fonksiyonu LEO özelliğine sahip kaotik bir fonksiyon olup teoremin koşullarını sağlar.

$$2. T : [0,1] \rightarrow [0,1] , T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{çadır dönüşümü kaotik bir}$$

fonksiyondur, üstelik LEO özelliğine sahiptir. Bu nedenle

$T \times T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], (T \times T)(x, y) = (T(x), T(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

3. $Q : [0,1] \rightarrow [0,1]$ kuadratik dönüşüm, $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ çadır dönüşümü olsun. Bu durumda $Q \times T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], (Q \times T)(x, y) = (Q(x), T(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

4. $Q : [0,1] \rightarrow [0,1]$ kuadratik dönüşüm, $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ herhangi bir kaotik fonksiyon olsun. Bu durumda

$Q \times f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], (Q \times f)(x, y) = (Q(x), f(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

5. $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ çadır dönüşümü, $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ herhangi bir kaotik fonksiyon olsun. Bu durumda

$T \times f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], (T \times f)(x, y) = (T(x), f(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

Örnek ($S^1 \times [0,1]$ Silindiri Üzerinde Kaotik Fonksiyonlar)

1. $g : S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ katlama dönüşümü ve

$Q : [0,1] \rightarrow [0,1], Q(x) = 4x(1 - x)$ kuadratik dönüşüm olmak üzere,

$F : S^1 \times [0,1] \rightarrow S^1 \times [0,1], F(\theta, y) = (2\theta, 4y(1 - y))$

fonksiyonu kaotiktir. Çünkü $F = g \times Q$ olup çarpım fonksiyonudur ve g fonksiyonu LEO özelliğine sahip kaotik bir fonksiyon olup teoremin koşullarını sağlar.

2. $g(\theta) = 2\theta$ birim çember üzerindeki katlama dönüşümü,

$$T : [0,1] \rightarrow [0,1] , T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{çadır dönüşümü olmak üzere,}$$

$g \times T : S^1 \times [0,1] \rightarrow S^1 \times [0,1], (g \times T)(x, y) = (g(\theta), T(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

3. $g: S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ katlama dönüşümü, $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ herhangi bir kaotik fonksiyon olsun. Bu durumda

$g \times f: S^1 \times [0,1] \rightarrow S^1 \times [0,1], (g \times f)(\theta, y) = (g(\theta), f(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

4. $h: S^1 \rightarrow S^1, h(\theta) = 3\theta$ dönüşümü birim çember üzerinde LEO özelliğine sahip kaotik bir fonksiyondur. $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ herhangi bir kaotik fonksiyon olsun. Bu durumda

$h \times f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1], (h \times f)(\theta, y) = (h(\theta), f(y))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

Örnek ($S^1 \times S^1$ Tor Yüzeyi Üzerinde Kaotik Fonksiyonlar)

1. $g: S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ katlama dönüşümü olmak üzere,

$$F: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, F(\theta, \alpha) = (2\theta, 2\alpha)$$

fonksiyonu kaotiktir. Çünkü $F = g \times g$ olup çarpım fonksiyonudur ve g fonksiyonu LEO özelliğine sahip kaotik bir fonksiyon olup teoremin koşullarını sağlar.

2. $g: S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ katlama dönüşümü ve $h: S^1 \rightarrow S^1, h(\theta) = 3\theta$ olmak üzere,

$g \times h: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, (g \times h)(\theta, \alpha) = (2\theta, 3\alpha)$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

3. $g: S^1 \rightarrow S^1, g(\theta) = 2\theta$ katlama dönüşümü ve $f: S^1 \rightarrow S^1$ herhangi bir kaotik fonksiyon olmak üzere,

$g \times f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, (g \times f)(\theta, \alpha) = (2\theta, f(\alpha))$ fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

6. n-BOYUTLU BİRİM DİSK ÜZERİNDE KAOTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde \mathbb{R}^n 'deki, n boyutlu birim disk üzerinde kaotik fonksiyonlar inşa edilecektir.

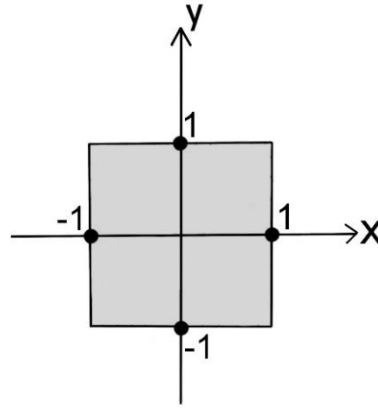
Bunun için öncelikle $n = 2$ olması durumunda, \mathbb{R}^2 'deki birim disk üzerinde kaotik fonksiyon elde edeceğiz.

\mathbb{R}^2 'de, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normları;

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ verildiğinde, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ şeklinde tanımlanırken, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ şeklinde tanımlanır.

\mathbb{R}^2 'de, birim kare,

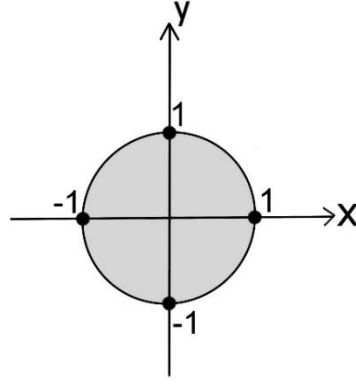
$K^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1 \text{ ve } |x_2| \leq 1\}$ şeklinde ifade edilir.



Şekil 6.1. Birim Kare

\mathbb{R}^2 'de, birim disk,

$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ şeklinde ifade edilir.



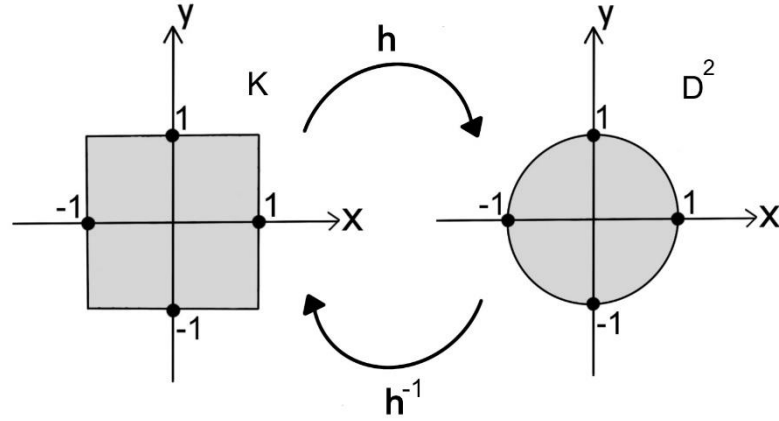
Şekil 6.2. Birim Disk

Birim kareden birim diske homeomorfizm olacak şekilde bir h fonksiyonu tanımlayalım.

$$h : K^2 \rightarrow D^2 \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} x & , (x_1, x_2) \neq 0 \\ (0,0) & , (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2)$ olarak düşünülürse,

$(x_1, x_2) \neq (0,0)$ iken, $h(x_1, x_2) = \frac{\max\{|x_1|, |x_2|\}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (x_1, x_2)$ şeklinde de ifade edilebilir.



Şekil 6.3. Birim Kare ile Birim Disk Arasındaki Homeomorfizm

$h(x)$ fonksiyonunun tersi olan $h^{-1}(x)$ fonksiyonu

$$h^{-1}: D^2 \rightarrow K^2, \quad h^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} x & , (x_1, x_2) \neq 0 \\ (0,0) & , (x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

$(x_1, x_2) \neq (0,0)$ iken, $h^{-1}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\max\{|x_1|, |x_2|\}}(x_1, x_2)$ şeklinde de ifade edilebilir.

K^2 karesi üzerinde kaotik fonksiyon;

$f_1, f_2: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ tanımlı kaotik fonksiyonlar olsunlar ve Teorem 5.2. in koşullarını sağlasınlar. Bu durumda;

$$F : K^2 \rightarrow K^2$$

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

şeklinde tanımlı F fonksiyonu kaotiktir.

D^2 diski üzerinde kaotik fonksiyon;

D^2 diski üzerinde kaotik fonksiyon edebilmek için,

$$F : K^2 \rightarrow K^2$$

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

funksiyonundan ve

$$h : K^2 \rightarrow D^2 \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} x & , (x_1, x_2) \neq 0 \\ (0,0) & , (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

homeomorfizminden yararlanacağız.

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{F} & K^2 \\ \uparrow h^{-1} & & \downarrow h \\ D^2 & \xrightarrow{G} & D^2 \end{array}$$

$$G(x) = (h \circ F \circ h^{-1})(x)$$

$G(x) = (h \circ F \circ h^{-1})(x)$ şeklinde tanımlanan $G: D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonu, $F: K^2 \rightarrow K^2$ fonksiyonuna topolojik eşleniktir. Kaotik olma özelliği topolojik eşlenik altında korunduğu için $G: D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonu kaotiktir.

Benzer yöntemle,

$n > 2$ için D^n üzerinde de kaotik fonksiyonlar inşa edebiliriz.

Öncelikle K^n üzerinde kaotik fonksiyonların elde edilmesi gerekir.

$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \rightarrow [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ fonksiyonları kaotik ve sürekli, en az bir tanesi LEO özelliğine sahip olsunlar.

Teorem 5.1. gereği

$$F: K^n \rightarrow K^n$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu K^n küpü üzerinde, kaotik bir fonksiyondur.

K^n ve D^n kümeleri arasında bir h homeomorfizmi tanımlamak gerekir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{ve} \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$
 olmak üzere,

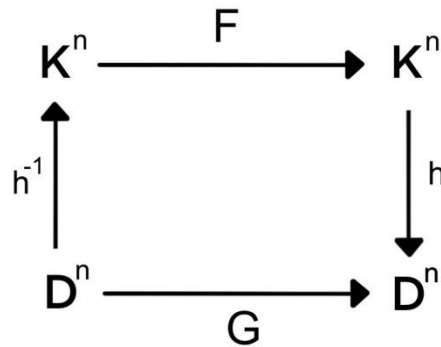
$$h: K^n \rightarrow D^n, \quad h(0) = 0; \quad x \neq 0 \text{ için} \quad h(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} x = \frac{\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}}{\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} x$$
 şek-

linde tanımlanan fonksiyon bir homeomorfizmdir.

h fonksiyonunun tersi,

$$h^{-1}: D^n \rightarrow K^n, \quad h^{-1}(0) = 0; \quad x \neq 0 \text{ için} \quad h^{-1}(x) = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} x = \frac{\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}{\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}} x$$

şeklinde tanımlanır.



$G: D^n \rightarrow D^n$, $G(x) = (hoFoh^{-1})(x)$ fonksiyonu, F kaotik fonksiyonuna topolojik eşleniktir. Kaotik olma özelliği, topolojik eşleniklik altında korunduğu için, G fonksiyonu D^n üzerinde kaotik bir fonksiyondur.



7. TOPOLOJİK UZAYLARDA KAOS

Daha önce (Banks, Brooks, Cairns, Davis, & Stacey, 1992) makalesinden sonra belli koşullar altında, başlangıç şartlarına hassas bağımlılık koşulunun, topolojik geçişgenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu koşullarından elde edilebildiğine işaret etmiştik. Buna göre belli koşullar altında kaos koşulları ikiye indirgenmiş oluyor. Ayrıca dikkat edilirse topolojik geçişgenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu koşullarının tanımlarında metrik kullanılmamaktadır. Bu iki koşul herhangi bir topolojik uzayda anlamlıdır. Buna göre Devaney'in kaos tanımını topolojik uzaylara genellemesi için bir yaklaşım önereceğiz.

Tanım :

Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu ;

1) Topolojik geçişken

2) Periyodik noktalarının kümesi X uzayında yoğun

koşullarını sağlarsa f ye X topolojik uzayı üzerinde kaotik fonksiyon denir.

Örnek 4.1 :

$X = \{1,2\}$ kümesi verilsin. $f : (X, \tau_{Ayrık}) \rightarrow (X, \tau_{Ayrık})$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ fonksiyonu topolojik geçişkendir. $U = \{1\}$, $V = \{2\}$ açıkları için; $n = 2$ için $f^2(U) \cap V = \{2\}$ olacaktır. Aynı şekilde $U = \{2\}$, $V = \{1\}$ alırsak yine $n = 2$ için $f^2(U) \cap V = \{1\}$ olacaktır. Bu durumda f fonksiyonu topolojik geçişken olmuş olur. Aynı zamanda; $x = 1$ ve $x = 2$ noktaları 2 periyotlu noktalar olup; f fonksiyonunun periyodik noktaları kümesi, uzayın kendisi olduğu için; uzayda yoğundur. Sonuç olarak f fonksiyonu kaotik bir fonksiyondur.

Yukarıda verilen örneği genelleştirmek mümkündür. Bunu bir teoremle ifade edecek olursak;

Önerme 4.1 :

X sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Bu durumda topolojik geçişken olacak şekilde, $f : (X, \tau_{ayrık}) \rightarrow (X, \tau_{ayrık})$ fonksiyonu tanımlanamaz.

Kanıt :

$f : (X, \tau_{ayrık}) \rightarrow (X, \tau_{ayrık})$ fonksiyonunun topolojik geçişken olduğunu varsayalım.

$U = \{x\}$, $y \in X$ alalım ve $V = \{y\}$ olsun.

$\exists k \in \mathbb{N}$ için $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olması gerektiği için; bu da $f^k(x) = y$ olması demektir. Bu durumda, $y \in orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), f^{n+1}(x), \dots\}$ olması ve $orb_f(x)$ kümesi sayılabilir bir küme olup, $X \subseteq orb_f(x)$ olması demektir fakat bu X 'in sayılamaz sonsuz bir küme oluşu ile çelişir.

Sonuç :

Kaotik olacak şekilde $f : (\mathbb{R}, \tau_{ayrık}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ayrık})$ fonksiyonu tanımlanamaz.

Örnek 4.2 :

\mathbb{R} reel sayılar kümesi üzerinde $\tau_1 = \{U | \mathbb{R} - U \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ sonlu tümleyenler topolojisini ve $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_1)$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan birim fonksiyonunun göz önüne alalım. $f(x)$ 'in sabit noktalarının kümesi, uzayda yoğundur. Çünkü uzaydaki her bir nokta birim fonksiyonun sabit noktasıdır. Aynı zamanda $f(x)$ topolojik geçişken bir fonksiyondur. Bu uzaydaki $U = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $V = \mathbb{R} - \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ keyfi açık kümeleri için, $k = 1$ alındığında; $f(U) \cap V = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olup bu küme boştan farklıdır. $f(x) = x$ fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi göz önüne alındığında kaotiktir.

Yukarıda verilen örneği genelleştirmek mümkündür. Bunu bir teoremle ifade edecek olursak;

Önerme 4.3. X sonsuz elemanlı bir küme olsun. Bu küme üzerinde $\tau = \{U | X - U \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ sonlu tümleyenler topolojisini göz önüne alalım. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonunun sonsuz çoklukta periyodik noktası olsun. Bu durumda f kaotik bir fonksiyondur.

Kanıt : Bu uzaydaki boştan farklı herhangi bir U açık kümesi, $U = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklindedir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ dir. $f(x)$ 'in periyodik noktalarının kümesi $Per(f)$ sonsuz çoklukta olduğundan $U \cap Per(f) \neq \emptyset$ olur. Yani periyodik noktaların kümesi yoğundur. Bu uzaydaki boştan farklı $U = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $V = X - \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ keyfi açık kümeleri için, $k = 1$ alındığında; $f(U) \cap V = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olup bu küme boştan farklıdır. Yani f fonksiyonu X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi göz önüne alındığında topolojik geçişgendir. Her iki koşul gerçekleştiği için f kaotik fonksiyondur.

Örnek 4.4 \mathbb{R} reel sayılar kümesi üzerinde $\tau_2 = \{U | \mathbb{R} - U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ sayılabilir tümleyenler topolojisini ve $f : (\mathbb{R}, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan birim fonksiyonunun göz önüne alalım. $f(x)$ 'in periyodik noktalarının kümesi, uzayda yoğundur. Çünkü

uzaydaki her bir nokta birim fonksiyonun sabit noktasıdır. Aynı zamanda f topolojik geçişken bir fonksiyondur. Bu uzaydaki boştan farklı U ve V keyfi açık kümeleri için, $U \cap V \neq \emptyset$ tur.

Önerme 4.2 :

(X, τ_1) ve (X, τ_2) iki topolojik uzay olsunlar. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. $f: (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_2)$ fonksiyonu topolojik geçişken ise f fonksiyonu (X, τ_1) uzayında da topolojik geçişken olur.

Kanıt :

f fonksiyonu (X, τ_2) topolojik uzayında topolojik geçişken olduğu için; her bir U, V açık alt kümeleri için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde, $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olduğu için her bir $U_1, V_1 \in \tau_1$ aynı zamanda da $U_1, V_1 \in \tau_2$ dir. Bu sebeple de, aynı $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ koşulunu sağlayacaktır. Sonuç olarak f fonksiyonu (X, τ_1) uzayında da topolojik geçişken olur.

Birim Fonksiyonun Kaotik Olduğu Bazı Topolojik Uzaylar

Kaos kavramının topolojik uzaylarda göz önüne alındığında yapısal olarak metrik uzaylardan oldukça farklı bir davranış söz konusudur. Bir metrik uzayın birim fonksiyonu topolojik geçişken olamaz. Dolayısıyla kaotik olması mümkün değildir. Ancak topolojik uzaylarda durum farklıdır, buna ilişkin bazı örnekleri inceleyelim;

1. $\tau_2 = \{U | \mathbb{R}/U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$; $f: (\mathbb{R}, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$ şeklinde tanımlanan birim fonksiyon kaotiktir. Bunu yukarıda incelemiştik.

2. $\tau_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$; $f: (\mathbb{R}, \tau_3) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_3)$ birim fonksiyonun öncelikle $U = (-\infty, c)$, $V = (-\infty, d)$ açıkları için $n = 1$ alırsak; $f(U) \cap V$ kümesi U veya V olacağı için boştan farklı bir küme olup, topolojik geçişken olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde, $\tau_4 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) | b \in \mathbb{R}\}$; $f: (\mathbb{R}, \tau_4) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_4)$ birim fonksiyonun da topolojik geçişken olduğunu söyleyebiliriz.

3. $\tau_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-k, k) | k \in \mathbb{N}\}$; $f: (\mathbb{R}, \tau_5) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_5)$ birim fonksiyonu topolojik geçişkendir dolayısıyla kaotiktir. Çünkü $U = (-c, c)$, $V = (-d, d)$ açıklarının her biri 0'ın komşuluğu olup $0 \in f(U) \cap V$ olacaktır.

4. (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ verilsin. $\tau_{x_0} = \{\emptyset, X\} \cup \{U \in \tau | x_0 \in U\}$ ailesi X uzayında bir topolojidir. $f: (X, \tau_{x_0}) \rightarrow (X, \tau_{x_0})$ birim fonksiyonu kaotiktir.

Herhangi U ve V açıkları alındığında $x_0 \in U$, $x_0 \in V$ olup her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacağı için f topolojik geçişken olacaktır.

5. X sonlu bir küme olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayını gözönüne alalım. Eğer $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ birim fonksiyonu kaotik ise X uzayı Hausdorff olamaz. $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu kümesini alalım. f fonksiyonu topolojik geçişken olduğu için her U, V açık kümeleri için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu da, $i, j \leq n$, $a_i \neq a_j$ için $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ olacak şekilde $a_i \in U_i, a_j \in V_j$ açıklarının bulunamayacağı anlamına gelir.

6. $X = \{1,2,3,4\}, \tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ verildiğinde, (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff değildir. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ birim fonksiyonu, $U = \{1,2\}, V = \{3,4\}$ açıkları için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ bulunamayacağı için f fonksiyonu topolojik geçişken olamaz bu sebeple de kaotik olamaz.

Örnek 4.2.

$X = \{1,2,3\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$ ve $f: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_1)$, $f(x) = x$ fonksiyonu topolojik geçişkendir; ancak aynı fonksiyonu; τ_1 'den daha ince topoloji olan ayrık topolojiyi kullanarak $f: (X, \tau_{ayrık}) \rightarrow (X, \tau_{ayrık})$; $U = \{1\}, V = \{2\}$ açıkları için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunamazdı, yani f fonksiyonu topolojik geçişken olamazdı.

Örnek 4.3.

$X = \{1,2,3\}, f: X \rightarrow X, f(x) = x$ fonksiyonu topolojik geçişken olacak şekilde X üzerindeki topolojileri yazalım.

$f(x) = x$ fonksiyonunu topolojik geçişken yapacak topolojiler, öncelikle Hausdorff ve ayrık topoloji olmamalı. Tek elemanlı küme içermeli ve 1'den fazla tek elemanlı küme olmamalı.

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \tau_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}, \tau_3 = \{\emptyset, X, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$
 $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}\}, \tau_5 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2\}\}, \tau_6 = \{\emptyset, X, \{3\}, \{2,3\}\}$ topolojileri gibi herbirinin oluşturduğu topolojik uzayda $f(x) = x$ fonksiyonunu topolojik geçişken olur.

$f(x) = x$ fonksiyonunu topolojik geçişken yapacak topoloji, 1 tane tek noktalı küme içermeli, 2 elemanı olan alt küme sayısı en fazla 2 olmalıdır.

KAYNAKÇA

- Assaf, D., & Gadbois, S.** (1992). Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly* (99), 865.
- Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., & Stacey, P.** (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly*(99), 332-334.
- Crannell, A.** (1995). The Role of Transitivity in Devaney's Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly*, 102, 788-793.
- Değirmenci, N., & Koçak, Ş.** (2003, May). Existence of Dense Orbit and Topological Transitivity: When Are They Equivalent? *Acta Mathematica Hungarica* (99), 185-187.
- Değirmenci, N.** (1992). Kaos Koşullarının İrdelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Değirmenci, N., & Koçak, Ş.** (2010). Chaos in Product Maps. *Turkish Journal of Mathematics*(34), 593-600.
- Devaney, R. L.** (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley.
- Elyadi, S. N.** (2007). *Discrete Chaos*. Chapman and Hall/CRC.
- Emek, H.** (2007). Kaos Koşulları Arasındaki İlişkiler. *Yüksek Lisans Tezi*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Gulick, D.** (2002). *Encounters with Chaos and Fractals*. Chapman and Hall/CRC.
- Touhey, P.** (1997). Yet Another Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly*(104), 411-414.