

T.C.
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOLONOMİK OLMAYAN DİFERANSİYEL SÜRÜŞLÜ BİR MOBİL ROBOTUN
UYARLAMALI KONTROLÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKHAN ÖZDEMİR

TEZ DANIŐMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ SİNAN BAŞARAN

BİLECİK, 2021

10411404

T.C.
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOLONOMİK OLMAYAN DİFERANSİYEL SÜRÜŞLÜ BİR MOBİL ROBOTUN
UYARLAMALI KONTROLÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKHAN ÖZDEMİR

TEZ DANIŐMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ SİNAN BAŞARAN

BİLECİK, 2021

10411404

BEYAN

“Holonomik Olmayan Diferansiyel Sürürlü Bir Mobil Robotun Uyarlamalı Kontrolü” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen Kurum:	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;	

Gökhan ÖZDEMİR

...../...../ 2021

İmza

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, yol gösteren hocam Dr. Öğr. Üyesi Sinan Başaran, desteğini esirgemeyen eşim Münire Özdemir'e ve neşesiyle bana umut veren kızım Elif Gökçe Özdemir'e teşekkür ederim.

Son olarak bu günlere ulaşmamdaki emekleri adına değerli aileme teşekkür ederim.

ÖZET

HOLONOMİK OLMAYAN DİFERANSİYEL SÜRÜŞLÜ BİR MOBİL ROBOTUN UYARLAMALI KONTROLÜ

Bu çalışmada, holonomik olmayan diferansiyel sürüşlü bir mobil robotun uyarlamalı kontrol ile yörünge takip problemi ele alınmıştır. Mobil robotun matematiksel modeli kinematik ve dinamik olarak elde edilmiştir. Kinematik geri adımlamalı kontrolcü tasarımı ile yörünge takibi için robotun gerekli hızları Lyapunov kararlılık teorisi baz alınarak elde edilmiştir. Dinamik denklem içerisinde, bilinmeyen veya tahmin edilmesi istenen parametreler ayrıştırılarak uyarlamalı dinamik kontrolcü tasarımı Lyapunov kararlılık teorisini sağlayacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Çift aktüatöre sahip mobil robotun yörünge takibi problemi için bilgisayar simülasyon modeli kurulmuş ve çalışmaya konu olan geri adımlamalı kinematik ve uyarlamalı dinamik kontrolör cevapları sunulmuştur. Ayrıca Matlab/Simscape/Simmechanics ortamında şematik olarak tasarlanan mobil robotun katı modeli için simülasyonlar tekrar edilmiştir. Elde edilen simülasyon sonuçları karşılaştırılmış ve simülasyonların doğrulukları tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Holonomik olmayan mobil robot, Uyarlamalı kontrol, Geri adımlamalı kontrol, Yörünge takibi

ABSTRACT

ADAPTIVE CONTROL OF NON-HOLONOMIC DIFFERENTIAL DRIVING MOBILE ROBOT

In this study, the trajectory tracking problem with adaptive control of a non-holonomic differential drive mobile robot is discussed. The mathematical model of the mobile robot is obtained kinematically and dynamically. With the kinematic backstepping controller design, the required speeds of the mobile robot for trajectory tracking were obtained based on the Lyapunov stability theory. In the dynamic equation of the mobile robot, the unknown parameters are determined, and the adaptive dynamical controller design has been implemented in a way to provide the Lyapunov stability theory. A computer simulation model was established for the trajectory tracking problem of a mobile robot, and the response of the backstepping kinematic and adaptive dynamic controllers are presented. In addition, simulations were repeated for the solid model of the mobile robot, which was schematically designed in the Matlab/Simscape/Simmechanics environment. The obtained simulation results were compared, and the accuracy of the simulations was discussed.

Key Words: Non-holonomic mobile robot, Adaptive control, Backstepping control, Trajectory tracking

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KİNEMATİK VE DİNAMİK MODELLEME.....	4
2.1. Kinematik Modelleme.....	4
2.1.1. İleri ve Ters Robot Kinematığı.....	4
2.1.2. Holonomik ve Holonomik Olmayan Hareket.....	5
2.1.3. Diferansiyel Sürüslü Robot.....	6
2.1.4. Diferansiyel Sürüslü Robot Kinematik Modeli.....	8
2.1.5. Kinematik Kısıtlar.....	9
2.2. Dinamik Modelleme.....	11
2.2.1. Lagrange Yaklaşımı İle Dinamik Modelleme.....	12
2.2.2. Tekerlek Hızlarına Bağlı Dinamik Modelleme.....	18
2.2.3. Açısal ve Doğrusal Hızlara Bağlı Dinamik Modelleme.....	20
3. ROBOTUN KONTROL TASARIMI.....	23
3.1. Sistem Kararlılığı ve Kontrol Yapıları.....	23
3.1.1. Lyapunov Kararlılık Analizi.....	23
3.1.2. Doğrudan Lyapunov Yöntemi.....	25
3.1.3. Uyarlamalı Kontrol Özellikleri.....	25
3.2. Kontrolör Tasarımı.....	26

3.2.1. Kinematik Kontrol Tasarımı.....	26
3.2.2. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Tasarımı.....	30
3.2.2.1. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Kuralı	32
3.2.2.2. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Parametre Seçimi	33
4. SİMULINK BENZETİMİ	36
4.1. Simulink Model İçerikleri.....	36
4.1.1. Referans Yörünge Bloğu.....	36
4.1.2. Kinematik Model Bloğu.....	37
4.1.3. Kinematik Kontrol Hız Bloğu	37
4.1.4. Dinamik Kontrol Bloğu	37
4.1.5. Uyarlamalı Dinamik Kontrol Bloğu	37
4.2. Referans Yörüngeler	37
4.2.1. Sinüzoidal Yörünge	37
4.2.2. Sonsuz Yörünge	40
4.2.3. Kare Yörünge	43
5. SIMMECHANICS BENZETİMİ.....	47
5.1. Simulink-SimMechanics Modeli	48
5.1.1. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Bloğu	48
5.1.2. Sol ve Sağ Tekerlek Blokları	49
5.1.3. Kinematik Model Bloğu.....	50
5.1.4. Planer Joint Bloğu	50
5.2. SimMechanics Aktuatör ve Hesaplanmış Tork Karşılaştırma	50
5.2.1. Sinüzoidal Yörünge Karşılaştırma	51
5.2.2. Sonsuz Yörünge Karşılaştırma	52
5.2.3. Kare Yörünge Karşılaştırma.....	52
6. SONUÇLAR	54

KAYNAKÇA	56
EKLER.....	58

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\dot{\phi}_l$:Robotun sol tekerlek açısal hızı, rad/s
$\dot{\phi}_r$:Robotun sağ tekerlek açısal hızı, rad/s
I_c	:Robot gövdesinin atalet momenti, kgm^2
I_m	:Tekerleğin ve tahrik elemanının gövde etrafındaki atalet momenti, kgm^2
I_w	:Tekerleğin ve tahrik elemanının tekerlek eksenine atalet momenti, kgm^2
m_c	:Robot gövdesinin kütlesi, kg
m_w	:Robot tekerleğinin ve tahrik ünitesinin kütlesi, kg
T_c	:Robotun ağırlık merkezi kinetik enerjisi, J
T_{wl}	:Robotun sol tekerlek kinetik enerjisi, J
T_{wr}	:Robotun sağ tekerlek kinetik enerjisi, J
T_r	:Rotasyon matrisi
V_c	:Robotun ağırlık merkezinin doğrusal hızı, m/s
θ_r	:Referans robotun, robot ve evrensel düzlemleri X eksenleri arasındaki açı, rad
C_1, \dots, C_5	:Kısıt katsayıları
K_p	:Uyarlamalı kontrol hata pozitif katsayılar matrisi
X_a	:Robotun tekerlek eksenleri orta noktası X eksen konumu, m
X_c	:Robot ağırlık merkezi X eksen konumu, m
X^e	:Evrensel düzlem X eksen
X_r	:Referans robot X eksen konumu, m
X^r	:Robot düzlemi X eksen
X_{wl}	:Sol tekerlek X eksen konumu, m
X_{wr}	:Sağ tekerlek X eksen konumu, m
Y_a	:Robotun tekerlek eksenleri orta noktası Y eksen konumu, m
Y_c	:Robot ağırlık merkezi Y eksen konumu, m
Y^e	:Evrensel düzlem Y eksen
Y_r	:Referans robot Y eksen konumu, m
Y^r	:Robot düzlemi Y eksen
Y_{wl}	:Sol tekerlek Y eksen konumu, m
Y_{wr}	:Sağ tekerlek Y eksen konumu, m
e_1	:X Eksen hatası, m
e_2	:Y Eksen hatası, m

e_3	:Eksenler arası açı hatası, rad
$e_v(t)$:Hız hatası vektörü
\hat{p}	:Tahmin edilen parametreler vektörü
\tilde{p}	:Tahmin edilen parametreler hata vektörü
q_1, \dots, q_n	:Tekerlek değişkenleri
q_h	:Robot ekseni hata vektörü
q_e	:Evrensel ekseni hata vektörü
$v_c(t)$:Önerilen kontrol hızı vektörü
v_{wl}	:Robotun sol tekerlek doğrusal hızı, m/s
w_r	:Referans robotun açısal hızı, rad/s
v_r	:Referans robotun doğrusal hızı, m/s
v_{wr}	:Robotun sağ tekerlek doğrusal hızı, m/s
y_1, \dots, y_m	:Genel durum değişkenleri
$\dot{\eta}$:Tekerlek açısal hız vektörü
d	:Robotun Tekerlek eksenleri orta noktası, robot ağırlık merkezi arası mesafe, m
I	:Toplam atalet momenti, kgm^2
L	:Robotun Tekerlek ve tekerlek eksenleri orta noktası arası mesafesi, m
m	:Toplam kütle, kg
T	:Robotun toplam kinetik enerjisi, j
V	:Robotun doğrusal hızı, m/s
w	:Robotun açısal hızı, rad/s
θ	:Robot ve evrensel düzlemleri X eksenleri arasındaki açı, rad
R	:Robotun tekerleğinin yarıçapı, m
$Y()$:Regressör matrisi
p	:Tahmin edilen parametreler gerçek değerleri vektörü
v	:Robotun doğrusal ve açısal hız vektörü
Γ	:Uyarlamalı kontrol katsayılar matrisi
Λ	:Kısırlar matrisi

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. İleri ve ters kinematik şematik gösterimi.....	5
Şekil 2.2. Kuka Omnimove ve Youbot mobil platform.....	5
Şekil 2.3. Pioneer-3-dx.....	6
Şekil 2.4. 2 tekerlekli mobil robot düzlemsel görünüm.....	7
Şekil 2.5. 2 tekerlekli mobil robot açısal ve doğrusal hızlar.....	8
Şekil 3.1. Lyapunov kararlılık yörüngeleri	24
Şekil 4.1. Sistemin Simulink modeli.....	36
Şekil 4.2. Sinüzoidal yörünge takip	38
Şekil 4.3. Sinüzoidal yörünge X ve Y eksen hataları.....	38
Şekil 4.4. Sinüzoidal yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız	39
Şekil 4.5. Sinüzoidal yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız	39
Şekil 4.6. Sinüzoidal yörünge tahmin edilen parametreler	40
Şekil 4.7. Sonsuz yörünge takip.....	41
Şekil 4.8. Sonsuz yörünge X ve Y eksen hataları	41
Şekil 4.9. Sonsuz yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız	42
Şekil 4.10. Sonsuz yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız.....	42
Şekil 4.11. Sonsuz yörünge tahmin edilen parametreler.....	43
Şekil 4.12. Kare yörünge takip.....	44
Şekil 4.13. Kare yörünge X Y eksen hataları.....	44
Şekil 4.14. Kare yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız	45
Şekil 4.15. Kare yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız.....	45
Şekil 4.16. Kare yörünge tahmin edilen parametreler	46
Şekil 5.1. Simulink ortamına aktarılan mobil robotun farklı açılardan gösterimi	48
Şekil 5.2. SimMechanics model blokları	48

Şekil 5.3. Sol tekerlek Bloğu	49
Şekil 5.4. Sağ tekerlek Bloğu.....	49
Şekil 5.5. Simulink sinyal ve fiziksel sinyal dönüştürücüler	50
Şekil 5.6. Planar joint bloğu.....	50
Şekil 5.7. Sinüzoidal yörünge sağ tekerlek torkları	51
Şekil 5.8. Sinüzoidal yörünge sol tekerlek torkları	51
Şekil 5.9. Sonsuz yörünge sağ tekerlek torkları	52
Şekil 5.10. Sonsuz yörünge sol tekerlek torkları	52
Şekil 5.11. Kare yörünge sağ tekerlek torkları.....	53
Şekil 5.12. Kare yörünge sol tekerlek torkları	53

1. GİRİŞ

Mobil robotlar fiziksel bir ortam içerisinde bir konumdan diğeri bir konuma, operatör ihtiyacı olmadan hareket edebilen robotlardır. İnsan gücünü azaltarak, uzun vade içerisinde ekonomik çözümler sunabilmesi açısından mobil robot uygulamaları her geçen gün daha da yaygınlaşmaktadır.

Mobil robotlar askeri uygulamalarda, lojistik sektöründe, endüstriyel sektörlerde, tarımsal uygulamalarda, arama kurtarma, gibi farklı alanlarda kullanılmaktadır. Yalnızca belirli bir ortamda sınırlı hareketleri olan endüstriyel tip robotların aksine mobil robotlar, daha önce belirlenmiş çalışma alanı içerisinde özgür bir şekilde hareket edebilmektedir. Bu hareketlerini kimi zaman belirlenmiş bir yörüngeyi izleyerek kimi zaman ise kendi yörüngesine karar vererek gerçekleştirebilir. Çalışma alanları ise kara, hava ve deniz gibi çok farklı ortamlar da olabilmektedir. Karada hareket eden mobil robotlar bacaklı mobil robotlar ve tekerlekli mobil robotlar olarak sınıflandırılabilirler. Bacaklı mobil robotlar genel olarak yer koşullarının standart olmadığı, merdiven, moloz, çakıl gibi zorlu koşullarda tercih edilirler. Bu tip robotların mekanik, kinematik ve dinamik kontrolleri diğeri tip robotlara göre daha karmaşık ve enerji tüketimleri daha fazla olmaktadır. Tekerlekli mobil robotlar ise standart olan ortamlarda daha rahat hareket edebilen kinematiği ve kontrolü bacaklı robotlara göre daha sade olan mobil robotlardır.

Genel olarak mobil robotlarda dinamik-kinematik kontrolcü, tahrik elemanları ve algılayıcılar bir arada bulunmaktadır. Algılayıcılardan gelen veriler kontrolcülerde işlenmekte, gerekli kararlar alınmakta, tahrik elemanlarına hareket bilgileri gönderilmekte ve bu hareket bilgileri sürücüler tarafından çözümlenerek tahrik elemanı harekete geçirilmektedir.

Mobil robot kontrol çalışmaları kinematik tabanlı ve dinamiklerden bağımsız yapılabildiği gibi, dinamik ve kinematik kontrolün olduğu çalışmalar da yaygın olarak yapılmaktadır. Bu çalışmalar da PID kontrol, Lyapunov tabanlı kontrol, geri adımlamalı kontrol, LQR kontrol, uyarlamalı kontrol, gürbüz kontrol, uyarlamalı gürbüz kontrol gibi bir çok farklı kontrol modelleri uygulanmaktadır.

Holonomik olmayan robotlar ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. J.C. Alexander tekerlekli mobil robotların hareket ve kinematik denklemlerini, tekerleklerin yuvarlanma ve kaymalı durumlarındaki davranışlarını incelemiştir (Alexander vd., 1989: 15-27).

Dhaouadi ve Hatab diferansiyel sürürlü bir mobil robotun kinematik denklemlerinin belirlenmesi, Lagrange ve Newton metotları ile dinamik modelin çıkartılması üzerine çalışmalar yapmıştır (Dhaouadi vd., 2013:1-7).

Muir ve arkadaşları farklı tip tekerleklerin geometrik modellerini çıkartmış ve mobil robot uygulamalarının kinematik ifadelerini elde etmiştir. Bu tekerlekler ile tasarlanan tekerlekli mobil robotların kinematik olarak karşılaştırmasını yapmıştır (Muir vd., 1987: 281-340).

Kanayama ve arkadaşları holonomik olmayan bir robotun açısal ve doğrusal durumunu belirlemek için bir kontrol hızı kuralı belirlemiştir. Belirlemiş olduğu bu kuralı Lyapunov fonksiyonu kullanarak kanıtlamıştır. Birçok çalışmada bu kural baz alınmış ve bu kuralın üzerine kontrol uygulamaları geliştirilmiştir (Kanayama vd., 1990: 384-389).

Demirbaş ve arkadaşları yörünge takip problemi çözümünde geri adımlamalı kontrolcü ve PID tasarımı gerçekleştirmişlerdir. PID kontrolcüyü tekerlek hızları ve torklarından ziyade motor kontrolü için tasarlamışlardır. PID parametrelerinin ve başlangıç şartlarının değişikliğinin yörünge kontrolündeki etkisini incelemişlerdir (Demirbaş vd., 2017: 1-15).

Koubaa ve arkadaşları diferansiyel sürürlü mobil robotun dinamik modeli üzerinden uyarlamalı kontrol çalışması yapmıştır. Çalışmada bilinmeyen parametrelerin tahmini yapılmış ve yörünge takibi esnasında tahmin edilen parametrelerin davranışları incelenmiştir (Koubaa vd., 2015: 1-5).

Fukao ve arkadaşları diferansiyel sürürlü mobil robotun uyarlamalı kontrolü üzerine çalışma yapmışlardır. Yaptıkları çalışmada dinamik kontrolcüye ek olarak kinematik parametreleri tahmin etmeyi amaçlamışlardır. Kinematik uyarlamalı kontrolcü tasarımında Lyapunov fonksiyonu önermişler ve bu fonksiyon ile sistemi kararlı kılan kuralı belirlemişlerdir. Yörünge takibi esnasında tahmin edilen dinamik ve kinematik parametrelerin kararlılığı araştırılmıştır (Fukao vd., 2000: 609-615).

Zergeroğlu ve arkadaşları yaptıkları çalışmada, denetim sistemleri kontrol sinyalinin tasarlanması sırasında, sistem model denkleminin çözümünü gerektirmeyen, buna karşın çevresel bozucu etken ve yapısal belirsizliklerle kararlı bir şekilde başa çıkabilen kontrollerin tasarım yöntemlerini incelemişlerdir. İnceledikleri bütün denetleyicilerin Lyapunov tarzı analizler ışığında kararlılık durumları detaylı olarak araştırılmıştır (Zergeroğlu vd., 2006: 587-602).

Bu tez çalışması ile holonomik olmayan diferansiyel sürürlü bir mobil robotun uyarlamalı kontrol yöntemi ve yörünge takip problemi detaylı bir şekilde sunulmuş ve bu konuda araştırmacılara eksiksiz bir kaynak oluşturması hedeflenmiştir. Fiziksel parametleri seçilen mobil robotun matematiksel modeli kinematik ve dinamik olarak ayrıntılı bir şekilde elde edilmiştir. Tezin bir sonraki bölümü ise elde edilmiş olan kinematik model kullanılarak, kinematik geri adımlamalı kontrolcü tasarımını içerecek şekilde kurgulanmıştır. Yörünge takibi için robotun gerekli kontrol hızları Lyapunov kararlılık teorisi baz alınarak elde edilmiştir. Ayrıca dinamik denklem içerisinde, bilinmeyen veya tahmin edilmesi istenen parametreler ayrıştırılarak uyarlamalı dinamik kontrolcü tasarımı Lyapunov kararlılık teorisini sağlayacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Sırası ile Matlab-Simulink benzetim modelini ve Matlab-Simscape benzetim modelleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Benzetim modellerinden sonra sonuçlara yer verilerek değerlendirmelerde bulunulmuştur.

2. KİNEMATİK VE DİNAMİK MODELLEME

Bu bölümde holonomik olmayan diferansiyel sürürlü mobil robotun kinematik ve dinamik modellenmesi yapılmıştır.

2.1. Kinematik Modelleme

Robot kinematiği robotların çalışma alanlarındaki geometrik parametreleri arasındaki ilişkiler ile ve yörüngelerine ve robotun hareketlerine dayatılan kısıtlamalar ile ilgilenir. Kinematik denklem robotun geometrik yapısı ile ilgilidir. Tekerlekli mobil robotun kinematik özelliği omni-wheel (çok yönlü tekerlek) veya tek yönlü tekerlek olması, bir, iki, üç, dört tekerlek olması gibi birçok farklı şekillerde olabilir. Robot kinematiği, dinamik yapıların incelenmesi, robotun hareketlerinin kararlılığı ve kontrolü için ön koşuldur.

2.1.1. İleri ve Ters Robot Kinematiği

Genel koordinat düzleminde q_1, q_2, \dots, q_n , tekerlek değişkenleri, y_1, y_2, \dots, y_m , genel durum değişkenleri olduğunu kabul edersek, vektörel ifade aşağıdaki gibi olacaktır (Tzafestas, S. G. 2013: 31).

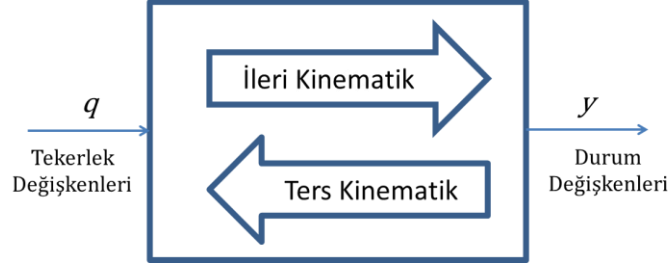
$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \text{ ve } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Burada bilinmeyen ifade y vektörü ve bilinen tekerlek değişkenleri olan q vektörü kullanılarak elde ediliyor ise buna ileri kinematik çözüm denir.

$$y = f(q) \quad (2.2)$$

Yukarıdaki ifadenin tersi alınır ve genel durum değişkenlerinden tekerlek değişkenlerine ulaşıyorsa bu ifadeye de ters kinematik çözüm denir. Şekil 2.1'de ileri ve ters kinematik ilişkisi şematik olarak gösterilmiştir.

$$q = f^{-1}(y) \quad (2.3)$$



Şekil 2.1. İleri ve ters kinematik şematik gösterimi

Kaynak:(Kucuk ve Bingul, 2004: 274-279)

2.1.2. Holonomik ve Holonomik Olmayan Hareket

Holonomik ifadesi bir robotun kontrol edilebilir ve toplam serbestlik dereceleri arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Bir robotun kontrol edilebilir serbestlik derecesi ve toplam serbestlik dereceleri eşit ise bu robot için holonomik robot denilir. Başka bir ifade ile bir robot ortamın sağladığı hareket çeşidi kadar doğrudan hareket edebiliyorsa bu tip robotlara holonomik robot denir. Eğer bu ifade edilen şartlar sağlanmıyorsa bu tip robotlar holonomik olmayan robot olarak adlandırılır. Örneğin 4 tekerlekli bir otomobil ileri geri hareket edebiliyorken tekerlek dönme eksenleri doğrultusunda doğrudan hareket sağlayamaz. Bu eksen üzerinde holonomik olmayan kısıtlamalar mevcuttur.

Robot omni-wheel (Çok yönlü tekerlek, tekerlekli tekerlekler veya Mekanum tekerlekler) tekerlekler üzerine inşa edildi ise robot tüm serbestlik derecelerinde hareket sağlayabildiği için bu tip robot holonomik sınıflandırma içerisinde yer alacaktır. Mekanum tekerlekler ile tasarlanmış bir robot ile tekerlek dönme eksenleri yönünde de hareket sağlanabilmektedir. Şekil 2.2’de mekanum tekerlekler ile tasarlanmış 4 tekerlekli 0.5 kg kapasiteli ve 24 tekerlekli 90 ton kapasiteli holonomik robotlar gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Kuka Omnimove ve Youbot mobil platform

Kaynak: (Shepherd ve Buchstab 2014: 373-380)

Holonomik olmayan robotlara ise; tek tekerlekli sürüflü, diferansiyel sürüflü, üç tekerlekli, dört tekerlekli araç benzeri hareket eden robotlar (akerman robotlar) örnek verilebilir. Şekil 2.3’de diferansiyel sürüflü holonomik olmayan bir robot gösterilmiştir. Bu robotun hareketleri kayma olmaması şartıyla tekerlek hareketleri ile sınırlıdır.

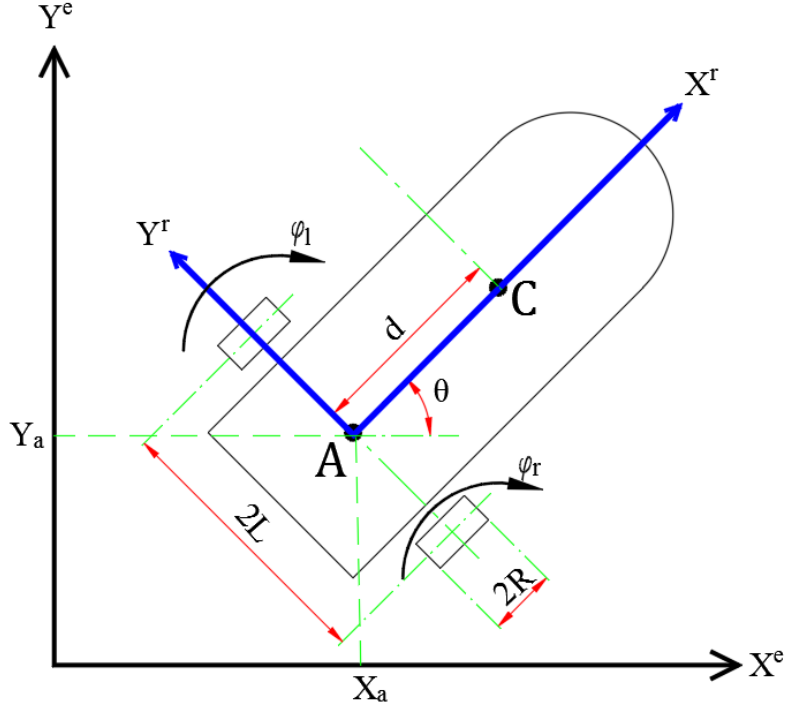


Şekil 2.3. Pioneer-3-dx

Kaynak: (Generationrobots Pioneer3dx 2021)

2.1.3. Diferansiyel Sürüflü Robot

Genel olarak iç mekân robotlar diferansiyel tahrikli hareket tipini kullanırlar. Hareket kabiliyetlerinin holonomik robotlara göre sınırlı olmasına rağmen maliyet açısından çok daha uygun olması tercih edilmelerine neden olmaktadır. Diferansiyel sürüflü mobil robot, aynı ekseninde 2 adet tahrikli tekerlek ve önde 1 adet sarhoş tekerlek içermektedir. İki tekerlekte aynı R yarıçaplı olup, tekerlekler arası mesafe $2L$ kadardır. A tekerlek eksenlerinin orta noktasını, C ise ağırlık merkezini ifade etmektedir. Şekil 2.4’te iki tekerlekli diferansiyel sürüflü mobil robotun şematik gösterimi ile sabit ve hareketli eksen takımı verilmiştir.



Şekil 2.4. 2 tekerlekli mobil robot düzlemsel görünüm

Sistemde robot koordinat sistemi ve evrensel koordinat sistemi olmak üzere 2 adet koordinat sistemi tanımlanabilir.

Birincisi, robot düzlemi: Robotun kendi eksenleri üzerindeki hareketlerini ifade eder. Robotun hareket kısıtları bu düzlem üzerinden gözlemlenebilmektedir. X^r ve Y^r bu düzlemi ifade eder. İkincisi, evrensel düzlem: Robotun hareketini sağladığı dış etkilerinde bulunduğu belirli bir orijin noktası olan düzlemdir. X^e ve Y^e bu düzlemi ifade eder.

Burada robot koordinat sisteminden, evrensel koordinat sistemine geçiş için aşağıdaki gibi bir ortogonal dönüşüm matrisi ifade edilebilir.

$$T_r = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Evrensel koordinat sistemi ve robot koordinat sistemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

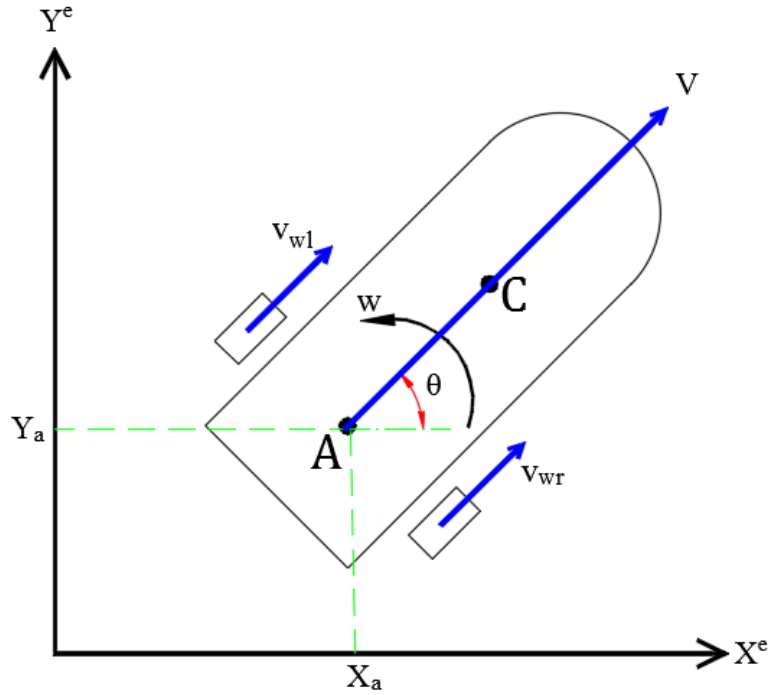
$$Q^e = T_r \begin{bmatrix} X^r \\ Y^r \\ \theta^r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Bu ortogonal dönüşüm matrisi aynı zamanda hızlar arasındaki ilişkinin ifade edilebilmesi için de kullanılabilir. Bu ortogonal dönüşüm matrisi, kinematik ve dinamik modellerin türetilmesinde başlangıç kuralıdır.

$$\dot{Q}^e = \begin{bmatrix} \dot{X}^e \\ \dot{Y}^e \\ \dot{\theta}^e \end{bmatrix} = T_r \begin{bmatrix} \dot{X}^r \\ \dot{Y}^r \\ \dot{\theta}^r \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.1.4. Diferansiyel Sürüslü Robot Kinematik Modeli

Şekil 2.5’de gösterildiği gibi v_{wl} ve v_{wr} sırası ile sol ve sağ tekerleğin doğrusal hızlarıdır. V robotun tekerlek eksenleri orta noktasının evrensel koordinat düzlemindeki doğrusal hızını, w ise robotun evrensel düzlemdeki ve robot düzlemindeki açısal hızını ifade etmektedir. θ evrensel ve robot düzlemlerinin X eksenleri arasındaki açıyı ifade etmektedir.



Şekil 2.5. 2 tekerlekli mobil robot açısal ve doğrusal hızlar

Robot doğrusal hızı evrensel koordinat düzleminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V = \dot{X}_a \cos\theta + \dot{Y}_a \sin\theta \quad (2.7)$$

Robotun tekerlek doğrusal hızlarının, tekerlek açısal hızları ile ilişkisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} v_{wr} &= R\dot{\phi}_r \\ v_{wl} &= R\dot{\phi}_l \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tekerlek doğrusal hızları, robot doğrusal hızı ve açısal hızı ile beraber de ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} v_{wr} &= V + \dot{\theta}L \\ v_{wl} &= V - \dot{\theta}L \end{aligned} \quad (2.9)$$

Robotun doğrusal hızı ise tekerlek doğrusal hızlarının aritmetik ortalaması olacaktır. Tekerlek açısal hızları ile robot hızının ilişkisi ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V = \frac{v_{wr} + v_{wl}}{2} = R \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{2} \quad (2.10)$$

Robotun kendi eksenini etrafında dönüş hızını ifade eden w aşağıdaki gibidir.

$$w = \dot{\theta} = \frac{v_{wr} - v_{wl}}{2L} = R \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{2L} \quad (2.11)$$

2.1.5. Kinematik Kısıtlar

Bu çalışmada ele alınan robot holonomik olmayan bir yapıda olduğu için robotun bazı kısıtlamaları mevcuttur. Bu kısıtlamalar robotun hareketlerinde ve hızlarında bazı sınırlamalar getirmektedir.

Robotun yanal hareket yapamaması; Robot kavisli hareketler ile öne ve arkaya hareket edebilir, ama yana doğrudan bir hareket yapamaz. Robotun tekerlek eksenleri orta noktası hızı yan eksen boyunca sıfırdır. Robot düzleminde Y eksen boyunca Şekil 2.4'te verilen A noktasının hızı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{Y}_a^r = 0 \quad (2.12)$$

Bu ifade evrensel koordinat düzlemi üzerinde ifade edilirse, (2.13) eşitliğindeki sıfır ifadesi elde edilir.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\dot{Y}_a}{\dot{X}_a} \quad (2.13)$$

$$-\dot{X}_a \sin\theta + \dot{Y}_a \cos\theta = 0 \quad (2.14)$$

Tekerleklerde kayma olmaması; Tekerlekler ile zemin tek noktadan temas ettiği ve tekerleklerin patinaj yapmadığı kabul edilmiştir. Bu ifadede tekerleğin dönmesi sonucunda hareket doğrudan doğrusal harekete dönüşmektedir. (2.7) ve (2.9) eşitlikleri bir araya getirildiğinde matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{X}_a \cos\theta + \dot{Y}_a \sin\theta + \dot{\theta}L - R\dot{\varphi}_r = 0 \quad (2.15)$$

$$\dot{X}_a \cos\theta + \dot{Y}_a \sin\theta - \dot{\theta}L - R\dot{\varphi}_l = 0 \quad (2.16)$$

Sıfır eşitlikleri olan (2.14), (2.15) ve (2.16) eşitlikleri matris formunda bir araya getirildiklerinde aşağıdaki gibi ifade elde edilir.

$$\Lambda(q)\dot{q} = 0 \quad (2.17)$$

Burada $\Lambda(q)$ kısıtlar matrisi olarak adlandırılır. \dot{q} ise genelleştirilmiş koordinat elemanlarının türevlerini içermektedir.

$$\dot{q} = [\dot{X}_a \quad \dot{Y}_a \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\varphi}_l] \quad (2.18)$$

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & L & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -L & 0 & -R \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Tekerlek hızlarına bağlı olarak genelleştirilmiş koordinat elemanlarının elde edileceği ileri kinematik matrisi ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Tekerleğin açısal hızlarından mobil robotun doğrusal ve açısal hızları bu ifade ile elde edilebilir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ \theta \\ \varphi_r \\ \varphi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos\theta & \frac{R}{2} \cos\theta \\ \frac{R}{2} \sin\theta & \frac{R}{2} \sin\theta \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Yukarıda verilen ifadenin tersi olan ve robotun doğrusal ve açısal hızlarından tekerleklerin açısal hızlarının elde edileceği, ters kinematik matrisi ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{L}{R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Robotun doğrusal hız eksen bileşenlerinin ve robotun açısal hızlarına ise aşağıdaki ifade ile ulaşılabilir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.2. Dinamik Modelleme

Bir robotun dinamik matematiksel modelinin elde edilmesi robotun analizi, tasarımı ve kontrolünde önem arz etmektedir. Kontrol yapıları incelemenden önce dinamik modelin ortaya konulması gereklidir. Kontrol sistemleri dinamik yapı esas alınarak dinamik model üzerine inşa edilmektedir. Kinematik model içerisinde kütle, atalet ve enerji bileşenleri olmadan sadece sistemin geometrisi üzerinden inceleme yaparken, dinamik modelleme ise sistemin kuvvetlerinin modellendiği ve hareketle ilişkili enerjilerin ve hızların içerildiği bir yapıdadır.

Holonomik olmayan bir robotun dinamik modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(\dot{q}) = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (2.23)$$

Bu ifade içerisindeki;

$q \in R^n$ genelleştirilmiş koordinatları,

$M(q) \in R^{n \times n}$ simetrik ve pozitif tanımlı atalet matrisini,

$V(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ merkezci ve coriolis matrisini,

$G(\dot{q}) \in R^{n \times 1}$ yerçekimi vektörünü,

$B(q) \in R^{n \times (n-m)}$ giriş dönüşüm matrisini,

$\tau \in R^{(n-m) \times 1}$ giriş torklarını,

$\Lambda^T(q) \in R^{m \times n}$ kısıtlar matrisini ve

$\lambda \in R^{m \times 1}$ kısıt kuvvetleri vektörünü ifade etmektedir.

Bu ifade iki farklı yolla elde edilebilir. Birincisi enerji temelli Lagrange yaklaşımı diğeri ise Newton-Euler vektör mekaniği yaklaşımıdır. Bu çalışmada dinamik modelin matematiksel çözümünde Lagrange yaklaşımı kullanılmıştır.

2.2.1. Lagrange Yaklaşımı İle Dinamik Modelleme

Lagrange yaklaşımı mekanik hareket denklemlerini formüle etmek için yaygın kullanılan ve güçlü bir yöntemdir. Lagrange yaklaşımı sistemin potansiyel ve kinetik enerjilerini dikkate alarak hareket denklemlerini türetmek için kullanılır.

Lagrange eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L = T - V \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F - \Lambda^T(q) \lambda \quad (2.25)$$

T sistemin toplam kinetik enerjisini, V ise sistemin potansiyel enerjisini, L Lagrange fonksiyonu, F sisteme etkiyen kuvvetleri, Λ kısıtlar matrisini ve q genelleştirilmiş koordinatları ifade etmektedir.

Sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri aşağıdaki gibi formülize edilebilirler.

Robotun ağırlık merkezinin kinetik enerjisi;

$$T_c = \frac{1}{2} m_c V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (2.26)$$

Sağ tekerleğin kinetik enerjisi;

$$T_{wr} = \frac{1}{2} m_w V_{wr}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\phi}_r^2 \quad (2.27)$$

Sol tekerleğin kinetik enerjisi;

$$T_{wl} = \frac{1}{2} m_w V_{wl}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\phi}_l^2 \quad (2.28)$$

olarak tanımlanmıştır. Elde etmiş olduğumuz kinetik enerji ifadelerinin toplamı mobil robotun toplam kinetik enerjisini verecektir. Toplam kinetik enerji;

$$T = T_c + T_{wr} + T_{wl} \quad (2.29)$$

olarak ifade edilmektedir. Burada m_c tekerlek ve tahrik motorlarının dahil edilmediği robot gövdesinin kütleini, m_w robot tekerleğinin kütlesi, I_c ana gövdenin atalet momenti, I_w her bir tekerleğin ve motorun tekerlek mili eksenine etrafındaki atalet momenti, I_m her bir tekerleğin ve motorun ana gövde etrafında dönmesinden kaynaklı atalet momentini ifade etmektedir.

Elde edilmek istenen kinetik enerjiler için, tekerlekler ve robot ana gövdesinin geometrik olarak konumlarının türetilmesi gerekecektir.

Doğrusal bir hız vektörününün 2 adet bileşeni vardır ve aşağıdaki ifade ile bu hız ifadesi ve bileşenlerinin ilişkisi yazılabilir.

$$V_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 \quad (2.30)$$

Tekerlek konumları, tekerlek eksen merkezi olan A noktası referans alınarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} X_{wr} &= X_a + L \sin \theta \\ Y_{wr} &= Y_a - L \cos \theta \\ X_{wl} &= X_a - L \sin \theta \\ Y_{wl} &= Y_a + L \cos \theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

Bu konum ifadesinin türevi alındığında tekerleklerin hız ifadeleri elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \dot{X}_{wr} &= \dot{X}_a + \dot{\theta} L \cos \theta \\ \dot{Y}_{wr} &= \dot{Y}_a + \dot{\theta} L \sin \theta \\ \dot{X}_{wl} &= \dot{X}_a - \dot{\theta} L \cos \theta \\ \dot{Y}_{wl} &= \dot{Y}_a - \dot{\theta} L \sin \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ağırlık merkezinin A noktasına göre konumları ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} X_c &= X_a + d \cos \theta \\ Y_c &= Y_a + d \sin \theta \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bu ifadenin de türevi alınıp hız denklemleri türetilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= \dot{X}_a - d \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{Y}_c &= \dot{Y}_a + d \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.34)$$

(2.30) eşitliğindeki ifadeyi V_c için yazacak olursak aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$V_c^2 = X_c^2 + Y_c^2 \quad (2.35)$$

(2.26) eşitliğinde tanımlanan robotun ağırlık merkezi kinetik enerji ifadesi ve ağırlık merkezi hız ifadesi bir arada aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T_c = \frac{1}{2}m_c(X_c^2 + Y_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \quad (2.36)$$

Elde edilen bu ifade içerisindeki X_c ve Y_c konum ifadeleri yerine (2.33) eşitliği yazılırsa;

$$T_c = \frac{1}{2}m_c((\dot{X}_a - d\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{Y}_a + d\dot{\theta}\cos\theta)^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \quad (2.37)$$

$$T_c = \frac{1}{2}m_c(\dot{X}_a^2 - 2\dot{X}_ad\dot{\theta}\sin\theta + d^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{Y}_a^2 + 2\dot{Y}_ad\dot{\theta}\cos\theta + d^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \quad (2.38)$$

elde edilir. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ eşitliği kullanılarak ifadenin en sade hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T_c = \frac{1}{2}m_c(\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + \frac{1}{2}m_cd^2\dot{\theta}^2 + m_cd\dot{\theta}(\dot{Y}_a\cos\theta - \dot{X}_a\sin\theta) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \quad (2.39)$$

(2.30) eşitliğindeki ifadeyi V_{wr} için yazacak olursak aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$V_{wr}^2 = X_{wr}^2 + Y_{wr}^2 \quad (2.40)$$

(2.27) eşitliğinde tanımlanan robotun sağ tekerlek kinetik enerji ifadesi, (2.32) tekerlek konumları türev ifadesi ve (2.40) tekerlek hız bileşenleri ifadesi bir arada aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T_{wr} = \frac{1}{2}m_w((\dot{X}_a + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{Y}_a + L\dot{\theta}\sin\theta)^2) + \frac{1}{2}I_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w\dot{\phi}_r^2 \quad (2.41)$$

$$T_{wr} = \frac{1}{2}m_w(\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + m_wL\dot{\theta}(\dot{X}_a\cos\theta + \dot{Y}_a\sin\theta) + \frac{1}{2}m_wL^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \frac{1}{2}I_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w\dot{\phi}_r^2 \quad (2.42)$$

Sağ tekerlek kinetik enerji ifadesinin en sade hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T_{wr} = \frac{1}{2}m_w (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + m_w L \dot{\theta} (\dot{X}_a \cos \theta + \dot{Y}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}m_w L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_r^2 \quad (2.43)$$

(2.30) eşitliğindeki ifadeyi V_{wl} için yazacak olursak aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$V_{wl}^2 = X_{wl}^2 + Y_{wl}^2 \quad (2.44)$$

(2.28) eşitliğinde tanımlanan robotun sol tekerlek kinetik enerji ifadesi, (2.32) tekerlek konumları türev ifadesi ve (2.44) tekerlek hız bileşenleri ifadesi bir arada aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T_{wl} = \frac{1}{2}m_w ((\dot{X}_a - L\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{Y}_a - L\dot{\theta} \sin \theta)^2) + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_l^2 \quad (2.45)$$

$$T_{wl} = \frac{1}{2}m_w (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) - m_w L \dot{\theta} (\dot{X}_a \cos \theta + \dot{Y}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}m_w L^2 \dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_r^2 \quad (2.46)$$

En sade hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T_{wl} = \frac{1}{2}m_w (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) - m_w L \dot{\theta} (\dot{X}_a \cos \theta + \dot{Y}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}m_w L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_l^2 \quad (2.47)$$

(2.26) toplam kinetik enerji ifadesi (2.39) (2.43) (2.47) eşitlikleri bir araya getirilerek;

$$T = \frac{1}{2}m_c (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + \frac{1}{2}m_c d^2 \dot{\theta}^2 + m_c d \dot{\theta} (\dot{Y}_a \cos \theta - \dot{X}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_w (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + m_w L \dot{\theta} (\dot{X}_a \cos \theta + \dot{Y}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}m_w L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_r^2 + \frac{1}{2}m_w (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) - m_w L \dot{\theta} (\dot{X}_a \cos \theta + \dot{Y}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}m_w L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_l^2 \quad (2.48)$$

Elde edilen kinetik enerji ifadesinin daha sade hale getirilerek işlem kolaylığı sağlanması için toplam kütle ve atalet ifadeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$m = m_c + 2m_w \quad (2.49)$$

$$I = m_c d^2 + I_c + 2m_w L^2 + 2I_m \quad (2.50)$$

(2.48) eşitliğindeki kütle ve atalet ifadeleri yerine, (2.49) ve (2.50) ifadeleri kullanılarak daha sade aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + m_c d \dot{\theta} (\dot{Y}_a \cos\theta - \dot{X}_a \sin\theta) + \frac{1}{2}I_w(\dot{\varphi}_r^2 + \dot{\varphi}_l^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.51)$$

Mobil robot sisteminde potansiyel enerji üzerinde bir değişim olmadığı için Lagrange eşitliği içerisindeki potansiyel ifadesi sıfır olacaktır. Lagrange eşitlik ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + m_c d \dot{\theta} (\dot{Y}_a \cos\theta - \dot{X}_a \sin\theta) + \frac{1}{2}I_w(\dot{\varphi}_r^2 + \dot{\varphi}_l^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.52)$$

Genelleştirilmiş koordinat X_a Y_a θ φ_r φ_l elemanları Lagrange eşitliği için sırası ile uygulandığında;

$$q_1 = X_a \text{ için;}$$

$$m\ddot{X}_a - m_c d \ddot{\theta} \sin\theta - m_c d \dot{\theta}^2 \cos\theta = C_1 \quad (2.53)$$

$$q_2 = Y_a \text{ için;}$$

$$m\ddot{Y}_a + m_c d \ddot{\theta} \cos\theta - m_c d \dot{\theta}^2 \sin\theta = C_2 \quad (2.54)$$

$$q_3 = \theta \text{ için;}$$

$$m_c d \ddot{Y}_a \cos\theta - m_c d \ddot{X}_a \sin\theta + I\ddot{\theta} = C_3 \quad (2.55)$$

$$q_4 = \varphi_r \text{ için;}$$

$$I_w \ddot{\varphi}_r = \tau + C_4 \quad (2.56)$$

$q_5 = \varphi_l$ için;

$$I_w \ddot{\varphi}_l = \tau + C_5 \quad (2.57)$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler içerisindeki C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 kısıtlamalar ile ilgili katsayılardır. Bu katsayılar Lagrange çarpanları vektörü ve daha önce ifade edilen kısıtlar matrisi Λ ile beraber ifade edilebilir.

$$\Lambda^T(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Elde edilen Lagrange çözümleri (2.53)-(2.57) ve kısıtlar ifadeleri (2.58) beraber aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (2.59)$$

Lagrange çözüm ifadeleri (2.59) eşitliği içerisindeki gibi ifade edilirse, dinamik eşitlik içindeki matrisler (2.60) – (2.63)' de ifade edildiği gibidir.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c d \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c d \cos\theta & 0 & 0 \\ -m_c d \sin\theta & m_c d \cos\theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\Lambda^T(q)\lambda = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

2.2.2. Tekerlek Hızlarına Bağlı Dinamik Modelleme

İlk olarak tekerlek hızlarına bağlı olan dinamik eşitlik elde edilecek olursa, genelleştirilmiş koordinatlar ve tekerlek hızları eşitlik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos\theta & \frac{R}{2} \cos\theta \\ \frac{R}{2} \sin\theta & \frac{R}{2} \sin\theta \\ \frac{R}{2b} & -\frac{R}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Tekerlek hızlarına bağlı dinamik ifade elde edileceği için hız ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Genelleştirilmiş koordinatlar ifadesi (2.64) ve (2.65) eşitlikleri bir araya getirilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (2.66)$$

Atalet matrisi çarpanı olarak genelleştirilmiş koordinatlar ifadesinin 2. türevine ihtiyaç olduğu için (2.66) ifadesinin türevi aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \quad (2.67)$$

(2.59) dinamik model eşitliğindeki genelleştirilmiş koordinatlar yerine elde edilen teker hızlarına bağlı ifadeler yazılırsa;

$$M(q)(\dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta}) + V(q, \dot{q})(S(q)\eta) = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (2.68)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade $S^T(q)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} S^T(q) M(q)(\dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta}) + S^T(q) V(q, \dot{q})(S(q)\eta) \\ = S^T(q) B(q)\tau - S^T(q) \Lambda^T(q)\lambda \end{aligned} \quad (2.69)$$

ifadesi elde edilir. Daha önce elde edilen kısıtlar matrisi eşitliğini kullanarak (2.18)-(2.20), Lagrange çarpan vektörü ve kısıtlar matrisi yok edilebilir. (2.66) eşitliği $\Lambda(q)$ ile çarpılırsa;

$$\Lambda(q) \dot{q} = \Lambda(q) S(q) \eta \quad (2.70)$$

eşitliği elde edilir. İki tarafında transpozesi alınır;

$$(\Lambda(q) \dot{q})^T = 0 = \eta^T S^T(q) \Lambda^T(q) \quad (2.71)$$

sıfır eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli şart aşağıda belirtilmiştir.

$$S^T(q) \Lambda^T(q) = 0 \quad (2.72)$$

Böylece kısıtlar matrisi ve Lagrange çarpanları vektörü dinamik denklem içerisinde elenerek, denklem bilinmeyen ifadelerden arındırılmış olur. Elde edilen denklemin son hali aşağıda ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} S^T(q) M(q) \dot{S}(q) \eta + S^T(q) M(q) S(q) \dot{\eta} + S^T(q) V(q, \dot{q}) (S(q) \eta) \\ = S^T(q) B(q) \tau \end{aligned} \quad (2.73)$$

Elde edilen bu denklem daha sade ifade edilecek olursa, yeni atalet matrisi, Coriolis matrisi ve giriş dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\bar{M}(q) = S^T(q) M(q) S(q) \quad (2.74)$$

$$\bar{V}(q, \dot{q}) = S^T(q) M(q) \dot{S}(q) + S^T(q) V(q, \dot{q}) S(q) \quad (2.75)$$

$$\bar{B}(q) = S^T(q) B(q) \quad (2.76)$$

Böylece aşağıdaki matrisler elde edilir.

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 - I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 + I) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$\bar{V}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L} m_c d \dot{\theta} \\ -\frac{R^2}{2L} m_c d \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$\bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

2.2.3. Açısal ve Doğrusal Hızlara Bağlı Dinamik Modelleme

Açısal ve doğrusal hızlara bağlı olan dinamik eşitlik elde edilecek olursa, genelleştirilmiş koordinatlar ve tekerlek hızları eşitlik ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{R} & \frac{b}{R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Açısal ve doğrusal hızlara bağlı dinamik ifade elde edileceği için hız ifadesi (2.81) eşitliğindeki gibi tanımlanabilir.

$$v = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Genelleştirilmiş koordinatlar ifadesi (2.80) ve (2.81) eşitlikleri bir araya getirilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{q} = S(q)v \quad (2.82)$$

Atalet matrisi çarpanı olarak genelleştirilmiş koordinatlar ifadesinin 2. Türevine ihtiyaç olduğu için (2.82) ifadesinin türevi aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)v + S(q)\dot{v} \quad (2.83)$$

(2.59) dinamik model eşitliğindeki genelleştirilmiş koordinatlar yerine elde edilen teker hızlarına bağlı ifadeler yazılırsa;

$$M(q)(\dot{S}(q)v + S(q)\dot{v}) + V(q, \dot{q})(S(q)v) = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (2.84)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade $S^T(q)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} S^T(q) M(q)(\dot{S}(q)v + S(q)\dot{v}) + S^T(q) V(q, \dot{q})(S(q)v) \\ = S^T(q) B(q)\tau - S^T(q) \Lambda^T(q)\lambda \end{aligned} \quad (2.85)$$

ifadesi elde edilir. Daha önce elde edilen kısıtlar matrisi eşitliğini kullanarak (2.18)-(2.20), Lagrange çarpan vektörü ve kısıtlar matrisi yok edilebilir. (2.82) eşitliği $\Lambda(q)$ ile çarpılırsa;

$$\Lambda(q) \dot{q} = \Lambda(q) S(q)v \quad (2.86)$$

eşitliği elde edilir. İki tarafında transpozesi alınırsa;

$$(\Lambda(q) \dot{q})^T = 0 = v^T S^T(q) \Lambda^T(q) \quad (2.87)$$

sıfır eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli şart aşağıda belirtilmiştir.

$$S^T(q) \Lambda^T(q) = 0 \quad (2.88)$$

Böylece kısıtlar matrisi ve Lagrange çarpanları vektörü dinamik denklem içerisinden elenerek, denklem bilinmeyen ifadelerden arındırılmış olur. Elde edilen denklemin son hali aşağıda ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} S^T(q) M(q) \dot{S}(q) v + S^T(q) M(q) S(q) \dot{v} + S^T(q) V(q, \dot{q}) (S(q) v) \\ = S^T(q) B(q) \tau \end{aligned} \quad (2.89)$$

Elde edilen bu denklem içerisindeki ifade daha basit ifade edilecek olursa, yeni atalet matrisi, Coriolis matrisi ve giriş dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\bar{M}(q) = S^T(q) M(q) S(q) \quad (2.90)$$

$$\bar{V}(q, \dot{q}) = S^T(q) M(q) \dot{S}(q) + S^T(q) V(q, \dot{q}) S(q) \quad (2.91)$$

$$\bar{B}(q) = S^T(q) B(q) \quad (2.92)$$

Böylece aşağıdaki matrisler elde edilir.

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2 + 2I_w}{R^2} & 0 \\ 0 & I + \frac{2I_w L^2}{R^2} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\bar{V}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_c d \dot{\theta} \\ m_c d \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\bar{B}(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Kinematik ifadelerde elde edilmiş olan hareket ifadeleri dinamik model ile beraber ele alınarak seçimi yapılacak kontrolcü için ön hazırlık yapılmıştır. Elde edilmiş olan dinamik ifade kontrol sistemine kolaylıkla uyarlanabilir haldedir. Seçimi yapılacak olan kontrolcüye

bağlı olarak elde edilmiş olan dinamik ifadelerden birisi seçilip kontrol uygulamasına geçilebilir. Burada dinamik ifadenin seçimi kontrol uygulamasında kontrolcünün uygulanmasını kolaylaştıracak nitelikte olmalıdır.

Bu çalışmada açısız ve doğrusal hızlara bağlı olarak kontrol çözümü üretilecektir. (2.90) - (2.95) eşitlikleri bir arada yazılırsa aşağıdaki gibi yeni dinamik ifade elde edilir.

$$\bar{M}(q)\dot{v} + \bar{V}(q, \dot{q})v = \bar{B}(q)\tau \quad (2.96)$$

\dot{v} yalnız bırakılırsa;

$$\bar{M}(q)\dot{v} = -\bar{V}(q, \dot{q})v + \bar{B}(q)\tau \quad (2.97)$$

$$\dot{v} = -\bar{M}(q)^{-1}\bar{V}(q, \dot{q})v + \bar{M}(q)^{-1}\bar{B}(q)\tau \quad (2.98)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliklere göre elde edilen hız ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(\tau_1 + \tau_2 + Rdm\dot{c}\theta w)}{mR^2 + 2I_w} \\ -\frac{R(L\tau_2 - L\tau_1 + Rdm\dot{c}\theta v)}{IR^2 + 2I_wL^2} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

3. ROBOTUN KONTROL TASARIMI

Teknolojinin gelişmesi ile beraber evde, işte, trafikte birçok sistem içerisinde küçüğe olsa hareket, pozisyon, seviye, sıcaklık, basınç kontrolü gibi birçok kontrol uygulamaları mikroişlemciler, bilgisayarlar veya PLC'ler ile gerçekleştirilmektedir. Daha karmaşık sistemlerin hayata geçirilmesi ile daha karmaşık dinamik yapılar ortaya çıkmakta ve bu karmaşık yapıların kontrolü için değişik yöntemlerin geliştirilmesine neden olmuştur.

Çok yaygın olarak kullanılan PID kontrol hata sinyalinin kendisi, türevi ve integrali bir arada ele alınarak geliştirilmiş bir kontrol yapısına sahiptir. Bu kontrolün yanı sıra LQR kontrol, bulanık mantıklı kontrol, geri adımlamalı kontrol, gürbüz kontrol, uyarlamalı kontrol ve bahsedilen bu kontrolcülerin beraber uygulandıkları sistemler yaygındır.

3.1. Sistem Kararlılığı ve Kontrol Yapıları

Elde edilen dinamik sistemin en önemli özelliği kararlı olup olmadığıdır. Kararlılık bir sistemin bozucu etkiler karşısında geçici olarak bir davranış gösterdikten sonra tekrar denge konumuna geri dönmesidir. Eğer ki sistem kararsız ise bozucu etkiler karşısında savunmasızdır, sistem bina veya köprü ise sürekli salınım yapacak bir süre sonra yapı yıkıma uğrayacaktır. Sistem yörünge takibi yapacak bir robot ise kararsızlık nedeniyle yörüngeden uzaklaşacak ve istenmeyen konumlara ulaşacaktır. Kararsız sistemlerin pratikte uygulanması mümkün olmayacaktır.

Başka bir ifade ile bir dinamik sistem transfer fonksiyonu gibi sadece giriş/çıkış ilişkisi ile tanımlandığı zaman, sistem eğer sınırlı girişler için sınırlı çıkışlar oluşturuyorsa kararlı denir. Buna sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlılığı denmektedir. Bir sistem durum uzay denklemleri ile gösterildiğinde zaman çizgisel (asimptotik) kararlılık olarak bilinen bir kararlılık ile tanımlanabilir. Bir sistem durum değişkenleri herhangi bir başlangıç değerinden sıfıra yakınsıyor ise asimptotik olarak kararlıdır.

3.1.1. Lyapunov Kararlılık Analizi

Kontrol edilecek olan doğrusal olmayan ve zamanla değişmeyen bir sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

Yukarıdaki ifade için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan $x = x_e$ çözümleri ele alınırsa, bu çözümü sağlayan x_e değerlerine sistemin denge noktası adı verilir. Denge noktası, herhangi bir zamanda x_e başlangıç noktası olarak kabul edildiğinde sistem zaman içerisinde hep x_e

noktasında kalacak ve değişim olmayacaktır. Ama sistemin başlangıç noktası x_e olmadığında zaman ile çözümün x_e noktasına uzaklığı ne olacaktır? Kararlılık problemlerinde araştırılan konu çözümün bu noktaya zaman içerisinde olan uzaklığıdır.

Teorem 3.1: $x = 0$ 1 nolu denklemin denge noktası olduğu kabul edilsin. Bu denge noktası için;

Her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ aşağıdaki şart sağlanıyorsa bu sistem kararlıdır.

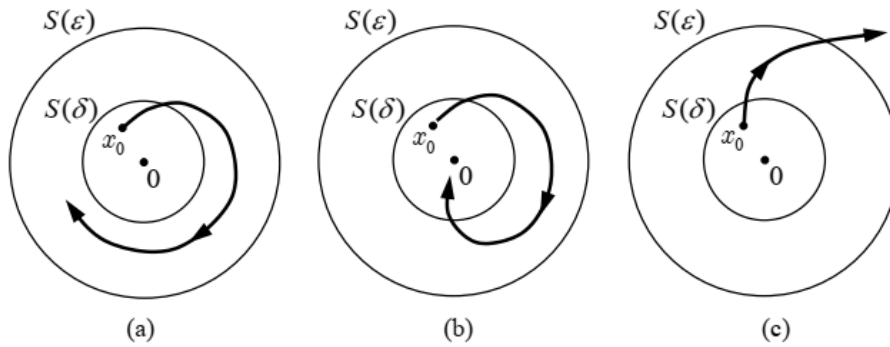
$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

Kararlı bu sistem için δ aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde seğebiliyorsak asimptotik kararlıdır.

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.3)$$

Eğer kararlı değilse kararsızdır.

Burada da ifade edildiği gibi, dinamik bir sisteminin Lyapunov anlamında kararlı olabilmesi için, sistemin denge noktasını yakınlarından başlayan çözümün yine bu ε komşuluğu aralığında olmalıdır. Aksi takdirde sistem kararsızdır. Kararlı olan sistem zamanla denge noktasına yakın kalmakta ve zaman sonsuza gittikçe, çözümün denge noktasına yaklaşmakta ise sistem asimptotik kararlıdır. şekil 3.1. 'de (a) kararlı yörünge, (b) asimptotik kararlı yörünge, (c) kararsız yörünge şematik olarak ifade edilmiştir.



şekil 3.1. Lyapunov kararlılık yörüngeleri

Kaynak: (Hacıoğlu 2009: 12)

Kararlılık analizinde çözümün bulunması her zaman mümkün olmayabilir. Lyapunov, denge noktasının kararlılığının belirlenmesi konusunda tanımlanacak bazı fonksiyonların

kullanılabileceğini göstermiştir. Belirlenecek bu fonksiyonların durumlarına göre kararlılık analizleri yapılabilmektedir.

3.1.2. Doğrudan Lyapunov Yöntemi

Denge noktası $x = 0$ olan doğrusal olmayan bir sistem ve $D \subset R^n$, $x = 0$ noktasını içeren bir bölgeyi kapsasın. $V: D \rightarrow R$ aşağıdaki şartları sağlayan sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$V(0) = 0 \text{ ve } V(x) > 0 \forall x \in D - \{0\} \quad (3.4)$$

$$\dot{V}(x) < 0 \forall x \in D \quad (3.5)$$

Böylece $x = 0$ denge noktası kararlıdır. Eğer;

$$\dot{V}(x) < 0 \forall x \in D - \{0\} \quad (3.6)$$

Şartı sağlanıyorsa $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

(3.4) ve (3.5) şartlarını sağlayan sürekli türevlenebilir bir $V(x)$ fonksiyonu Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır.

$V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ şartını sağlayan fonksiyonlar pozitif tanımlı olarak adlandırılır. $x \neq 0$ için $V(x) \geq 0$ olursa fonksiyon pozitif yarı tanımlı olarak adlandırılır. Eğer $-V(x)$ pozitif tanımlı ise $V(x)$ negatif tanımlı, $V(x)$ pozitif yarı tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonu negatif yarı tanımlı olarak adlandırılır. Bu tez çalışması için Lyapunov ile ilgili bu teorik kısım yeterli olduğu için daha fazla Lyapunov ayrıntılarına yer verilmemiştir.

3.1.3. Uyarlamalı Kontrol Özellikleri

Kontrol edilecek olan sistemlerin tüm parametrelerinin bilindiği söylenemez, birçok parametre tahmin edilmekte ve zamanla değişkenlikler göstermektedir. Bu değişimler kütle atalet gibi dinamik yapı elemanları olabilirken ölçüsel değişiklikler gibi kinematik parametrelerde olabilmektedir. Bir uçak düşünülürse, zaman ile yakıtı azalmakta veya kanatlarda ölçü farklılıkları olabilmektedir. Yük taşıyan mobil robotun sürekli aynı yükü taşıdığı düşünülemez, zamanla yük değişimi olabilecektir. Bu gibi durumlarda sistem kontrol yapısının bu değişiklikleri algılamalı ve çözüm üretebilmelidir. Bu gibi yapılarda uyarlamalı kontrol kullanılmaktadır.

Özellik-3.1: Tahmin parametreleri vektörü $p \in R^k$ ve bilinmeyen parametrelerden arındırılmış bilinen parametreleri içeren regressor matrisi $Y \in R^{(n-m) \times k}$ olmak üzere dinamik eşitlik aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$M(q)\dot{v} + V(q, \dot{q})v = Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p \quad \forall v, \dot{v} \in R^{n-m} \quad (3.7)$$

Özellik-3.2: (3.7) ifadesi içerisindeki atalet ve Coriolis matrisleri arasında skew simetrik özellik mevcuttur. Burada \dot{M} atalet matrisinin türev ifadesini temsil etmektedir.

$$x^T(\dot{M} - 2V)x = 0, \quad \forall x \in R^{n-m} \quad (3.8)$$

3.2. Kontrolör Tasarımı

Daha önceki bölümlerde elde edilen kinematik ve dinamik çözümlerin kontrol uygulaması bu bölüm içerisinde ele alınacaktır. Her kontrol uygulamasında olduğu gibi yine hata terimleri elde edilecek hata terimlerin, referans hızlara ve anlık hızlara istinaden kontrol hızları önerilecektir. Hata ifadelerini de içeren Lyapunov aday fonksiyonu önerilecek ve bu fonksiyonun kararlılığı incelenecektir.

Dinamik uyarlamalı kontrol kısmında ise tahmin parametreleri elde edilecek ve bu parametrelere istinaden elde edilen regressor matrisi içeren yeni bir Lyapunov aday fonksiyonu araştırılacak ve aday fonksiyonu kararlı hale getirecek olan kural belirlenecektir.

3.2.1. Kinematik Kontrol Tasarımı

Mobil robotun yörünge takip problemi ele alındığında, robotun takip edeceği referans yörüngede hareket eden referans bir mobil robot tanımlanabilir. Tanımlanan bu robotun anlık hızları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \dot{X}_r &= v_r \cos \theta_r \\ \dot{Y}_r &= v_r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r &= w_r \\ q_r &= [X_r \quad Y_r \quad \theta_r]^T \\ v_r(t) &= [v_r \quad w_r]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

Burada q_r referans mobil robotun anlık yörünge konum bilgilerini içerir. Konum bilgilerinin anlık değişimleri ele alınarak açısal, hız doğrusal hız ve doğrusal hız bileşenleri

elde edilebilir. $v_r(t)$ ise referans robotun anlık doğrusal ve açısal hızlarını ifade eden hız vektörüdür.

Elde edilen referans mobil robot ile kontrol etmeyi planladığımız mobil robotun anlık olarak konumları arasındaki fark ile hata ifadelerini elde edebiliriz. Elde edilen anlık ifadeler robot düzlemi üzerinde olmakta, robot düzleminden evrensel düzleme geçiş için dönüşüm matrisi kullanılır. Burada $q_a = [X_a \ Y_a \ \theta_a]^T$ robotun anlık konumları olmak üzere;

$$T_r = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } q_h = \begin{bmatrix} X_r - X_a \\ Y_r - Y_a \\ \theta_r - \theta_a \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

matrisleri elde edilir (Oubbati vd., 2005: 28). Hata ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$q_e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = T_r q_h$$

$$q_e = \begin{bmatrix} \cos\theta(X_r - X_a) + \sin\theta(Y_r - Y_a) \\ -\sin\theta(X_r - X_a) + \cos\theta(Y_r - Y_a) \\ \theta_r - \theta_a \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Elde edilen hata vektörünün sırası ile türevleri alınırsa X eksen hatası türevi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{e}_1 = \frac{d}{dt} (\cos\theta(X_r - X_a) + \sin\theta(Y_r - Y_a))$$

$$\dot{e}_1 = -\sin\theta\dot{\theta}(X_r - X_a) + \cos\theta(\dot{X}_r - \dot{X}_a) + \cos\theta\dot{\theta}(Y_r - Y_a) + \sin\theta(\dot{Y}_r - \dot{Y}_a) \quad (3.12)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{\theta} \underbrace{(-\sin\theta X_r + \sin\theta X_a + \cos\theta Y_r - \cos\theta Y_a)}_{-e_2} - \underbrace{(\cos\theta \dot{X}_a + \sin\theta \dot{Y}_a)}_v + \cos\theta \dot{X}_r + \sin\theta \dot{Y}_r$$

$\sin\theta \dot{X}_a - \cos\theta \dot{Y}_a$ bu ifade içerisindeki \dot{X}_a ve \dot{Y}_a yerine (3.9) eşitliğindeki ifadeler yazılırsa, (3.19) eşitliği elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \cos\theta \dot{X}_r + \sin\theta \dot{Y}_r &= \cos\theta V_r \cos\theta_r + \sin\theta V_r \sin\theta_r \\ &= V_r (\cos\theta \cos\theta_r + \sin\theta \sin\theta_r) \\ &= V_r \cos(\theta - \theta_r) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Yukarıda elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa X eksen hatasının türevi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\dot{e}_1 = -v + we_2 + V_r \cos e_3 \quad (3.14)$$

Y eksen türevi hatası aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = & -\cos\theta\dot{\theta}(X_r - X_a) - \sin\theta(\dot{X}_r - \dot{X}_a) - \sin\theta\dot{\theta}(Y_r - Y_a) \\ & + \cos\theta(\dot{Y}_r - \dot{Y}_a) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = & -\cos\theta\dot{\theta}X_r + \cos\theta\dot{\theta}X_a - \sin\theta\dot{X}_r + \sin\theta\dot{X}_a - \sin\theta\dot{\theta}Y_r + \sin\theta\dot{\theta}Y_a \\ & + \cos\theta\dot{Y}_r - \cos\theta\dot{Y}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = \dot{\theta} \underbrace{(-\cos\theta X_r + \cos\theta X_a - \sin\theta Y_r + \sin\theta Y_a)}_{-e_1} + \underbrace{(\cos\theta\dot{Y}_r - \sin\theta\dot{X}_r)}_0 \\ + \sin\theta\dot{X}_a - \cos\theta\dot{Y}_a \end{aligned}$$

$\sin\theta\dot{X}_a - \cos\theta\dot{Y}_a$ bu ifade içerisindeki \dot{X}_a ve \dot{Y}_a yerine (3.8) eşitliğindeki ifadeler yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sin\theta\dot{X}_a - \cos\theta\dot{Y}_a &= \sin\theta V_r \cos\theta_r - \cos\theta V_r \sin\theta_r \\ &= V_r (\sin\theta \cos\theta_r - \cos\theta \sin\theta_r) \\ &= V_r \sin(\underbrace{\theta - \theta_r}_{e_3}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Yukarıda elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa Y eksen hatasının türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{e}_2 = -we_1 + V_r \sin e_3 \quad (3.17)$$

Mobil robotların, robot ve evrensel düzlemler arası yapmış olduğu açının hatası ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\dot{e}_2 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = w_r - w \quad (3.18)$$

Bu (3.14) (3.17) ve (3.18) eşitlikleri içerisindeki hız bileşenleri ayrı ayrı yazılarak ifade edilecek olursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{q}_e = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_r \cos e_3 \\ V_r \sin e_3 \\ w_r \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Kanayama ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada seçimini yapmış oldukları kontrol hız ifadesi aşağıdaki gibidir. Birçok çalışmada kontrol hızı olarak bu ifade ele alınmıştır. Burada k_1, k_2, k_3 pozitif sayılardır (Kanayama vd., 1990: 384-389).

$$v_c(t) = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r \cos e_3 + e_1 k_1 \\ w_r + V_r k_2 e_2 + k_3 \sin e_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Elde edilen hata ifadelerini kullanarak kinematik kontrolcü tasarımının kararlılık analizi için bir Lyapunov aday fonksiyonu seçimi aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V_0 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{1 - \cos e_3}{k_2} \quad (3.21)$$

Burada (3.21) eşitliği için açıkça $V_0 \geq 0$ olduğu gözükmektedir. V_0 fonksiyonun türevi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{V}_0 = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \frac{\sin e_3}{k_2} \dot{e}_3 \quad (3.22)$$

Daha önce elde edilen (3.11) hata ve (3.19) hata türev ifadeleri \dot{V}_0 denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= (-v + w e_2 + V_r \cos e_3) e_1 + (-w e_1 + V_r \sin e_3) e_2 + \frac{\sin e_3}{k_2} (w_r - w) \\ \dot{V}_0 &= -v e_1 + e_1 w e_2 + V_r e_1 \cos e_3 - e_2 w e_1 + V_r e_2 \sin e_3 + \frac{\sin e_3}{k_2} w_r \\ &\quad - \frac{\sin e_3}{k_2} w \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{V}_0 = -v e_1 + V_r e_1 \cos e_3 + V_r e_2 \sin e_3 + \frac{\sin e_3}{k_2} w_r - \frac{\sin e_3}{k_2} w$$

elde edilir. Seçimi yapılmış olan (3.20) v_c kontrol hızları ifadesi yukarıdaki Lyapunov aday fonksiyonun türevi içerisinde gerekli yerlere yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= -(V_r \cos e_3 + e_1 k_1) e_1 + V_r e_1 \cos e_3 + V_r e_2 \sin e_3 + \frac{\sin e_3}{k_2} w_r \\ &\quad - \frac{\sin e_3}{k_2} (w_r + V_r k_2 e_2 + k_3 \sin e_3) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -V_r e_1 \cos e_3 - e_1^2 k_1 + V_r e_1 \cos e_3 + V_r e_2 \sin e_3 + \frac{\sin e_3}{k_2} w_r \\ & - \frac{\sin e_3}{k_2} w_r - \frac{\sin e_3}{k_2} V_r k_2 e_2 - \frac{\sin e_3}{k_2} k_3 \sin e_3 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin en sade hali aşağıdaki gibidir.

$$\dot{V}_0 = -e_1^2 k_1 - \frac{k_3 \sin^2 e_3}{k_2} \leq 0 \quad (3.25)$$

Türevi alınarak kararlılığı araştırılan bu ifade içerisindeki k_1, k_2, k_3 daha da önce belirtildiği gibi pozitif sabitler, e_1^2 ve $\sin^2 e_3$ ifadeleri kare ifadeler oldukları için pozitif olacakları aşikârdır. Elde edilen bu ifadenin pozitif olma ihtimali yoktur. İfade içerisindeki $e_1 = 0$ için ve $e_3 = 0$ ve $e_3 = \pi$ değerleri için ifade 0 olabilecektir. Sonuç olarak elde edilmiş ifade yarı kesin negatif bir ifadedir.

Seçimi yapılan Lyapunov aday fonksiyonu için, belirlenmiş olan kontrol hızları kararlılığı sağlamaktadır.

3.2.2. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Tasarımı

Kinematik kontrolör tasarımından sonra bilinmeyen parametrelerin tahmin edilerek yörünge takibinin kararlılığı ve tahmin edilecek parametrelerin kararlılığı araştırılacaktır. Uyarlamalı kontrol için tahmin parametreleri seçimi yapılacaktır. Kararlılık analizi için yine Lyapunov aday fonksiyonu önerilecek ve bu fonksiyon için kural seçimi yapılacaktır.

Daha önceki bölümde önerilmiş ve kararlılığı kanıtlanmış olan kontrol hızları $v_c(t)$ ve anlık robot hızları $v(t)$ arasındaki hata ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$e_v(t) = v_c(t) - v(t) = \begin{bmatrix} v_c - v \\ w_c - w \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Elde edilen bu hız hata ifadesinin türevi ise aşağıdaki gibidir.

$$\dot{e}_v(t) = \dot{v}_c(t) - \dot{v}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v}_c - \dot{v} \\ \dot{w}_c - \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Hata ifadelerini içeren ve tahmin edilen parametreleri içeren kontrol hızlarına bağlı olan ifade aşağıdaki gibidir.

$$\tau_v = B_v \tau = \hat{M}_v \dot{v}_c + \hat{V}_v v_c + K_p e_v \quad (3.28)$$

Burada \widehat{M}_v ve \widehat{V}_v , M_v ve V_v ifadelerinin tahmin edilen değerlerini içeren sistem matrisleri ve K_p pozitif tanımlı kontrol kazanç matrisidir.

Tahmin edilen parametrelerin anlık ve kontrol hızlarına bağlı ifadeleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})\hat{p} = \widehat{M}_v\dot{v} + \widehat{V}_vv \quad (3.29)$$

$$Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\hat{p} = \widehat{M}_v\dot{v}_c + \widehat{V}_vv_c \quad (3.30)$$

Tork ifadesi (3.28) ve (3.30) ifadeleri bir arada yazılırsa;

$$\tau_v = B_v\tau = Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\hat{p} + K_p e_v \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir. Hata ifadeleri içerisinde anlık hız ifadesi v ve anlık hız ifadesinin türevi \dot{v} eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v = v_c - e_v \quad (3.32)$$

$$\dot{v} = \dot{v}_c - \dot{e}_v \quad (3.33)$$

Elde edilen anlık hız (3.32) ve anlık hız türev eşitliği (3.33), (3.31) eşitliği bir arada yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p &= M_v(\dot{v}_c - \dot{e}_v) + V_v(v_c - e_v) \\ Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p &= M_v\dot{v}_c - M_v\dot{e}_v + V_vv_c - V_v e_v \\ Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p &= \underbrace{M_v\dot{v}_c + V_vv_c}_{Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)p} - M_v\dot{e}_v - V_v e_v \end{aligned} \quad (3.34)$$

Elde edilen bu eşitlik $Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)p = M_v\dot{v}_c + V_vv_c$ eşitliği yazılarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned} Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p - M_v\dot{e}_v - V_v e_v &= Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\hat{p} + K_p e_v \\ Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})p - Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\hat{p} &= K_p e_v + M_v\dot{e}_v + V_v e_v \\ Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})(p - \hat{p}) &= K_p e_v + M_v\dot{e}_v + V_v e_v \end{aligned} \quad (3.35)$$

eşitlikleri elde edilir. Tahmin edilen ifadelerin fark ifadesi aşağıdaki gibi elde edilebilir. Burada \tilde{p} , gerçek değer olan p ve tahmin edilen parametreler olan \hat{p} arasındaki farkı ifade etmektedir.

$$\tilde{p} = (p - \hat{p}) \quad (3.36)$$

(3.35) ifadesinin (3.36) tahmin edilen değerler hata ifadesi ile beraber düzenlemiş son hali aşağıdaki gibidir.

$$Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})\tilde{p} = K_p e_v + M_v \dot{e}_v + V_v e_v \quad (3.37)$$

Bu eşitlik içerisinden hız hatası ifadesi \dot{e}_v çekilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{e}_v = M_v^{-1}(Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\tilde{p} - V_v e_v - K_p e_v) \quad (3.38)$$

Burada tork ifadesinin p , \hat{p} , \tilde{p} parametrelerine bağlı çözümleri ve hız hatasını türev ifadesi uyarlamalı kontrol ifadelerini içerecek şekilde elde edilmiştir. Elde edilmiş bu ifadelere istinaden bir kontrol kuralı ihtiyacı vardır. Bu kural Lyapunov aday fonksiyonu ele alınarak araştırılacaktır.

3.2.2.1. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Kuralı

Daha önce kinematik kontrol hızlarının kararlılığını araştırılırken kullanılan Lyapunov kararlılık analizi dinamik uyarlamalı kontrolcü kuralı belirlemede de kullanılacaktır.

Analiz için hız hata ifadelerini ve tahmin parametresi hata ifadesini içeren Lyapunov fonksiyonu seçimi yapılabilir. Burada Γ pozitif tanımlı bir matristir.

$$V_1 = \frac{1}{2} e_v^T M_v e_v + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (3.39)$$

(3.39) Lyapunov aday fonksiyonun türevi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{V}_1 = e_v^T M_v \dot{e}_v + \frac{1}{2} e_v^T \dot{M}_v e_v + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (3.40)$$

Elde edilen türev ifadesi (3.40) ve hata ifadesinin türevi \dot{e}_v (3.38) eşitliği birlikte yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_v^T M_v (M_v^{-1} Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} - V_v e_v - K_p e_v) + \frac{1}{2} e_v^T \dot{M}_v e_v + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\ \dot{V}_1 &= e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} - V_v e_v - K_p e_v + \frac{1}{2} e_v^T \dot{M}_v e_v + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\ \dot{V}_1 &= e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} - e_v^T V_v e_v - e_v^T K_p e_v + \frac{1}{2} e_v^T \dot{M}_v e_v + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \end{aligned} \quad (3.41)$$

ifadesi elde edilir. Daha önce belirtilmiş olan Özellik-3.2 skew-simetrik ifadesi dikkate alınırsa aşağıdaki gibi ifade sadeleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} + \frac{1}{2} e_v^T \dot{M}_v e_v - e_v^T V_v e_v - e_v^T K_p e_v + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} + \frac{1}{2} e_v^T \underbrace{(\dot{M}_v - 2V_v)}_0 e_v - e_v^T K_p e_v + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \tilde{p} - e_v^T K_p e_v + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= -e_v^T K_p e_v + (e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1}) \tilde{p}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Elde edilen Lyapunov aday fonksiyonu türev ifadesinin negatif yarı tanımlı olmasını sağlayacak olan kural seçimi yapılmalıdır.

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)^T e_v \tag{3.43}$$

Kural olarak (3.43) ifadesi seçilebilir (Özdemir ve Başaran 2021: 190) . Bu kurala istinaden kararlılık analizi aşağıdaki gibi yapılabilir

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -e_v^T K_p e_v + (e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) - \Gamma Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)^T e_v)^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= -e_v^T K_p e_v + (e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) - e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) \underbrace{\Gamma^T \Gamma^{-1}}_I) \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= -e_v^T K_p e_v + (e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) - e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)) \tilde{p} \\
\dot{V}_1 &= -e_v^T K_p e_v + (e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c) - e_v^T Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)) \tilde{p}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Lyapunov aday fonksiyonu türevinin seçimini yapılmış olan kurala göre en sade hali aşağıdaki gibidir.

$$\dot{V}_1 = -e_v^T K_p e_v \tag{3.45}$$

Bu ifade negatif yarı tanımlıdır ve seçimi yapılan kuralın sistemin kararlı olmasını sağladığı kanıtlanmıştır.

3.2.2.2. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Parametre Seçimi

Elde edilen (2.93), (2.94), (2.95) dinamik eşitliğin matrisleri, dinamik uyarlamalı kontrol özelliği Özellik-3.1 ifadesindeki gibi düzenlenerek regressör matrisi ve tahmin parametreleri vektörü elde edilecektir.

Özellik-3 ifadesi, dinamik modele uyarlanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y(q, \dot{q}, v, \dot{v}) p &= \begin{bmatrix} \frac{mR^2+2I_w}{R^2} & 0 \\ 0 & I + \frac{2I_wL^2}{R^2} \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 0 & -m_c d\dot{\theta} \\ m_c d\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} v \\
Y(q, \dot{q}, v, \dot{v}) p &= \begin{bmatrix} \frac{mR^2+2I_w}{R^2} & 0 \\ 0 & I + \frac{2I_wL^2}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_c d\dot{\theta} \\ m_c d\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \\
Y(q, \dot{q}, v, \dot{v}) p &= \begin{bmatrix} \left(\frac{2I_w}{R^2} + m\right) \dot{v}_c - dm_c \dot{\theta} w_c \\ \left(\frac{2I_wL^2}{R^2} + I\right) \dot{w}_c + dm_c \dot{\theta} v_c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Elde edilmiş olan bu ifade içerisinde tahmin edilecek sistem parametreleri ayrıştırılmalıdır. Elde edilecek p matrisi sistem parametrelerini içerirken, $Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})$ regressör matrisi ise sistem parametrelerinden bağımsız sadece hız ve ivme gibi ifadeleri içerecektir.

Tahmin parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$p = \begin{bmatrix} \left(\frac{2I_w}{R^2} + m\right) \\ \left(\frac{2I_wL^2}{R^2} + I\right) \\ dm_c \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Regressör matrisi ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$Y(q, \dot{q}, v, \dot{v}) = \begin{bmatrix} \dot{v}_c & 0 & -\dot{\theta} w_c \\ 0 & \dot{w}_c & \dot{\theta} v_c \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

(3.30) eşitliği içerisindeki tork ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\tau = B_v^{-1}(Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)\hat{p} + K_p e_v) \tag{3.49}$$

Bu eşitlik içerisindeki K_p , \hat{p} ve e_v ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \\
K_p &= \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$e_v = \begin{bmatrix} e_{v1} \\ e_{v2} \end{bmatrix}$$

Tork ifadesi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tau = \begin{bmatrix} \frac{R(K_{p1}e_{v1} + \hat{p}_1\dot{v}_c - \hat{p}_3\dot{\theta}w_c)}{2} + \frac{R(K_{p2}e_{v2} + \hat{p}_2\dot{w}_c + \hat{p}_3\dot{\theta}v_c)}{2L} \\ \frac{R(K_{p1}e_{v1} + \hat{p}_1\dot{v}_c - \hat{p}_3\dot{\theta}w_c)}{2} - \frac{R(K_{p2}e_{v2} + \hat{p}_2\dot{w}_c + \hat{p}_3\dot{\theta}v_c)}{2L} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Tahmin edilen parametrelerin hata ifadesinin türevi aşağıdaki gibidir. Burada p tahmin edilecek parametreler zamanla değişmeyen ve sabit ifadeler olduğu için türevi 0 olacaktır.

$$\dot{\hat{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{p} \\ 0 \end{pmatrix} - \hat{p} \quad (3.52)$$

$$\dot{\hat{p}} = -\hat{p}$$

Yukarıdaki eşitliğe istinaden tahmin edilen parametreler için aşağıdaki kuralı sistemde uygulanabilecektir.

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma Y(q, \dot{q}, v_c, \dot{v}_c)^T e_v \quad (3.53)$$

Çözümlemesi yapılan sistemde (3.52) eşitliğin sağlanması için Γ ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Tahmin edilen parametrelerin türev ifadesi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{\hat{p}} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c & 0 & -\dot{\theta}w_c \\ 0 & \dot{w}_c & \dot{\theta}v_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_{v1} \\ e_{v2} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\dot{\hat{p}} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 e_{v1} \dot{v}_c \\ \Gamma_2 e_{v2} \dot{w}_c \\ \Gamma_3 \dot{\theta} (e_{v2} v_c - e_{v1} w_c) \end{bmatrix}$$

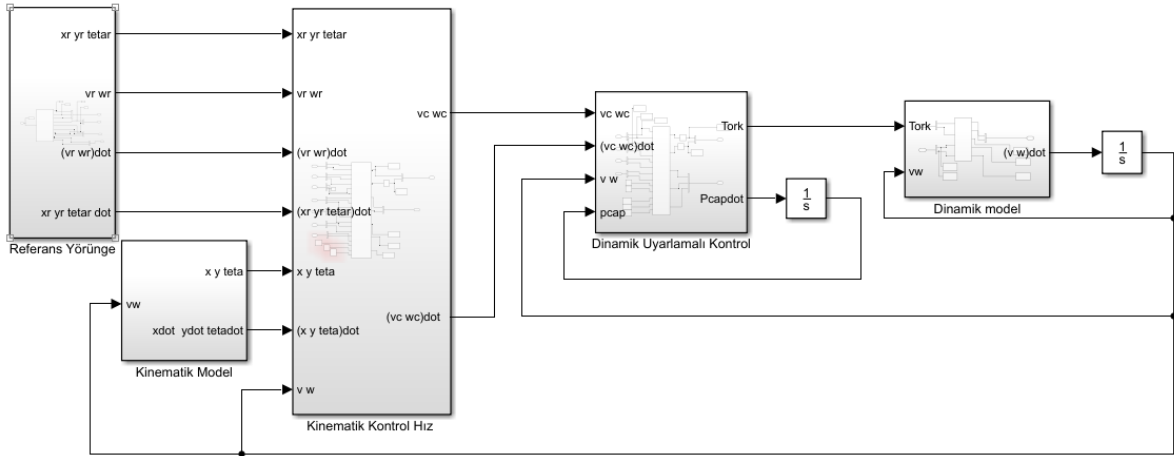
4. SİMULİNK BENZETİMİ

2. ve 3. bölümlerde elde edilen kinematik, dinamik ve dinamik uyarlamalı kontrol modelleri ele alınarak Matlab-Simulink ortamında benzetim çalışmaları yapılmıştır. Yörünge takip problemi incelenmiş, bu yörüngelerdeki kararlılık durumlarına ve tahmin edilen parametrelerin zamana bağlı değişimleri araştırılmıştır.

Benzetim modeli Şekil 4.1’de gösterilen, Simulink ortamında hazırlanmıştır. Benzetim modelinde referans yörünge, kinematik model, kinematik hız kontrol, dinamik model ve dinamik uyarlamalı kontrol blokları oluşturulmuştur. Bloklar bağlantı yol karışıklıkları olmaması için genel olarak ‘user defined function’ oluşturularak tasarlanmıştır.

Türevlenme ihtiyacı olan değişkenlerin türevleri Simulink ‘derivative’ bloğu kullanılarak hesaplatılmamıştır. Matematiksel modellerin türevleri matematiksel olarak çözümlenerek fonksiyon bloklarının içerisine yazılmıştır.

Çalışmada kullanılan mobil robotun fiziksel parametreleri; $L = 0.75m$, $R = 0.15m$, $d = 0.3m$, $m_c = 30kg$, $m_w = 1kg$, $I_c = 15.625kgm^2$, $I_w = 0.005kgm^2$, $I_m = 0.025kgm^2$ olarak seçilmiştir (Koubaa vd.,2015:1-5).



Şekil 4.1. Sistemin Simulink modeli

4.1. Simulink Model İçerikleri

4.1.1. Referans Yörünge Bloğu

Referans yörünge bloğu içerisinde sistemin takip edeceği yörünge tasarımı hazırlanmıştır. Burada yörünge, yörünge üzerinden hatasız hareket eden bir referans mobil robottur. Bu mobil robotun anlık konum bilgisi, hızı, ivmesi gibi bir sonraki bloklarda ihtiyaç

olacak parametrelerin hesaplama işlemleri bu blok içerisinde yapılmıştır. Blok içerisinde ilk olarak referans robotun yörüngesinin matematiksel modeli oluşturulmuştur.

4.1.2. Kinematik Model Bloğu

Blok içerisinde ters kinematik model kurularak, dinamik model sonucunda elde edilen doğrusal ve açısal hız değerlerine istinaden doğrusal hız bileşenleri, x ve y eksen konumları ve robotun x eksen ile yapmış olduğu açı θ değişkenleri hesaplanmıştır.

4.1.3. Kinematik Kontrol Hız Bloğu

Yörünge takibi esnasında kontrol edilecek mobil robotun anlık doğrusal ve açısal kontrol hızlarının hesaplandığı bloktur. (3.19) eşitliğinde verilen bu hız ifadesinin Lyapunov kararlılık analizinde yapılarak kararlı olduğu daha önceki bölümlerde kanıtlanmıştır.

4.1.4. Dinamik Kontrol Bloğu

Dinamik modellemenin yapıldığı, 2. bölümde bahsedildiği gibi 2 farklı dinamik model elde edilebilmektedir. Bu çalışmada doğrusal ve açısal hızlara istinaden dinamik model çalışması yapıldığı için, dinamik model bloğu içerisinde (2.96)-(2.99) eşitlikleri ele alınmıştır.

4.1.5. Uyarlamalı Dinamik Kontrol Bloğu

Dinamik kontrol bloğunda elde edilen doğrusal ve açısal hız ifadelerine ve kontrol hız ifadelerine istinaden elde edilecek olan tahmin parametrelerinin türev ifadesi bu blok içerisinde elde edilmektedir. (3.50) ve (3.54) eşitlikleri bu blok içerisinde hesaplanmıştır. Elde edilen \hat{p} ifadesi integrator bloğu kullanılarak tahmin parametresi \hat{p} elde edilmiştir.

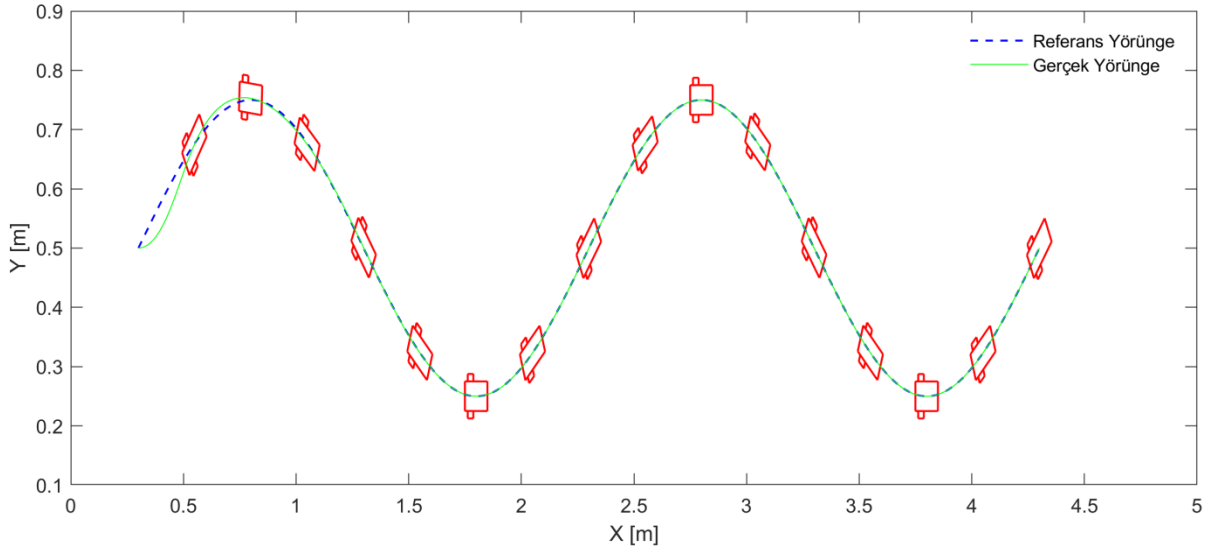
4.2. Referans Yörüngeler

Benzetim modeli Simulink ortamında kurulan model de 3 farklı yörünge kullanılmıştır. Yörüngelerin birbirinden farklı dinamiklerde olması için sinüzoidal yörünge, sonsuz yörünge ve kare yörüngeler üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

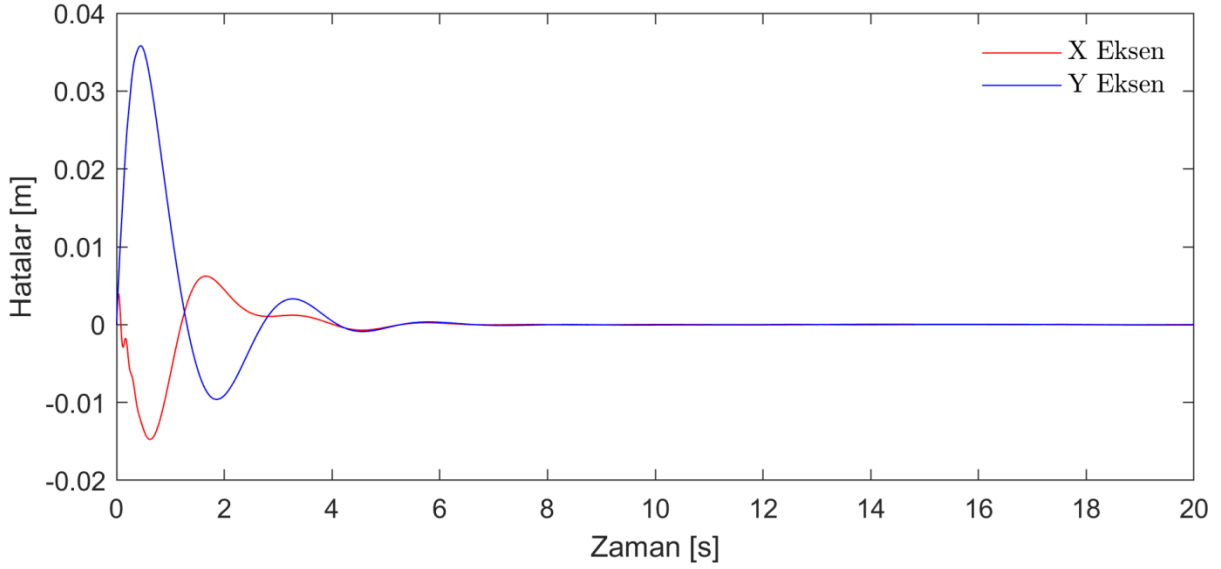
4.2.1. Sinüzoidal Yörünge

Sinüzoidal yörüngede hatanın minimize edilmesini, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlere yakınsamasını ve optimum çözümü sağlayan parametreler;

$k_1 = 2.5$, $k_2 = 120$, $k_3 = 7.25$, $k_{p1} = 500$, $k_{p2} = 3900$, $\Gamma_1 = 5000$, $\Gamma_2 = 3200$, ve $\Gamma_3 = 19100$ olarak seçilmiştir. Mobil robotun sinüzoidal yörünge takibi Şekil 4.2'de verilmiştir. Şekil üzerinde mobil robotun kısa sürede referans yörüngeye yakınsadığı görülmektedir.

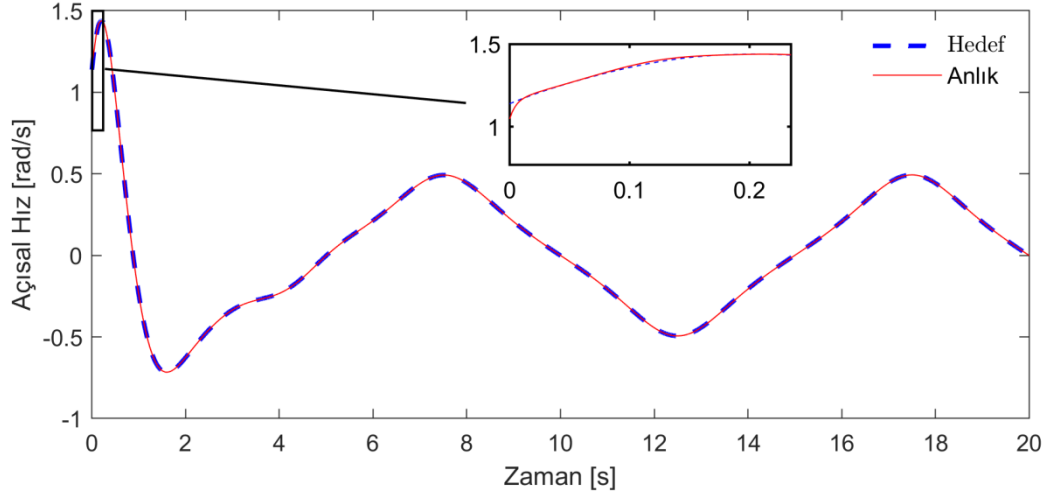


Şekil 4.2. Sinüzoidal yörünge takip

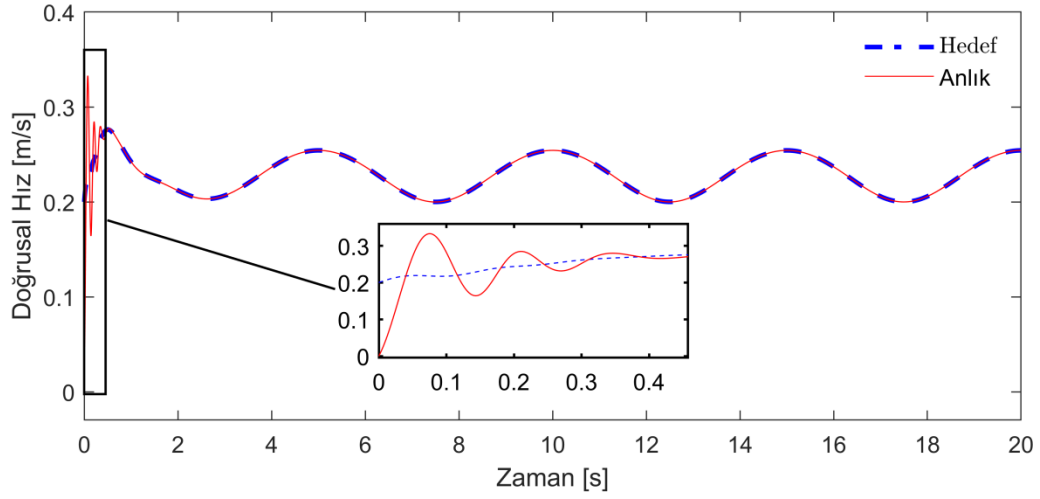


Şekil 4.3. Sinüzoidal yörünge X ve Y eksen hataları

Şekil 4.3' sinüzoidal yörünge X ve Y eksen hataları sunulmuştur. Şekilde görüldüğü gibi seçilen parametreler ile mobil robot referans yörüngeye kısa sürede oturmayı başarmıştır. Yaklaşık 5sn içerisinde konum hatası yok edilmiştir

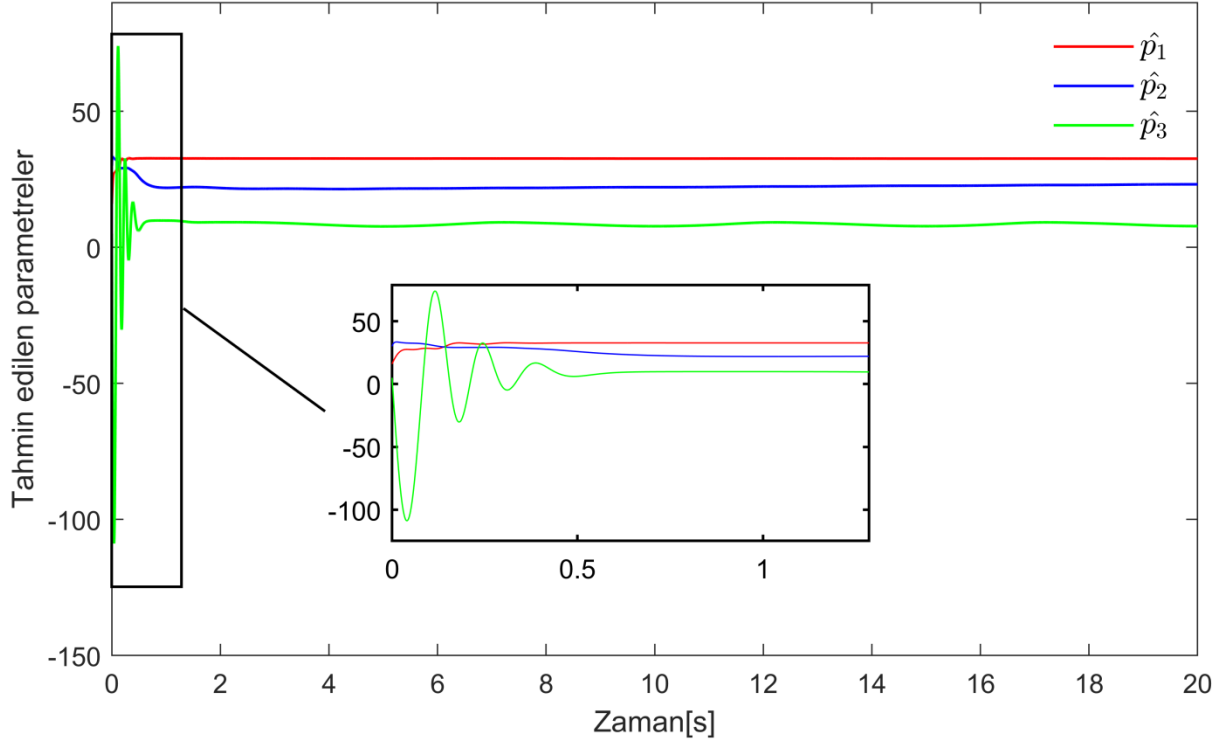


Şekil 4.4. Sinüzoidal yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız



Şekil 4.5. Sinüzoidal yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız

Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 'de görüldüğü gibi anlık açısal hız hedeflenen açısal hıza çok kısa sürede oturabiliyorken, doğrusal hızında kararlı hale gelmesi yaklaşık 0.4 saniye kadar sürmüştür.



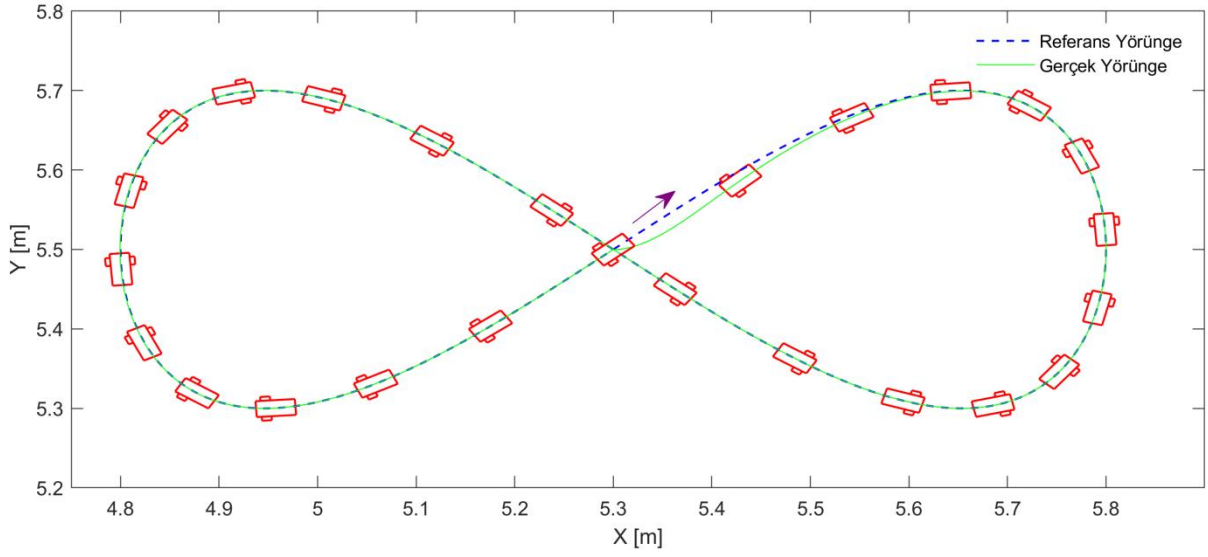
Şekil 4.6. Sinüzoidal yörünge tahmin edilen parametreler

Şekil 4.6’da sinüzoidal yörünge için mobil robotun tahmin edilen fiziksel parametreleri verilmiştir. Mobil robot yörüngeye oturup kararlı hale gelmesine istinaden tahmin edilecek parametrelerin kararlı hale gelmesi yaklaşık 1 saniye kadar sürmüştür. \hat{p}_3 parametresinin tahmin edilme süresi diğerlerine göre daha fazla zaman almıştır. Aynı zamanda tüm parametresinin asimptotik olarak kararlı olduğu gözlemlenmiştir.

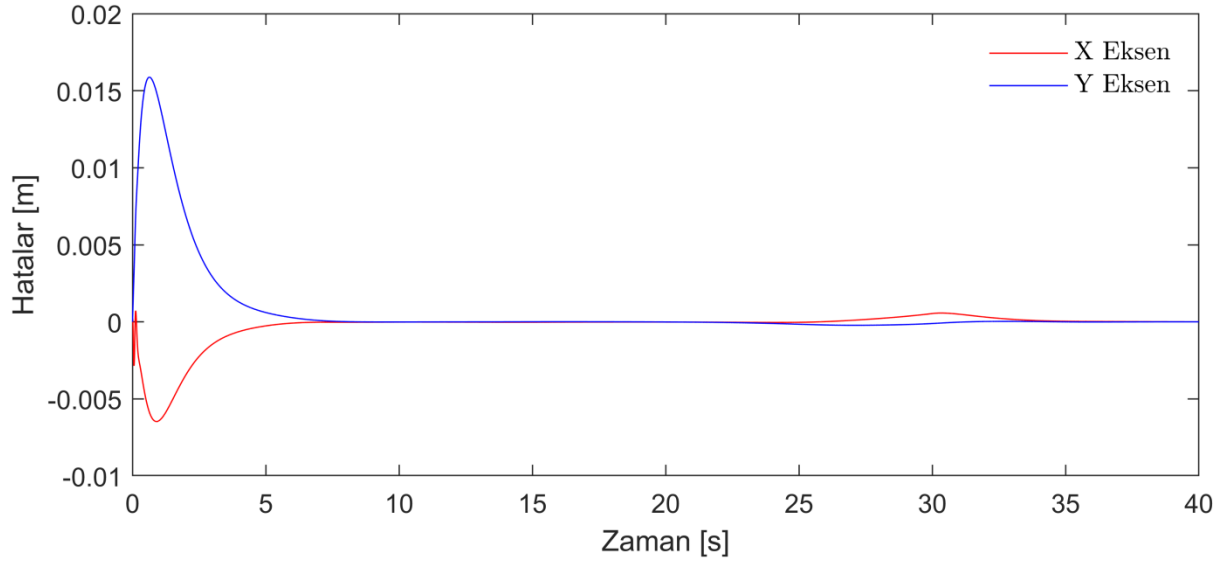
4.2.2. Sonsuz Yörünge

Sonsuz yörüngede hatanın minimize edilmesini, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlere yakınsamasını ve optimum çözümü sağlayan parametreler;

$k_1 = 0.85$, $k_2 = 210$, $k_3 = 28.875$, $k_{p1} = 1200$, $k_{p2} = 1200$, $\Gamma_1 = 30000$, $\Gamma_2 = 2500$ ve $\Gamma_3 = 19100$ olarak seçilmiştir. Mobil robotun sonsuz yörünge takibi Şekil 4.7’de verilmiştir. Şekil 4.8’de ise sonsuz yörünge X ve Y eksen hataları verilmiştir.

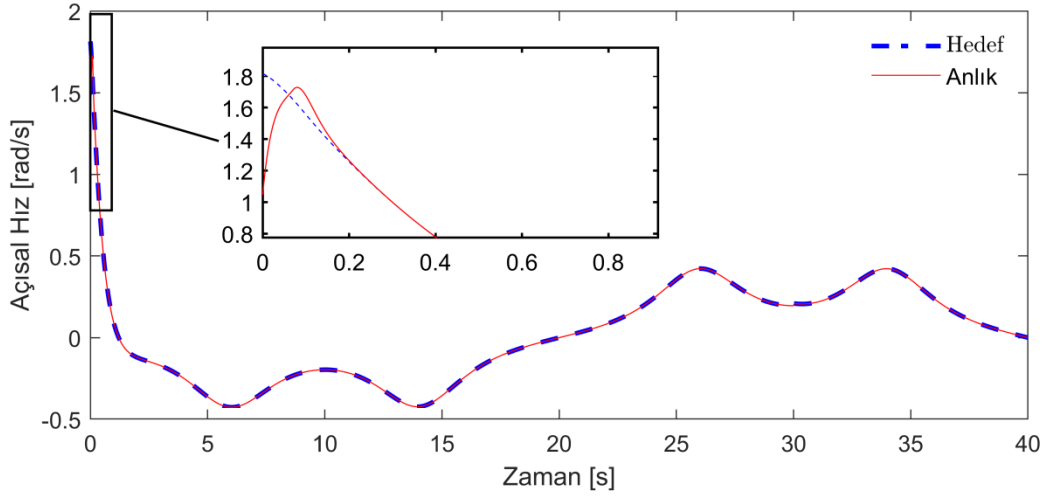


Şekil 4.7. Sonsuz yörünge takip

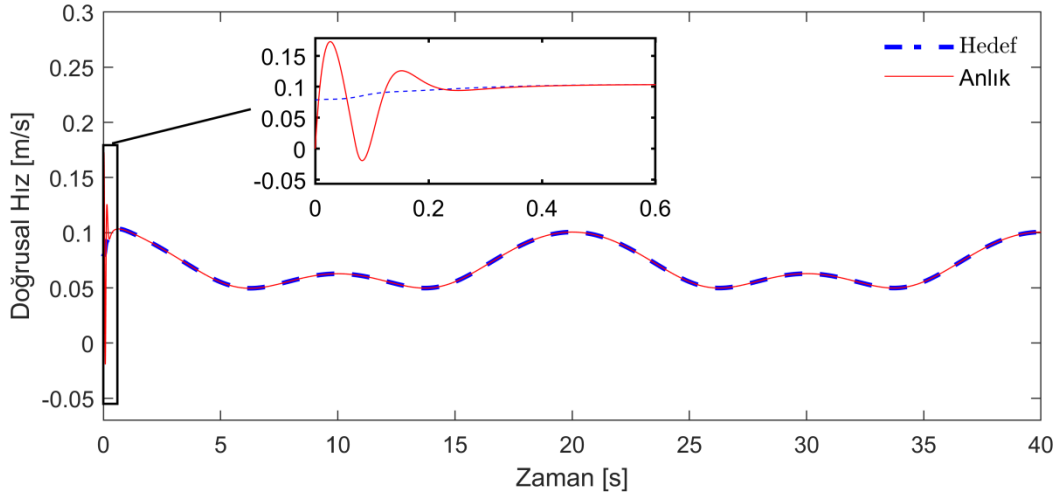


Şekil 4.8. Sonsuz yörünge X ve Y eksen hataları

Grafikte görüldüğü gibi seçilen parametreler ile mobil robot referans yörüngeye kısa sürede oturmayı başarmıştır. Yaklaşık 7sn içerisinde konum hatası yok edilmiştir. Dinamik bir yapı olduğu için 30. Saniyede X eksen hatası anlık olarak bir miktar artmıştır.

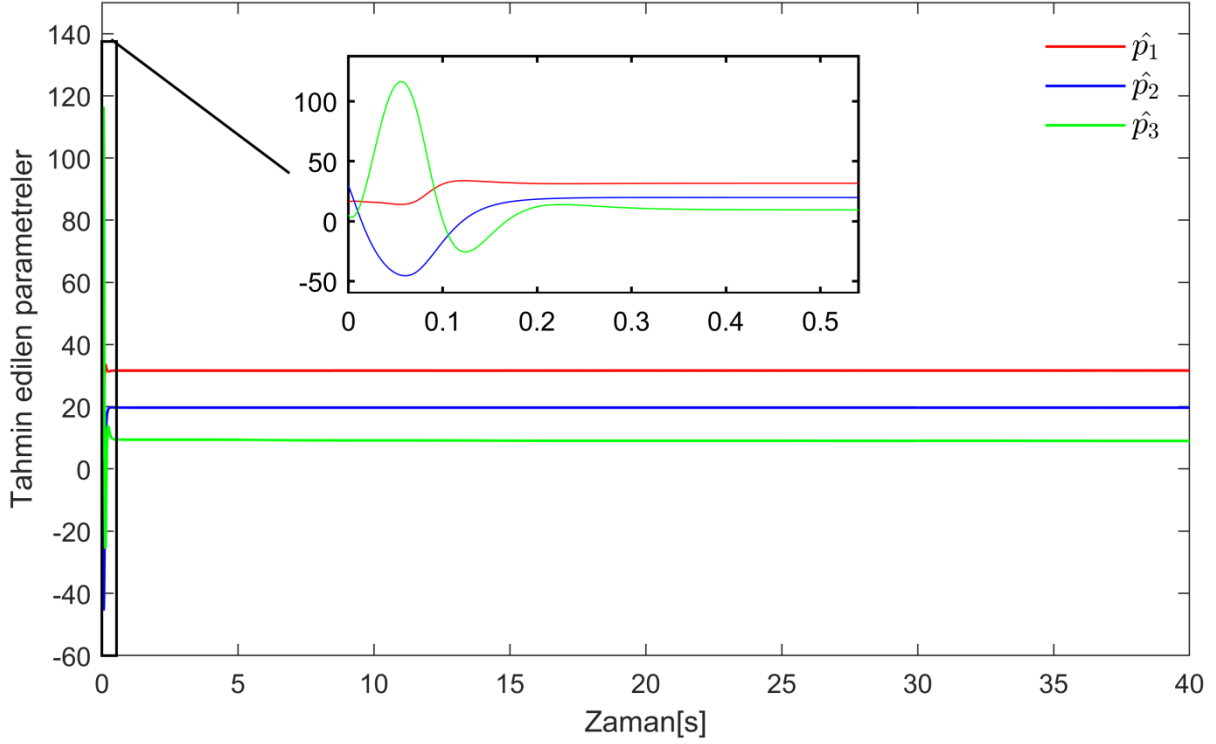


Şekil 4.9. Sonsuz yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız



Şekil 4.10. Sonsuz yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 'da görüldüğü gibi anlık açısal hız ve doğrusal hız, hedeflenen hızlara yaklaşık olarak 0.2 saniye de oturabilmişlerdir.



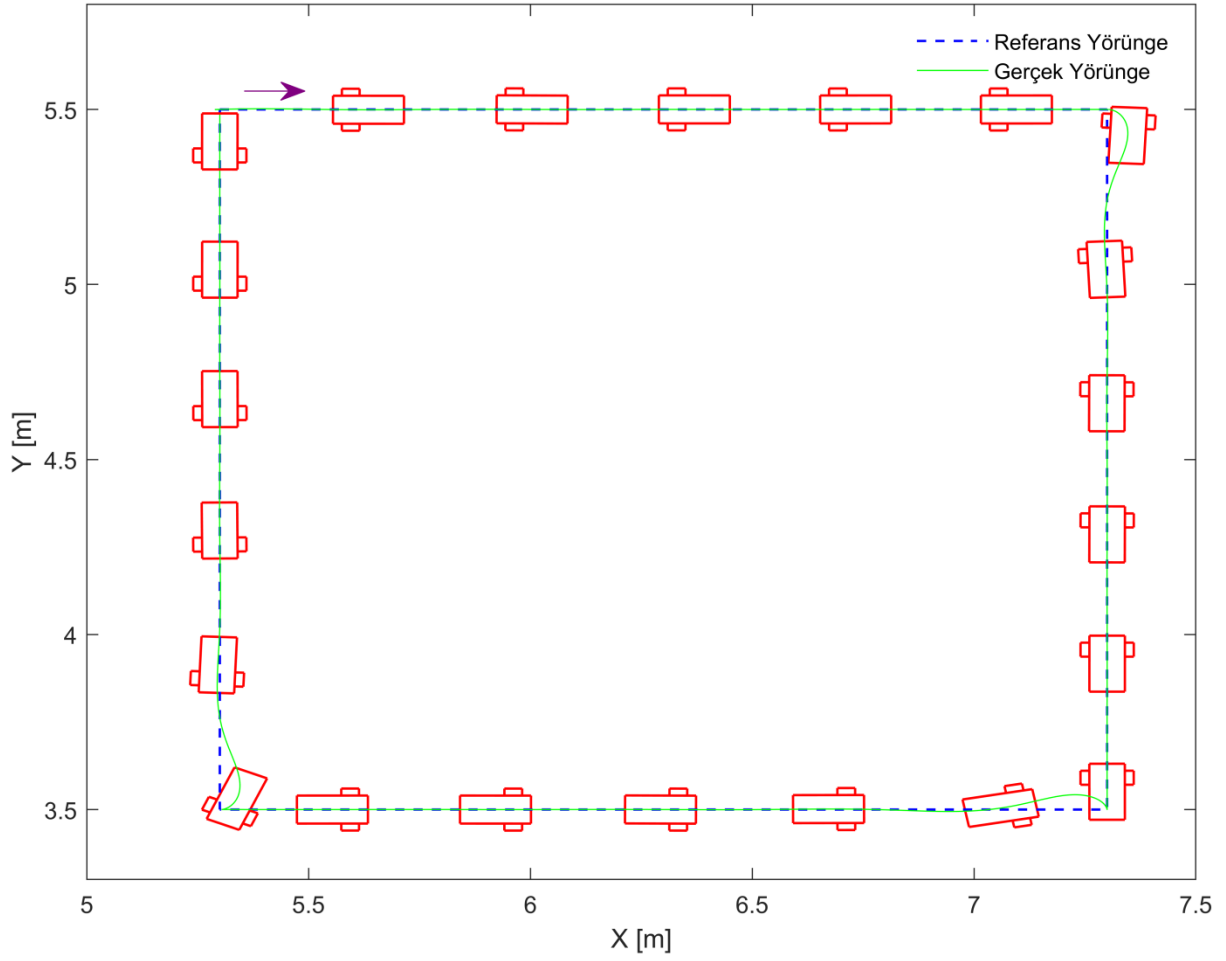
Şekil 4.11. Sonsuz yörünge tahmin edilen parametreler

Şekil 4.11’de sonsuz yörünge için mobil robotun tahmin edilen fiziksel parametreleri verilmiştir. Mobil robot yörüngeye oturup kararlı hale gelmesine istinaden tahmin edilecek parametrelerin kararlı hale gelmesi yaklaşık 0.4 saniye kadar sürmüştür. Bütün parametrelerin asimptotik kararlı olduğu gözlemlenmiştir.

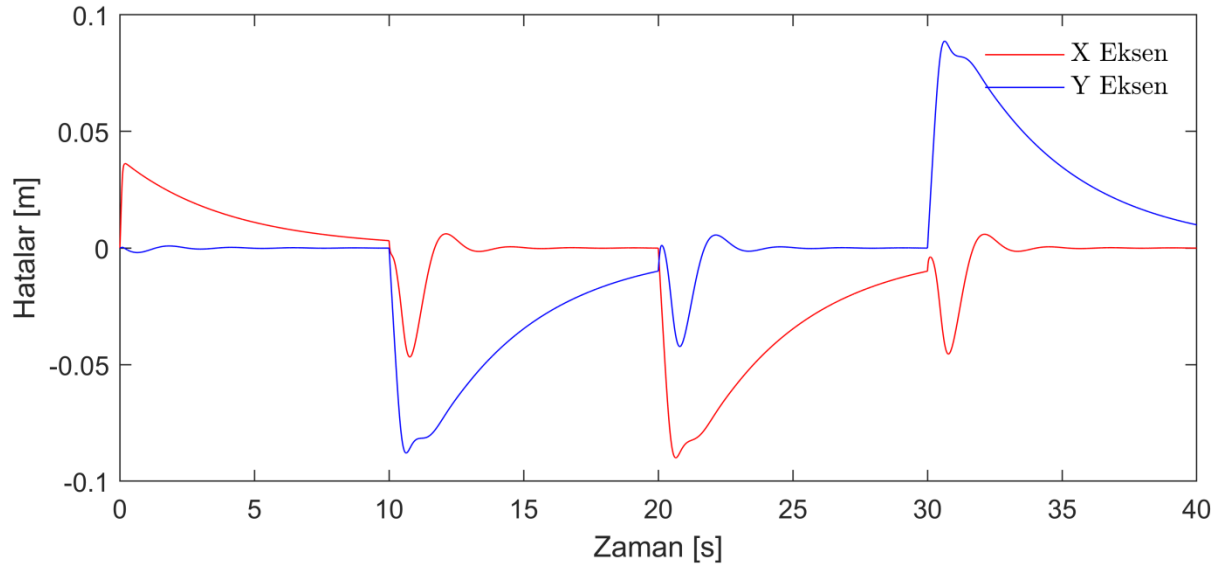
4.2.3. Kare Yörünge

Kare yörüngede hatanın minimize edilmesini, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlere yakınsamasını ve optimum çözümü sağlayan parametreler;

$k_1 = 2.5$, $k_2 = 120$, $k_3 = 7.25$, $k_{p1} = 500$, $k_{p2} = 3900$, $\Gamma_1 = 5000$, $\Gamma_2 = 3200$ ve $\Gamma_3 = 19100$ olarak seçilmiştir. Mobil robotun kare yörünge takibi Şekil 4.12’de verilmiştir. Şekil 4.13’de ise kare yörünge X ve Y eksen hataları verilmiştir.



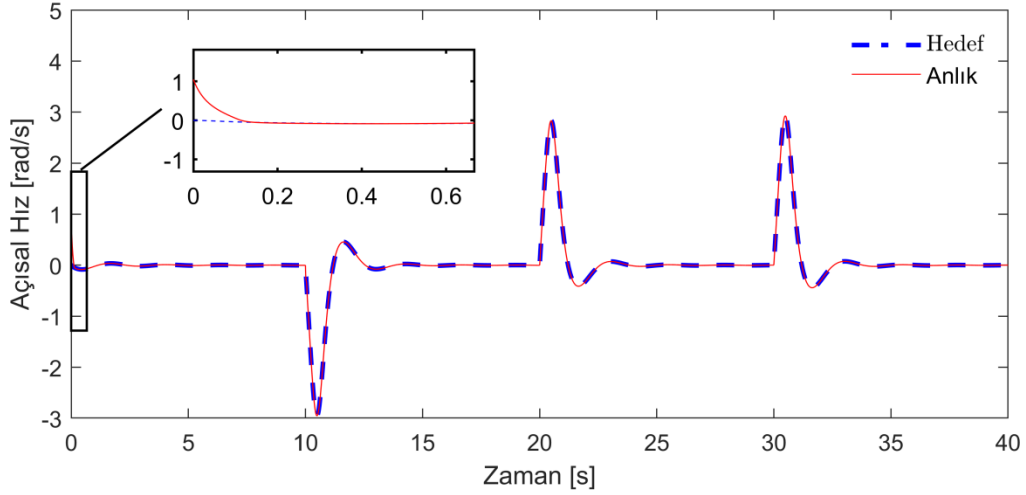
Şekil 4.12. Kare yörünge takip



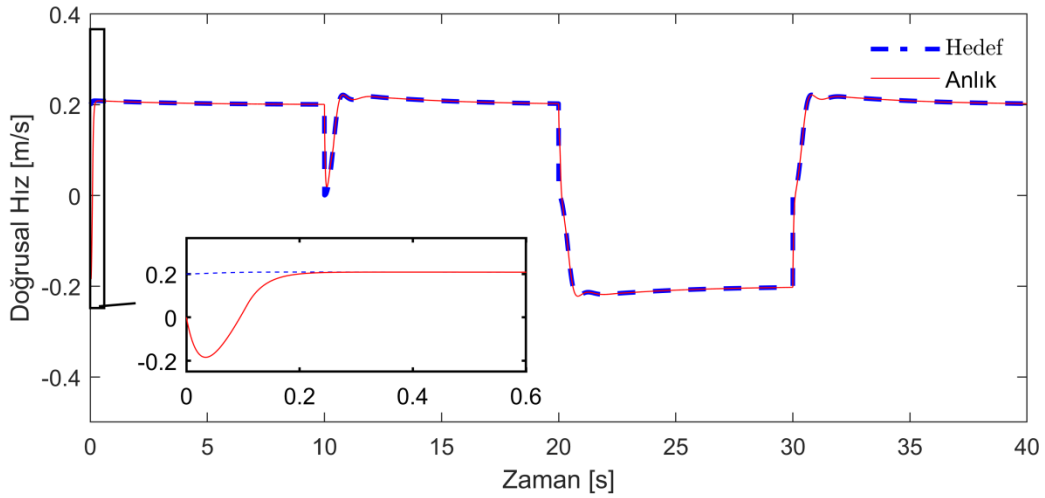
Şekil 4.13. Kare yörünge X Y eksen hataları

Grafikte görüldüğü gibi seçilen parametreler ile mobil robot referans yörüngeye oturmayı başarmıştır, ama köşe noktalarındaki dinamik hareketlerden dolayı mobil robot

eksenlerde pozisyon hataları yapmıştır. Grafiklerde de bu hatalar çok bariz gözükmemektedir. Bu hatalar kısa süre içerisinde giderilerek tekrar referans yörünge takibi başarılı bir şekilde yapılmıştır.

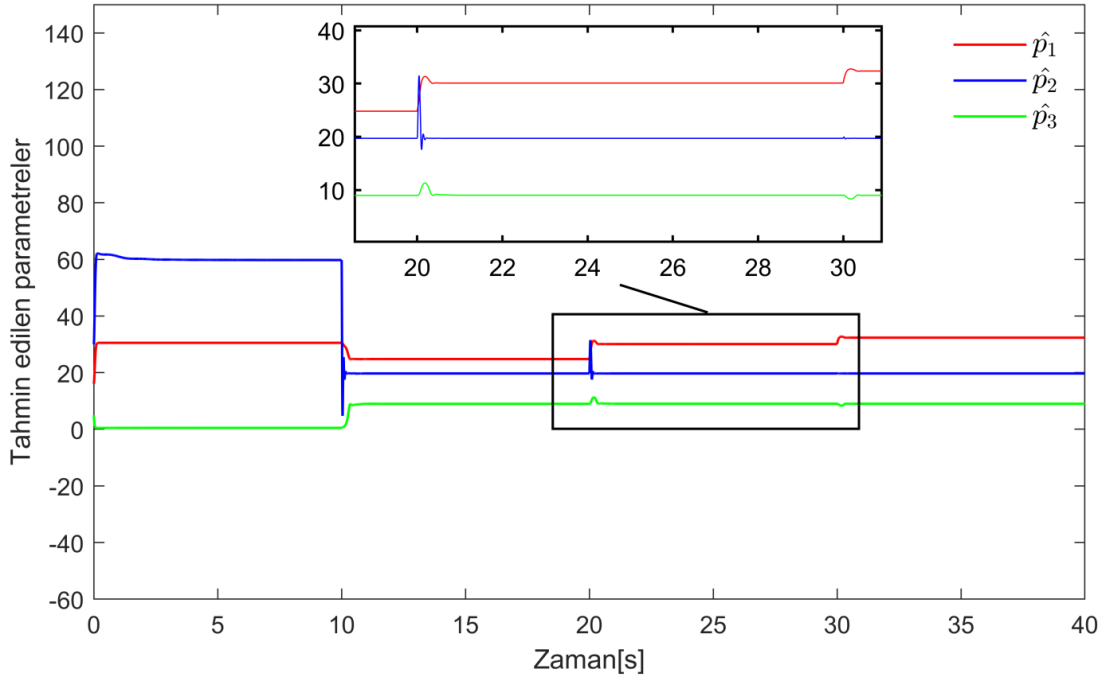


Şekil 4.14. Kare yörünge anlık ve hedeflenen açısal hız



Şekil 4.15. Kare yörünge anlık ve hedeflenen doğrusal hız

Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 'de görüldüğü gibi anlık açısal hız ve doğrusal hız, hedeflenen hızlara yaklaşık olarak 0.2 saniye de oturabilmişlerdir.



Şekil 4.16. Kare yörünge tahmin edilen parametreler

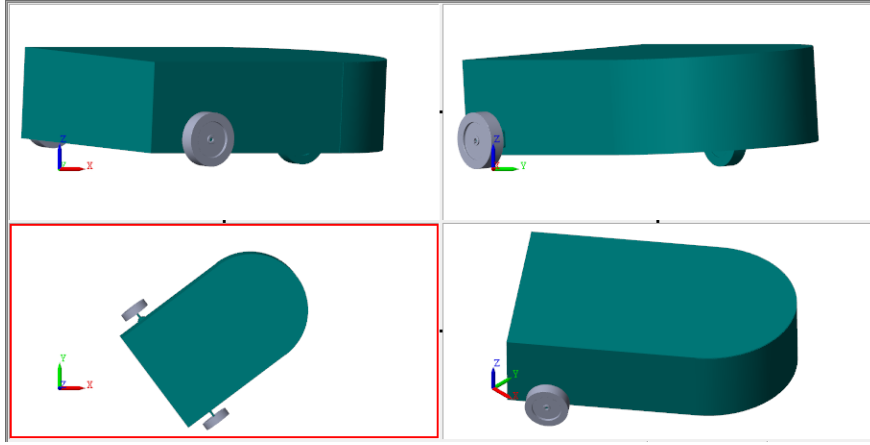
Şekil 4.16’da kare yörünge için mobil robotun tahmin edilen fiziksel parametreleri verilmiştir. Seçilen kare yörüngede sadece belirli konumlarda dinamik hareketler mevcuttur, diğer konumlarda sadece doğrusal hızın olduğu hareketler vardır. Tahmin edilen parametrelerde de görüldüğü gibi dinamik hareketlerin olduğu yerlerde uyarlamalı kontrol çalışmış ve parametre tahminleri yapılmıştır. Yörünge durduğunda tahmin parametreleri de hareketsiz kalmıştır.

5. SIMMECHANICS BENZETİMİ

SimMechanics, Matlab Simulink içerisinde Simscape modülü altında sunulan bir benzetim ortamıdır. Newton kuvvet ve tork dinamiklerini kullanarak, dinamik yapıdaki sistemlerin hareketlerinin tasarımı ve benzetimi için blok diyagramlar ile modelleme yapılmasını sağlamaktadır. Sistemin hareket denklemleri formülize edilerek matematiksel çözümler elde edilir. 3 boyutlu modelleme programlarından elde edilen dosyaların SimMechanics'e aktarılması mümkündür. Ayrıca bu katı modeller içerisinde elektrik, hidrolik pnömatik gibi bileşenlerin eklenmesi ile sistem test edilebilir. Hareketi sağlanan sistemin, hareketli basit bir animasyonun elde edilebilmektedir.

SimMechanics hareket ve kuvvet çözümlerini yaparken 3 boyutlu tasarımların birbiri ile ilişkilerini kullanmaktadır. Bu çalışmada 3 boyutlu örnek tasarım Solidworks ortamında yapıldığı için, Solidworks içerisinde eksenlerin ilişkileri belirlenmiştir. Solidworks ortamında mobil robot ana gövde parçaları ayrı ayrı modellenmiş ve ana gövde montajı yapıldıktan sonra tek parça '.part' olarak kaydedilmiştir. Basit bir şekilde ifade edilecek olursa, mobil robot 1 adet ana gövde ve 2 adet tekerlekten meydana gelmiştir ve bu tekerlekler ana gövde üzerindeki mil eksenini etrafında dönme hareketi yapabilmektedir. Böylece SimMechanics ortamında hesaplamaların kolaylıkla yapılabilmesi ve karmaşa önlemiştir.

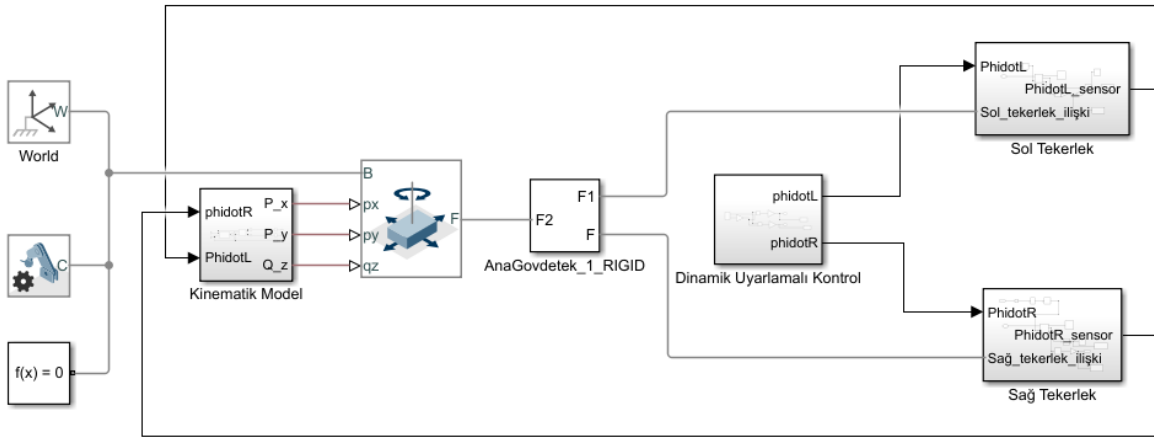
Solidworks'te montajı tamamlanan mobil robot SimMechanics ortamında kullanılacak formata çevrilerek, .xml çıktısı alınmalıdır. Alınan bu çıktı Matlab komut penceresinden 'smimport' komutu kullanılarak Simulink ortamına eklenmektedir. Solidworks ortamında bu tez çalışmasında verilen ölçülerinde tasarlanan ve Matlab'a aktarılan mobil robot Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Simmechanics animasyon penceresi ile robotun hareketleri istenirse tek bir açıdan istenirse 4 farklı açıdan izlenebilmektedir.



Şekil 5.1 Simulink ortamına aktarılan mobil robotun farklı açılardan gösterimi

5.1. Simulink-SimMechanics Modeli

Daha önceki bölümlerde kinematik, dinamik ve uyarlamalı kontrol çözümleri yapılan mobil robotun hareketi SimMechanics blokları kullanılarak modellenmiştir. Bu modelde tekerlek hızlarına göre mobil robotun hareket animasyonu ve anlık ihtiyaç olan tork elde edilmiştir. Simulink modeli Şekil 5.2’de verilmiştir.



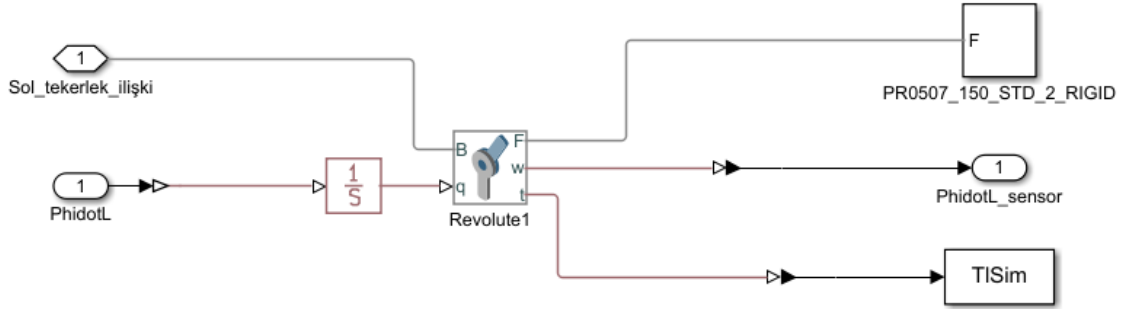
Şekil 5.2. SimMechanics model blokları

5.1.1. Dinamik Uyarlamalı Kontrol Bloğu

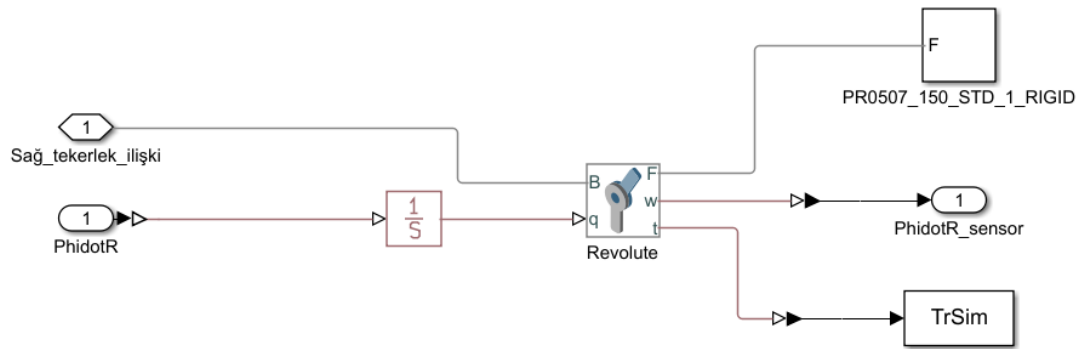
4. bölümde oluşturulan uyarlamalı dinamik kontrolcü çalışmasında parametrelerin tahmin edilerek kontrolün sağlandığı Simulink çalışması sonucu elde edilen tekerlek açışal hızları bu bölümde tekerleklerin referansı hızları olmaktadır.

5.1.2. Sol ve Sağ Tekerlek Blokları

Uyarlamalı kontrol bloğu tarafından sağlanan sağ ve sol tekerlek açısai hızı bu bölümde değerlendirilmektedir. Şekil 5.3 ve 5.4'te sırası ile sol ve sağ tekerlekler kurulan SimMechanics blokları verilmiştir.

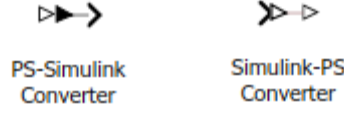


Şekil 5.3. Sol tekerlek bloğu



Şekil 5.4. Sağ tekerlek bloğu

SimMechanics fiziksel sinyalleri değerlendirdiği için Simulink bloklarında üretilen veriler Simmechanics bloklarında kullanılamamaktadır. Simulink ve SimMechanics bloklarının giriş ve çıkış verileri farklı olduğu için bu bloklar arası geçişlerde dönüştürme işlemi gerekecektir. Simulink sinyal ve fiziksel sinyal dönüştürücüleri Şekil 5.5'te olduğu gibi modele eklenmiştir.



Şekil 5.5. Simulink sinyal ve fiziksel sinyal dönüştürücüler

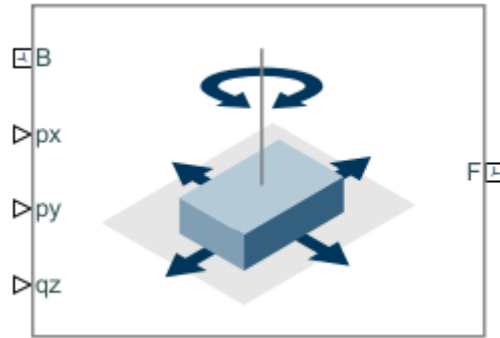
Tekerlek mil etrafında dönme hareketi yapacak şekilde montaj ilişkisi yapıldığı için simmechanics modeli üretilirken ‘Revolute Joint’ dönel eklem oluşturulmuştur. Kontrol modelinden gelen hızlara istinaden hareket üretilecektir. Bu hareket ile de meydana gelecek olan tork, bu blok tarafından hesaplanmıştır. Ayrıca bu blok farklı çıkışlar vermekte, hız çıkışı kullanılarak mobil robotun animasyonu gerçekleştirilmiştir.

5.1.3. Kinematik Model Bloğu

Tekerlek bloklarında elde edilen hız çıkışları bu blok içerisinde değerlendirilerek konum verileri elde edilmektedir.

5.1.4. Planer Joint Bloğu

Simmechanics tarafından hazır olarak sunulan bu blok (Şekil 5.6) hareketli sistem ile evrensel sistem arasındaki ilişkinin kurulmasını sağlamaktadır. p_x ve p_y , X ve Y eksen boyunca olan konumu ifade ederken q_z ise hareketli sistemin Z eksen etrafındaki dönme hareketini ifade etmektedir.



Şekil 5.6. Planar joint bloğu

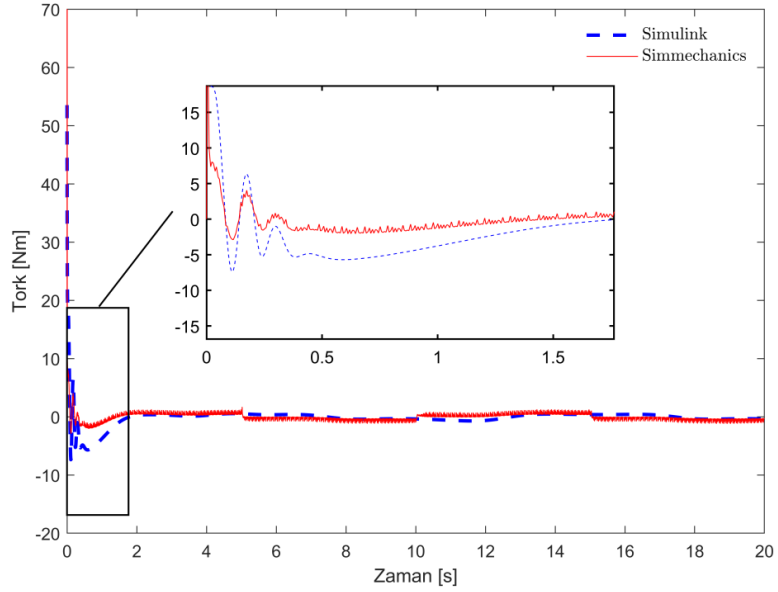
5.2. SimMechanics Aktuatör ve Hesaplanmış Tork Karşılaştırma

Simmechanics dönel eklem blokları, harekete istinaden tork hesaplamasını yapabilmektedir. Bu bölümde 4. bölümde benzetim çalışmaları yapılan sinüzoidal, sonsuz ve kare yörüngelerin hareketleri esnasında matematiksel modelleme ile elde edilen tekerlek

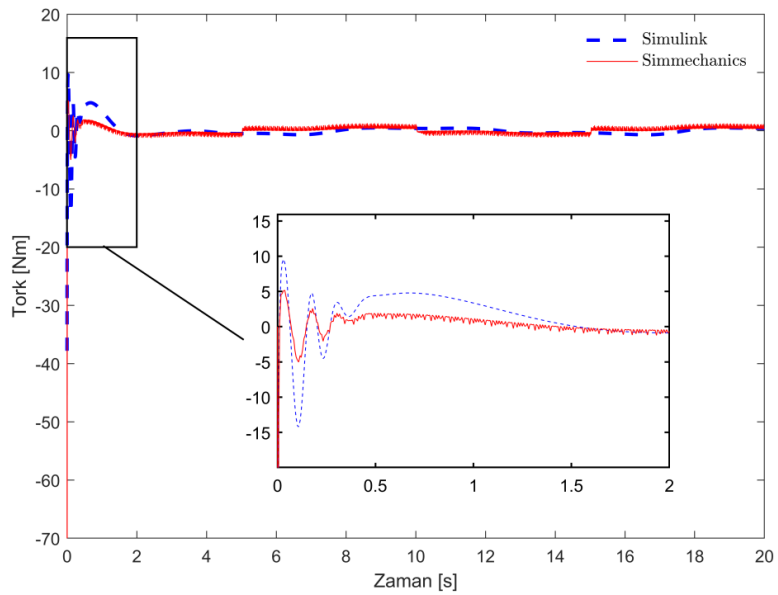
torkları ile Simmechanics dñnel eklem bloğunun hesaplamış olduğu tekerlek torkları karşılaştırılacaktır.

5.2.1. Sinüzoidal Yörünge Karşılaştırma

Tekerlek torklarının karşılaştırılması Şekil 5.7 ve 5.8’de sırası ile sağ ve sol tekerlek için sinüzoidal yörünge takibi için verilmiştir.



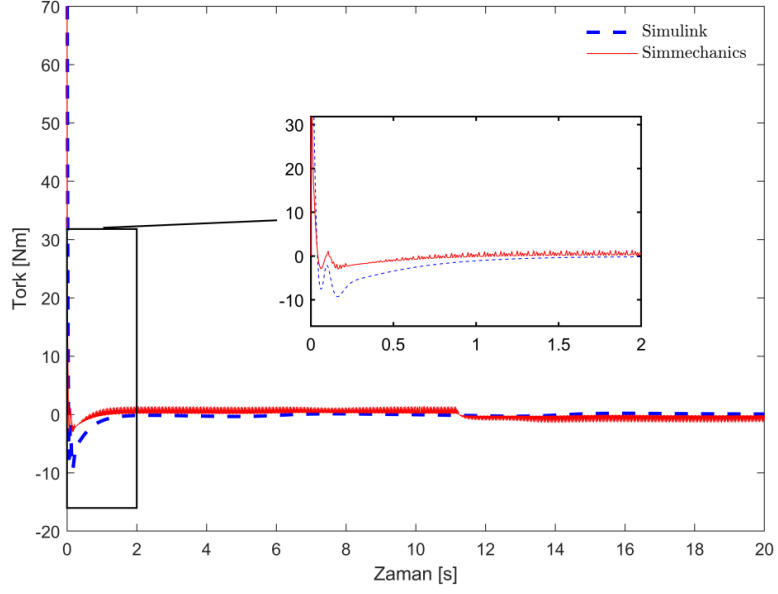
Şekil 5.7. Sinüzoidal yörünge sağ tekerlek torkları



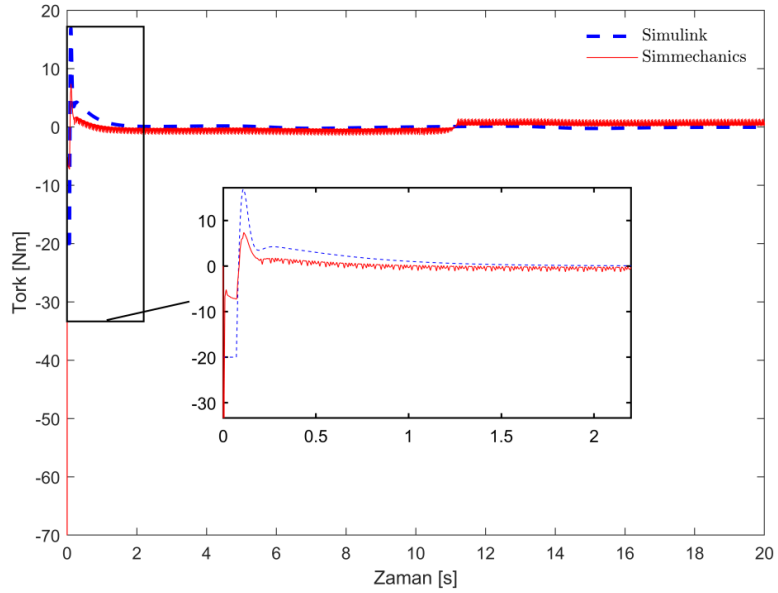
Şekil 5.8. Sinüzoidal yörünge sol tekerlek torkları

5.2.2. Sonsuz Yörünge Karşılaştırma

Benzer şekilde tekerlek torklarının karşılaştırılması Şekil 5.9 ve 5.10'da sırası ile sağ ve sol tekerlek için sonsuz yörünge takibi için verilmiştir.



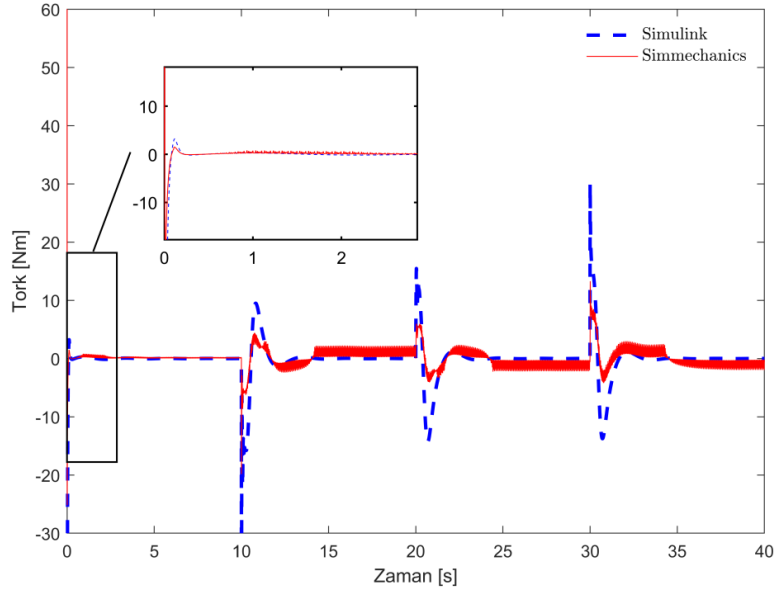
Şekil 5.9. Sonsuz yörünge sağ tekerlek torkları



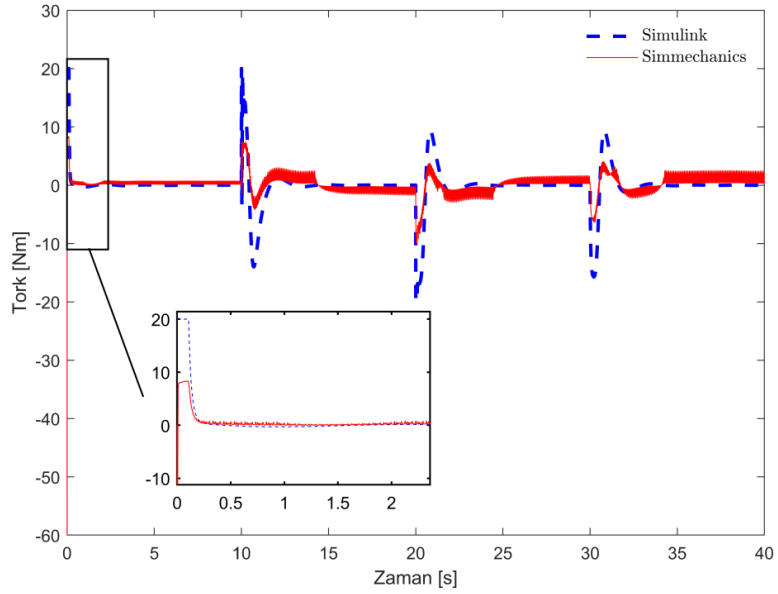
Şekil 5.10. Sonsuz yörünge sol tekerlek torkları

5.2.3. Kare Yörünge Karşılaştırma

Son olarak tekerlek torklarının karşılaştırılması Şekil 5.11 ve 5.12'de sırası ile sağ ve sol tekerlek için kare yörünge takibi için verilmiştir.



Şekil 5.11. Kare yörünge sağ tekerlek torkları



Şekil 5.12. Kare yörünge sol tekerlek torkları

Elde edilen tork değerleri için Simulink ve SimMechanics modelleri içerisinde herhangi bir limit kullanılmamış ve ihtiyaç duyulan tork değerleri 1500d/d, 200w bir motor ve 1:50 redüktör oranı tarafından rahatlıkla üretilebilir durumdadır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada holonomik olmayan diferansiyel sürürlü bir mobil robotun kinematik ve dinamik modelleri elde edilmiştir. Kontrol yapısında ihtiyaç olacak hız verilerine göre tekerlek hızlarına ve açısal-doğrusal hızlara bağlı 2 farklı dinamik ifade elde edilmiştir ve çözümleri gösterilmiştir.

Kinematik kontrol açısından mobil robotun hareketini sağlayacak olan kontrol hızları önerilmiştir. Bu kontrol hızları Lyapunov aday fonksiyonu kullanarak kararlılığı test edilmiş ve kontrol hızlarının kararlılığı kanıtlanmıştır.

Uyarlamalı dinamik kontrolcü modeli elde edilmiş ve elde edilen bu modele istinaden Lyapunov aday fonksiyonu üretilmiştir. Bu fonksiyonu kararlı hale getirecek kural önerilmiştir.

Elde edilen modeller Simulink ortamında benzetim çalışmaları yapılarak 3 farklı yörüngede, yörünge takip ve parametre tahmin analizleri yapılmıştır.

Parametre tahminini başarısı için yörünge takibinin, hedef hız takibinin kararlılığının önemli olduğu anlaşılmıştır. Sonsuz yörüngede hareket eden mobil robot pozisyon ve hız hatalarını sinüzoidal yörüngeye göre daha kısa sürede minimize ettiği gözlemlenmiş ve buna paralel olarak parametre tahminleri de daha kısa sürede kararlı hale gelmiştir.

Dinamik yörüngelerdeki davranışını kavrayabilmek adına 3. Yörünge kare yörünge olarak seçilmiştir. Kare yörüngede hareket sadece köşe noktalarında dinamik durum arz etmektedir. Tahmin parametrelerinin türetilmesi, grafiklerinden gözlemlenebileceği gibi hataların oraya çıktığı köşe noktalarında gerçekleşmiştir. Kare yörüngede açısal hızın zaman içerisinde değişiminin az olduğuda gözlemlenmiştir. Kare yörünge gibi durağan yörüngeler parametre tahminleri yapılacak uygulamalar için uygun değildir. Sinüzoidal ve sonsuz yörüngelerin tahmin etme başarıları çok daha yüksektir.

Yapılan tüm çalışmalar Simulink ortamında ve dinamik modelin matematiksel çözümlerine istinaden yapılmıştır. Bu çözümlerin doğruluğunu gözlemleyebilmek adına Solidworks ortamında tasarlanan bir mobil robot ile SimMechanics blokları kullanılarak tekerlek torklarının anlık durumları incelenmiştir. 3 farklı yörünge içinde ihtiyaç olan torklar elde edilerek karşılaştırılmıştır. Dinamik modele bağlı olan tork ihtiyaçları ile SimMechanics ile belirlenen tork ihtiyaçları birbirine paralel çıkmıştır. Böylece matematiksel olarak elde edilen dinamik modelin doğruluğu kanıtlanmıştır. Bire bir aynı olmamasının sebebi dinamik model ile çözümde birçok parametrenin ihmal edilmesidir.

Elde edilen bu sonuçlar ışığında SimMechanics benzetimi ile elde edilecek sonuçların, matematiksel modeller ile elde edilen çözümlerin paralel olduğu ve karmaşık yapıları modellerde SimMechanics benzetiminin kullanılarak çözümler yapılabileceği önerilebilir.

KAYNAKÇA

Alexander, J. C., & Maddocks, J. H. (1989). On the kinematics of wheeled mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 8(5), 15-27.

Demirbaş, F., & Kalyoncu M. (2017). Differential drive mobile robot trajectory tracking with using pid and kinematic based backstepping controller. *Selçuk Üniversitesi Mühendislik, Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 1-15.

Dhaouadi, R., & Hatab, A. A. (2013). Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using lagrange and newton-euler methodologies: A unified framework. *Advances in Robotics & Automation*, 2(2), 1-7.

Fukao, T., Nakagawa, H., & Adachi, N. (2000). Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE transactions on Robotics and Automation*, 16(5), 609-615.

Generationrobots: Pioneer3DX İki tekerlekli mobil robot tanıtım broşürü. [Erişim: 01.07.2021, <https://www.generationrobots.com/media/Pioneer3DX-P3DX-RevA.pdf>]

Hacıoğlu, Y. (2009). Mekanik Sistemlerin Geri Adımlamalı (Backstepping) Kontrolü . İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., & Noguchi, T. (1990, May). A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation* (384-389). IEEE.

Koubaa, Y., Boukattaya, M., & Dammak, T. (2015, December). Adaptive control of nonholonomic wheeled mobile robot with unknown parameters. *7th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)* (1-5). IEEE.

Kucuk, S., & Bingul, Z. (2004, June). The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics., ICM'04.* (274-279). IEEE.

Lewis, F. L., Dawson, D. M., & Abdallah, C. T. (2003). *Robot manipulator control: theory and practice.* CRC Press.

Muir, P. F., & Neuman, C. P. (1987). Kinematic modeling of wheeled mobile robots. *Journal of robotic systems*, 4(2), 281-340.

Oubbati, M., Schanz, M., & Levi, P. (2005, June). Kinematic and dynamic adaptive control of a nonholonomic mobile robot using a RNN. *International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation* 27-33. IEEE.

Özdemir, G., Başaran, S. (2021). Holonomik olmayan diferansiyel sürüşlü mobil robotun uyarlamalı kontrolü. *International Asian Congress on Contemporary Sciences-v* (185-192)

Shepherd, S., & Buchstab, A. (2014). Kuka robots on-site. In *Robotic Fabrication in Architecture, Art and Design* (373-380). Springer, Cham.

Tzafestas, S. G. (2013). *Introduction to mobile robot control*. Elsevier.

Zergeroğlu, E., Kandemir, İ., Şeker, M., & Eroğlu, E (2006). Kontrol sistemlerinde belirsizlikle baş etme yöntemleri: Lyapunov tarzı yaklaşımlar. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 21(3), 587-602.

EKLER

EK-1: Sinüzoidal Referans Yörünge Kullanıcı Tanımlı Fonksiyon

Sinüzoidal referans yörünge tanımlanması ve referans konum hız ivme gibi verileri elde edilmesini sağlayan yazılım aşağıdaki gibidir.

```
function [xr, yr, tetar, vr, xrdot, yrdot, tetardot, vrdot, tetardotdot] =  
Referans (t)  
%#codegen  
  
xr=0.2*t+0.3;  
yr=0.5+0.25*sin(0.2*pi*t);  
  
xrdot=0.2;  
yrdot=0.25*0.2*pi*cos(0.2*pi*t);  
  
xrdotdot=0;  
xrdotdotdot=0;  
yrdotdot=-0.25*0.2*pi*0.2*pi*sin(0.2*pi*t);  
yrdotdotdot=-0.25*0.2*pi*0.2*pi*0.2*pi*cos(0.2*pi*t);  
  
tetar=atan(yrdot/xrdot);  
vr=xrdot*cos(tetar)+yrdot*sin(tetar);  
  
tetardot=(xrdot*yrdotdot - xrdotdot*yrdot)/(xrdot^2 + yrdot^2);  
vrdot=xrdotdot*cos(tetar) -  
xrdot*tetarot*sin(tetar)+yrdotdot*sin(tetar)+yrdot*tetarot*cos(tetar);  
  
a=(xrdot*yrdotdot - xrdotdot*yrdot);  
b=(xrdot^2 + yrdot^2);  
adot=(xrdotdot*yrdotdot+xrdot*yrdotdotdot-xrdotdotdot*yrdot-  
xrdotdot*yrdotdot);  
bdot=(2*xrdot*xrdotdot)+(2*yrdot*yrdotdot);  
tetardotdot=(adot*b-bdot*a)/(b^2);
```

EK-2: Kontrol Hızları Kullanıcı Tanımlı Fonksiyon

Kontrol hızı tanımlanması sağlayan yazılım aşağıdaki gibidir

```
function [vc,wc,vcdot,wcdot,xhata,yhata,e3] =  
TrackingError(vr,wr,xr,yr,tetar,xrdot,yrdot,x,y,teta,xdot,ydot,tetadot,vrdot,  
t,wrdot,v,w,k1,k2,k3)  
%#codegen  
  
e1=cos(teta)*(xr-x)+sin(teta)*(yr-y);  
e2=-sin(teta)*(xr-x)+cos(teta)*(yr-y);  
e3=-teta+tetar;  
  
xhata=(xr-x);  
yhata=(yr-y);  
  
e1dot=-v+w*e2+vr*cos(e3);  
e2dot=-w*e1+vr*sin(e3);  
e3dot=-w+wr;  
  
vc=vr*cos(e3)+k1*e1;  
wc=wr+k2*vr*e2+k3*vr*sin(e3);  
  
vcdot=vrdot*cos(e3)-vr*e3dot*sin(e3)+e1dot*k1;  
wcdot=wrdot+vrdot*k2*e2+vr*k2*e2dot+k3*vr*e3dot*cos(e3)+k3*vrdot*sin(e3);
```

EK-3: Dinamik Uyarlamalı Kontrol Kullanıcı Tanımlı Fonksiyon

Dinamik kontrol bloğu tekerlek torklarının ve tahmin edilen parametrelerin ifade edilmesini sağlayan yazılım aşağıdaki gibidir

```
function [tou1,tou2,pcapdot1,pcapdot2,pcapdot3] =  
PcapdotTou(pcap1,pcap2,pcap3,vc,wc,vcdot,wcdot,v,w,Kp1,Kp2,Gamma1,Gamma2,Ga  
mma3)  
%#codegen  
  
L=0.75;  
R=0.15;  
  
ev1=vc-v;  
ev2=wc-w;  
tetadot=w;  
  
pcapdot1=Gamma1*ev1*vcdot;  
pcapdot2=Gamma2*ev2*wcdot;  
pcapdot3=Gamma3*ev2*tetadot*vc - Gamma3*ev1*tetadot*wc;  
  
tou1=(R*(Kp1*ev1 + pcap1*vcdot - pcap3*tetadot*wc))/2 + (R*(Kp2*ev2 +  
pcap2*wcdot + pcap3*tetadot*vc))/(2*L);  
tou2=(R*(Kp1*ev1 + pcap1*vcdot - pcap3*tetadot*wc))/2 - (R*(Kp2*ev2 +  
pcap2*wcdot + pcap3*tetadot*vc))/(2*L);
```

EK-4: Dinamik Kontrol Kullanıcı Tanımlı Fonksiyon

Dinamik kontrol bloğu anlık doğrusal ve açısal hızların ifade edilmesini sağlayan yazılım aşağıdaki gibidir

```
function [vdot,wdot,p1,p2,p3] = VWDOT(tou1,tou2,v,w)
%#codegen
L=0.75;
d=0.3;
R=0.15;
mc=30;
mw=1;
Ic=15.625;
Iw=0.005;
Im=0.0025;

I=(mc*d*d)+(2*mw*L*L)+(Ic)+(2*Im);
m=mc+(2*mw);

tetadot=w;
vdot=(R*(tou1 + tou2 + R*d*mc*tetadot*w))/(m*R^2 + 2*Iw);
wdot=-(R*(L*tou2 - L*tou1 + R*d*mc*tetadot*v))/(2*Iw*L^2 + I*R^2);
```

EK-5: Robot Grafiklerinin Çizdirilmesi

Robotun yörüngedeki hareketini sağlayan yazılımın bir kısmı aşağıdaki gibidir.

```
%%robot köşelerini döndürme
for h=1:1:simulemax
    xb1(h,1)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa1(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya1(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    xb1(h,2)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa1(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya1(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    yb1(h,1)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa1(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya1(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    yb1(h,2)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa1(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya1(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    xb2(h,1)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa2(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya2(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    xb2(h,2)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa2(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya2(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    yb2(h,1)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa2(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya2(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    yb2(h,2)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa2(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya2(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    xb3(h,1)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa3(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya3(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    xb3(h,2)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa3(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya3(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    yb3(h,1)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa3(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya3(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    yb3(h,2)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa3(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya3(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    xb4(h,1)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa4(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya4(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    xb4(h,2)=out.x(h*Ornekszaman)+(xa4(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman))-(ya4(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman));
    yb4(h,1)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa4(h,1)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya4(h,1)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
    yb4(h,2)=out.y(h*Ornekszaman)+(xa4(h,2)-
out.x(h*Ornekszaman))*sin(teta(h*Ornekszaman))+(ya4(h,2)-
out.y(h*Ornekszaman))*cos(teta(h*Ornekszaman));
end
```