

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARINDAN OLUŞAN YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLİ  
HECKE EİGENFORMLARIN SINIFLANDIRILMASI**

DOKTORA TEZİ

BANU İREZ AYDIN

TEZ DANIŐMANI  
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2023

10518420

T.C.  
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARINDAN OLUŞAN YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLİ  
HECKE EİGENFORMLARIN SINIFLANDIRILMASI**

DOKTORA TEZİ

BANU İREZ AYDIN

TEZ DANIŐMANI

DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2023

10518420

## BEYAN

“Dedekind-eta Çarpımlarından Oluşan Yarım Tamsayı Ağırlıklı Hecke Eigenformların Sınıflandırılması” adlı doktora tezimin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.			
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>		<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR</b>	<b>x</b>
<b>Destek alındı ise;</b>			
<b>Destekleyen kurum;</b>			
<b>Destegın Türü</b>		<b>Proje Numarası</b>	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)			
2- TÜBİTAK			
Diğer;.....			
<b>ETİK KURUL onayı var ise;</b>			
<b>ETİK KURUL karar tarih/sayı:</b>		...../.....	

**Banu İREZ AYDIN**

**19.01.2023**

## ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmamda bana yön gösteren ve her konuda yüreklendiren, desteğini benden esirgemeyen doktora danışmanım sayın hocam Doç. Dr. İlker İNAM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımıza oldukça önemli katkılar sağlayan ve bilgilerini sabırla bize aktarmaya çalışan Bordeaux Üniversitesi'nin çok kıymetli hocası Prof. Dr. Henri COHEN ve ekibine, ayrıca Dartmouth Üniversitesi'nden Prof. Dr. John VOIGHT'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin yazım aşamasında Tez İzleme Komitesi'nde yer alan ve değerli görüşlerini benimle paylaşan çok kıymetli Prof. Dr. Emrah AKYAR ve Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ hocalarıma çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca bana verdikleri sonsuz destekleri için ekip arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA ve sevgili Elif TERCAN'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarım boyunca desteğini aldığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi'ne şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bana her türlü konuda destek olan anneme, eşim Serkan'a ve oğlum Rüzgar'a çok teşekkür ediyorum. Doktora tezimi biricik oğlum Rüzgar'a armağan ediyorum.

**Banu İREZ AYDIN**

**24.01.2023**

## ÖZET

### DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARINDAN OLUŞAN YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLIL HECKE EİGENFORMLARIN SINIFLANDIRILMASI

Modüler formlar ve özelinde Hecke eigenformlar sayılar teorisinde ilginç özellikleriyle ön plana çıkarlar. Örneğin matematikte son yılların en önemli sonucu olan Sato-Tate Teoremi sadece Hecke eigenformlar için geçerli bir sonuçtur. Hecke eigenformların sistematik seçimi problemi özellikle yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformlar üzerinde istatistiksel sonuçlar elde edilmesi adına kritik bir adımdır. Konuyla ilgili literatürde çalışmalar mevcuttur. Problemin bir başka çözüm yolu da Dedekind-eta çarpımları olabilir. Üç bölümden oluşan bu çalışmada Dedekind-eta çarpımlarından oluşan Hecke eigenformların sınıflandırılması problemi ele alınmıştır. İlk bölümde konunun temeli olan modüler formlar tanıtılmış ve temel özellikleri incelenmiştir. İkinci bölüm Dedekind-eta çarpımlarına ayrılmış olup, çalışmanın orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde Dedekind-eta çarpımlarından oluşan Hecke eigenformların özel bir sınıflandırılması elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Modüler formlar, Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar, Dedekind-eta Çarpımları, Hecke Eigenformlar, Sturm Sınırı

## ABSTRACT

### CLASSIFICATION OF HALF-INTEGRAL WEIGHT HECKE EIGENFORMS WHICH ARE DEDEKIND-ETA QUOTIENTS

Modular forms and, in particular, Hecke eigenforms come to the fore with their interesting properties in number theory. For example, the Sato-Tate Theorem, which is the most important result of recent years in mathematics, is valid only for Hecke eigenforms. The problem of systematic selection of Hecke eigenforms is a critical step in obtaining statistical results, especially on half-integral weight Hecke eigenforms. There are studies in the literature on the subject. Another solution to the problem can be Dedekind-eta products. In this study, which consists of three parts, the problem of classification of Hecke eigenforms consisting of Dedekind-eta products is discussed. In the first chapter, modular forms, which are the basis of the subject, are introduced and their basic features are examined. The second section is devoted to Dedekind-eta products, and in the third section, which constitutes the original part of the study, a special classification of Hecke eigenforms consisting of Dedekind-eta products is obtained.

**Keywords:** Modular forms, half-integral weight modular forms, Dedekind-eta products, Hecke eigenforms, Sturm bound

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT .....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
GRAFİKLER LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
<b>1. ÖN BİLGİLER.....</b>	<b>1</b>
1.1. Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar.....	1
1.2. Modüler Grup Üzerinde Tanımlı Modüler Formlar .....	4
1.3. Boyut Formülleri .....	7
1.4. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar.....	9
1.5. Teta Fonksiyonları.....	11
1.6. $\Gamma_0(4)$ Üzerindeki Formlar.....	13
1.7. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar için Boyut Formülleri .....	14
1.8. Dedekind-Eta Fonksiyonu .....	15
1.9. Hecke Eigenformlar .....	17
<b>2. DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARI VE ÖZELLİKLERİ.....</b>	<b>19</b>
2.1. Tanım ve Temel Özellikler: Seviye, Ağırlık, Pay ve Payda .....	19
2.2. Fricke Grubu Üzerindeki Eta Çarpımları .....	22
2.3. Cusp Noktalarındaki Açılım ve Mertebe .....	23
2.4. Analitik Eta Çarpımlarının Koni ve Simpleksleri.....	24
<b>3. DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARI VE HECKE EIGENFORMLAR.....</b>	<b>28</b>
3.1. Dedekind-eta Çarpımlarına Dair Güncel Sonuçlar .....	28
3.2. Ana Sonuçlar ve İspatları .....	29
3.3. Sonuç ve Tartışma .....	34
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>36</b>

**EKLER..... 38**

## TABLolar LİSTESİ

	Sayfa No
<b>Tablo 3.1.</b> Hecke eigenform olan Dedekind-eta çarpımları .....	<b>30</b>

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. 12 ağırlıklı 14 seviyeli cusp form uzayının boyut hesaplaması..... 8

## GRAFİKLER LİSTESİ

	Sayfa No
<b>Grafik 4.1.</b> Hesaplama süreleri.....	<b>35</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

### Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$\mathbb{H}$	: Üst Yarı Düzlem
$\mathbb{P}$	: Asal Sayıların Kümesi
$GL(2, \mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$SL(2, \mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$\Gamma$	: Modüler Grup
$\Delta(z)$	: Ramanujan-Tau Fonksiyonu
$\eta(z)$	: Dedekind-Eta Fonksiyonu
$E_k(z)$	: $k$ Ağırlıklı Eisenstein Serisi
$\Gamma_0(N)$	: Modüler Grubun $N$ Seviyeli Temel Denklik Alt Grubu
$M_k(\Gamma)$	: $\Gamma$ için $k$ Ağırlıklı Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma)$	: $\Gamma$ için $k$ Ağırlıklı Cusp Formların Uzayı
$M_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için $k$ Ağırlıklı $N$ seviyeli Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için $k$ Ağırlıklı $N$ seviyeli Cusp Formlar Uzayı
$Re(z)$	: $z$ 'nin Reel Kısmı

# 1. ÖN BİLGİLER

## 1.1. Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar

$\mathbb{H}$  ile üst yarı düzlem gösterilsin. Yani  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$  olsun. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe  $z$  karmaşık değişkeni  $\mathbb{H}$  üst yarı düzleminde alınacaktır. Genel lineer grubun  $GL_2^+(\mathbb{R})$  ile gösterilen aşağıdaki alt grubu göz önüne alınsın:

$$GL_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc > 0 \right\}$$

Kolayca gösterilebilir ki  $GL_2^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde süreksiz olarak hareket eder.  $f(z): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  karmaşık fonksiyonları dikkate alınsın. Özel olarak  $GL_2^+(\mathbb{R})$  grubunun  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  elemanı göz önüne alınsın.

Bu hazırlıkların ardından aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 1.1.1. (Ono, 2004: 3)**  $f(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlem üzerinde meremorf bir fonksiyon ve  $k$  bir tamsayı olsun.  $\gamma z := \frac{az+b}{cz+d}$  olmak üzere  $|_k$  ile gösterilen slash operatörü

$$(f|_k \gamma)(z) := (\det \gamma)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(\gamma z)$$

olarak tanımlanır.

Genel lineer grubun özel bir alt grubu olan ve  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  ile gösterilen modüler grup  $2 \times 2$  tipinde, girdileri tamsayı ve determinanı 1 olan dönüşümlerden oluşur. Öte yandan modüler grubun temel denklik alt grubu  $\Gamma_0(N)$  ile gösterilir ve modüler grubun 2. satır 1. sütun girdisi mod  $N$ 'de sıfır olan elemanlarından oluşur. Buna göre aşağıdaki tanım çalışmadaki en temel kavramı vermektedir.

**Tanım 1.1.2. (Ono, 2004: 3)**  $f(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlem üzerinde meremorf bir fonksiyon,  $k$  bir tamsayı ve  $\Gamma$ ,  $N$  seviyeli denklik alt grubu olsun. Bu takdirde aşağıdaki iki koşulu sağlayan  $f(z)$  fonksiyonuna  $\Gamma$  üzerinde  $k$  tamsayı ağırlıklı bir meremorfik modüler form adı verilir:

(i) Her  $z \in \mathbb{H}$  ve her  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  için,

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z)$$

(ii) Eğer  $\gamma_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$  ise, bu takdirde  $q_N := e^{2\pi iz/N}$  ve  $a_{\gamma_0}(n_{\gamma_0}) \neq 0$  olmak üzere  $(f|_k \gamma)(z)$

$$(f|_k\gamma)(z) = \sum_{n \geq n_{\gamma_0}} a_{\gamma_0}(n) q_N^n$$

şeklinde bir Fourier açılımına sahiptir.

Eğer  $k = 0$  ise bu takdirde  $f(z)$ ,  $\Gamma$  üzerinde modüler fonksiyon olarak bilinir.

### Uyarı 1.1.3.

- (i) Farklı kaynaklarda modüler fonksiyonlar (formlar) için burada verilen tanımlara denk farklı tanımlar yer almaktadır. Bu bölümde kullanılan kavramlar (Ono, 2004) kaynağından alınmıştır.
- (ii) Tanım 1.1.2'deki (ii) numaralı koşul aslında “ $f(z)$ ,  $\Gamma$ 'nin tüm cusp yerlerinde meremorfür.” şeklinde de okunabilir. Eğer her bir  $\gamma_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$  için,  $n_{\gamma_0} \geq 0$  ( $n_{\gamma_0} > 0$ ) ise bu durumda  $f(z)$ ,  $\Gamma$ 'nin cusplarında holomorftür (sıfır olmaktadır) denir.
- (iii)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  olduğundan,  $\Gamma_0(N)$  üzerinde  $k$  tek sayı ağırlığına sahip özdeşliğin sıfırdan farklı herhangi bir meremorfik modüler form yoktur.
- (iv) Tanım 1.1.2'nin (ii) numaralı koşulu aslında  $q_N$ 'nin kesirli kuvvetlere sahip olmasına izin verir. Bu özellikteki modüler fonksiyonlar için irreguler cusp adı verilen kavram söz konusudur. Bu konu, bu çalışmanın kapsamının dışında olup, detaylı bilgi için (Shimura, 1994: 29) incelenebilir.

**Tanım 1.1.4. (Ono, 2004: 3)**  $f(z)$ ,  $\Gamma$ 'nin bir denklik alt grubu üzerinde bir tamsayı ağırlıklı meremorfik form olsun. Eğer  $f(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzleminde holomorftür ve aynı zamanda  $\Gamma$ 'nin cusplarında da holomorftür oluyorsa,  $f(z)$ 'ye bir holomorftür modüler form adı verilir. Eğer  $f(z)$ 'nin  $\Gamma$ 'nin cusplarında herhangi bir kutup yeri bulunuyor ise bu durumda  $f(z)$ 'ye bir zayıf holomorftür modüler form adı verilir.

$f(z)$ ,  $\Gamma$ 'nin cusplarında sıfır oluyorsa, bu durumda bir holomorftür cusp form adını alır.

**Uyarı 1.1.5.** Çalışma alanlarına göre farklı otomorfik form ihtiyacı ortaya çıktığı için otomorfik formlar teorisinin literatüründe farklı terminolojiler kullanılmaktadır. Bu çalışmada modüler formların en klasik hali kullanılacağından aslında holomorftür modüler form olarak adlandırılması gereken kavram basitlik açısından sadece modüler form olarak adlandırılacaktır.

Literatür incelendiğinde modüler formlarla ilgili fizik dahil olmak üzere birçok bilim dalında çeşitli çalışmalara rastlanmaktadır. Örneğin (bosonic) “sicim parçalanış fonksiyonu”

bir modüler form olan Dedekind-eta fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir. Bunun özelinde sayılar teorisi alanında modüler formların sıklıkla çalışılmasının temel sebebi aşağıda tanımlanacak olan Fourier katsayılarına sahip olmasıdır. Bir modüler formun Fourier katsayıları içinde birçok aritmetik bilgiyi barındırır. Fourier analizinin iyi bilinen teoremlerinden birisi karmaşık bir periyodik fonksiyonun Fourier serisi açılımına sahip olduğunu söyler. Tanım 1.1.2'nin (i) şikkı dikkate alınırsa  $f(z)$  bir modüler form olduğu takdirde,  $\Gamma$  modüler grubunun her bir dönüşümü için ilgili tanımdaki fonksiyonel eşitliği sağlaması gerekir. Özel olarak  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$  için de  $f(z)$ 'nin bu fonksiyonel eşitliği sağlaması gerekir. O halde,  $f(z+1) = f(z)$  özdeşliği elde edilir. Böylece  $f(z)$  bir modüler form ise, mutlaka periyodik karmaşık bir fonksiyon olur. O halde aşağıdaki tanım için gerekli teorik dayanak sağlanmış olur.

**Tanım 1.1.6. (Ono, 2004: 4)**  $f(z)$  meremorfik modüler formu  $\Gamma$ 'nın belli bir denklik alt grubu üzerinde tanımlı olan bir modüler form olsun. Bu takdirde  $q := e^{2\pi iz}$  olmak üzere  $f(z)$ 'nin sonsuzdaki Fourier açılımı

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} a(n)q^n$$

olarak tanımlanır. Buradaki  $a(n)$  katsayıları  $f(z)$  modüler formunun Fourier katsayıları olarak adlandırılır.

#### Uyarı 1.1.7.

- (i)  $\Gamma$ 'nın bir denklik alt grubu üzerinde tanımlı  $k$  ağırlıklı modüler formların, cusp formların ve meremorfik modüler formların uzayı  $\mathbb{C}$  cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır (Koblitz, 1984: 109).
- (ii)  $\Gamma$  için  $k$  ağırlıklı modüler formların uzayı  $M_k(\Gamma)$ , cusp formların uzayı  $S_k(\Gamma)$  ile gösterilecektir.

**Tanım 1.1.8. (Ono, 2004: 4)**  $\chi \pmod{N}$ 'de bir Dirichlet karakteri ise, eğer tüm  $z \in \mathbb{H}$  ve  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  için

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$$

oluyorsa,  $f(z) \in M_k(\Gamma) (S_k(\Gamma))$  bir *Nebentypus*  $\chi$  karakterine sahiptir denir.

Bu özelliğe sahip modüler formların uzayı (cusp formların uzayı)  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  ( $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ ) ile gösterilir.

Eğer  $\chi = \chi_0$  aşıkarakaracter ise, bu durumda yukarıdaki ilk notasyon kullanılır.

### Uyarı 1.1.9.

- (i) Eğer  $\chi \bmod N$ 'de bir Dirichlet karakteri ise, bu takdirde  $(n, N) \neq 1$  özelliğindeki her bir  $n$  tamsayısı için  $\chi(n) := 0$  olduğu kabul edilecektir. Üstelik  $\chi_0$  ile aşıkarakaracter gösterilecektir.
- (ii)  $\chi(-1) \neq (-1)^k$  ise  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  olduğundan,  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  uzayında özdeşliğin sıfırından farklı herhangi bir modüler form yoktur.

## 1.2. Modüler Grup Üzerinde Tanımlı Modüler Formlar

Maddenin yapı taşlarının atom olduğu gerçeğine benzer olarak modüler formların “yapı taşları”nın Eisenstein serileri olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla modüler formlara en güzel örnek Eisenstein serileridir. Bu serileri tanımlayabilmek için gerekli ön hazırlıklarla başlanılsın.

$k$  bir pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde  $\sigma_{k-1}(n)$  bölen fonksiyonu

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{1 \leq d|n} d^{k-1}$$

olarak tanımlansın. Bernoulli sayıları oldukça iyi bilinen sayılar olup  $k$ . Bernoulli sayısı  $B_k$  ile gösterilirse  $B_k$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2 - \dots$$

serisinin katsayıları olarak tanımlanır. O halde aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 1.2.1. (Ono, 2004: 5)**  $k \geq 2$  ve çift tamsayı olmak üzere  $k$  ağırlıklı Eisenstein serisi  $E_k(z)$  ile gösterilir ve

$$E_k(z) := 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Eisenstein serilerinin modüler form olduğu gösterilebilir.

**Teorem 1.2.2. (Ono, 2004: 5)**  $k \geq 4$  ve çift tamsayı olmak üzere  $E_k(z) \in M_k$ 'dir.

**İspat.**  $\zeta(s)$  klasik Riemann zeta fonksiyonu olmak üzere

$$2\zeta(k)E_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

olduğu kolayca görülebilir (Koblitz 1984: 110). Hipotez gereği  $k \geq 4$  olduğundan bu seri  $\mathbb{H}$  üst yarı düzleminin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır. O halde  $E_k(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde analitik bir fonksiyon olur.

Basit bir hesap yardımıyla

$$E_k(z) = E_k(z+1) \quad \text{ve} \quad E_k\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k E_k(z)$$

özdeşliklerinin doğru olduğu kolaylıkla görülebilir.

Modüler grubun üreteçlerinin

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu hatırlanırsa  $E_k(z) \in M_k$  olduğu görülür.

**Uyarı 1.2.3. (Ono, 2004: 5)** Teorem 1.2.2'nin ifadesinde  $k \geq 4$  ve çift tamsayı olarak alınmıştı.  $k = 2$  durumu için elde edilen

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n$$

Eisenstein serisi modüler form olmamasına rağmen modüler form olmayı ufak bir farkla kaybeder! Gerçekten de

$$z^{-2}E_2(-1/z) = E_2(z) + \frac{12}{2\pi iz}$$

dir.

Buna rağmen  $E_2(z)$  modüler formlar teorisinde önemli bir rol oynar. Örneğin modüler formlar üzerindeki diferansiyel operatörler çalışılırken  $E_2(z)$ 'ye ihtiyaç duyulur. Üstelik  $p$ -adik modüler formların teorisinde de önemli bir yere sahiptir (Serre 1973).

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n$$

Eisenstein serilerinin modüler grup üzerinde tanımlı tüm modüler formların cebirinin üreteçleri olduğu modüler formlar teorisinin en temel sonuçlarından biridir.

**Teorem 1.2.4. (Ono, 2004: 7)**  $k \geq 4$  ve çift tamsayı ise  $a, b \geq 0$  ve  $4a + 6b = k$  olmak üzere  $M_k$ ,

$$E_4(z)^a E_6(z)^b$$

biçimindeki monomialler tarafından üretilir.

Boyutları hesaplamak için bu teorem kullanılarak Teorem 1.2.2 gereği  $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$  için

$$M_k = \mathbb{C}E_k(z)$$

dir.

Bunun sonucu olarak

$$E_{14} = E_4(z)^2 E_6(z)$$

$$43867E_{18} = 38367E_4(z)^3 E_6(z) + 5500E_6(z)^3$$

$$77683E_{22} = 57183E_4(z)^4 E_6(z) + 20500E_4(z)E_6(z)^3$$

özdeşlikleri verilebilir.

$k = 12$  ağırlığı cusp form uzayını aşikardan farklı yapan en küçük tamsayıdır.

**Tanım 1.2.5. (Ono, 2004: 7)** Ramanujan delta fonksiyonu  $\Delta(z)$  ile gösterilir ve

$$\Delta(z) := \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728} = q - 24q^2 + 252q^3 - \dots$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse bu fonksiyon  $E_4$  ve  $E_6$  Eisenstein serileri cinsinden ifade edilmiş olup, Fourier katsayıları tamsayılardır. Baş Fourier katsayısı 1 olan bu fonksiyon modüler grup üzerinde tanımlı 12 ağırlığa sahip yegane cusp formdur.

**Teorem 1.2.6. (Ono, 2004: 7)**

$$\Psi_k : M_k \rightarrow S_{k+12}$$

dönüşümü her  $f(z) \in M_k$  için,

$$\Psi_k(f(z)) := f(z)\Delta(z)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $\Psi_k$  bir izomorfizmdir.

O halde Teorem 1.2.4 yardımıyla  $M_k(\Gamma)$  ve  $S_k(\Gamma)$  için aşağıdaki boyut formülleri verilebilir.

**Teorem 1.2.7. (Ono, 2004: 7)** Eğer  $k \geq 4$  ve çift tamsayı ise,

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma)) = \dim_{\mathbb{C}}(M_k(\Gamma)) - 1$$

ve

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_k(\Gamma)) = \begin{cases} [k/12] + 1, & k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ [k/12], & k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

olur.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  modüler grup üzerindeki modüler fonksiyonlar Eisenstein serileri cinsinden kolayca ifade edilebilir. Buna örnek olarak oldukça ilginç özellikleri olan modüler  $j$ -fonksiyonu verilebilir.

**Tanım 1.2.8. (Ono, 2004: 7)** Modüler  $j$ -fonksiyonu  $j(z)$  ile gösterilir ve

$$j(z) := \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = q^{-1} + 744 + 19884q + 21493760q^2 + \dots$$

olarak tanımlanır.

Modüler  $j$ -fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki teoremden özetlenmiştir.

**Teorem 1.2.9. (Ono, 2004: 8)** Aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i)  $z \rightarrow j(z)$  dönüşümü  $\mathfrak{F} = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$  ile  $\mathbb{C}$  arasında bire-bir ve örten bir dönüşüm tanımlar.
- (ii)  $j(z)$  fonksiyonu  $SL_2(\mathbb{Z})$  üzerinde tanımlı bir modüler fonksiyon olur.
- (iii)  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  üzerindeki her bir modüler fonksiyon,  $j(z)$ 'nin bir rasyonel fonksiyonudur.

### 1.3. Boyut Formülleri

Dikkat edilirse Teorem 1.2.7  $M_k(\Gamma)$  ve  $S_k(\Gamma)$  için boyut formüllerini verir. Riemann-Roch teoremi ile (Cohen ve Oesterlè 1977)'deki sonuçlar kullanılarak boyut formülleri için net formüller verilebilir. Bu teorik sonuçlar kullanılarak yazılan algoritmalar yardımıyla PARI/GP, Magma ve SageMath cebir programlarında pratik olarak boyutlar hesaplanabilir.

**Örnek 1.3.1.** Aşağıdaki örnekte 14 ağırlıklı, 12 seviyeli cusp form uzayının boyutunu 23 olarak bulan kodun PARI/GP ekranı verilmiştir.

```

PARI
Reading GPRC: gpdc.txt
GPRC Done.

GP/PARI CALCULATOR Version 2.13.4 (released)
amd64 running mingw (x86_64/GMP-6.1.2 kernel) 64-bit version
compiled: Mar 25 2022, gcc version 8.3-posix 20190406 (GCC)
threading engine: single
(readline v8.0 enabled, extended help enabled)

Copyright (C) 2000-2020 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?17 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 8000000, primelimit = 500000
(22:25) gp > A=mfinit([12,14,1,1]);
(22:26) gp > mfdim(A)
%2 = 23
(22:26) gp >

```

**Şekil 1.1.** 12 ağırlıklı 14 seviyeli cusp form uzayının boyut hesaplaması

Boyut formüllerinin genel hali aşağıdaki teoremden özetlenecektir. Nispeten karışık görünen bu formüllerin daha anlaşılabilir olması için bazı ön hazırlıklara ihtiyaç vardır.  $k$  bir tamsayı ve  $\chi$ ,  $\chi(-1) = (-1)^k$  özelliğinde  $\text{mod } N$ 'de bir Dirichlet karakteri olsun. Eğer  $p|N$  bir asal sayı ise bu durumda  $r_p(s_p)$ ,  $p$ 'nin  $N$ 'yi bölen ( $\chi$ 'nin kondüktörünü bölen) kuvvetini gösterebilir.  $\lambda(r_p, s_p, p)$  tamsayısı

$$\lambda(r_p, s_p, p) := \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leq r_p = 2r' \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leq r_p = 2r' + 1 \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p > r_p \end{cases}$$

Buna ilave olarak  $\nu_k$  ve  $\mu_k$  rasyonel sayıları

$$\nu_k := \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ -1/4, & k \equiv 2 \pmod{4} \\ 1/4, & k \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\mu_k := \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ -1/3, & k \equiv 2 \pmod{3} \\ 1/3, & k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Bu notasyon kullanılarak aşağıdaki boyut formülleri verilebilir.

**Teorem 1.3.2. (Ono, 2004: 10)** Eğer  $k$  bir tamsayı ve  $\chi \pmod N$ 'de  $\chi(-1) = (-1)^k$  özelliğinde bir Dirichlet karakteri ise bu takdirde  $p$ ,  $N$ 'nin bir asal bölenini göstermek üzere

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - \dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) \\ &= \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) \\ &+ \nu_k \sum_{\substack{x \pmod N \\ x^2+1 \equiv 0 \pmod N}} + \mu_k \sum_{\substack{x \pmod N \\ x^2+x+1 \equiv 0 \pmod N}} \chi(x) \end{aligned}$$

olur.

**Uyarı 1.3.3. (Ono, 2004: 10)** Eğer  $k > 2$  ise, bu durumda  $\dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$  olur. Bu yüzden Teorem 1.3.2'nin sol tarafı  $\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$  boyutuna indirgenir. Benzer şekilde  $k = 2$  durumunda formülün sonucu  $\chi$  karakterinin aşikar olup olmamasına bağlıdır. Eğer  $k \leq 0$  ise, bu durumda  $\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$  olur. Bu durumlarda Teorem 1.3.2'nin sol tarafı  $-\dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi))$  boyutuna indirgenir. Yukarıdaki formülde boş çarpımlar 1 olarak alınır.

#### 1.4. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar

Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar, otomorfik formların ilgi çekici sınıflarından birisidir. Konuyla ilgili ilk çalışmalar Euler, Gauss ve Jacobi'ye uzanmasına rağmen teorinin dönüm noktası (Shimura, 1973) çalışması olmuştur. Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlarla klasik modüler formları eşleştiren Shimura yükseltmesi bu makalenin en önemli sonucudur.

Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların tıpkı klasik modüler formlar gibi bir fonksiyonel eşitlik sağlaması gerekir. Bunun için bir ön hazırlık yapılmalıdır. Tanıma geçmeden önce gerekli hazırlık yapılacaktır.

Eğer  $d$  bir tek asal sayı ise,  $\left(\frac{c}{d}\right)$  ile bilinen Legendre sembolü gösterilecektir. Pozitif  $d$  tek sayıları için  $\left(\frac{c}{d}\right)$  sembolü çarpımsallık yardımıyla tanımlanacaktır. Negatif  $d$  tek sayıları için

$$\left(\frac{c}{d}\right) := \begin{cases} \left(\frac{c}{|d|}\right) & d < 0 \text{ ve } c > 0 \text{ ise} \\ -\left(\frac{c}{|d|}\right) & d < 0 \text{ ve } c < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Üstelik  $\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$  olarak kabul edilsin.  $d$  tek sayıları için  $\epsilon_d$ ,

$$\epsilon_d := \begin{cases} 1 & d \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise} \\ i & d \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Hazırlığı yapılan tanımda “otomorfi çarpanı” olarak  $(cz + d)^{k+1/2}$  gibi bir çarpan olması beklendiğinden karmaşık karekök fonksiyonu devreye girer. Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların iyi tanımlı olabilmesi için karmaşık karekök fonksiyonunun tek değerli olarak ele alınması gerekir. Bunu yapabilmek için  $\sqrt{z}$  karmaşık karekök fonksiyonunun esas dalı olarak  $(-\pi/2, \pi/2]$  aralığı seçilecektir. Böylece  $\sqrt{z}$ , negatif gerçel eksen çıkartılmış karmaşık düzlem üzerinde holomorfik bir fonksiyon olur.

**Tanım 1.4.1. (Ono, 2004: 11)**  $\lambda$  negatif olmayan bir tamsayı ve  $N$  pozitif bir tamsayı olsun. Üstelik  $\chi \pmod{4N}$ 'de bir Dirichlet karakteri olarak alınsın. Eğer  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde tanımlı  $g(z)$  meremorfik fonksiyonu  $\Gamma$ 'nin tüm cusp noktalarında meremorf ve tüm  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$  dönüşümleri için

$$g\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \chi(d) \left(\frac{c}{d}\right)^{2\lambda+1} \epsilon_d^{-1-2\lambda} (cz + d)^{\lambda+\frac{1}{2}} g(z)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlıyorsa,  $g(z)$ 'ye  $\chi$  Nebentypus'una sahip  $\lambda + \frac{1}{2}$  ağırlıklı meremorfik bir yarım tamsayı ağırlıklı modüler form denir. Eğer  $g(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde analitikse, bu durumda  $g(z)$ 'ye bir holomorfik yarım tamsayı ağırlıklı modüler form adı verilir. Şayet  $g(z)$ ,  $\Gamma_0(4N)$ 'nin her bir cuspında sıfır oluyorsa, bu durumda  $g(z)$  bir cusp form adını alır.

Zayıf holomorfik modüler form ise benzer şekilde tanımlanır.

#### Uyarı 1.4.2.

- (i) Tanım 1.4.1'deki cusp koşulları tamsayı durumundakine tamamen benzerdir.
- (ii) Tıpkı tamsayı ağırlıklı durumundaki gibi bir holomorfik yarım tamsayı ağırlıklı modüler forma kısaca yarım tamsayı ağırlıklı modüler form denilecektir. Öte yandan meremorfik ve zayıf holomorfik yarım tamsayı ağırlıklı modüler form terminolojisine devam edilecektir.
- (iii)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4N)$  olduğundan  $\chi(-1) = -1$  özelliğinde, yani tek  $\chi$  Nebentypus karakterine sahip özdeşliğin sıfırından farklı meremorfik yarım tamsayı ağırlıklı modüler form bulunmamaktadır.

(iv) Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların otomorfi çarpanının anlamlı olabilmesi için seviyesi 4 ve 4'ün katı olan modüler grubun denklik alt grupları üzerinde çalışılmalıdır. Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar ancak bu alt gruplar üzerinde üzerinde tanımlanabilir.

(v) Tamsayı ağırlık durumunda olduğu gibi bu formlar da sonlu boyutlu karmaşık vektör uzayı olurlar.  $\chi$  Nebentypus'a sahip  $\Gamma_0(4N)$  üzerinde tanımlı ve  $\lambda + \frac{1}{2}$  ağırlıklı  $\mathbb{C}$ -vektör uzayları olan modüler formların (cusp formların) uzayı

$$M_{\lambda+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N), \chi) \quad (S_{\lambda+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N), \chi))$$

ile gösterilir. Eğer  $\chi = \chi_0 \pmod{4N}$  de aşikar karakter ise bu durumda

$$M_{\lambda+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N)) \quad (S_{\lambda+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N)))$$

notasyonu kullanılır.

### 1.5. Teta Fonksiyonları

Eisenstein serilerinin klasik tamsayı ağırlıklı modüler formlara dahil en önemli örnek olması gibi teta serileri de yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için en klasik örneklerden birisidir. Bu fonksiyonların tamsayıların temsili üzerine önemli uygulamaları olup literatürde buna dair bir çok çalışma yer almaktadır.

**Tanım 1.5.1. (Ono, 2004: 12)** Teta fonksiyonu  $\theta_0(z)$  ile gösterilir ve

$$\theta_0(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

Fourier serisi yardımıyla tanımlanır.

**Teorem 1.5.2. (Ono, 2004: 12)**  $\theta_0(z) \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ 'dür.

Literatürde daha genel teta fonksiyonları da vardır. Aşağıda bu teta fonksiyonlarının iki ailesi yer almaktadır.

**Tanım 1.5.3. (Ono, 2004: 12)**  $\psi$  bir Dirichlet karakteri olsun.

(i) Eğer  $\psi$  çift ise  $\theta(\psi, 0, z)$  fonksiyonu

$$\theta(\psi, 0, z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(n)q^{n^2}$$

(ii) Eğer  $\psi$  çift ise  $\theta(\psi, 0, z)$  fonksiyonu

$$\theta(\psi, 1, z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(n)nq^{n^2}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse, kabul gereği

$$\theta(\chi_0, 0, z) := \theta_0(z)$$

olur. Üstelik bu teta fonksiyonlarına tek değişkenli teta fonksiyonu gözüyle bakılabilir.

Yukarıda tanımlanan teta fonksiyonları ile modüler formlar arasında oldukça önemli bir ilişki var olup, bu ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem 1.5.4. (Ono, 2004: 12)**  $\psi$ , kondüktörü  $r(\psi)$  olan bir ilkel Dirichlet karakteri olsun.

- (i) Eğer  $\psi$  çift ise, bu takdirde  $\theta(\psi, 0, z) \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4.r(\psi)^2), \psi)$ ,
- (ii) Eğer  $\psi$  tek ise, bu takdirde  $\theta(\psi, 1, z) \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4.r(\psi)^2), \psi\chi_{-4})$

olup, burada  $\chi_{-4}$  mod 4'te aşikar olmayan Dirichlet karakteridir.

Kuşkusuz (Serre ve Stark, 1977) çalışması yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar teorisindeki en önemli çalışmalardan birisidir. Bu makalede 1/2 ağırlıklı her bir modüler formun aslında teta fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olduğu gösterilmiştir. Özel olarak 1/2 ağırlıklı modüler formların uzayının tam bir tanımı verilmiştir. Bu sonuç aşağıda yer almaktadır.

**Teorem 1.5.5. (Serre ve Stark, 1977: 34)**  $N$  bir pozitif tamsayı ve  $\chi$  mod  $N$ 'de bir Dirichlet karakteri olsun.  $\Omega(4N, \chi)$ ,  $t$  bir pozitif tamsayı ve  $\psi$  kondüktörü  $r(\psi)$  olan bir çift ilkel Dirichlet karakteri olmak üzere  $(\psi, t)$  ikililerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan kümesini gösterebilir.

- (i)  $r(\psi)^2 | N$ ,
- (ii)  $4N$  ile aralarında asal olan her bir  $N$  tamsayısı için  $\chi(n) = \psi(n) \left(\frac{t}{n}\right)$ 'dir.

Bu takdirde  $(\psi, t) \in \Omega(4N, \chi)$  olacak şekildeki  $\theta(\psi, 0, tz)$  teta fonksiyonları  $M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N), \chi)$  modüler formlar uzayının bir bazını oluşturur.

Bu çalışmada ayrıca 1/2 ağırlıklı cusp formlar için de bir sonuç verilmiş olup, bunun için bir ön hazırlık yapılmalıdır. Kolayca görülebilir ki, kondüktörü  $r(\psi)$  olan her bir Dirichlet karakteri  $\psi_p$  kondüktörü  $r(\psi)$ 'yi bölen  $p$  asalının en büyük kuvveti olmak üzere

$$\psi = \prod_{p|r(\psi)} \psi_p$$

olarak tek türlü yazılabilir. Eğer her bir  $p|r(\psi)$  asalı için  $\psi_p(-1) = 1$  oluyor ise  $\psi$ 'ye tamamen çift karakter adı verilir. Bu terminoloji ve Teorem 1.5.5'teki notasyon kullanılarak  $1/2$  ağırlıklı cusp formlar için baz sonucu aşağıda verilmiştir.

**Teorem 1.5.6. (Ono, 2004: 13)**  $(\psi, t)$  ikilileri  $\psi$  tamamen çift karakter olmayan  $\Omega(4N, \chi)$  kümesinin elemanları üzerinde değişmek üzere,  $\theta(\psi, 0, tz)$  fonksiyonlarının kümesi  $S_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N), \chi)$  cusp formlar uzayının bir bazını oluşturur.

**Uyarı 1.5.7.**  $\dim_{\mathbb{C}}\left(S_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4N), \chi)\right) \neq 0$  özelliğindeki ilk seviye  $4N = 576$ 'dır. Eğer  $\chi = \left(\frac{12}{\bullet}\right)$  ise bu takdirde  $\dim_{\mathbb{C}}\left(S_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(576), \chi)\right) = 1$  olur ve bu uzay aşağıdaki teta fonksiyonu tarafından üretilir.

$$\theta(\chi, 0, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) q^{n^2} = q - q^{25} - q^{49} + q^{121} + \dots$$

## 1.6. $\Gamma_0(4)$ Üzerindeki Formlar

Tamsayı ağırlıklı modüler formlar için 1 sayısı seviye olarak ortaya çıkabilirken, hatırlanacağı üzere yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların seviyeleri 4 ve 4'ün katı olmak zorundaydı. Bu nedenle tıpkı Eisenstein serilerinin 1 seviyeli modüler formlar olması gibi yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için aşağıdaki benzer sonuç verilecektir. Bu bölümde  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  olmak üzere  $M_k(\Gamma_0(4), \psi_k)$  uzaylarının net bir tarifi verilecektir. Burada

$$\psi_k = \begin{cases} \chi_0 & k \in 2\mathbb{Z} \text{ veya } k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \\ \chi_{-4} = \left(\frac{-4}{\bullet}\right) & k \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

dır. Aşağıdaki sonucu verebilmek için

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_1(2n+1)q^{2n} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

2 ağırlıklı Eisenstein serisine ihtiyaç duyulmaktadır.

**Teorem 1.6.1. (Cohen, 1975: 272)** Yukarıdaki notasyonlar aynen geçerli olmak üzere, bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) Eğer  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ise,

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_k(\Gamma_0(4), \psi_k)) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 + [k/2] & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(4), \psi_k)) = \begin{cases} 0 & k \leq 2 \\ [k/2] - 1 & k > 2 \text{ ve } k \notin 2\mathbb{Z} \\ [k/2] - 2 & k \geq 2 \text{ ve } k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

olur.

(ii) Bir graded cebir olarak,

$$\bigoplus M_k(\Gamma_0(4), \psi_k) \cong \mathbb{C}[F, \theta]$$

dır.

Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar içinde Eisenstein serileri benzeri seriler (Cohen, 1975)'te verilmiş olup, bu yarım tamsayı ağırlıklı Eisenstein serileri  $E_k(z)$  klasik Eisenstein serilerinin genelleştirilmiş olup Cohen-Eisenstein serileri olarak adlandırılır.

### 1.7. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar için Boyut Formülleri

Boyut formüllerinin verildiği en klasik eser olan (Cohen ve Oesterlè 1977)'de yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için de boyut formülleri mevcut olup, ilgili makalede çeşitli yazım hataları söz konusu olduğundan Henri Cohen tarafından sağlanan düzeltme notları esas alınarak bu bölüm yazılmıştır.

$r_2$  ile 2'nin  $4N$ 'yi bölen kuvveti gösterilsin. Boyut formülünü verebilmek için  $\zeta(k, 4N, \chi)$  geçici değişkeni kullanılacaktır.  $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  ve  $\chi \bmod N$ 'de  $\chi(-1) = 1$  özelliğinde bir Dirichlet karakteri olsun. Böylece  $\zeta(k, 4N, \chi)$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Eğer  $r_2 \geq 3$  ise

$$\zeta(k, 4N, \chi) = \begin{cases} \lambda(r_2, s_2, 2) & r_2 \geq 4 \\ 3 & r_2 = 3 \end{cases}$$

olsun. Eğer  $r_2 = 2$  ve  $r_p$  tek veya  $0 < r_p < 2s_p$  olacak şekilde  $p|4N$  özelliğinde ve  $p \equiv 3 \pmod{4}$  olacak şekilde bir  $p$  asalı varsa, bu durumda

$$\zeta(k, 4N, \chi) := 2$$

olarak tanımlansın.

Geriye kalan durumlar için, yani  $r_2 = 2$  ve  $p|4N$  özelliğindeki  $p \equiv 3 \pmod{4}$  olacak şekildeki her bir  $p$  asalı için  $r_p$  çift ve  $r_p \geq 2s_p$  olsun. Bu durumlarda aşağıdaki tanımlama yapılsın:

$$\zeta(k, 4N, \chi) := \begin{cases} 3/2 & k - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{Z} \text{ ve } s_2 = 0 \\ 5/2 & k - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{Z} \text{ ve } s_2 = 2 \\ 5/2 & k - \frac{3}{2} \in 2\mathbb{Z} \text{ ve } s_2 = 0 \\ 3/2 & k - \frac{3}{2} \in 2\mathbb{Z} \text{ ve } s_2 = 2 \end{cases}$$

O halde aşağıdaki boyut formülü teoremi verilebilir.

**Teorem 1.7.1. (Ono, 2004: 16)**  $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  ve  $\chi$  Dirichlet karakteri  $\text{mod } 4$ 'te  $\chi(-1) = 1$  özelliğinde olsun. Bu takdirde boş çarpımlar 1 ve  $p$ ,  $4N$ 'nin bir asal böleni olmak üzere

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(4N), \chi)) - \dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(4N), \chi)) \\ &= \frac{(k-1)4N}{12} \prod_{p|4N} (1+p^{-1}) - \frac{\zeta(k, 4N, \chi)}{2} \prod_{\substack{p|N \\ p \neq 2}} \lambda(r_p, s_p, p) \end{aligned}$$

dır.

### 1.8. Dedekind-Eta Fonksiyonu

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan Dedekind-eta fonksiyonu tanıtılacaktır. Bu fonksiyon modüler formlarla ilgili aritmetik problemlerin çözümünde sıklıkla karşımıza çıkar.

**Tanım 1.8.1. (Ono, 2004: 17)**  $\eta(z)$  ile gösterilen Dedekind-eta fonksiyonu

$$\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

sonsuz çarpımı ile tanımlanır.

**Uyarı 1.8.2.** Tanıma dikkat edilirse  $\eta(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde sıfır olmaz. Yukarıda bahsedildiği gibi Dedekind-eta fonksiyonu bir çok problemde kullanıldığı gibi kombinatoriyel üreteç fonksiyonlarının oluşturulmasında da sıkça karşımıza çıkar. (Andrews, 1998) Teorem 2.8'deki Jacobi üçlü çarpım özdeşliği

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{2m} x^{m^2}$$

olarak verilir. Bu özdeşlik yardımıyla belirli teta fonksiyonları için iyi bilinen aşağıdaki klasik  $q$  serisi özdeşlikleri doğrudur.

$$\eta(24z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{24n}) = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k q^{(6k+1)^2} = \frac{1}{2} \theta \left( \left( \frac{12}{\bullet} \right), 0, z \right)$$

$$\eta(8z)^3 = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n})^3 = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k (2k+1) q^{(2k+1)^2} = \frac{1}{2} \theta \left( \left( \frac{-4}{\bullet} \right), 1, z \right)$$

$$\frac{\eta(z)^2}{\eta(2z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})^2}{(1 - q^{4n})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

$$\frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2 \eta(4z)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})^5}{(1 - q^n)^2 (1 - q^{4n})^2} = \theta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

$$\frac{\eta(16z)^2}{\eta(8z)} = q \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{16n})^2}{(1 - q^{8n})} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}$$

Teorem 1.8.3'teki ilk özdeşliğe dikkat edilirse Dedekind-eta fonksiyonu  $1/2$  ağırlıklı bir modüler formdur. Daha kesin olarak  $\eta(z)$  aşağıdaki teoremden verilen modüler dönüşüm özelliklerini sağlar.

**Teorem 1.8.3. (Ono, 2004: 17)**  $z \in \mathbb{H}$  için, Dedekind-eta fonksiyonu aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

$$\eta(z+1) = e^{\pi i/12} \eta(z)$$

$$\eta(-1/z) = (-iz)^{1/2} \eta(z)$$

Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların tanımı hatırlanacak ve Teorem 1.8.4 kullanılacak olursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 1.8.4. (Ono, 2004: 17)**

$$\eta(24z) \in S_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(576), \chi_{12})$$

olup, burada

$$\chi_{12}(n) := \left( \frac{12}{n} \right) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1, 11 \pmod{12} \\ -1 & n \equiv 5, 7 \pmod{12} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

dır.

### 1.9. Hecke Eigenformlar

Bu bölümde Hecke eigenformlar tanıtılacaktır. Tamsayı ağırlık için verilen tanımlar, yarım tamsayı Hecke eigenformlar için de prensip olarak aynı olup, yarım tamsayı ağırlık durumunda Hecke operatörü tanımı biraz daha farklıdır. Detaylar için (Koblitz, 1984) kaynağına bakılabilir.

**Tanım 1.9.1. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343)** Herhangi bir sabit  $k$  tamsayısı,  $n$  pozitif tamsayısı, her  $f \in M_k(\Gamma)$  için  $T_n: M_k(\Gamma) \rightarrow M_k(\Gamma)$  olmak üzere

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz + bd}{d^2}\right)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere  $n$ -inci Hecke operatörü adı verilir ve  $T_n$  ile gösterilir.

**Tanım 1.9.2. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343)**  $m = 1, 2, \dots$  olmak üzere tüm  $T_m$  Hecke operatörleri için özvektör olan modüler forma Hecke eigenform (özform) adı verilir. Baş katsayısı 1 olan eigenformlar tam olarak Hecke operatörlerinin özvektörü olduğu açıktır.

**Teorem 1.9.3. (Koblitz, 1984: 156)**

(i)  $p$  asalı için  $p$ -inci Hecke operatörü

$$T_p f(z) = p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right)$$

şeklindedir.

(ii) Eğer  $f \in M_k(\Gamma)$ ,

$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)e^{2\pi imz}$  şeklinde bir Fourier açılıma sahip ise o zaman  $n$ -inci Hecke operatörü  $T_n$  de bir Fourier açılıma sahiptir ve  $\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$  olmak üzere

$$T_n f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) e^{2\pi imz}$$

şeklindedir.

(iii)  $(m, n) = 1$  ise  $T_m \cdot T_n = T_{m \cdot n}$  dir.

(iv) Hecke operatörleri cusp formları cusp formlara resmeder, yani cusp form uzayını korur.

**Teorem 1.9.4. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343)**  $k > 0$  ve  $f \in M_k(\Gamma)$  sıfırdan farklı modüler form olsun.  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$ ,  $f$ 'nin Fourier açılımı olsun. Eğer  $f$ , tüm  $T_n$  Hecke operatörleri için bir eigen fonksiyon ise yani tüm  $n \geq 1$  için  $T_n f = \lambda(n)f$  ise o zaman  $a(1) \neq 0$ 'dir. Eğer  $f$  normalleştirilerek  $a(1) = 1$  ise o zaman tüm  $n \geq 1$  için  $a(n) = \lambda(n)$ 'dir.

**Tanım 1.9.5. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343)**  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n \in M_k(\Gamma)$  sıfırdan farklı bir modüler form olsun.  $a(1) = 1$  özelliğindeki Hecke eigenformlara normalleştirilmiş Hecke eigenform denir.

**Tanım 1.9.6. (Cohen ve Strömberg, 2017: 185)**  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ ,  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in M_k(\Gamma_0(N))$  olsun.  $d_N$  sayısı  $\Gamma_0(N)$ 'in,  $PSL(2, \mathbb{Z})$ 'deki görüntüsünün indeksi olmak üzere

$$M := \frac{kd_N}{12}$$

sayısı tanımlansın. Eğer  $0 \leq i \leq M$  için  $a_i = b_i$  ise bu takdirde  $f = g$  olur.

$M$  sayısına Sturm sınırı adı verilir.

## 2. DEDEKİND-ETA ÇARPIMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Dedekind-eta çarpımları tanıtılıp, özellikleri incelenecektir. Böylece çalışmanın özü olan yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların Dedekind-eta çarpımları yardımıyla ifade edilmesi problemine hazırlık yapılmış olacaktır.

### 2.1. Tanım ve Temel Özellikler: Seviye, Ağırlık, Pay ve Payda

**Tanım 2.1.1. (Köhler, 2011: 31)**  $m$  sayısı pozitif tamsayıların sonlu bir kümesinde değişmek,  $a_m$  üssü herhangi bir tamsayı olmak ve  $\eta(z)$  Dedekind-eta fonksiyonunu göstermek üzere

$$f(z) = \prod_m \eta(mz)^{a_m}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonların sonlu çarpımına bir eta çarpımı adı verilir.

Tanımdaki  $a_m$  üssü pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Doğal olarak sıfır olması durumunda çarpıma etkisi olmayan 1 çarpanı gelir. Bu yüzden tüm  $m$ 'ler için  $a_m \neq 0$  kabul edebiliriz. Çarpım sonlu olduğundan, örneğin  $n$  tane çarpan varsa  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  için  $m_i$  sayılarının bir ortak katlarının en küçüğü mevcuttur. Bu sayıya  $N$  diyelim. O halde  $N = OKEK(m_i)$ 'dir. Böylece her  $m_i, N$ 'yi böler.

**Tanım 2.1.2. (Köhler, 2011: 31)** Yukarıdaki notasyonu kabul edersek, bu durumda

$$f(z) = \prod_{m|N} \eta(mz)^{a_m} \quad (2.1)$$

fonksiyonuna  $N$  seviyeli bir eta çarpımı denir.

Burada formal olarak,  $m$  sayısı  $N$  pozitif tamsayısının tüm pozitif bölenleri üzerinde değişir. Bazı durumlarda  $a_m$  üssü sıfır olabilir. Bu notasyonu  $N$  sayısı  $OKEK(m)$ 'den daha büyük olduğu durumlarda kullanacağız ve böylece  $N$  sayısı eta çarpımının seviyesinin bir katı olacaktır.

**Uyarı 2.1.3.** Literatüre bakıldığında eta quotient (eta bölümü) ve eta product (eta çarpımı) terimleri beraber kullanılmaktadır. Bunların arasındaki fark şu şekildedir: (2.1) eşitliğindeki gibi fonksiyonlara eta bölümü ve tüm  $m$ 'ler için  $a_m \geq 0$  olması durumunda ise eta çarpımı terimi kullanılmaktadır. Bu çalışmada herhangi bir ayırım gözetmeden bu özellikteki tüm  $f(z)$  fonksiyonlarına eta çarpımı adı verilecektir.

$\eta(z)^{a_1}\eta(z)^{a_2}\eta(z)^{a_3} \dots$  eta çarpımını kısaca göstermek için  $[1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3}, \dots]$  notasyonu kullanılmaktadır. Bu notasyon ilk defa (Gordon ve Huges, 1993)'de kullanılmıştır. Köşeli parantez içindeki terimler genellikle payında ve paydasında pozitif üsleri olan bir kesir olarak yazılır.

(2.1)'deki eta çarpımı  $\Gamma_0(N)$  denklik alt grubu üzerinde

$$k = \frac{1}{2} \sum_m a_m$$

ağırlıklı belli bir çarpan sistemine sahip bir modüler form gibi davranır. Bu şu anlama gelir:

Her  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  için

$$f(Lz) = f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = v_f(L)(cz + d)^k f(z)$$

dir. Burada  $v_f(L)$  birimi  $v_\eta$ 'ya bağlı olarak hesaplanabilen 24. dereceden bir köküdür. Ancak  $f$ 'nin  $v_f(L)$  çarpan sistemini tam olarak bilmemize nadiren ihtiyaç vardır. Gerçekten de  $v_\eta$  değerleri verilmek üzere,

$$v_f(L) = v_f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \prod_{m|N} \left( v_\eta\left(\begin{pmatrix} a & mb \\ c/m & d \end{pmatrix}\right) \right)^{a_m}$$

dir.

Aynı zamanda modüler grubun bir üretici olan  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  kayma dönüşümü için  $v_f(T)$  değerini hesaplama oldukça önemlidir.  $OBEB(s, t) = 1$ , yani  $\frac{s}{t}$  en sade şekilde yazılmak üzere

$$\frac{1}{24} \sum_{m|N} m a_m = \frac{s}{t} \quad (2.2)$$

olsun. Bu takdirde  $\eta(z + 1) = e\left(\frac{1}{24}\right)\eta(z)$  özdeşliği kullanılarak  $v_f(T) = e\left(\frac{s}{t}\right)$  elde edilir ve böylece

$$f(Tz) = f(z + 1) = e\left(\frac{s}{t}\right) f(z)$$

olur. O halde  $c_n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_s = 1$  katsayılar olmak üzere  $f$ 'nin

$$f(z) = \sum_{n \equiv s \pmod{t}, n \geq s} c_n e\left(\frac{nz}{t}\right) \quad (2.3)$$

şeklinde bir Fourier açılımı vardır. Özel olarak  $\frac{s}{t}$ ,  $f$ 'nin  $\infty$  cusp'ındaki mertebesidir.

**Tanım 2.1.4. (Köhler, 2011: 32)** (2.2) eta çarpımındaki  $t$  sayısına eta çarpımının paydası,  $s$  sayısına ise eta çarpımının payı adı verilir.

Tanıma dikkat edilirse payda olan  $t$ , mutlaka  $24$ 'ün bir böleni olur.

$v_f(L)$  için açık ve net bir formül (Ono, 2004)'te verilmiştir. (2.2) eşitliğinde verilen sayının  $k$  ağırlığının ve  $\frac{1}{24} \sum_{m|N} m a_{N/m}$  değerlerinin tamsayı olması durumunda  $v_f(L)$  sadece  $d'$ 'ye bağlı bir fonksiyon olur.

(2.3) Fourier serisi için işaret dönüşümü

$$f\left(z + \frac{1}{2}\right) = e\left(\frac{s}{2t}\right) \sum_{n \equiv s \pmod{t}, n \geq s} (-1)^{(n-s)/t} c_n e\left(\frac{nz}{t}\right)$$

olur.

(Köhler, 2011) Bölüm 1.2 kullanılarak  $e\left(-\frac{s}{t}\right) \times f\left(z + \frac{1}{2}\right)$  serisine  $f(z)$  için işaret dönüşümü serisi denir.

**Tanım 2.1.5. (Köhler, 2011: 33)**  $f$ , (2.1)'deki gibi  $N$  seviyeli bir eta çarpımı olsun. Eğer  $N$ 'nin kendisinden farklı bir böleni  $N_1$  ve  $g$  ise  $f(z) = g(dz)$  şeklinde  $N_1$  seviyeli bir eta çarpımı olacak şekilde bir  $d \geq 1$  tamsayısı bulunabiliyorsa  $f$ 'ye  $N$  seviyeli eski eta çarpımı adı verilir. Aksi takdirde  $f$ 'ye bir yeni eta çarpımı adı verilir.

$f$  ve  $g$  özdeş Fourier katsayılarına sahip olduğundan genellikle yalnızca yeni eta çarpımlarını çalışmak yeterlidir. Bununla beraber bazen eski eta çarpımlarını göz önüne almak avantajlı olabilir. Örneğin  $g(z) = \eta(z)\eta(2z)$  ve  $f(z) = \eta(8z)\eta(16z)$  ikisi de 16 seviyeli eski eta çarpımı iken  $g$  2 seviyeli yeni eta çarpımıdır. Fakat  $f$ 'nin periyodu 1 olup, Fourier açılımı  $q = e^{2\pi iz}$  değişkenine sahip bir kuvvet serisi olur. Yani Fourier açılımında kesirli kuvvet bulunmaz.  $f$  eski eta çarpımı olmasına rağmen bu güzel özelliğe sahiptir.

**Uyarı 2.1.6.** İsimleri birbirlerini çağrıştırırsa da, modüler formlardaki yeni formlar ile yeni eta formları çok da birbirleriyle bağlantılı değildir. Sadece bazı hallerde bir yeni eta çarpımından bir Hecke eigenform elde edilir. Örneğin  $\eta(z)\eta(2z)$  aynı zamanda bir Hecke eigenform olan

bir yeni eta çarpımıdır. Dikkat edilirse bu durum Hecke eigenformların Dedekind-eta cinsinden bulunması probleminin önemine vurgu yapar. Bu ise, bu çalışmanın motivasyon noktalarından birisini oluşturmaktadır.

## 2.2. Fricke Grubu Üzerindeki Eta Çarpımları

Bir an için  $m$  pozitif tamsayı olmak üzere  $f_m = \eta(mz)$  yazalım. Dedekind-eta fonksiyonunun sağladığı özdeşliklerden birisi olan  $\eta(-1/z) = \sqrt{-iz}\eta(z)$  kullanılarak

$$f_m(W_N z) = f_m\left(-\frac{1}{Nz}\right) = \eta\left(-\frac{1}{(N/m)z}\right) = \sqrt{-(iN/m)z}\eta\left(\frac{N}{m}z\right)$$

elde edilir.

O halde (2.1)'deki  $N$  seviyeli  $f$  eta çarpımı için

$$\begin{aligned} f(W_N z) &= \prod_{m/N} \left( (-i(N/m)z)^{1/2} \eta\left(\frac{N}{m}z\right) \right)^{a_m} \\ &= \prod_{m/N} \left( (-imz)^{1/2} \eta(mz) \right)^{a_{N/m}} \\ &= (-iz)^k \left( \prod_{m/N} m^{a_{N/m}} \right)^{1/2} \prod_{m/N} \eta(mz)^{a_{N/m}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $f$  eta çarpımının  $\Gamma^*(N)$  Fricke grubu için  $k$  ağırlıklı bir modüler form olması için gerek ve yeter şart

$$f(W_N z) = (-i\sqrt{N}z)^k f(z)$$

dir. Bunun gerçekleşebilmesi için gerek ve yeter şart ise her  $m \mid N$  için

$$a_{N/m} = a_m \tag{2.4}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

**Tanım 2.2.1. (Köhler, 2011: 33)** (2.4) eşitliğini sağlayan eta çarpımına Fricke grubu üzerinde  $N$  seviyeli bir eta çarpımı adı verilir.

**Uyarı 2.2.2.**  $\tau(N) = \sigma_0(N)$ ,  $N$ 'nin pozitif bölenlerinin sayısı olsun. Dikkat edilirse  $N$  seviyeli bir eta çarpımını belirleyebilmek için  $a_m$  üslerinin  $\tau(N)$  terimine ihtiyaç vardır. Fricke grubu üzerindeki bir eta çarpımını belirlemek için ise, tam olarak  $\lceil \tau(N)/2 \rceil$  tane terime ihtiyaç duyulur.

### 2.3. Cusp Noktalarındaki Açılım ve Mertebe

$\eta(z)$  fonksiyonunun Euler çarpımı formülüne dikkat edilirse, bu fonksiyonun hiçbir zaman sıfır olmayacağı görülür. Bu yüzden  $a_m$  üslerinden bağımsız olarak (2.1) eta çarpımları üst yarı düzlem üzerinde analitik olurlar. Bununla beraber tüm cusp noktalarında da analitik olan eta çarpımlarını arayacağız. Özel olarak  $\infty$ 'daki cusp noktasının mertebesi negatif olmayan bir sayı, yani

$$\frac{s}{t} \geq 0$$

olmak zorundadır.

Diğer yandan bir eta çarpımı için  $r \in \mathbb{Q}$  özelliğindeki diğer cusp noktalarında analitik olması için gerekli koşullara da ihtiyacımız vardır. Bu amaç için  $\eta(mz)$  fonksiyonlarının mertebelerine dair keyfi cusp noktalarında ve bir şekilde daha genel olarak  $\eta(mz)$ 'nin cusp noktalarındaki Fourier açılımları için bir formül vereceğiz. Bu açılım, kendileri cusp form olmayan ancak eta çarpımlarının bir lineer kombinasyonunun bir cusp form olması için oldukça faydalı bir kriter verir.

**Teorem 2.3.1. (Köhler, 2011: 34)**  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere,  $f_m(z) = \eta(mz)$  ve  $c \neq 0$  olmak üzere  $r = -\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$  özelliğinde bir indirgenmiş kesir olsun.  $a$  ve  $b$  sayıları  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  olacak şekilde seçilsin. Bu takdirde

- (1)  $f_m$ 'in  $r$  cusp yerindeki açılımı,  $L = \begin{pmatrix} x & * \\ u & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $x = \frac{md}{OBEB(c,m)}$ ,  $u = -\frac{c}{OBEB(c,m)}$  ve  $v$  bir tamsayı olmak üzere

$$f_m(A^{-1}z) = v_\eta(L) \left( \frac{OBEB(c,m)}{m} (-cz + a) \right)^{1/2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{12}{n} \right) e \left( \frac{n^2}{24m} ((OBEB(c,m))^2 z + v OBEB(c,m)) \right)$$

dir.

- (2)  $f_m$ 'in  $r$  cusp yerindeki mertebesi

$$ord(f_m, r) = \frac{1}{24m} (OBEB(c,m))^2$$

olur.

**Sonuç 2.3.2. (Köhler, 2011: 36)**  $f$ , (2.1)'deki eta çarpımı ve  $OBEB(c, d) = 1$  olmak üzere  $r = -\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$  olsun. Bu takdirde  $f$ 'nin  $r$  cusp yerindeki mertebesi

$$ord(f, r) = \frac{1}{24} \sum_{m|N} \frac{(OBEB(c, m))^2}{m} a_m$$

dir.

**Tanım 2.3.3.** Eğer bir eta çarpımının tüm cusp noktalarındaki mertebeleri negatif olmayan bir sayı ise, yani her  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  için

$$ord(f, r) \geq 0$$

ise,  $f$  eta çarpımına analitik eta çarpımı denir.

**Teorem 2.3.4. (Köhler, 2011: 36)** (2.1) analitik eta çarpımları  $\Gamma_0(N)$  için bir modüler form olur. Bu çarpımlar cusp formdur ancak ve ancak tüm mertebeleri pozitifdir, yani her  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  için

$$ord(f, r) > 0$$

dır.

**Tanım 2.3.5. (Köhler, 2011: 36)** Yukarıdaki teoremdeki özellikteki eta çarpımları cuspidal eta çarpımları ve aksi durumda cuspidal olmayan eta çarpımları olarak tanımlanır.

#### 2.4. Analitik Eta Çarpımlarının Koni ve Simpleksleri

$\alpha_{cm}$  rasyonel sayılarını, bir  $A$  matrisini ve bir  $X$  sütun vektörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\alpha_{cm} = \frac{(OBEB(c, m))^2}{m}, A = A(N) = (\alpha_{cm})_{c, m}, X = (a_m)_m \in \mathbb{R}^{z(N)} \quad (2.5)$$

Burada  $N$ 'nin  $m$  ve  $c$  pozitif bölenleri keyfi alınmakla beraber sabit mertebelidir. Genellikle bölenler doğal mertebelerinde alınacaktır. Bu takdirde  $N$  seviyeli analitik eta çarpımı için koşul

$$A(N).X \geq 0 \quad (2.6)$$

olur ve cuspidal eta çarpımları  $A(N)X > 0$  ile karakterize edilir. Dikkat edilirse (2.6) bize lineer eşitsizliklerin sistemi  $\mathbb{R}^{z(N)}$ 'de sınırlayan hiper düzlemlerin hepsi orijinden geçecek şekildeki  $z(N)$  kapalı yarı uzayların bir kesişimini tanımlar. O halde bu sistem orijinde tepe noktasına sahip olan kapalı bir basit koniyi tanımlar. Bu koniyi  $K(N)$  ile gösterelim. Yani

$$K(N) = \{X \in \mathbb{R}^{\tau(N)} | A(N)X \geq 0\} \quad (2.7)$$

olur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 2.4.1. (Köhler, 2011: 37)** (2.1) eta çarpımı analitiktir ancak ve ancak bu çarpımın  $X = (a_m)_m$  üslerinin vektörü  $K(N)$  konisi üzerinde bir kafes noktasıdır. Bu çarpım cuspidaldır ancak ve ancak  $X, K(N)$ 'nin bir iç noktasıdır.

**Teorem 2.4.2. (Newman, 1956; Newman, 1959; Gordon ve Huges, 1993)**  $k = \frac{1}{2} \sum_{\delta|N} r_\delta \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$  Dedekind-eta çarpımları aşağıdaki özellikleri sağlasın:

$$\sum_{\delta|N} \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

ve

$$\sum_{\delta|N} \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

Bu durumda her  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\Gamma_0(N))$  için

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlar. Burada  $s := \prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$  olmak üzere  $\chi$  Dirichlet karakteri  $\chi(d) := \left(\frac{(-1)^k s}{d}\right)$  olarak tanımlanır.

$k$  bir pozitif tamsayı ve  $f(z)$  Teorem 2.4.2'nin koşullarını sağlayan bir Dedekind-eta çarpımı olsun. Kolayca görülebilir ki  $f(z)$ ,  $(\Gamma_0(N))$ 'nin tüm cusp yerlerinde analitik ise bu takdirde  $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi) (S_k(\Gamma_0(N), \chi))$  olur.

Dikkat edilirse  $\eta(z)$ ,  $\mathbb{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde analitik ve hiçbir zaman sıfır olmadığından  $f(z)$ 'nin bir modüler form ya da cusp form olması için cusp'lardaki mertebelerinin negatif olmayan (pozitif) olması yeterlidir. Aşağıdaki teorem bir eta çarpımının cusp yerlerindeki mertebelerini bilinen yerel değişkenler cinsinden belirlemek için gerekli kriteri verir.

**Teorem 2.4.3. (Biagioli, 1990: 276)**  $c, d$  ve  $N$ ,  $d|N$  ve  $(c, d) = 1$  özelliğindeki pozitif tamsayılar olsun. Eğer  $f(z)$ ,  $N$  için Teorem 2.4.2 koşullarını sağlayan bir Dedekind-eta çarpımı ise bu durumda  $f(z)$ 'nin  $\frac{c}{d}$  cusp yerindeki sıfırının mertebesi

$$\frac{N}{24} \sum_{\delta|N} \frac{(d, \delta)^2 r_\delta}{\left(d, \frac{N}{d}\right) d \delta}$$

olur.

**Örnek 2.4.4.**  $f(z)$  ve  $g(z)$  Dedekind-eta çarpımları sırasıyla

$$f(z) = \frac{\eta(5z)^5}{\eta(z)} = q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 2q^6 + \dots$$

$$g(z) = \eta(4z)^2 \eta(8z)^2 = q - 2q^5 - 3q^9 + \dots$$

olarak verilsin.

Teorem 2.4.2 ve Teorem 2.4.3 kullanılarak

$$f(z) \in M_2 \left( \Gamma_0(5), \left( \frac{\bullet}{5} \right) \right),$$

$$g(z) \in S_2(\Gamma_0(32))$$

olduğu görülür.

Öte yandan bu teoremler yardımıyla

$$\Delta(z) = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728} = \eta(z)^{24} \in S_{12}(\Gamma)$$

olarak elde edilir.

**Örnek 2.4.5.** Önceki bölümde tanımlanan ve 2 ağırlıklı, 4 seviyeli bir modüler form olan Eisenstein serisi Dedekind-eta çarpımı cinsinden ifade edilebilir. Gerçekten de

$$F(z) = \frac{\eta(4z)^8}{\eta(2z)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_1(2n+1) q^{2n+1} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

olur.

Eliptik eğrilerin aynı zamanda Diophantine üçlüleriyle de yakın ilişkisi vardır. Bu yöndeki bir çalışma (Topçu, vd., 2022)'de bulunabilir. Geçtiğimiz yüzyılın önemli sonuçlarından birisi olan Modülerite Teoremi her bir eliptik eğriye bir modüler form, her bir

modüler forma da bir eliptik eğri karşılık geldiğini ifade eder. Buradan ilham alınarak  $\Gamma$  modüler grubu üzerinde tanımlı her bir eliptik eğrinin, aslında belirli Dedekind-eta fonksiyonlarının rasyonel fonksiyonları cinsinden ifade edilebileceği düşünülebilir. Eisenstein serilerinin modüler form uzaylarını ürettiği hatırlanacak ve yukarıdaki Dedekind-eta çarpımı & Eisenstein serisi ilişkisi dikkate alınacak olursa, aslında sürpriz olmayan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 2.4.6. (Ono, 2004: 19)**  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  üzerindeki her modüler form,  $\eta(z)$ ,  $\eta(2z)$  ve  $\eta(4z)$ 'nin rasyonel fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

### 3. DEDEKIND-ETA ÇARPIMLARI VE HECKE EIGENFORMLAR

Bu bölümde tezin özgün kısmını oluşturan Hecke eigenformların Dedekind-eta çarpımları yardımıyla ifade edilmesi problemi ele alınacak ve problemle ilgili güncel sonuçlar incelenecektir.

Ardından çalışmanın temel sonucu ve ispatı verilecek olup, sonuç ve tartışma kısmında elde edilen çıktılar değerlendirilip hesaplama süresi analizi yapılacaktır.

#### 3.1. Dedekind-Eta Çarpımlarına Dair Güncel Sonuçlar

(Bhattacharya, 2017b)'de  $1/2$  ağırlıklı her bir analitik eta çarpımının aslında Zagier'in 14 ilkel analitik eta çarpımı listesindeki bazı eta çarpımlarının bir tamsayı ile yeniden ölçeklendirildiğini ifade eden Zagier'in sanısının (yüksek lisans öğrencisi Mersmann bunu ispatlamıştır) kısa bir ispatı verilmiştir.

Özel olarak  $1/2$  ağırlıklı herhangi bir  $f$  analitik eta çarpımı verildiğinde tüm  $n$ 'ler için bu sonuç yardımıyla  $f$ 'nin  $q$  açılımındaki  $q^n$  katsayıları bir kapalı formda ifade elde edilir.

**Tanım 3.1.1.** Eğer tüm  $z \in \mathbb{H}$  için  $f(z) = h(vz)$  olacak şekilde herhangi bir  $v \in \mathbb{N}$  doğal sayısı ve başka bir  $h$  eta çarpımı yoksa  $f$  eta çarpımına ilkel adı verilir.  $f = g \times h$  olacak şekilde  $f$ ,  $g$  ve  $h$ ,  $\Gamma_0(M)$  üzerinde sabitten farklı eta çarpımları olsun.

Yani bu eta çarpımlarının seviyeleri  $M$ 'yi bölsün. Bu durumda  $f$ 'ye  $\Gamma_0(M)$  üzerinde çarpanlarına ayrılabilir eta çarpımı denir.  $\Gamma_0(N)$  üzerinde çarpanlarına ayrılamayan  $N$  seviyeli bir  $f$  analitik eta çarpımına hemen hemen indirgenebilir eta çarpımı denir. Üstelik  $N$ 'nin herhangi bir  $M$  katı için  $\Gamma_0(M)$  üzerinde çarpanlarına ayrılamayan eta çarpımına ise indirgenemez eta çarpımı adı verilir.

**Tanım 3.1.2.** Hem ilkel hem de hemen hemen indirgenemez bir analitik eta çarpımına basit eta çarpımı denir.

**Uyarı 3.1.3.** Analitik eta çarpımlarının hemen hemen indirgenemezliği ile indirgenemezliği sanısal olarak birbirine denk ifadelerdir (Bhattacharya 2017a).

Zagier'in bu sanısını açmak gerekirse: herhangi bir ağırlık verildiğinde (tamsayı ya da yarım tamsayı) çarpımlarının var olduğu seviyeleri sınıflandırmak halen açık bir problemdir. Örneğin Zagier'in listesinde 1, 2, 4, 6 ve 12 seviyeleri için basit analitik eta çarpımları mevcutken, 8 seviyeli herhangi bir basit analitik eta çarpımı yoktur (Bhattacharya 2017b).

(Bhattacharya 2017a)'da verilen bir ağırlık için basit analitik eta çarpımlarının sonluluğu hakkında Zagier'in sanısı/ Mersmann'ın teoreminin basitleştirilmiş bir ispatı verilmiştir.

(Rouse ve Webb 2015)'te  $N$  seviyeli eta çarpımları tarafından üretilen  $\Gamma_0(N)$  için analitik modüler formların graded halkası için  $N$  seviyesinin belirlenmesi problemi çalışılmıştır. Buna ilave olarak bu makalede  $f(z)$  sonsuzda tamsayı fourier katsayılarına sahip olan ve aynı zamanda üst yarı düzlemde sıfır olmayan analitik bir modüler form ise bu takdirde  $f(z)$ 'nin bir eta çarpımının bir tamsayı katı olduğu ispatlanmıştır.

### 3.2. Ana Sonuçlar ve İspatları

Yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi özellikle Sato-Tate tarzı istatistiksel problemlerin çalışılması adına oldukça kritik bir problemdir. Literatürde Eisenstein serileri ve teta serilerinin Rankin-Cohen parantezlerini kullanarak elde edilen bir sonuç (İnam, vd., 2020)'de verilmiştir.

Daha genel bir sonuç için (İnam ve Wiese, 2022)'ye bakılabilir. Aynı probleme Dedekind-eta çarpımlarıyla yoluyla da yaklaşılabilir. Bu ise bu çalışmanın temel amacıdır. İlk olarak sonuçların daha iyi anlaşılması adına literatürde yer alan aşağıdaki sonuçları göz önüne alalım.

**Teorem 3.2.1 (Cohen ve Strömberg, 2017: 193)** Belli bir  $m \geq 1$  tamsayısı için  $\eta(mz) \in M_{1/2}(\Gamma_0(m))$  dir.

**Sonuç 3.2.2 (Cohen ve Strömberg, 2017: 193)**  $M := \text{OKEK}(m_1, m_2, \dots, m_r)$  olmak üzere  $\eta(m_1z)\eta(m_2z) \dots \eta(m_rz) = M_{r/2}(\Gamma_0(M))$  dir.

**Teorem 3.2.3 (Cohen ve Strömberg, 2017: 193)**  $F(z) = \prod_m \eta(mz)^{r_m}$  olsun.  $F \in M_k(\Gamma_0(N), \chi) \leftrightarrow \sum_m mr_m = 0 \pmod{24}$ .

Tüm bu hazırlıkların ardından çalışmanın temel sonucu verilebilir.

**Teorem 3.2.4 (İrez Aydın ve İnam, 2023)** Tablo 3.1'de yer alan Dedekind-eta çarpımları yanlarında belirtilen ağırlık, seviye ve karakterde birer Hecke eigenformdur.

**Tablo 3.1.** Hecke eigenform olan Dedekind-eta çarpımları

Ornek	Seviye	Ağırlık	Karakter	Eta Çarpımı	Ornek	Seviye	Ağırlık	Karakter	Eta Çarpımı
1)	576	1/2	12	$\eta(24z)$	26)	432	5/2	1	$\eta^3(3z)\eta(6z)\eta(9z)$
2)	1152	1/2	24	$\eta(48z)$	27)	144	5/2	12	$\eta^2(3z)\eta^3(6z)$
3)	176	3/2	44	$\eta^2(z)\eta(22z)$	28)	64	5/2	1	$\eta^4(4z)\eta(8z)$
4)	160	3/2	40	$\eta^2(2z)\eta(20z)$	29)	288	5/2	8	$\eta^3(4z)\eta^2(6z)$
5)	864	3/2	8	$\eta(2z)\eta(4z)\eta(18z)$	30)	144	7/2	1	$\eta^3(z)\eta(3z)\eta^3(6z)$
6)	448	3/2	28	$\eta(2z)\eta(8z)\eta(14z)$	31)	48	7/2	12	$\eta^2(z)\eta^2(2z)\eta^3(6z)$
7)	176	3/2	1	$\eta(2z)\eta^2(11z)$	32)	64	7/2	1	$\eta^4(2z)\eta^2(4z)\eta(8z)$
8)	432	3/2	1	$\eta^2(3z)\eta(18z)$	33)	48	7/2	1	$\eta^3(2z)\eta^2(3z)\eta^2(6z)$
9)	864	3/2	8	$\eta(3z)\eta(9z)\eta(12z)$	34)	32	7/2	8	$\eta^2(z)\eta^5(4z)$
10)	128	3/2	8	$\eta^2(4z)\eta(16z)$	35)	144	7/2	12	$\eta^3(4z)\eta^2(6z)$
11)	128	3/2	8	$\eta^3(16z)$	36)	48	9/2	12	$\eta^6(z)\eta^3(6z)$
12)	576	3/2	12	$\eta(4z)\eta(8z)\eta(12z)$	37)	32	9/2	8	$\eta^4(z)\eta^5(4z)$
13)	160	3/2	8	$\eta(4z)\eta^2(10z)$	38)	80	9/2	5	$\eta^3(z)\eta^3(2z)\eta^3(5z)$
14)	288	3/2	24	$\eta^2(6z)\eta(12z)$	39)	16	9/2	1	$\eta^2(z)\eta^3(2z)\eta^4(4z)$
15)	432	3/2	12	$\eta(6z)\eta^2(9z)$	40)	64	9/2	1	$\eta^8(z)\eta(8z)$
16)	64	3/2	1	$\eta^3(8z)$	41)	32	9/2	8	$\eta^6(2z)\eta^3(4z)$
17)	720	5/2	5	$\eta^3(z)\eta(6z)\eta(15z)$	42)	48	9/2	1	$\eta^3(2z)\eta^6(3z)$
18)	28	5/2	28	$\eta^2(z)\eta^2(4z)\eta(14z)$	43)	4	11/2	1	$\eta^2(z)\eta^7(2z)\eta^2(4z)$
19)	128	5/2	8	$\eta^4(2z)\eta(16z)$	44)	32	11/2	8	$\eta^{10}(2z)\eta(4z)$
20)	224	5/2	56	$\eta^3(2z)\eta(4z)\eta(14z)$	45)	48	13/2	12	$\eta^5(z)\eta^5(2z)\eta^3(3z)$
21)	96	5/2	8	$\eta^3(2z)\eta(6z)\eta(12z)$	46)	16	13/2	1	$\eta^2(z)\eta^{11}(2z)$
22)	288	5/2	24	$\eta^2(2z)\eta^2(4z)\eta(12z)$	47)	16	15/2	1	$\eta^6(z)\eta^9(2z)$
23)	16	5/2	8	$\eta^2(2z)\eta(4z)\eta^2(8z)$	48)	48	13/2	12	$\eta^5(z)\eta^5(2z)\eta^3(3z)$
24)	96	5/2	24	$\eta(2z)\eta(4z)\eta^3(6z)$	49)	16	13/2	1	$\eta^2(z)\eta^{11}(2z)$
25)	288	5/2	24	$\eta^4(3z)\eta(12z)$	50)	16	15/2	1	$\eta^6(z)\eta^9(2z)$

**İspat.** Bu sonucu ispatlamak için Soma Purkait'in basılmamış doktora tezinde yer alan aşağıdaki teorem kullanılacaktır.

**Teorem 3.2.5 (Purkait, 2012: 53)**  $k$  ve  $N$  pozitif tamsayılar,  $k \geq 3$  tek sayı ve  $4|N$  özelliğinde olsun.  $\chi$ ,  $\text{mod } N'$ 'de bir Dirichlet karakteri ve  $N' = N/2$  olarak alınsın. Diğer yandan

$$m = N'^2 \prod_{p|N'} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad R = \frac{(k-1)m}{12} - \frac{m-1}{N'}$$

sayıları tanımlansın.

Bu takdirde  $i \leq R$  için  $T_{i^2}$  Hecke operatörleri  $\mathbb{T}_{k/2}$ 'nin bir  $\mathbb{Z}[\zeta_{\varphi(N)}]$  modülü olarak  $S_{k/2}^\perp(N, \chi)$ 'ye bir kısıtlanmasını üretir. Özel olarak  $p \leq R$  özelliğindeki  $p$  asalları için  $T_{p^2}$  Hecke operatörlerinin kümesi bir cebir olarak üreteç kümesi olur. Üstelik  $f \in S_{k/2}(N, \chi)$  tüm Hecke operatörleri için bir eigenform ancak ve ancak  $p \leq R$  için bir Hecke eigenformdur önermesi doğrudur.

Ana sonucun ispatında Soma Purkait'in Sturm sınırının bir sonucu olarak elde ettiği Teorem 3.2.5 kullanılacaktır. Hecke eigenformların aslında vektör uzayları üzerinde bir lineer dönüşüm olan Hecke operatörlerinin özdeğerleri yardımıyla oluştuğu iyi bilinmektedir. Net olarak Hecke

eigenformlar tüm Hecke operatörlerinin etkisi altında bir özvektörden başka birşey değildir. Tamsayı ağırlıklı modüler formlar  $p$  asal olmak üzere  $T_p$  Hecke operatörleri mevcutken yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar üzerinde  $T_{p^2}$  Hecke operatörleri tanımlanmaktadır. Bu Hecke operatörleri Magma, Pari/GP ve Sage gibi yazılımlarda mevcut olan algoritmalar yardımıyla yazılacak olan kodlarla tanımlanabilir. Örneğin Sage 9.6 versiyonunda

```
def half_integral_weight_hecke_operator_on_basis(B,chi,k,p):
    Tp2B = [half_integral_weight_hecke_operator_on_qexp(f,chi,k,p) for f in B]
    precp = Tp2B[0].prec()
    Tp2B_mat = matrix([Tp2f.padded_list() for Tp2f in Tp2B])
    B_mat = matrix([f.padded_list()[:precp] for f in B])
    piv = B_mat.pivots()[-1]
    assert precp > piv
    Tp_mat = B_mat.solve_left(Tp2B_mat)
    assert all([sum([Tp_mat[j][i]*B[i] for i in range(len(B))]) ==
    Tp2B[j] for j in range(len(B))])
    return Tp_mat
def half_integral_weight_hecke_operator_on_qexp(f,chi,k,p):
    prec = f.prec()
    R = f.parent()
    q = R.0
    precp = prec // (p^2)
    Tp2f = O(q^(precp))
    for n in range(1,precp):
        bn = f[p^2*n] +
chi(p)*(-1)^(((k-1)*(p-1))/4)*kronecker_symbol(n,p)*p^((k-3)//2)*f[n]
        if n%(p^2) == 0:
            bn += chi(p^2)*p^(k-2)*f[n//(p^2)]
        Tp2f += bn*q^n
    return Tp2f
N = 64
chi = DirichletGroup(N).one()
k = 5
prec = 1000
```

```

B = half_integral_weight_modform_basis(chi,k,prec)
B_mat = matrix([f.padded_list()[:prec] for f in B])
piv = B_mat.pivots()[-1]
Tps = [half_integral_weight_hecke_operator_on_basis(B,chi,k,p) for p
in prime_range(sqrt(prec//piv))]
print prime_range(sqrt(prec//piv))
print Tps
ZZq = B[0].parent()
q = ZZq.0
eta = sage.modular.etaproducts.qexp_eta(ZZq,prec)
etaf = q*eta(q^4)^4*eta(q^8) + O(q^prec)
B_mat = matrix([f.padded_list()[:prec] for f in B])
B_mat.solve_left(matrix(etaf.padded_list()))
for p in prime_range(sqrt(prec)):
    print p, half_integral_weight_hecke_operator_on_qexp(etaf,chi,k,p)/etaf

```

Tablo 3.1’de yer alan modüler formların bir Hecke eigenform olduğunu gösterebilmek için Teorem 3.2.5’te yer alan  $R$  sayıları hesaplanıp  $p \leq R$  özelliğindeki tüm asallar için (ki örneklerde bu sayı büyük bir sayı çıkmamaktadır)  $T_{p^2}$  Hecke operatörlerine göre Hecke eigenform olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için aşağıdaki kod kullanılabilir.

```

sage: Np = N//2
sage: m = (Np)*prod([1-1/p^2 for p in Np.prime_divisors()])
sage: m
24
sage: R = (k-1)*m/12 - (m-1)/(Np)
sage: floor(R)
7

```

Magma’daki Fast Fourier Transform (FFT) özelliği nedeniyle aşağıdaki kod Dedekind-eta çarpımlarının aslında bir Hecke eigenform olduğunu belirlemeye yarar. Bu kodda ağırlık, seviye ve karakter girdileri değiştirilmesi gerekir.

```

function HalfIntegralHeckeOperator(f,chi,k,p);
    prec := AbsolutePrecision(f);
    R<q> := Parent(f);

```

```

prec := prec div (p^2);
Tp2f := O(q^prec);
for n := 1 to prec-1 do
  bn := Coefficient(f,p^2*n) + chi(p)*(-1)^(((k-1)*(p-1)) div 4)*
    KroneckerSymbol(n,p)*p^((k-3) div 2)*Coefficient(f,n);
  if n mod (p^2) eq 0 then
    bn += chi(p^2)*p^(k-2)*Coefficient(f, n div (p^2));
  end if;
  Tp2f += bn*q^n;
end for;
return Tp2f;
end function;

function HalfIntegralWeightHeckeOperatorOnBasis(B,chi,k,p);
  Tp2B := [HalfIntegralHeckeOperator(f,chi,k,p) : f in B];
  prec := AbsolutePrecision(Tp2B[1]);
  Tp2B_mat := Matrix(Rationals(),[AbsEltseq(Tp2f) : Tp2f in Tp2B]);
  B_mat := Matrix(Rationals(),[AbsEltseq(f)[1..prec] : f in B]);
  Tp_mat := Solution(B_mat, Tp2B_mat);
  assert &and([IsWeaklyZero(&+([Tp_mat[j][i]*B[i] : i in
[1..#B]])-Tp2B[j]) : j in [1..#B]]);
  return Tp_mat;
end function;

N := 64;
chi := One(DirichletGroup(N));
k := 5;
prec := 4000;
Sk := CuspidalSubspace(ModularForms(chi,k/2));
B := qExpansionBasis(Sk,prec);
B_mat := Matrix([AbsEltseq(f) : f in B]);
piv := PivotColumn(EchelonForm(B_mat),Nrows(B_mat));
Tps := [HalfIntegralWeightHeckeOperatorOnBasis(B,chi,k,p) : p in
PrimesUpTo(Floor(Sqrt(prec/(piv-1))))];
PrimesUpTo(Floor(Sqrt(prec/(piv-1))))];

```

Tps;

assert &and[T\*U-U\*T eq 0 : T,U in Tps];

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Alternatif ve daha hızlı bir metot olarak, elde ettiğimiz Dedekind eta çarpımlarının yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenform olduğunu göstermek için “Shimura lift” kullanılabilir (Shimura, 1973). Her içinde tamkare bulunmayan  $t$  tamsayısı için, lineer bir dönüşüm vardır:

$$Sh_t : S_{\frac{k}{2}}(N, \chi) \rightarrow S_{(k-1)}(N', \chi^2)$$

Hecke eşdeğişmezi olan  $q$ -açılımlarının terimleri

$$Sh_t(T_{p^2}f) = T_p(Sh_t(f))$$

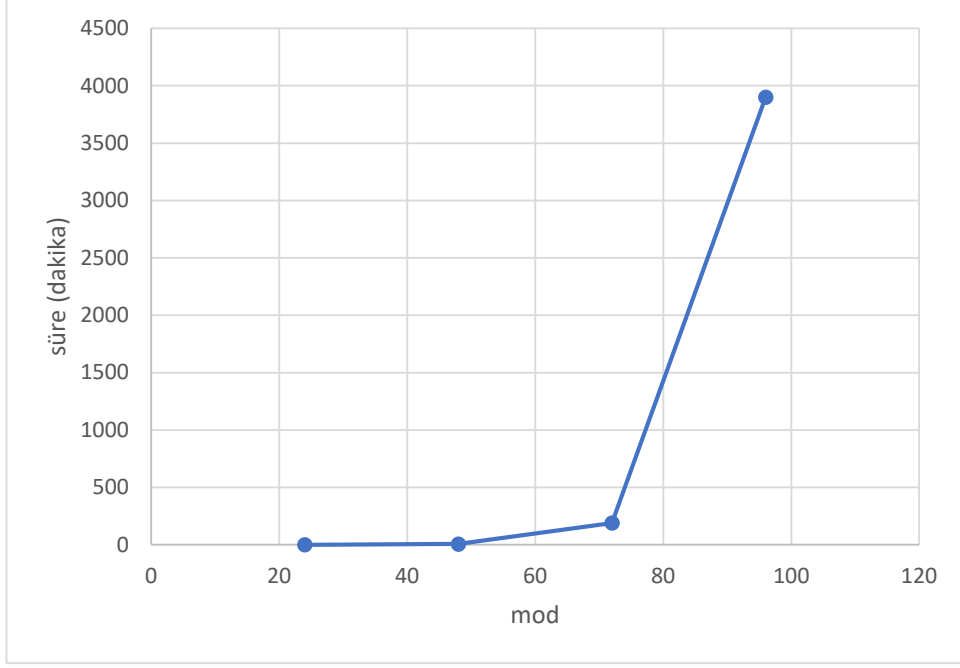
şeklindeir.

Yani  $t$ 'ler için Shimura lifti hesaplırsak, sıfırdan farklı bir şey elde ederiz. O zaman  $f$ 'in bir Hecke eigenform olduğunu,  $Sh_t(f)$ 'nin bir eigenform olduğunu doğrulayarak gösterebiliriz.  $k/2=5/2$  için,  $k=5-l=4$  olur. Böylece literatürde iyi bilinen modüler sembollerini kullanarak, tamsayı ağırlıktaki iyi bilinen uygulamalar kullanılabilir. Bu daha hızlı olur ve sadece Hecke eigenformların listesine bakabiliriz.

### 3.3. Sonuç ve Tartışma

Teorem 3.2.3 aslında bir Dedekind-eta çarpımının hangi şartlarda bir modüler form olduğunu belirlemektedir. Ardından Soma Purkait'in sonucu kullanılarak Magma ya da Sage yardımıyla bu modüler formlar arasında Hecke eigenform olanlar ayıklanabilir. 24'ün katları alınarak daha yüksek ağırlık ve seviyelere ulaşılabilir, ancak sayılar büyüdükçe parçalanış sayısı da büyüyeceği için bilgisayardaki hesaplama süresi üstel şekilde artabilir. Grafik 3.1'de bu durum açıkça görülmektedir. Alternatif bir ispat olarak, elde edilen yarım tamsayı ağırlıklı modüler formun Shimura yükseltmesi alınarak tamsayı ağırlıkta bir Hecke eigenform olup olmadığı incelenebilir. Bu ise tezin bir açık problemi olarak doktora sonrası çalışmalara ayrılmıştır.

Bu değerleri hesaplayabilmemiz için geçen süreleri yaklaşık olarak dakika cinsinden aşağıdaki tabloda görebiliriz.



**Grafik 3.1.** Hesaplama süreleri

## KAYNAKÇA

- Bhattacharya, S.** (2017). Holomorphic eta quotients of weight  $1/2$ . *Advances in Mathematics*, 320, 1185-1200.
- Bhattacharya, S.** (2017). Finiteness of simple holomorphic eta quotients of a given weight. *Advances in Mathematics*, 308, 879-895.
- Biagioli, A. J. F.** (1989). A proof of some identities of Ramanujan using modular forms, *Glasgow Math. J.*, 3, 271-295
- Cohen, H.** (1975). Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. *Math. Ann.*, 217, 271-285
- Cohen, H., & Oesterlè, J.** (1977). Dimensions des espaces de formes modulaires. *Springer Lect. Notes*, 627, 69-78.
- Cohen, H., & Strömberg F.** (2017). *Modular Forms: A Classical Approach*, The United States of America: American Mathematical Society.
- Gordon, B., & Huges, K.** (1993). Multiplicative properties of  $\eta$ -products II. A tribute to Emil Grosswald: Number Theory and related analysis. *Cont. Math. Of the Amer. Math. Soc.*, 143, 415-430.
- Inam, I., & Wiese, G.** (2022). Fast computation of half-integral weight modular forms. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 52(4), 1395-1401.
- Irez Aydın, B., & Inam, I.**, (2023), On The Hecke Eigenforms of Half-Integral Weight and Dedekind-Eta Products. Önmakale, arXiv:2301.08461, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.08461>
- Inam, İ. vd.** (2020). Rankin-Cohen Parantezi Yardımıyla Elde Edilen Hecke Eigenform Örnekleri, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(2), 772-778.
- Koblitz, N.** (1984). *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (1.Basım). New York: Springer –Verlag.
- Köhler, G.**, (2011). *Eta Products and Theta Series Identities*, Heidelberg:Springer.
- Newman, M.**, (1956). Construction and application of a certain class of modular functions II. *Proc. London Math. Soc.* (3), 7, 334-350
- Newman, M.**, (1959). Construction and application of a certain class of modular functions. *Proc. London Math. Soc.* (3), 9, 373-387.

**Ono, K.** (2004). *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and  $q$ -series*. The United States of America: American Mathematical Society.

**Purkait, S.** (2012). Eigenforms of half-integral weight. PhD Thesis. University of Warwick.

**Rouse, J., & Webb, J. J.** (2015). On spaces of modular forms spanned by eta-quotients. *Advances in Mathematics*, 272, 200-224.

**Serre, J.-P., & Stark, H.** (1977). Modular forms of weight  $\frac{1}{2}$ . *Springer Lect. Notes*, 627, 27-67.

**Shimura, G.** (1973). On Modular Forms of Half-Integral Weight. *Annals of Math.*, 97, 440-481.

**Topçu, S., Irez Aydın, B., & Inam, I.** (2022). An Example of an Elliptic Curve with High Rank Induced by Rational Diophantine Triples. *International Journal of Advanced Multidisciplinary Research and Studies*, 2(5), 430-431

## **EKLER**

## EK 1) ÖRNEKLERİ VEREN PARI/GP HESAPLAMA KODU

VStomat(V)=

```
{  
my(S=Set(V),M=Mat([],m,rm);  
for(i=1,#S,  
m=S[i]; rm=0;  
for(j=1,#V,if(V[j]==m,rm++));  
M=concat(M,Mat([m,rm]~))  
);  
return (M~);  
}
```

etaprod(V,L)=

```
{  
my(P=x,T,V1,V2);  
if (type(V)=="t_VECSMALL",V=VStomat(V));  
V1=V[,1];V2=V[,2];  
for (i=1,#V1,P*=eta(x^V1[i]+O(x^(L+1)))^V2[i]);  
P;  
}
```

tschecke(V,L=100)=

```
{  
my(E,P,Pn);  
P=etaprod(V,L);
```

```

for(n=2,sqrtint(L),
Pn=polcoeff(P,n);
for(m=n+1,L\n,
if(gcd(m,n)==1,
if (polcoeff(P,m)*Pn!=polcoeff(P,m*n), return(0))
)
)
);
return (1);
}
tsthecke2(V,L)=
{
P=etaprod(V,L);
forsquarefree(tt=1,30,
t=tt[1]; at=polcoeff(P,t);
if (at,
limn=sqrtint(sqrtint(L\t));
for (n=2,limn,
Pn=polcoeff(P,t*n^2);
for(m=n+1,sqrtint(L\t*n^2)),
if(gcd(m,n)==1,
if (polcoeff(P,t*m^2)*Pn!=at*polcoeff(P,t*m^2*n^2), return(0))
)
)
)

```

```

)
),
for (n=2,sqrtint(L\t),if(polcoeff(P,t*n^2),return(0)))
)
);
return (1);
}
dohecke2(=
{
my(VH2=[]);
forpart(V=24,
if((#V)%2==1,
if(tshecke2(V,1000),
if(tshecke2(V,3000),
if(tshecke2(V,10000),
VH2=concat(VH2,[VStomat(V)])
)
)
)
)
);
for(i=1,#VH2,
print(i," ",VH2[i],", ",mfparams(mffrometaquo(VH2[i]))[1..3])

```

```
);
return (VH2);
}
VH2=dohecke2();
```

## EK 2) BAZI ÖRNEKLERİN TABAN VEKTÖRLERİ CİNSİNDEN ELDE EDİLMESİ

16. Sonuç İçin:

```
A=mfinit([28, 5/2, 28],1);
```

```
mfdim(A)
```

4

```
C=mbasis(A);
```

```
mfcoefs(C[1],10)
```

[0, 1, 0, 0, 0, -2, 4, -1, -6, -3, -4]

```
mfcoefs(C[2],10)
```

[0, 0, 1, 0, 0, -2, 2, -1, -2, -2, 0]

```
mfcoefs(C[3],10)
```

[0, 0, 0, 1, 0, -1, 2, -1, -4, -2, 0]

```
mfcoefs(C[4],10)
```

[0, 0, 0, 0, 1, -2, 4, -1, -3, -4, 0]

```
F=mflinear([C[1],C[2],C[3],C[4]],[1,-2,-1,2]);
```

```
Ser(mfcoefs(F,10),q)
```

$q - 2*q^2 - q^3 + 2*q^4 - q^5 + 6*q^6 - 4*q^8 - 5*q^9 - 4*q^{10} + O(q^{11})$

```
B=mffrometaquo([1, 2; 4, 2; 14, 1]);
```

```
Ser(mfcoefs(B,10),q)
```

$$q - 2*q^2 - q^3 + 2*q^4 - q^5 + 6*q^6 - 4*q^8 - 5*q^9 - 4*q^{10} + O(q^{11})$$

45. Sonuç İçin:

A=mfinit([16, 15/2, 1],1);

mfdim(A)

10

C=mbasis(A);

mfcoefs(C[1],10)

[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[2],10)

[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[3],10)

[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[4],10)

[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[5],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[6],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]

mfcoefs(C[7],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]

mfcoefs(C[8],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]

mfcoefs(C[9],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]

mfcoefs(C[10],10)

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

F=mflinear([C[1],C[2],C[3],C[4],C[5],C[6],C[7],C[8],C[9],C[10]],[1,-6,0,64,-84,-  
252,512,384,-1107,-28]);

Ser(mfcoefs(F,10),q)

$q - 6q^2 + 64q^4 - 84q^5 - 252q^6 + 512q^7 + 384q^8 - 1107q^9 - 28q^{10} + O(q^{11})$

B=mffrometaquo([1, 6; 2, 9]);

Ser(mfcoefs(B,10),q)

$q - 6q^2 + 64q^4 - 84q^5 - 252q^6 + 512q^7 + 384q^8 - 1107q^9 - 28q^{10} + O(q^{11})$

### **EK 3) DEDEKIND-ETA ÇARPIMLARININ q-AÇILIMLARI**

1)

A=mfinit([576,1/2,12],1);

mfsturm(A)

1

B=mffrometaquo(Mat([24,1]));

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - q^{25} - q^{49} + q^{121} + q^{169} + O(q^{201})$

2)

A=mfinit([1152,1/2,24],1);

mfsturm(A)

2

B=mffrometaquo(Mat([48,1]));

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$$q^2 - q^{50} - q^{98} + O(q^{201})$$

**3)**

$$A = \text{mfinit}([1728, 1/2, 1], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

3

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q^3 - q^{75} - q^{147} + O(q^{201})$$

**4)**

$$A = \text{mfinit}([2304, 1/2, 12], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

4

$$B = \text{mffrometaquo}(\text{Mat}([96, 1]));$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\% 15 = q^4 - q^{100} - q^{196} + O(q^{201})$$

**5)**

$$A = \text{mfinit}([128, 3/2, 8], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

5

$$B = \text{mffrometaquo}(\text{Mat}([16, 3]));$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q^2 - 3q^{18} + 5q^{50} - 7q^{98} + 9q^{162} + O(q^{201})$$

**6)**

$$A = \text{mfinit}([256, 3/2, 1], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

17

$$B = \text{mffrometaquo}(\text{Mat}([32, 3]));$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q^4 - 3q^{36} + 5q^{100} - 7q^{196} + O(q^{201})$$

7)

$$A = \text{mfinit}([176, 3/2, 44], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

8

$$B = \text{mfmetaquo}([1, 2; 22, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} & q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} + 2q^{14} + 3q^{15} - \\ & 2q^{16} + 2q^{17} - 2q^{20} - 2q^{21} - q^{23} - 2q^{26} + q^{27} + 2q^{30} + 3q^{31} + 4q^{32} - \\ & q^{33} + 2q^{34} - 2q^{35} - 4q^{36} - q^{37} + 2q^{38} - 4q^{39} - 4q^{41} + 2q^{42} + 2q^{43} + \\ & 2q^{46} + 2q^{47} - 2q^{48} - q^{49} - 4q^{50} + 6q^{51} + 2q^{53} - 2q^{54} - q^{55} + 4q^{57} - \\ & 5q^{59} - 2q^{62} + 4q^{63} + 4q^{65} - 5q^{67} + 4q^{68} + q^{69} - 2q^{70} - 5q^{71} - 2q^{74} - \\ & 2q^{75} - 6q^{78} + 2q^{79} + 6q^{80} - q^{81} + 2q^{82} + 2q^{83} + 4q^{84} + 2q^{85} + \\ & 4q^{86} - 4q^{87} + 3q^{89} + 4q^{90} - q^{93} - 4q^{94} - 4q^{95} - 4q^{96} - 3q^{97} + 2q^{98} - \\ & 2q^{101} - 6q^{102} - 2q^{103} - 2q^{105} + 4q^{106} + 2q^{107} + 2q^{109} + 7q^{111} - \\ & 4q^{112} - q^{113} + 6q^{114} + 5q^{115} - 2q^{118} + 4q^{119} + q^{121} - 4q^{123} + q^{125} + \\ & 4q^{127} - 8q^{128} + 2q^{129} - 2q^{130} - 2q^{131} - 2q^{132} - 2q^{133} - 6q^{134} - \\ & 3q^{135} - q^{137} + 6q^{138} + 2q^{139} - 2q^{141} + 2q^{142} + 4q^{144} - 4q^{145} + \\ & 2q^{146} + 3q^{147} + 2q^{148} - 2q^{149} - 2q^{151} + 2q^{154} + q^{155} - q^{157} + 4q^{158} \\ & + 4q^{160} - 2q^{161} + 6q^{162} - 4q^{163} - 8q^{164} + q^{165} + 4q^{166} + 4q^{167} + \\ & 5q^{169} - 6q^{170} - 2q^{173} - 8q^{174} - 4q^{175} + 2q^{176} - 7q^{177} - 2q^{178} + \\ & 5q^{179} - q^{181} + 4q^{182} - 4q^{183} + 3q^{185} - 2q^{186} + 2q^{189} + 2q^{190} + \\ & 5q^{191} + 4q^{192} + 4q^{193} - 2q^{194} - 8q^{195} - 2q^{196} + 2q^{197} + O(q^{201}) \end{aligned}$$

8)

$$A = \text{mfinit}([160, 3/2, 40], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

7

$$B = \text{mfmetaquo}([2, 2; 20, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} & q - 2q^3 - q^5 + 2q^7 + q^9 + 2q^{11} - 2q^{13} - 2q^{17} - 2q^{19} + 2q^{23} + q^{25} + \\ & 2q^{29} - 4q^{31} + 4q^{33} + 2q^{37} - 4q^{41} + 2q^{43} + q^{45} - 6q^{47} - 5q^{49} + 2q^{53} \\ & + 2q^{55} + 6q^{59} + 2q^{61} + 2q^{63} + 2q^{67} - 4q^{69} - 2q^{73} - 2q^{75} - 3q^{81} - \\ & 2q^{83} + 4q^{89} - 4q^{93} - 2q^{95} + 6q^{97} - 2q^{99} + 6q^{101} - 2q^{103} - 2q^{107} + \\ & 2q^{109} + 8q^{111} - 2q^{113} - 2q^{117} - 4q^{119} + 3q^{121} - 4q^{123} - q^{125} + 2q^{127} \\ & + 4q^{129} - 2q^{131} - 4q^{133} - 2q^{137} - 2q^{139} - 4q^{141} - 2q^{145} + 6q^{147} - \end{aligned}$$

$$2*q^{149} + 2*q^{153} - 2*q^{157} + 8*q^{159} + 4*q^{161} + 2*q^{163} + 6*q^{167} - 3*q^{169} - 2*q^{171} + 6*q^{173} + 2*q^{175} - 4*q^{177} - 2*q^{179} - 6*q^{181} - 4*q^{183} - 8*q^{187} - 4*q^{191} + 2*q^{193} + 4*q^{195} - 2*q^{197} - 4*q^{199} + O(q^{201})$$

9)

$$A = \text{mfinit}([864, 3/2, 8], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

79

$$B = \text{mffrometaquo}([2, 1; 4, 1; 18, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - q^3 - 2*q^5 + q^7 + 2*q^{11} + q^{13} - 3*q^{19} + 2*q^{21} - 3*q^{25} - 2*q^{31} + 2*q^{35} + q^{37} + 2*q^{39} + 4*q^{41} + 2*q^{43} - 4*q^{47} - 2*q^{49} - 2*q^{53} + 2*q^{55} - 4*q^{57} - q^{61} + 3*q^{67} - 4*q^{71} + 3*q^{73} - q^{75} + 2*q^{77} + 3*q^{79} - 2*q^{83} + 4*q^{85} + 4*q^{89} - 3*q^{91} - 2*q^{93} + q^{97} - 2*q^{101} + q^{103} - 2*q^{107} - 6*q^{109} + 2*q^{111} - 4*q^{113} - 2*q^{115} + 4*q^{119} - 5*q^{121} + 2*q^{125} + 4*q^{127} + 4*q^{129} + 2*q^{131} + q^{133} + 4*q^{137} - 3*q^{139} + 4*q^{143} + 2*q^{145} + q^{147} - 2*q^{149} - 9*q^{151} + 2*q^{155} - 4*q^{161} + q^{163} + 4*q^{165} - 4*q^{167} + 2*q^{169} + 2*q^{173} - 5*q^{175} + 2*q^{179} - 3*q^{181} - 6*q^{183} - 4*q^{185} + 2*q^{187} + 4*q^{191} + 3*q^{193} - 2*q^{197} + q^{199} + O(q^{201})$$

10)

$$A = \text{mfinit}([448, 3/2, 28], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

31

$$B = \text{mffrometaquo}([2, 1; 8, 1; 14, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - q^3 - q^5 - q^9 + 2*q^{11} + q^{13} + q^{19} + q^{21} - 3*q^{25} - 2*q^{27} - 2*q^{29} + 2*q^{33} - q^{35} + 2*q^{37} + 2*q^{41} - 2*q^{43} + 3*q^{45} - q^{49} + 2*q^{51} + 2*q^{57} + q^{59} - 5*q^{61} - 2*q^{65} - 4*q^{69} + q^{75} - q^{81} + q^{83} + 2*q^{85} + 4*q^{89} + q^{91} + 2*q^{99} - q^{101} - 4*q^{107} + 6*q^{109} - 2*q^{113} - 2*q^{115} - q^{117} - q^{121} - 2*q^{123} + 4*q^{125} - 6*q^{129} - 5*q^{131} + q^{133} + 3*q^{139} - 4*q^{141} + 4*q^{145} + q^{147} + 4*q^{149} + 4*q^{155} - q^{157} + 2*q^{163} + q^{169} + 3*q^{171} - q^{173} + 2*q^{177} - 4*q^{179} - 7*q^{181} + 2*q^{187} - 2*q^{189} + 2*q^{193} + 2*q^{195} + O(q^{201})$$

11)

$$A = \text{mfinit}([176, 3/2, 1], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

15

$B = \text{mffrometaquo}([2,1;11,2]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - q^3 - q^5 + q^{11} - 2q^{12} + 2q^{14} + q^{15} + 2q^{16} - 2q^{22} - q^{23} - 2q^{26} + q^{27} -$   
 $q^{31} - q^{33} + 2q^{34} - q^{37} - 2q^{38} + 2q^{42} + 2q^{44} + 2q^{45} + 2q^{48} - q^{49} +$   
 $2q^{53} + q^{55} - 4q^{58} + q^{59} - 2q^{60} - 4q^{64} + 2q^{66} - 3q^{67} + q^{69} + 2q^{70} +$   
 $q^{71} - 2q^{75} - 2q^{77} + 2q^{78} - 2q^{80} - 3q^{81} + 2q^{82} - q^{89} + 4q^{91} + 2q^{92} +$   
 $3q^{93} + 3q^{97} - 2q^{99} + 2q^{102} + 2q^{108} - 2q^{110} - q^{111} + q^{113} - 6q^{114} -$   
 $q^{115} + q^{121} + 2q^{124} - q^{125} - 4q^{126} + 2q^{130} - 2q^{133} - q^{135} + q^{137} -$   
 $4q^{141} - 2q^{146} + 3q^{147} + 2q^{154} + 3q^{155} - 3q^{157} + 4q^{158} + 2q^{163} +$   
 $3q^{165} + 3q^{169} + 6q^{170} - 4q^{174} - 2q^{176} + 3q^{177} - 5q^{179} - 5q^{181} -$   
 $3q^{185} + 2q^{187} + 2q^{190} - q^{191} + 2q^{199} + O(q^{201})$

**12)**

$A = \text{mfinit}([432,3/2,1],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

34

$B = \text{mffrometaquo}([3,2;18,1]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 2q^4 - q^7 + 2q^{10} + q^{13} + 2q^{16} - 3q^{19} + 2q^{22} - q^{25} - 4q^{28} - 2q^{34} +$   
 $q^{37} + 4q^{40} + 6q^{43} - 2q^{46} - 2q^{52} + 2q^{55} - 4q^{58} - 3q^{61} + 4q^{64} - 3q^{67} -$   
 $2q^{70} - q^{73} + q^{79} + 4q^{82} - 4q^{85} + 4q^{88} + 3q^{91} + 2q^{94} - q^{97} + 2q^{100} +$   
 $q^{103} - 2q^{112} - 6q^{115} - 6q^{118} + q^{121} - 2q^{127} - 2q^{130} + 5q^{133} - 4q^{136} +$   
 $9q^{139} + 4q^{142} - 2q^{145} - 2q^{148} - q^{151} + 2q^{154} + 6q^{157} - 4q^{160} - 3q^{163}$   
 $+ 4q^{166} + 4q^{169} - q^{175} + 2q^{178} - q^{181} - 4q^{184} - 6q^{187} - 2q^{190} - q^{193} -$   
 $3q^{199} + O(q^{201})$

**13)**

$A = \text{mfinit}([864,3/2,8],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

79

$B = \text{mffrometaquo}([3,1;9,1;12,1]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - q^4 - q^7 - q^{10} + 3q^{16} + 3q^{22} - 2q^{25} - q^{28} + q^{31} - 2q^{34} - 2q^{37} - 3q^{40}$   
 $+ 2q^{43} + 3q^{55} + 4q^{61} + 3q^{64} - 2q^{67} - 3q^{70} + q^{73} - 2q^{79} + 2q^{82} -$

$$3q^{88} - 6q^{91} - q^{97} + 2q^{100} - 2q^{103} + 3q^{106} - 2q^{109} + 3q^{112} + 4q^{115} + 2q^{121} + q^{124} - q^{127} + 2q^{130} + 2q^{133} - 6q^{136} + 4q^{139} + 2q^{145} + 2q^{148} - 3q^{151} - q^{154} - 4q^{157} - 3q^{160} + 2q^{163} - 9q^{166} - 3q^{169} + 2q^{172} + 4q^{175} + 2q^{187} - q^{193} + 7q^{199} + O(q^{201})$$

**14)**

$$A = \text{mfinit}([128, 3/2, 8], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

5

$$B = \text{mfmetaquo}([4, 2; 16, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - 2q^5 - q^9 + 2q^{13} + 4q^{21} - q^{25} - 2q^{29} - 4q^{33} - 2q^{37} + 4q^{41} - 2q^{45} + q^{49} + 2q^{53} + 4q^{57} - 2q^{61} + 4q^{65} - 4q^{73} - 3q^{81} - 4q^{85} - 4q^{89} + 4q^{93} + 2q^{101} + 6q^{109} - 2q^{117} - q^{121} + 4q^{125} + 4q^{129} + 4q^{133} - 4q^{137} - 8q^{141} + 4q^{145} - 6q^{149} - 2q^{157} - 8q^{161} + 7q^{169} - 2q^{173} + 4q^{177} - 2q^{181} + 4q^{185} + 6q^{197} + O(q^{201})$$

**15)**

$$A = \text{mfinit}([576, 3/2, 12], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

73

$$B = \text{mfmetaquo}([4, 1; 8, 1; 12, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - q^5 - 2q^9 + q^{17} + 4q^{21} - q^{25} + q^{29} - 4q^{37} + q^{41} - 4q^{45} - q^{49} - q^{53} + 4q^{57} + 4q^{61} - 2q^{65} + 4q^{73} + 2q^{77} - 2q^{81} + 4q^{85} - 3q^{89} - 4q^{93} - 4q^{97} - q^{101} - q^{113} - 3q^{121} + 2q^{125} + 4q^{129} + 3q^{137} + 4q^{145} + q^{149} + 4q^{153} - 4q^{157} + 2q^{161} - 3q^{169} - q^{173} - 8q^{181} - 2q^{185} + 4q^{189} + q^{197} + O(q^{201})$$

**16)**

$$A = \text{mfinit}([160, 3/2, 8], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

12

$$B = \text{mfmetaquo}([4, 1; 10, 2]);$$

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - q^5 - q^9 - 2q^{11} + 2q^{15} + 2q^{19} + q^{25} + 2q^{29} - 2q^{35} - 4q^{39} - q^{45} - 3q^{49} + 4q^{51} - 2q^{55} + 2q^{59} - 2q^{61} + 2q^{65} + 4q^{69} + 4q^{71} - 3q^{81} + 2q^{85} - 4q^{91} + 2q^{95} - 2q^{99} - 2q^{101} - 2q^{109} - 4q^{111} - 2q^{115} + 3q^{121} - q^{125} + 4q^{129} + 2q^{131} + 2q^{139} + 4q^{141} - 2q^{145} - 6q^{149} + 4q^{151} + 4q^{155} + 4q^{159} + 4q^{161} - 4q^{165} - q^{169} - 2q^{171} - 6q^{179} + 2q^{181} - 2q^{185} - 8q^{191} + 4q^{199} + O(q^{201})$

**17)**

A=mfinit([288,3/2,24],1);

mfsturm(A)

23

B=mffrometaquo([6,2;12,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$\%74 = q - 2q^7 - 2q^{13} + 4q^{19} + q^{25} + 2q^{31} - 2q^{37} - 4q^{43} - q^{49} - 4q^{55} + 6q^{61} + 6q^{79} + 4q^{85} - 4q^{91} - 4q^{97} + 2q^{103} - 6q^{109} - 5q^{121} + 2q^{127} + 4q^{145} + 2q^{151} + 6q^{157} + 4q^{163} - q^{169} - 6q^{175} + 2q^{181} + 4q^{193} - 6q^{199} + O(q^{201})$

**18)**

A=mfinit([432,3/2,12],1);

mfsturm(A)

49

B=mffrometaquo([6,1;9,2]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - q^7 - 2q^{10} - q^{13} + 2q^{16} - q^{19} + 2q^{22} + q^{25} + 2q^{28} + 2q^{31} - 2q^{34} + q^{37} - 4q^{40} + 2q^{46} - 2q^{49} - 4q^{52} - 2q^{55} + q^{61} + 3q^{67} + 2q^{70} - 3q^{73} + 2q^{76} + 3q^{79} + 4q^{88} + q^{91} + 2q^{94} - 3q^{97} - 3q^{103} - 2q^{112} - 2q^{115} - 2q^{118} + q^{121} - 4q^{124} + 4q^{127} - 2q^{130} - q^{133} - 4q^{136} - 3q^{139} + 6q^{145} + 4q^{148} - 3q^{151} + 2q^{154} + 2q^{157} + 4q^{160} + q^{163} - 4q^{166} + 4q^{169} + q^{175} + 2q^{178} - 3q^{181} + 4q^{184} + 2q^{187} - 2q^{190} + 3q^{193} - 3q^{199} + O(q^{201})$

**19)**

A=mfinit([64,3/2,1],1);

mfsturm(A)

1

B=mffrometaquo(Mat([8,3]));

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 3q^9 + 5q^{25} - 7q^{49} + 9q^{81} - 11q^{121} + 13q^{169} + O(q^{201})$

**20)**

A=mfinit([720,5/2,5],1);

mfsturm(A)

235

B=mffrometaquo([1,3;6,1;15,1]);

Ser(mfcoefs(B,300),q)

$q - 3q^2 + 5q^4 - 8q^7 + 3q^8 - 5q^{10} + 9q^{11} + 6q^{13} + 3q^{14} - 17q^{16} - 6q^{17} + 2q^{19} + 32q^{22} - 12q^{23} + 5q^{25} - 9q^{26} - 8q^{28} - 18q^{29} + 16q^{31} + 9q^{32} - 20q^{34} + 15q^{35} - 6q^{37} + 6q^{38} + 5q^{40} + 15q^{41} - 20q^{43} + 9q^{44} - 10q^{46} + 12q^{47} - 23q^{49} - 15q^{50} - 2q^{52} + 18q^{53} - 3q^{56} + 26q^{58} + 3q^{59} + 24q^{61} - 18q^{62} + 45q^{64} - 15q^{65} - 48q^{67} - 30q^{68} - 60q^{71} + 30q^{73} + 21q^{74} + 2q^{76} + 18q^{77} + 88q^{79} - 34q^{82} + 6q^{83} - 30q^{85} + 24q^{86} - 32q^{88} + 15q^{89} - 18q^{91} - 12q^{92} - 96q^{94} + 14q^{97} + 69q^{98} + 25q^{100} - 16q^{103} + 9q^{104} + 92q^{106} + 18q^{107} - 72q^{109} + 15q^{110} - 24q^{112} - 36q^{113} + 20q^{115} + 6q^{116} - 12q^{118} - 12q^{119} - 61q^{121} - 12q^{122} + 16q^{124} + 128q^{127} - 69q^{128} + 15q^{131} + 48q^{133} - 102q^{134} + 20q^{136} + 36q^{137} + 36q^{139} + 15q^{140} + 32q^{142} - 24q^{143} - 12q^{146} + 2q^{148} - 18q^{149} - 152q^{151} - 6q^{152} + 10q^{154} + 42q^{157} + 42q^{158} + 15q^{160} + 48q^{161} - 88q^{163} + 75q^{164} + 12q^{166} - 36q^{167} - 7q^{169} - 20q^{172} + 54q^{173} - 40q^{175} + 27q^{176} - 30q^{178} + 69q^{179} + 36q^{181} - 12q^{182} + 10q^{184} - 15q^{185} - 84q^{187} + 12q^{188} - 60q^{190} - 12q^{191} + 134q^{193} - 48q^{194} - 115q^{196} - 72q^{197} + 32q^{199} + 15q^{200} - 34q^{202} + 54q^{203} + 45q^{206} + 58q^{208} - 54q^{209} + 252q^{211} - 6q^{212} + 136q^{214} - 104q^{217} - 84q^{218} - 54q^{221} - 88q^{223} - 9q^{224} - 24q^{226} - 120q^{227} - 12q^{229} - 26q^{232} - 114q^{233} + 70q^{235} + 3q^{236} + 116q^{238} + 84q^{239} + 2q^{241} + 117q^{242} - 8q^{244} + 88q^{247} + 18q^{248} - 25q^{250} + 33q^{251} - 72q^{253} + 69q^{254} - 89q^{256} + 60q^{257} - 194q^{259} - 75q^{260} + 16q^{262} + 132q^{263} + 40q^{265} - 156q^{266} - 48q^{268} + 18q^{269} - 48q^{271} + 102q^{272} - 68q^{274} + 45q^{275} + 30q^{277} - 30q^{278} + 87q^{281} - 84q^{283} - 60q^{284} + 10q^{286} + 72q^{287} + 27q^{289} + 30q^{290} + 150q^{292} + 36q^{293} - 21q^{296} - 34q^{298} - 138q^{299} + O(q^{301})$

**21)**

A=mfinit([28,5/2,28],1);

mfsturm(A)

4

B=mfmetaquo([1,2;4,2;14,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 - q^5 + 6q^6 - 4q^8 - 5q^9 - 4q^{10} + 6q^{11} - 2q^{12} + 5q^{13} + 4q^{16} + 8q^{17} - 2q^{18} - 11q^{19} - 2q^{20} - 7q^{21} - 4q^{22} + 12q^{24} - 7q^{25} + 12q^{26} + 2q^{27} - 2q^{29} - 4q^{30} - 8q^{32} + 18q^{33} + 7q^{35} - 10q^{36} + 10q^{37} - 14q^{38} - 8q^{40} - 30q^{41} + 10q^{43} + 12q^{44} - q^{45} + 12q^{46} - 4q^{48} + 7q^{49} + 34q^{50} - 6q^{51} + 10q^{52} - 8q^{53} - 12q^{54} + 2q^{57} - 12q^{58} - 31q^{59} - 9q^{61} - 20q^{62} + 8q^{64} + 22q^{65} - 20q^{66} + 12q^{67} + 16q^{68} + 36q^{69} + 14q^{70} - 4q^{72} - 12q^{74} + 17q^{75} - 22q^{76} + 12q^{78} - 4q^{80} - 17q^{81} - 12q^{82} + 9q^{83} - 14q^{84} - 46q^{85} + 28q^{86} - 8q^{88} + 4q^{89} + 20q^{90} - 7q^{91} - 32q^{93} + 44q^{94} + 24q^{96} - 24q^{97} - 14q^{98} + 6q^{99} - 14q^{100} + 55q^{101} + 28q^{102} + 24q^{104} - 44q^{106} - 16q^{107} + 4q^{108} + 38q^{109} - 64q^{110} + 6q^{113} - 36q^{114} + 10q^{115} - 4q^{116} - 25q^{117} + 14q^{118} - 8q^{120} + 59q^{121} + 12q^{122} - 42q^{123} + 12q^{125} - 16q^{128} - 38q^{129} + 20q^{130} + 19q^{131} + 36q^{132} - 7q^{133} - 56q^{134} + 16q^{137} + 88q^{138} + 19q^{139} + 14q^{140} + 12q^{141} + 24q^{142} - 20q^{144} - 52q^{145} + 16q^{146} - 7q^{147} + 20q^{148} - 84q^{149} - 42q^{150} - 28q^{152} + 8q^{153} + 4q^{155} - 29q^{157} + 8q^{158} - 16q^{160} + 58q^{162} - 2q^{163} - 60q^{164} + 64q^{165} - 30q^{166} + 69q^{169} + 32q^{170} + 55q^{171} + 20q^{172} + 27q^{173} - 52q^{174} + 24q^{176} - 6q^{177} - 24q^{178} + 16q^{179} - 2q^{180} + q^{181} + 14q^{182} + 24q^{184} - 24q^{185} - 120q^{186} - 38q^{187} + 14q^{189} - 36q^{190} - 8q^{192} - 70q^{193} + 64q^{194} - 90q^{195} + 14q^{196} + 8q^{197} + 20q^{198} + 68q^{200} + O(q^{201})$

22)

A=mfinit([128,5/2,8],1);

mfsturm(A)

21

B=mfmetaquo([2,4;16,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 4q^3 + 2q^5 + 8q^7 - 5q^9 - 4q^{11} - 10q^{13} + 8q^{15} + 8q^{17} + 4q^{19} + 12q^{21} - 24q^{23} - 5q^{25} + 10q^{29} - 16q^{31} + 4q^{33} + 24q^{35} - 14q^{37} + 8q^{39} + 4q^{41} + 28q^{43} - 22q^{45} - 16q^{47} - 23q^{49} - 24q^{51} - 2q^{53} + 24q^{55} + 12q^{57} + 4q^{59} + 58q^{61} + 24q^{63} - 12q^{65} - 44q^{67} - 16q^{69} - 24q^{71} + 36q^{73} - 68q^{75} - 16q^{77} + 16q^{79} + 13q^{81} + 44q^{83} - 12q^{85} + 56q^{87} - 12q^{89} - 24q^{91} + 12q^{93} + 40q^{95} - 24q^{97} + 12q^{99} - 18q^{101} - 56q^{103} - 48q^{105} + 52q^{107} - 14q^{109} - 8q^{111} - 16q^{113} - 8q^{115} + 50q^{117} - 16q^{119} + 51q^{121} + 40q^{123} - 20q^{125} - 64q^{127} + 60q^{129} + 4q^{131} + 12q^{133} -$

$$4q^{137} + 20q^{139} - 24q^{141} - 104q^{143} + 52q^{145} - 28q^{147} + 22q^{149} - 8q^{151} - 88q^{153} + 16q^{155} - 6q^{157} - 8q^{159} - 8q^{161} + 84q^{163} + 48q^{165} + 88q^{167} - 37q^{169} + 12q^{171} + 10q^{173} + 136q^{175} - 20q^{177} - 44q^{179} - 78q^{181} - 104q^{183} + 20q^{185} - 72q^{187} - 96q^{189} + 48q^{191} - 24q^{193} - 32q^{195} + 26q^{197} + 40q^{199} + O(q^{201})$$

23)

$$A = \text{mfinit}([224, 5/2, 56], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

45

$$B = \text{mfstorm}([2, 3; 4, 1; 14, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - 3q^3 - q^5 + 8q^7 - q^9 - 2q^{11} - 7q^{13} - 6q^{15} + 10q^{17} + q^{19} + 9q^{21} - 2q^{23} - 7q^{25} + 12q^{27} - 4q^{29} - 18q^{31} - 6q^{33} - 9q^{35} + 4q^{37} + 22q^{39} + 4q^{41} + 26q^{43} + 7q^{45} - 6q^{47} - 25q^{49} - 18q^{51} - 2q^{53} - 12q^{55} - 20q^{57} + 3q^{59} + 41q^{61} - 8q^{63} + 36q^{65} - 16q^{67} - 6q^{69} + 16q^{71} + 32q^{73} - 9q^{75} - 48q^{77} + 16q^{79} - 23q^{81} + 7q^{83} - 18q^{85} - 6q^{87} - 20q^{89} + 9q^{91} - 12q^{93} + 46q^{95} + 14q^{97} + 14q^{99} - 31q^{101} - 22q^{103} + 96q^{105} - 32q^{107} + 20q^{109} + 2q^{111} + 4q^{113} - 24q^{115} + 7q^{117} - 18q^{119} - 55q^{121} - 42q^{123} + 2q^{125} - 42q^{127} - 14q^{129} + 53q^{131} + 27q^{133} + 24q^{135} + 20q^{137} + 17q^{139} + 48q^{141} + 48q^{143} - 70q^{145} + 75q^{147} + 18q^{149} - 30q^{151} - 70q^{153} - 52q^{155} + 11q^{157} - 18q^{159} - 32q^{161} + 46q^{163} - 48q^{165} - 38q^{167} + 9q^{169} - q^{171} + 31q^{173} + 24q^{175} + 48q^{177} - 28q^{179} + 49q^{181} - 50q^{183} - 18q^{185} + 50q^{187} - 36q^{189} - 4q^{191} + 100q^{193} - 24q^{195} + 82q^{197} + 30q^{199} + O(q^{201})$$

24)

$$A = \text{mfinit}([96, 5/2, 8], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

19

$$B = \text{mfstorm}([2, 3; 6, 1; 12, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - 3q^3 + 4q^7 + 3q^9 - 14q^{13} + 6q^{15} - 2q^{19} + 6q^{21} + 19q^{25} - 9q^{27} - 16q^{31} - 24q^{33} + 22q^{37} + 6q^{39} + 26q^{43} - 31q^{49} + 18q^{51} - 28q^{55} - 18q^{61} + 12q^{63} + 6q^{67} + 36q^{69} + 24q^{73} - 27q^{75} + 9q^{81} + 4q^{85} - 54q^{87} - 4q^{91} - 30q^{93} - 4q^{97} + 116q^{103} + 12q^{105} - 18q^{109} + 42q^{111} - 60q^{115} - 42q^{117} - 17q^{121} + 6q^{123} - 40q^{127} + 48q^{129} - 36q^{133} + 18q^{135} - 18q^{139}$$

$$+ 12*q^{141} + 52*q^{145} + 51*q^{147} - 52*q^{151} + 126*q^{157} - 30*q^{159} - 50*q^{163} - 60*q^{165} - 61*q^{169} - 6*q^{171} + 36*q^{175} - 36*q^{177} + 14*q^{181} - 78*q^{183} + 108*q^{187} + 18*q^{189} - 20*q^{193} + 72*q^{195} + 84*q^{199} + O(q^{201})$$

25)

$$A=\text{mfinit}([288,5/2,24],1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

68

$$B=\text{mffrometaquo}([2,2;4,2;12,1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$$

$$\begin{aligned} \%106 = & q - 2*q^3 - 3*q^5 + 6*q^7 + 2*q^9 - 2*q^{13} - 8*q^{15} + 3*q^{17} - 8*q^{19} + 8*q^{21} \\ & + 6*q^{23} - 7*q^{25} + 26*q^{27} + 3*q^{29} - 14*q^{31} - 24*q^{33} - 6*q^{35} + 2*q^{37} - 4*q^{39} + \\ & 9*q^{41} + 8*q^{43} + 12*q^{45} - 6*q^{47} + 31*q^{49} - 16*q^{51} - 9*q^{53} + 20*q^{55} - 12*q^{57} - \\ & 18*q^{59} - 22*q^{61} + 12*q^{63} - 12*q^{65} + 4*q^{67} - 16*q^{69} + 18*q^{71} + 12*q^{73} - \\ & 6*q^{75} - 6*q^{77} + 14*q^{79} + 46*q^{81} + 24*q^{83} + 8*q^{85} - 40*q^{87} + 3*q^{89} - 44*q^{91} \\ & + 16*q^{93} - 64*q^{97} + 15*q^{101} - 30*q^{103} + 16*q^{105} + 6*q^{107} + 2*q^{109} + 52*q^{111} \\ & + 3*q^{113} + 64*q^{115} - 4*q^{117} - 18*q^{119} - 33*q^{121} + 16*q^{123} + 6*q^{125} - 14*q^{127} \\ & - 36*q^{129} + 30*q^{131} + 40*q^{133} - 40*q^{135} - 9*q^{137} - 20*q^{139} - 32*q^{141} - \\ & 48*q^{143} + 56*q^{145} - 34*q^{147} + 3*q^{149} - 6*q^{151} - 12*q^{153} - 30*q^{155} + 74*q^{157} \\ & + 104*q^{159} - 6*q^{161} + 16*q^{163} - 40*q^{165} + 35*q^{169} - 16*q^{171} + 3*q^{173} + \\ & 18*q^{175} + 56*q^{177} - 6*q^{179} - 102*q^{181} + 4*q^{183} - 36*q^{185} + 8*q^{187} - 104*q^{189} \\ & + 24*q^{191} - 44*q^{193} - 48*q^{195} + 33*q^{197} + 42*q^{199} + O(q^{201}) \end{aligned}$$

26)

$$A=\text{mfinit}([16,5/2,8],1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

1

$$B=\text{mffrometaquo}([2,2;4,1;8,2]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$$

$$\begin{aligned} q - 2*q^3 - 2*q^5 + 4*q^7 - q^9 + 6*q^{11} + 2*q^{13} - 12*q^{15} - 4*q^{17} - 6*q^{19} + 12*q^{21} \\ + 4*q^{23} + 3*q^{25} + 8*q^{27} - 10*q^{29} + 8*q^{31} - 4*q^{35} - 26*q^{37} + 4*q^{39} + 4*q^{41} - \\ 18*q^{43} + 14*q^{45} + 8*q^{47} + 17*q^{49} + 12*q^{51} + 26*q^{53} - 20*q^{55} - 16*q^{57} - \\ 14*q^{59} - 2*q^{61} - 4*q^{63} - 12*q^{65} + 34*q^{67} - 24*q^{69} - 28*q^{71} - 8*q^{73} + 14*q^{75} + \\ 8*q^{77} + 40*q^{79} - 23*q^{81} + 6*q^{83} + 36*q^{85} + 12*q^{87} + 32*q^{89} - 28*q^{91} - \\ 28*q^{93} - 12*q^{95} + 12*q^{97} - 42*q^{99} - 22*q^{101} - 12*q^{103} + 24*q^{105} - 14*q^{107} - \\ 2*q^{109} - 4*q^{111} + 24*q^{113} + 12*q^{115} - 2*q^{117} + 40*q^{119} - 33*q^{121} + 36*q^{123} \\ + 4*q^{125} - 16*q^{127} + 16*q^{129} + 10*q^{131} - 4*q^{133} + 48*q^{135} - 52*q^{137} + \end{aligned}$$

$$26*q^{139} + 24*q^{141} - 36*q^{143} - 60*q^{145} - 62*q^{147} - 22*q^{149} - 52*q^{151} + 28*q^{153} + 56*q^{155} + 46*q^{157} - 36*q^{159} + 8*q^{161} + 10*q^{163} + 40*q^{165} + 12*q^{167} + 35*q^{169} + 6*q^{171} - 18*q^{173} - 28*q^{175} + 72*q^{177} - 22*q^{179} - 2*q^{181} + 44*q^{183} - 36*q^{185} - 28*q^{187} - 48*q^{189} + 72*q^{191} - 52*q^{193} - 48*q^{195} + 22*q^{197} + 20*q^{199} + O(q^{201})$$

27)

$$A = \text{mfinit}([96, 5/2, 24], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

19

$$B = \text{mfmetaquo}([2, 1; 4, 1; 6, 3]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - q^3 - 2*q^5 - 2*q^7 + 3*q^9 + 8*q^{11} - 2*q^{13} - 6*q^{17} - 4*q^{21} - 12*q^{23} + 9*q^{25} - 3*q^{27} + 18*q^{29} + 10*q^{31} - 4*q^{35} - 14*q^{37} + 14*q^{39} - 2*q^{41} - 16*q^{43} - 6*q^{45} - 4*q^{47} - 17*q^{49} + 10*q^{53} + 20*q^{55} + 2*q^{57} + 12*q^{59} + 26*q^{61} - 6*q^{63} - 24*q^{65} + 12*q^{67} - 4*q^{71} + 12*q^{73} - 19*q^{75} - 4*q^{77} - 42*q^{79} + 9*q^{81} - 8*q^{83} - 8*q^{85} + 10*q^{89} - 12*q^{91} + 16*q^{93} + 48*q^{95} + 16*q^{97} + 24*q^{99} - 38*q^{101} + 10*q^{103} + 28*q^{107} - 30*q^{109} - 22*q^{111} + 26*q^{113} + 16*q^{115} - 6*q^{117} - 44*q^{119} - 17*q^{121} - 28*q^{125} + 10*q^{127} - 26*q^{129} - 52*q^{131} + 40*q^{133} + 34*q^{137} + 36*q^{139} + 16*q^{143} + 8*q^{145} + 31*q^{147} + 34*q^{149} - 30*q^{151} - 18*q^{153} - 4*q^{155} - 6*q^{157} + 44*q^{161} - 8*q^{163} + 28*q^{165} - 16*q^{167} - 61*q^{169} + 2*q^{173} - 38*q^{175} - 76*q^{179} - 6*q^{181} + 18*q^{183} - 40*q^{185} + 8*q^{187} - 12*q^{189} + 112*q^{191} - 12*q^{193} - 26*q^{197} + 82*q^{199} + O(q^{201})$$

28)

$$A = \text{mfinit}([288, 5/2, 24], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

68

$$B = \text{mfmetaquo}([3, 4; 12, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$q - 4*q^4 + 2*q^7 + 8*q^{10} - 6*q^{13} - 12*q^{19} + 13*q^{25} + 8*q^{28} + 22*q^{31} - 32*q^{34} - 14*q^{37} - 4*q^{43} + 15*q^{49} + 24*q^{52} - 12*q^{55} + 24*q^{58} - 14*q^{61} - 32*q^{67} - 8*q^{73} - 48*q^{76} + 34*q^{79} + 32*q^{82} + 12*q^{85} + 60*q^{91} - 4*q^{97} - 52*q^{100} - 50*q^{103} - 24*q^{106} + 46*q^{109} - 32*q^{115} - 25*q^{121} + 88*q^{124} - 10*q^{127} + 32*q^{130} - 16*q^{133} + 64*q^{139} - 52*q^{145} + 56*q^{148} - 66*q^{151} - 112*q^{154} + 2*q^{157} + 20*q^{163} + 3*q^{169} - 16*q^{172} + 46*q^{175} + 126*q^{181} + 32*q^{187} - 4*q^{193} - 60*q^{196} - 74*q^{199} + O(q^{201})$$

**29)**

A=mfinit([432,5/2,1],1);

mfsturm(A)

121

B=mffrometaquo([3,3;6,1;9,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 3q^4 - q^7 + 7q^{10} + 2q^{13} - q^{16} - 16q^{19} - q^{22} + 10q^{25} - q^{28} + 23q^{31} - 8q^{34} - 2q^{37} - 7q^{40} - 12q^{43} - 4q^{46} - 32q^{49} + 26q^{52} + 31q^{55} + 12q^{58} - 8q^{61} + 21q^{64} - 12q^{67} - 25q^{70} + 3q^{73} - 16q^{76} + 6q^{79} - 42q^{82} + 6q^{85} + q^{88} + 4q^{91} + 62q^{94} + 39q^{97} - 30q^{100} + 6q^{103} + 3q^{106} + 6q^{109} - 11q^{112} - 56q^{115} - 8q^{118} - 26q^{121} + 23q^{124} - 35q^{127} + 16q^{130} + 2q^{133} + 8q^{136} + 24q^{139} + 42q^{142} + 30q^{145} - 26q^{148} - 3q^{151} + 77q^{154} + 8q^{157} - 77q^{160} + 28q^{163} - 91q^{166} + 7q^{169} - 12q^{172} - 20q^{175} - 58q^{178} - 12q^{181} + 4q^{184} + 68q^{187} + 28q^{190} + 15q^{193} + 96q^{196} - 93q^{199} + O(q^{201})$

**30)**

A=mfinit([144,5/2,12],1);

mfsturm(A)

34

B=mffrometaquo([3,2;6,3]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 2q^4 - 4q^7 + 8q^{10} + 4q^{13} - 4q^{16} - 16q^{22} - q^{25} + 8q^{28} + 12q^{31} + 16q^{34} - 20q^{37} + 16q^{40} - 32q^{46} - 9q^{49} - 8q^{52} + 8q^{55} + 8q^{58} + 36q^{61} - 8q^{64} + 16q^{70} + 8q^{73} - 44q^{79} + 16q^{82} - 40q^{85} - 32q^{88} + 32q^{94} + 32q^{97} + 2q^{100} + 4q^{103} - 24q^{106} + 60q^{109} + 16q^{112} - 23q^{121} - 24q^{124} + 28q^{127} - 80q^{130} - 64q^{133} + 32q^{136} + 64q^{142} - 56q^{145} + 40q^{148} + 20q^{151} - 16q^{154} + 36q^{157} + 32q^{160} + 16q^{166} + 25q^{169} + 44q^{175} - 64q^{178} - 76q^{181} - 64q^{184} - 32q^{190} + 56q^{193} + 18q^{196} - 60q^{199} + O(q^{201})$

**31)**

A=mfinit([64,5/2,1],1);

mfsturm(A)

9

$B = \text{mffrometaquo}([4,4;8,1]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 4q^5 + q^9 + 12q^{13} - 8q^{17} - 8q^{21} - 7q^{25} + 4q^{29} + 24q^{33} - 4q^{37} + 16q^{41} - 28q^{45} - 31q^{49} + 20q^{53} - 8q^{57} + 4q^{61} + 16q^{65} + 48q^{69} - 8q^{73} - 16q^{77} - 23q^{81} - 8q^{85} - 24q^{89} - 40q^{93} + 56q^{97} - 28q^{101} + 48q^{105} + 36q^{109} - 16q^{113} + 12q^{117} + 33q^{121} + 8q^{125} - 56q^{129} - 72q^{133} - 48q^{137} + 48q^{141} + 16q^{145} + 4q^{149} - 56q^{153} + 68q^{157} + 32q^{161} + 48q^{165} + 9q^{169} + 20q^{173} + 24q^{177} - 116q^{181} + 64q^{185} - 32q^{189} - 72q^{193} - 20q^{197} + O(q^{201})$

**32)**

$A = \text{mfinit}([288,5/2,8],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

71

$B = \text{mffrometaquo}([4,3;6,2]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$\%134 = q - 3q^5 - 2q^7 + 6q^{11} + 4q^{13} + 3q^{17} - 8q^{19} - 6q^{23} - 11q^{25} - 3q^{29} + 26q^{31} - 6q^{35} + 10q^{37} + 15q^{41} - 4q^{43} - 18q^{47} - 19q^{49} - 3q^{53} - 16q^{55} + 24q^{59} - 6q^{61} + 6q^{65} + 12q^{67} + 18q^{71} + 30q^{73} - 18q^{77} - 6q^{79} - 6q^{83} - 2q^{85} - 27q^{89} - 40q^{91} - 12q^{95} + 26q^{97} + 3q^{101} + 2q^{103} + 24q^{109} - 15q^{113} + 60q^{115} + 54q^{119} - 53q^{121} + 48q^{125} - 10q^{127} - 48q^{131} - 36q^{133} + 3q^{137} - 36q^{139} - 24q^{143} + 10q^{145} + 33q^{149} - 22q^{151} - 18q^{155} - 42q^{157} + 6q^{161} + 76q^{163} + 24q^{167} + 71q^{169} - 9q^{173} + 42q^{175} - 24q^{179} - 28q^{181} - 12q^{185} + 36q^{187} - 36q^{191} + 4q^{193} - 27q^{197} - 78q^{199} + O(q^{201})$

**33)**

$A = \text{mfinit}([144,7/2,1],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

58

$B = \text{mffrometaquo}([1,3;3,1;6,3]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$\%138 = q - 3q^2 + 4q^4 + 3q^5 - 16q^7 + 12q^8 - 10q^{10} + 46q^{13} - 18q^{14} - 16q^{16} - 39q^{17} + 12q^{20} + 68q^{22} + 48q^{23} - 121q^{25} + 24q^{26} - 64q^{28} + 39q^{29} + 48q^{31} - 48q^{32} + 10q^{34} + 124q^{37} - 48q^{38} + 40q^{40} - 81q^{41} - 68q^{46} - 144q^{47} - 99q^{49} + 213q^{50} + 184q^{52} + 177q^{53} - 64q^{55} + 72q^{56} -$

$$\begin{aligned}
& 394q^{58} + 72q^{61} - 222q^{62} + 64q^{64} + 180q^{65} - 156q^{68} + 316q^{70} - 48q^{71} \\
& + 98q^{73} - 18q^{74} - 246q^{77} + 112q^{79} - 48q^{80} + 250q^{82} - 550q^{85} + 180q^{86} \\
& - 272q^{88} - 21q^{89} + 192q^{92} - 28q^{94} + 384q^{95} + 434q^{97} + 297q^{98} - \\
& 484q^{100} - 261q^{101} + 208q^{103} - 96q^{104} - 402q^{106} - 102q^{109} - 480q^{110} + \\
& 256q^{112} - 27q^{113} + 156q^{116} + 864q^{118} - 48q^{119} + 505q^{121} - 402q^{122} + \\
& 192q^{124} - 288q^{125} - 944q^{127} + 192q^{128} + 412q^{130} - 436q^{133} + 60q^{134} - \\
& 40q^{136} + 687q^{137} - 1508q^{142} - 96q^{143} + 430q^{145} + 102q^{146} + 496q^{148} + \\
& 531q^{149} + 80q^{151} + 192q^{152} - 268q^{154} + 504q^{157} + 162q^{158} - 160q^{160} - \\
& 402q^{161} - 324q^{164} - 68q^{166} - 480q^{167} - 503q^{169} - 258q^{170} - 837q^{173} + \\
& 1136q^{175} + 1238q^{178} - 94q^{181} + 1104q^{182} + 272q^{184} - 330q^{185} - \\
& 576q^{188} + 40q^{190} + 192q^{191} - 2056q^{193} + 42q^{194} - 396q^{196} + 1797q^{197} \\
& + 336q^{199} - 852q^{200} + O(q^{201})
\end{aligned}$$

34)

$$A = \text{mfinit}([48, 7/2, 12], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

15

$$B = \text{mfmetaquo}([1, 2; 2, 2; 6, 3]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned}
& q - 2q^2 - 3q^3 + 6q^4 + 2q^5 - 4q^7 - 4q^8 + 9q^9 - 20q^{10} + 4q^{11} + 6q^{12} - \\
& 4q^{13} + 44q^{14} - 4q^{16} - 42q^{17} - 18q^{18} + 20q^{19} - 52q^{20} - 6q^{21} + 56q^{22} \\
& + 56q^{23} + 31q^{25} - 52q^{26} - 27q^{27} + 8q^{28} + 6q^{29} + 12q^{30} - 100q^{31} + \\
& 88q^{32} - 68q^{34} - 40q^{35} + 54q^{36} + 16q^{37} - 8q^{38} + 60q^{39} - 40q^{40} + \\
& 102q^{41} + 60q^{43} - 8q^{44} + 18q^{45} - 40q^{46} - 136q^{47} - 132q^{48} - 89q^{49} + \\
& 38q^{50} + 104q^{52} - 38q^{53} + 184q^{55} + 88q^{56} - 90q^{57} + 228q^{58} - 44q^{59} - \\
& 32q^{61} - 156q^{62} - 36q^{63} - 168q^{64} + 60q^{65} + 156q^{66} + 60q^{67} - 252q^{68} - \\
& 136q^{70} + 248q^{71} - 36q^{72} - 132q^{73} + 132q^{74} + 57q^{75} - 40q^{76} + 12q^{77} - \\
& 300q^{79} + 376q^{80} + 81q^{81} + 84q^{82} + 12q^{83} + 156q^{84} + 60q^{85} - 200q^{86} + \\
& 112q^{88} - 42q^{89} - 180q^{90} - 248q^{91} - 112q^{92} - 18q^{93} - 232q^{94} - 464q^{95} + \\
& 588q^{97} + 178q^{98} + 36q^{99} + 186q^{100} + 58q^{101} - 264q^{102} + 564q^{103} - \\
& 104q^{104} - 60q^{106} + 260q^{107} + 54q^{108} - 12q^{109} + 280q^{110} - 228q^{111} - \\
& 176q^{112} - 558q^{113} - 440q^{115} - 156q^{116} - 36q^{117} + 496q^{118} + 440q^{119} + \\
& 24q^{120} - 443q^{121} - 156q^{122} + 200q^{124} + 12q^{125} + 396q^{126} - 116q^{127} - \\
& 400q^{128} + 342q^{129} - 464q^{130} + 444q^{131} - 208q^{133} + 368q^{134} - 136q^{136} + \\
& 306q^{137} + 24q^{138} + 348q^{139} + 80q^{140} - 120q^{142} - 80q^{143} - 36q^{144} - \\
& 132q^{145} - 296q^{146} - 27q^{147} - 416q^{148} + 14q^{149} - 12q^{151} - 16q^{152} - \\
& 378q^{153} - 40q^{154} - 704q^{155} - 120q^{156} + 200q^{157} + 508q^{158} + 880q^{160} - \\
& 84q^{161} - 162q^{162} + 388q^{163} + 612q^{164} + 120q^{165} + 632q^{166} - 464q^{167} + \\
& 469q^{169} - 784q^{170} + 180q^{171} - 120q^{172} - 126q^{173} - 276q^{174} + 76q^{175} + \\
& 176q^{176} - 628q^{178} - 708q^{179} - 468q^{180} + 132q^{181} - 600q^{182} + 180q^{183} -
\end{aligned}$$

$$80*q^{184} + 1500*q^{185} - 592*q^{187} + 272*q^{188} - 54*q^{189} - 80*q^{190} + 304*q^{191} + 600*q^{192} - 408*q^{193} + 176*q^{194} - 534*q^{196} - 26*q^{197} + 504*q^{198} - 588*q^{199} + 76*q^{200} + O(q^{201})$$

**35)**

$$A = \text{mfinit}([64, 7/2, 1], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

17

$$B = \text{mfmetaquo}([2, 4; 4, 2; 8, 1]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} \% 146 = & q - 4*q^3 + 16*q^7 - 11*q^9 - 12*q^{11} - 16*q^{15} + 48*q^{17} + 20*q^{19} - 48*q^{23} - \\ & 99*q^{25} + 80*q^{27} + 32*q^{31} + 80*q^{33} - 24*q^{35} - 48*q^{39} - 172*q^{43} + 96*q^{47} + \\ & 73*q^{49} + 8*q^{51} + 240*q^{55} - 176*q^{57} + 60*q^{59} - 176*q^{63} - 192*q^{65} - 108*q^{67} - \\ & 48*q^{71} + 528*q^{73} + 196*q^{75} - 224*q^{79} - 23*q^{81} + 156*q^{83} - 272*q^{87} - 144*q^{89} \\ & - 88*q^{91} + 240*q^{95} - 592*q^{97} + 348*q^{99} + 144*q^{103} + 480*q^{105} - 36*q^{107} + \\ & 272*q^{111} + 96*q^{113} - 536*q^{115} - 288*q^{119} - 3*q^{121} - 472*q^{123} + 256*q^{127} - \\ & 16*q^{129} - 348*q^{131} + 320*q^{135} + 576*q^{137} + 700*q^{139} - 48*q^{143} - 320*q^{145} + \\ & 100*q^{147} + 368*q^{151} - 1392*q^{153} - 240*q^{155} - 688*q^{159} + 384*q^{161} + 884*q^{163} \\ & - 336*q^{167} + 309*q^{169} - 220*q^{171} - 784*q^{175} + 1552*q^{177} + 324*q^{179} + \\ & 304*q^{183} - 288*q^{185} + 328*q^{187} - 96*q^{191} - 336*q^{193} - 880*q^{195} - 944*q^{199} + \\ & O(q^{201}) \end{aligned}$$

**36)**

$$A = \text{mfinit}([48, 7/2, 1], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

14

$$B = \text{mfmetaquo}([2, 3; 3, 2; 6, 2]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} q - 3*q^3 - 2*q^4 + 6*q^6 + 2*q^7 + 9*q^9 - 4*q^{10} - 18*q^{12} - 20*q^{13} - 6*q^{15} + \\ 44*q^{16} + 30*q^{19} + 12*q^{21} - 52*q^{22} + 12*q^{24} - 19*q^{25} - 27*q^{27} - 52*q^{28} + \\ 60*q^{30} + 6*q^{31} - 12*q^{33} + 88*q^{34} - 18*q^{36} + 76*q^{37} + 12*q^{39} - 8*q^{40} - \\ 132*q^{42} - 114*q^{43} - 8*q^{46} + 12*q^{48} + 9*q^{49} + 126*q^{51} + 40*q^{52} + 54*q^{54} - \\ 40*q^{55} - 60*q^{57} + 92*q^{58} + 156*q^{60} - 60*q^{61} + 18*q^{63} - 200*q^{64} - 168*q^{66} + \\ 174*q^{67} - 168*q^{69} - 200*q^{70} + 152*q^{73} - 93*q^{75} + 180*q^{76} + 156*q^{78} + 10*q^{79} \\ + 81*q^{81} + 280*q^{82} - 24*q^{84} - 40*q^{85} - 18*q^{87} - 104*q^{88} - 36*q^{90} - 372*q^{91} + \end{aligned}$$

$300*q^93 - 208*q^94 - 264*q^96 - 88*q^97 + 38*q^100 + 204*q^102 + 106*q^103 +$   
 $120*q^105 - 12*q^106 - 162*q^108 - 60*q^109 - 48*q^111 + 376*q^112 + 24*q^114 +$   
 $636*q^115 - 180*q^117 + 132*q^118 + 120*q^120 - 443*q^121 - 306*q^123 - 156*q^124 -$   
 $86*q^127 - 180*q^129 - 680*q^130 + 24*q^132 + 344*q^133 - 54*q^135 + 176*q^136 +$   
 $120*q^138 + 90*q^139 + 408*q^141 - 200*q^142 + 396*q^144 + 160*q^145 + 267*q^147 -$   
 $152*q^148 - 114*q^150 + 14*q^151 + 560*q^154 - 312*q^156 - 636*q^157 + 114*q^159 +$   
 $176*q^160 - 834*q^163 - 552*q^165 + 604*q^166 - 264*q^168 + 469*q^169 + 270*q^171 -$   
 $684*q^172 - 684*q^174 + 62*q^175 + 132*q^177 + 176*q^178 + 956*q^181 + 96*q^183 -$   
 $16*q^184 + 468*q^186 - 228*q^187 + 108*q^189 + 568*q^190 + 504*q^192 + 248*q^193 -$   
 $180*q^195 - 18*q^196 - 468*q^198 - 270*q^199 + O(q^{201})$

**37)**

A=mfinit([32,7/2,8],1);

mfsturm(A)

7

B=mffrometaquo([2,2;4,5]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 2*q^3 - 6*q^5 + 12*q^7 + 11*q^9 - 18*q^11 - 2*q^13 - 20*q^15 - 12*q^17 + 58*q^19 +$   
 $20*q^21 + 12*q^23 - 49*q^25 - 40*q^27 + 42*q^29 - 104*q^31 + 24*q^33 + 60*q^35 +$   
 $2*q^37 + 140*q^39 + 36*q^41 - 58*q^43 - 174*q^45 + 24*q^47 + 25*q^49 - 100*q^51 -$   
 $18*q^53 - 28*q^55 + 120*q^57 - 54*q^59 + 242*q^61 + 132*q^63 - 60*q^65 + 82*q^67 -$   
 $184*q^69 - 180*q^71 - 192*q^73 + 198*q^75 - 120*q^77 - 40*q^79 - 23*q^81 - 42*q^83 +$   
 $380*q^85 - 220*q^87 + 24*q^89 + 340*q^91 + 316*q^93 + 108*q^95 - 124*q^97 -$   
 $522*q^99 - 114*q^101 - 132*q^103 + 40*q^105 + 138*q^107 - 718*q^109 + 388*q^111 +$   
 $168*q^113 - 20*q^115 - 22*q^117 + 216*q^119 + 3*q^121 - 44*q^123 + 444*q^125 +$   
 $112*q^127 + 504*q^129 - 102*q^131 - 284*q^133 - 400*q^135 + 108*q^137 - 542*q^139 -$   
 $344*q^141 - 60*q^143 - 172*q^145 + 146*q^147 + 78*q^149 + 420*q^151 - 348*q^153 +$   
 $120*q^155 + 578*q^157 + 68*q^159 - 696*q^161 + 682*q^163 + 200*q^165 + 36*q^167 +$   
 $647*q^169 + 638*q^171 - 174*q^173 - 1188*q^175 - 544*q^177 - 102*q^179 + 234*q^181$   
 $- 284*q^183 - 180*q^185 - 988*q^187 + 400*q^189 - 744*q^191 + 772*q^193 + 624*q^195$   
 $- 222*q^197 + 1596*q^199 + O(q^{201})$

**38)**

A=mfinit([144,7/2,12],1);

mfsturm(A)

52

B=mffrometaquo([3,6;6,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 6*q^4 + 8*q^7 + 16*q^{10} - 40*q^{13} - 4*q^{16} + 32*q^{19} + 32*q^{22} + 19*q^{25} -$   
 $112*q^{28} + 8*q^{31} - 32*q^{34} + 40*q^{37} + 224*q^{40} - 96*q^{43} - 64*q^{46} - 89*q^{49} -$   
 $16*q^{52} - 80*q^{55} - 48*q^{58} + 280*q^{61} + 168*q^{64} - 160*q^{70} + 144*q^{73} - 448*q^{76} -$   
 $72*q^{79} + 96*q^{82} - 240*q^{85} + 448*q^{88} + 160*q^{91} + 320*q^{94} - 288*q^{97} -$   
 $114*q^{100} + 312*q^{103} - 48*q^{106} - 600*q^{109} - 416*q^{112} - 128*q^{115} + 256*q^{118} +$   
 $685*q^{121} - 112*q^{124} + 232*q^{127} + 160*q^{130} + 320*q^{133} - 448*q^{136} + 384*q^{139} -$   
 $384*q^{142} - 720*q^{145} + 16*q^{148} - 552*q^{151} + 224*q^{154} - 40*q^{157} + 832*q^{160} -$   
 $224*q^{163} - 160*q^{166} + 469*q^{169} + 1344*q^{172} - 248*q^{175} - 640*q^{178} + 600*q^{181}$   
 $- 896*q^{184} - 640*q^{187} - 320*q^{190} - 1008*q^{193} + 534*q^{196} + 312*q^{199} + O(q^{201})$

**39)**

A=mfinit([48,9/2,12],1);

mfsturm(A)

22

B=mffrometaquo([1,6;6,3]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 6*q^2 + 9*q^3 + 10*q^4 - 30*q^5 + 8*q^7 + 60*q^8 - 27*q^9 - 100*q^{10} + 108*q^{11} -$   
 $54*q^{12} + 16*q^{13} - 36*q^{14} + 188*q^{16} - 114*q^{17} + 162*q^{18} - 252*q^{19} - 300*q^{20} +$   
 $126*q^{21} + 296*q^{22} - 48*q^{23} + 515*q^{25} + 12*q^{26} - 243*q^{27} - 1072*q^{28} +$   
 $294*q^{29} - 180*q^{30} - 24*q^{31} + 1128*q^{32} + 436*q^{34} - 270*q^{36} - 1172*q^{37} -$   
 $312*q^{38} + 72*q^{39} + 1000*q^{40} - 810*q^{41} + 1260*q^{43} - 648*q^{44} + 810*q^{45} -$   
 $968*q^{46} + 144*q^{47} + 828*q^{48} + 279*q^{49} - 1590*q^{50} + 160*q^{52} + 210*q^{53} +$   
 $80*q^{55} + 360*q^{56} - 1818*q^{57} + 356*q^{58} + 756*q^{59} - 828*q^{61} + 3588*q^{62} -$   
 $216*q^{63} - 152*q^{64} + 900*q^{65} - 252*q^{66} - 3492*q^{67} - 1140*q^{68} - 1400*q^{70} -$   
 $240*q^{71} - 1620*q^{72} + 4436*q^{73} + 180*q^{74} + 2385*q^{75} + 1512*q^{76} + 2028*q^{77} -$   
 $200*q^{79} - 5640*q^{80} + 729*q^{81} + 1996*q^{82} - 6588*q^{83} + 1260*q^{84} - 700*q^{85} +$   
 $2088*q^{86} - 2960*q^{88} - 2130*q^{89} + 2700*q^{90} + 5544*q^{91} + 6432*q^{92} - 630*q^{93} -$   
 $1960*q^{94} + 480*q^{95} - 6148*q^{97} - 1674*q^{98} - 2916*q^{99} + 5150*q^{100} + 1314*q^{101}$   
 $- 5688*q^{102} + 88*q^{103} - 120*q^{104} - 3372*q^{106} + 11988*q^{107} + 1458*q^{108} -$   
 $336*q^{109} - 4200*q^{110} + 360*q^{111} - 5408*q^{112} + 2322*q^{113} - 1800*q^{115} +$   
 $2940*q^{116} - 432*q^{117} + 7056*q^{118} + 336*q^{119} + 1800*q^{120} - 2279*q^{121} -$   
 $5916*q^{122} + 3216*q^{124} - 11700*q^{125} + 972*q^{126} + 136*q^{127} - 912*q^{128} +$   
 $4158*q^{129} + 6160*q^{130} - 11556*q^{131} + 7616*q^{133} + 4944*q^{134} - 4360*q^{136} +$   
 $5154*q^{137} + 6552*q^{138} + 3564*q^{139} - 6680*q^{142} - 2208*q^{143} - 5076*q^{144} -$   
 $1820*q^{145} - 2280*q^{146} - 3663*q^{147} - 11720*q^{148} + 5166*q^{149} - 616*q^{151} +$   
 $3120*q^{152} + 3078*q^{153} - 3976*q^{154} + 11880*q^{155} - 9648*q^{156} + 14940*q^{157} +$   
 $14364*q^{158} + 18800*q^{160} - 1092*q^{161} - 4374*q^{162} - 28764*q^{163} - 8100*q^{164} -$   
 $7200*q^{165} + 2440*q^{166} + 480*q^{167} - 7295*q^{169} + 1680*q^{170} + 6804*q^{171} -$   
 $7560*q^{172} - 6102*q^{173} + 8316*q^{174} + 2120*q^{175} + 9936*q^{176} + 10676*q^{178} +$   
 $1404*q^{179} + 8100*q^{180} - 1336*q^{181} - 18312*q^{182} - 936*q^{183} + 9680*q^{184} -$

$$7500*q^{185} + 29952*q^{187} - 19296*q^{188} - 3402*q^{189} - 21200*q^{190} + 1248*q^{191} + 11880*q^{192} + 6272*q^{193} - 15216*q^{194} + 2790*q^{196} - 1410*q^{197} - 7992*q^{198} - 168*q^{199} + 15900*q^{200} + O(q^{201})$$

40)

$$A = \text{mfinit}([32, 9/2, 8], 1);$$

$$\text{mfsturm}(A)$$

11

$$B = \text{mffrometaquo}([1, 4; 4, 5]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} & q - 4*q^2 + 2*q^3 + 8*q^4 - 10*q^5 + 16*q^6 - 20*q^7 - 32*q^8 + 39*q^9 + 74*q^{11} - \\ & 16*q^{12} - 70*q^{13} - 64*q^{14} - 100*q^{15} + 192*q^{16} + 44*q^{17} + 60*q^{18} - 58*q^{19} - \\ & 80*q^{20} + 28*q^{21} - 16*q^{22} + 236*q^{23} - 384*q^{24} - 85*q^{25} + 24*q^{27} + 160*q^{28} + \\ & 222*q^{29} + 320*q^{30} - 168*q^{31} + 256*q^{32} - 368*q^{33} - 384*q^{34} - 700*q^{35} + \\ & 312*q^{36} + 222*q^{37} - 208*q^{38} + 876*q^{39} - 156*q^{41} + 770*q^{43} - 592*q^{44} + \\ & 150*q^{45} - 320*q^{46} - 808*q^{47} - 384*q^{48} + 673*q^{49} + 1340*q^{50} - 812*q^{51} - \\ & 560*q^{52} - 894*q^{53} + 192*q^{54} - 220*q^{55} + 1536*q^{56} + 96*q^{57} + 1534*q^{59} + \\ & 800*q^{60} - 858*q^{61} - 640*q^{62} - 780*q^{63} - 1536*q^{64} + 500*q^{65} - 2688*q^{66} + \\ & 766*q^{67} + 352*q^{68} + 1064*q^{69} + 1120*q^{70} + 204*q^{71} + 480*q^{72} + 1192*q^{73} - \\ & 670*q^{75} + 464*q^{76} - 632*q^{77} + 1216*q^{78} - 1288*q^{79} - 1920*q^{80} - 1719*q^{81} + \\ & 3072*q^{82} - 358*q^{83} + 224*q^{84} - 1900*q^{85} - 912*q^{86} + 1988*q^{87} + 384*q^{88} - \\ & 464*q^{89} - 1092*q^{91} - 1888*q^{92} + 3476*q^{93} - 896*q^{94} + 3100*q^{95} + 3072*q^{96} + \\ & 188*q^{97} - 2692*q^{98} - 1110*q^{99} - 680*q^{100} + 4722*q^{101} - 3104*q^{102} - 2436*q^{103} \\ & - 3400*q^{105} - 2498*q^{107} - 192*q^{108} - 3226*q^{109} + 1600*q^{110} + 4340*q^{111} + \\ & 3840*q^{112} - 968*q^{113} + 4992*q^{114} + 3700*q^{115} + 1776*q^{116} - 2730*q^{117} + \\ & 2000*q^{118} - 4872*q^{119} - 7680*q^{120} + 2423*q^{121} - 3332*q^{123} + 1344*q^{124} + \\ & 2100*q^{125} + 960*q^{126} + 912*q^{127} - 2048*q^{128} + 2176*q^{129} - 7680*q^{130} + \\ & 4054*q^{131} - 2944*q^{132} + 1484*q^{133} + 4272*q^{134} - 1200*q^{135} - 3072*q^{136} + \\ & 1516*q^{137} + 1846*q^{139} + 5600*q^{140} - 2120*q^{141} - 4928*q^{142} + 724*q^{143} + \\ & 7488*q^{144} + 3140*q^{145} + 384*q^{146} + 2718*q^{147} + 1776*q^{148} - 13390*q^{149} - \\ & 1360*q^{150} - 5756*q^{151} + 4992*q^{152} - 660*q^{153} - 3000*q^{155} - 7008*q^{156} + \\ & 1302*q^{157} + 384*q^{158} - 3756*q^{159} - 312*q^{161} + 9468*q^{162} + 6198*q^{163} - \\ & 1248*q^{164} + 13800*q^{165} - 1776*q^{166} - 572*q^{167} + 3579*q^{169} - 2262*q^{171} - \\ & 6160*q^{172} - 2442*q^{173} - 2496*q^{174} + 6700*q^{175} - 14208*q^{176} - 3048*q^{177} - \\ & 384*q^{178} - 10*q^{179} + 1200*q^{180} - 4522*q^{181} - 1568*q^{182} + 7652*q^{183} + \\ & 7680*q^{184} - 4900*q^{185} - 5156*q^{187} + 6464*q^{188} + 336*q^{189} + 8000*q^{190} + \\ & 2456*q^{191} + 3072*q^{192} - 8196*q^{193} - 6528*q^{194} - 13520*q^{195} + 5384*q^{196} + \\ & 14638*q^{197} - 624*q^{198} - 2660*q^{199} + 10720*q^{200} + O(q^{201}) \end{aligned}$$

41)

A=mfinit([80,9/2,5],1);

mfsturm(A)

40

B=mfmetaquo([1,3;2,3;5,3]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$$q - 3q^2 - 3q^3 + 14q^4 - 18q^6 + 7q^7 - 6q^8 - 21q^9 + 25q^{10} + 54q^{11} + 6q^{12} - 24q^{13} - 42q^{14} - 75q^{15} - 68q^{16} + 30q^{17} + 225q^{18} + 56q^{19} + 72q^{21} - 214q^{22} - 237q^{23} - 36q^{24} + 125q^{25} + 18q^{26} + 144q^{27} - 14q^{28} + 72q^{29} - 122q^{31} + 468q^{32} - 240q^{33} + 46q^{34} - 75q^{35} - 294q^{36} - 336q^{37} - 210q^{38} + 270q^{39} + 50q^{40} + 240q^{41} - 480q^{42} + 1291q^{43} - 108q^{44} + 1046q^{46} - 501q^{47} - 468q^{48} - 1301q^{49} - 375q^{50} - 1050q^{51} + 688q^{52} + 360q^{53} + 864q^{54} - 84q^{56} + 1860q^{57} - 1018q^{58} + 264q^{59} + 150q^{60} + 48q^{61} - 540q^{62} - 147q^{63} - 840q^{64} + 750q^{65} + 108q^{66} - 2103q^{67} + 420q^{68} + 360q^{69} + 462q^{71} + 450q^{72} - 1050q^{73} + 894q^{74} - 375q^{75} - 112q^{76} - 504q^{77} + 1536q^{78} + 3412q^{79} - 1179q^{81} + 260q^{82} - 651q^{83} - 2064q^{84} - 600q^{85} - 2118q^{86} + 498q^{87} - 428q^{88} - 2100q^{89} - 525q^{90} + 3474q^{91} + 474q^{92} - 144q^{93} - 426q^{94} + 2808q^{96} + 3470q^{97} + 3903q^{98} - 4050q^{99} + 1750q^{100} - 216q^{101} - 4512q^{102} - 2407q^{103} + 36q^{104} - 3898q^{106} + 135q^{107} - 288q^{108} + 1440q^{109} + 150q^{110} + 726q^{111} + 1092q^{112} + 630q^{113} + 4440q^{114} - 2125q^{115} - 2064q^{116} + 504q^{117} - 786q^{118} + 2238q^{119} - 1159q^{121} + 2598q^{122} + 2286q^{123} + 244q^{124} + 3150q^{126} - 5965q^{127} - 5784q^{128} + 1620q^{129} + 1986q^{131} - 3360q^{132} + 24q^{133} - 2190q^{134} + 3600q^{135} + 92q^{136} - 1890q^{137} - 2844q^{138} - 1560q^{139} + 150q^{140} - 1224q^{141} + 7904q^{142} + 1110q^{143} + 1428q^{144} + 2886q^{146} + 5961q^{147} + 9632q^{148} - 1872q^{149} - 2250q^{150} - 8894q^{151} - 420q^{152} - 2250q^{153} - 9128q^{154} - 540q^{156} + 336q^{157} - 4224q^{158} - 2298q^{159} - 3900q^{160} + 2100q^{161} - 4239q^{162} + 8819q^{163} + 3360q^{164} + 1800q^{165} + 6126q^{166} + 1593q^{167} - 960q^{168} + 6059q^{169} - 1176q^{171} - 2582q^{172} + 432q^{173} + 2784q^{174} + 875q^{175} + 8424q^{176} - 10680q^{177} - 6756q^{178} - 948q^{179} + 1656q^{181} + 528q^{182} - 5700q^{183} + 2092q^{184} - 3750q^{185} - 2700q^{186} + 174q^{187} + 1002q^{188} - 3456q^{189} + 6450q^{190} - 7410q^{191} + 5784q^{192} + 8810q^{193} + 438q^{194} - 18214q^{196} + 1368q^{197} + 4494q^{198} + 6596q^{199} - 750q^{200} + O(q^{201})$$

42)

A=mfinit([16,9/2,1],1);

mfsturm(A)

4

$B = \text{mffrometaquo}([1,2;2,3;4,4]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 2*q^2 - 4*q^3 + 8*q^4 + 4*q^6 + 16*q^7 - 48*q^8 - 15*q^9 + 20*q^{10} + 4*q^{11} + 96*q^{12} - 40*q^{14} - 80*q^{15} - 64*q^{16} + 96*q^{17} - 78*q^{18} + 52*q^{19} + 148*q^{22} + 80*q^{23} + 96*q^{24} - 335*q^{25} + 140*q^{26} - 48*q^{27} - 384*q^{28} - 200*q^{30} + 160*q^{31} + 384*q^{32} + 672*q^{33} - 88*q^{34} - 280*q^{35} - 120*q^{36} - 116*q^{38} - 304*q^{39} + 480*q^{40} - 768*q^{41} - 56*q^{42} + 228*q^{43} - 96*q^{44} + 472*q^{46} + 224*q^{47} - 768*q^{48} + 673*q^{49} + 170*q^{50} + 776*q^{51} + 48*q^{54} - 400*q^{55} - 960*q^{56} - 1248*q^{57} - 444*q^{58} - 500*q^{59} + 1920*q^{60} - 336*q^{62} - 240*q^{63} + 512*q^{64} + 1920*q^{65} + 736*q^{66} - 1068*q^{67} + 768*q^{68} - 1400*q^{70} + 1232*q^{71} - 1872*q^{72} - 96*q^{73} - 444*q^{74} + 340*q^{75} - 1248*q^{76} + 1752*q^{78} - 96*q^{79} - 2367*q^{81} + 312*q^{82} + 444*q^{83} + 1540*q^{86} + 624*q^{87} + 3552*q^{88} + 96*q^{89} - 300*q^{90} + 392*q^{91} - 1920*q^{92} - 1616*q^{94} - 2000*q^{95} - 768*q^{96} + 1632*q^{97} - 1346*q^{98} + 156*q^{99} - 2680*q^{100} - 1624*q^{102} - 1392*q^{103} + 3360*q^{104} + 4800*q^{105} + 1788*q^{106} - 52*q^{107} + 1152*q^{108} - 440*q^{110} + 848*q^{111} + 3072*q^{112} - 7488*q^{113} - 192*q^{114} + 680*q^{115} + 3068*q^{118} + 224*q^{119} - 4800*q^{120} - 239*q^{121} + 1716*q^{122} - 1400*q^{123} - 3840*q^{124} - 1560*q^{126} + 5120*q^{127} - 3072*q^{128} + 480*q^{129} - 1000*q^{130} + 228*q^{131} + 5376*q^{132} + 1532*q^{134} - 960*q^{135} - 2112*q^{136} + 8064*q^{137} - 2128*q^{138} - 852*q^{139} + 6720*q^{140} + 408*q^{142} - 2288*q^{143} + 960*q^{144} - 9600*q^{145} - 2384*q^{146} - 5436*q^{147} - 1340*q^{150} - 2832*q^{151} - 2784*q^{152} + 3744*q^{153} + 1264*q^{154} + 5200*q^{155} + 7296*q^{156} - 2576*q^{158} - 240*q^{159} - 3840*q^{160} + 5376*q^{161} + 3438*q^{162} + 6452*q^{163} - 6144*q^{164} - 716*q^{166} + 1456*q^{167} - 1344*q^{168} - 815*q^{169} + 3800*q^{170} - 780*q^{171} - 5472*q^{172} + 3976*q^{174} - 1360*q^{175} + 768*q^{176} - 13536*q^{177} + 928*q^{178} + 228*q^{179} - 2184*q^{182} + 4272*q^{183} + 11328*q^{184} - 6720*q^{185} - 6952*q^{186} - 4760*q^{187} - 5376*q^{188} + 6200*q^{190} - 5600*q^{191} + 6144*q^{192} + 23136*q^{193} - 376*q^{194} + 400*q^{195} + 5384*q^{196} - 2220*q^{198} + 2640*q^{199} + 4080*q^{200} + O(q^{201})$

**43)**

$A = \text{mfinit}([64,9/2,1],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

25

$B = \text{mffrometaquo}([2,8;8,1]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 8*q^3 + 20*q^5 - 71*q^9 + 72*q^{11} + 36*q^{13} - 56*q^{17} - 216*q^{19} + 232*q^{21} + 305*q^{25} + 96*q^{27} - 884*q^{29} + 72*q^{33} + 720*q^{35} + 212*q^{37} + 16*q^{41} - 1080*q^{43}$

- 340\*q^45 + 881\*q^49 - 432\*q^51 + 1820\*q^53 - 1496\*q^57 + 792\*q^59 - 1076\*q^61 -  
 2480\*q^65 + 1512\*q^67 + 1872\*q^69 + 616\*q^73 + 680\*q^75 - 112\*q^77 + 937\*q^81 -  
 5256\*q^83 - 2840\*q^85 + 4344\*q^89 + 1296\*q^91 + 3080\*q^93 + 392\*q^97 + 1080\*q^99 -  
 3508\*q^101 - 5040\*q^105 + 1368\*q^107 - 5076\*q^109 + 6032\*q^113 + 6480\*q^115 -  
 2556\*q^117 + 1833\*q^121 - 5616\*q^123 + 8600\*q^125 - 6824\*q^129 - 3960\*q^131 -  
 216\*q^133 - 3696\*q^137 - 6696\*q^139 + 13968\*q^141 + 3280\*q^145 + 5384\*q^147 -  
 5204\*q^149 + 952\*q^153 + 7200\*q^155 - 2164\*q^157 - 17248\*q^161 - 1944\*q^163 -  
 5040\*q^165 + 3921\*q^169 + 8424\*q^171 - 2500\*q^173 + 12168\*q^177 + 2376\*q^179 +  
 9604\*q^181 + 1120\*q^185 - 12528\*q^187 - 10208\*q^189 + 4104\*q^193 - 21600\*q^195 -  
 1820\*q^197 + O(q^201)

**44)**

A=mfinit([32,9/2,8],1);

mfsturm(A)

11

B=mffrometaquo([2,6;4,3]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

q - 6\*q^3 + 6\*q^5 + 28\*q^7 - 57\*q^9 - 30\*q^11 + 106\*q^13 + 12\*q^15 + 12\*q^17 -  
 146\*q^19 - 132\*q^21 + 156\*q^23 + 43\*q^25 + 504\*q^27 - 210\*q^29 - 712\*q^31 +  
 240\*q^33 - 204\*q^35 + 238\*q^37 + 156\*q^39 + 420\*q^41 + 506\*q^43 - 666\*q^45 -  
 72\*q^47 - 799\*q^49 - 828\*q^51 + 114\*q^53 + 1844\*q^55 + 6\*q^59 + 1782\*q^61 -  
 1596\*q^63 - 588\*q^65 - 1722\*q^67 + 936\*q^69 + 252\*q^71 - 1848\*q^73 + 1242\*q^75 -  
 504\*q^77 + 2520\*q^79 + 2601\*q^81 + 1074\*q^83 - 3404\*q^85 - 1836\*q^87 + 144\*q^89 -  
 1588\*q^91 - 780\*q^93 - 1524\*q^95 + 1052\*q^97 + 3330\*q^99 + 2658\*q^101 - 2452\*q^103  
 + 3192\*q^105 - 378\*q^107 + 630\*q^109 - 1212\*q^111 - 2184\*q^113 + 1956\*q^115 -  
 6042\*q^117 - 936\*q^119 - 1193\*q^121 + 12\*q^123 - 492\*q^125 + 8528\*q^127 -  
 2784\*q^129 + 1086\*q^131 + 11052\*q^133 - 1008\*q^135 + 1452\*q^137 - 12834\*q^139 -  
 4872\*q^141 + 3108\*q^143 - 380\*q^145 + 678\*q^147 - 30\*q^149 - 4972\*q^151 -  
 1332\*q^153 - 1368\*q^155 + 8550\*q^157 + 5412\*q^159 - 1848\*q^161 + 4702\*q^163 +  
 4200\*q^165 + 852\*q^167 - 8581\*q^169 + 8322\*q^171 - 6714\*q^173 - 5796\*q^175 +  
 1656\*q^177 - 3426\*q^179 - 19354\*q^181 - 12\*q^183 + 9564\*q^185 + 1836\*q^187 +  
 11088\*q^189 - 648\*q^191 + 12124\*q^193 - 5904\*q^195 + 3582\*q^197 + 1164\*q^199 +  
 O(q^201)

**45)**

A=mfinit([48,9/2,1],1);

mfsturm(A)

23

$B = \text{mffrometaquo}([2,3;3,6]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 3*q^3 - 6*q^4 + 18*q^6 + 14*q^7 - 27*q^9 - 20*q^{10} - 30*q^{12} + 8*q^{13} + 90*q^{15} + 92*q^{16} - 202*q^{19} - 24*q^{21} - 28*q^{22} - 180*q^{24} + 265*q^{25} + 81*q^{27} + 140*q^{28} + 300*q^{30} - 70*q^{31} - 324*q^{33} - 632*q^{34} + 162*q^{36} + 40*q^{37} - 48*q^{39} + 200*q^{40} + 108*q^{42} + 462*q^{43} + 728*q^{46} - 564*q^{48} - 407*q^{49} + 342*q^{51} - 1072*q^{52} - 486*q^{54} - 800*q^{55} + 756*q^{57} + 924*q^{58} + 900*q^{60} - 104*q^{61} - 378*q^{63} + 1320*q^{64} - 888*q^{66} + 558*q^{67} + 144*q^{69} - 1000*q^{70} - 576*q^{73} - 1545*q^{75} - 2020*q^{76} - 36*q^{78} + 2646*q^{79} + 729*q^{81} + 168*q^{82} + 3216*q^{84} - 240*q^{85} - 882*q^{87} + 280*q^{88} + 540*q^{90} - 1532*q^{91} + 72*q^{93} + 656*q^{94} - 3384*q^{96} + 72*q^{97} - 1590*q^{100} - 1308*q^{102} - 138*q^{103} + 3012*q^{106} + 810*q^{108} + 408*q^{109} + 3516*q^{111} + 2632*q^{112} + 936*q^{114} - 980*q^{115} - 216*q^{117} - 2948*q^{118} - 3000*q^{120} - 2279*q^{121} + 2430*q^{123} - 700*q^{124} - 1370*q^{127} - 3780*q^{129} - 1400*q^{130} + 1944*q^{132} + 272*q^{133} - 2430*q^{135} + 6320*q^{136} + 2904*q^{138} + 3282*q^{139} - 432*q^{141} - 1608*q^{142} - 2484*q^{144} + 12600*q^{145} - 837*q^{147} - 5360*q^{148} + 4770*q^{150} - 8958*q^{151} - 10864*q^{154} - 480*q^{156} - 424*q^{157} - 630*q^{159} + 3760*q^{160} - 602*q^{163} - 240*q^{165} + 7556*q^{166} - 1080*q^{168} - 7295*q^{169} + 5454*q^{171} + 4620*q^{172} - 1068*q^{174} + 7210*q^{175} - 2268*q^{177} + 7952*q^{178} + 1032*q^{181} + 2484*q^{183} - 7280*q^{184} - 10764*q^{186} - 3460*q^{187} + 648*q^{189} - 5000*q^{190} + 456*q^{192} - 8064*q^{193} - 2700*q^{195} + 2442*q^{196} + 756*q^{198} + 1230*q^{199} + O(q^{201})$

**46)**

$A = \text{mfinit}([4,11/2,1],1);$

$\text{mfsturm}(A)$

1

$B = \text{mffrometaquo}([1,2;2,7;4,2]);$

$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B,200),q)$

$q - 2*q^2 - 8*q^3 + 16*q^4 + 20*q^5 - 36*q^6 - 32*q^8 - 75*q^9 + 220*q^{10} + 104*q^{11} - 128*q^{12} - 44*q^{13} - 392*q^{14} + 256*q^{16} + 232*q^{17} + 474*q^{18} - 536*q^{19} + 320*q^{20} + 168*q^{21} - 1124*q^{22} - 576*q^{24} + 245*q^{25} + 852*q^{26} + 1248*q^{27} - 1668*q^{29} + 2040*q^{30} - 512*q^{32} - 1368*q^{33} - 2632*q^{34} - 560*q^{35} - 1200*q^{36} + 4756*q^{37} + 1428*q^{38} + 3520*q^{40} + 656*q^{41} - 3528*q^{42} - 3224*q^{43} + 1664*q^{44} - 4740*q^{45} + 2168*q^{46} - 2048*q^{48} + 1449*q^{49} - 2990*q^{50} + 5328*q^{51} - 704*q^{52} + 4668*q^{53} + 5616*q^{54} - 6272*q^{56} - 3288*q^{57} + 4636*q^{58} + 312*q^{59} - 15108*q^{61} - 3856*q^{62} + 4096*q^{64} + 4880*q^{65} + 4656*q^{66} - 1304*q^{67} + 3712*q^{68} + 21456*q^{69} - 18760*q^{70} + 7584*q^{72} + 3752*q^{73} + 4300*q^{74} - 11960*q^{75} - 8576*q^{76} - 14896*q^{77} - 12168*q^{78} + 5120*q^{80} - 7983*q^{81} + 27512*q^{82} + 3768*q^{83} + 2688*q^{84} + 16040*q^{85} + 9100*q^{86} - 17984*q^{88} - 9096*q^{89} -$

$$\begin{aligned}
& 16500*q^{90} + 33488*q^{91} - 9048*q^{93} - 3344*q^{94} - 9216*q^{96} - 12568*q^{97} - \\
& 2898*q^{98} - 24648*q^{99} + 3920*q^{100} - 4852*q^{101} + 23352*q^{102} + 13632*q^{104} + \\
& 35280*q^{105} + 7572*q^{106} - 13512*q^{107} + 19968*q^{108} - 3588*q^{109} - 3480*q^{110} + \\
& 31184*q^{113} - 77904*q^{114} - 13360*q^{115} - 26688*q^{116} + 3300*q^{117} + 8148*q^{118} + \\
& 32640*q^{120} - 41507*q^{121} - 19700*q^{122} + 19152*q^{123} + 17400*q^{125} + 92904*q^{126} \\
& - 8192*q^{128} - 22536*q^{129} + 34040*q^{130} + 37000*q^{131} - 21888*q^{132} - 50008*q^{133} \\
& - 4732*q^{134} - 42112*q^{136} + 7184*q^{137} - 16656*q^{138} - 18888*q^{139} - 8960*q^{140} + \\
& 38736*q^{141} - 72328*q^{142} - 19200*q^{144} + 36880*q^{145} + 33952*q^{146} + 26824*q^{147} \\
& + 76096*q^{148} - 24052*q^{149} - 8820*q^{150} + 22848*q^{152} - 54984*q^{153} + 61936*q^{154} \\
& - 77920*q^{155} + 132348*q^{157} - 30736*q^{158} + 56320*q^{160} - 48608*q^{161} - \\
& 34578*q^{162} - 28184*q^{163} + 10496*q^{164} - 118320*q^{165} - 169780*q^{166} - \\
& 56448*q^{168} + 149533*q^{169} + 68520*q^{170} + 40200*q^{171} - 51584*q^{172} + \\
& 63692*q^{173} + 83304*q^{174} + 26624*q^{176} + 15912*q^{177} + 88624*q^{178} + \\
& 67720*q^{179} - 75840*q^{180} - 137500*q^{181} + 43176*q^{182} + 34688*q^{184} - \\
& 129440*q^{185} + 51624*q^{186} + 5072*q^{187} - 26208*q^{189} - 100360*q^{190} - \\
& 32768*q^{192} - 43288*q^{193} - 68200*q^{194} + 24480*q^{195} + 23184*q^{196} + 19300*q^{197} \\
& + 84300*q^{198} - 47840*q^{200} + O(q^{201})
\end{aligned}$$

47)

A=mfinit([32,11/2,8],1);

mfsturm(A)

15

B=mfmetaquo([2,10;4,1]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$$\begin{aligned}
& q - 10*q^3 + 34*q^5 - 20*q^7 - 141*q^9 + 278*q^{11} + 70*q^{13} - 468*q^{15} - 60*q^{17} + \\
& 162*q^{19} + 1220*q^{21} - 660*q^{23} - 1449*q^{25} + 600*q^{27} - 1278*q^{29} + 3160*q^{31} + \\
& 1800*q^{33} - 2452*q^{35} - 2390*q^{37} - 3604*q^{39} + 5380*q^{41} + 110*q^{43} + 714*q^{45} + \\
& 5720*q^{47} - 1943*q^{49} - 7956*q^{51} - 5210*q^{53} + 3908*q^{55} - 2680*q^{57} + 12162*q^{59} \\
& + 3338*q^{61} + 2820*q^{63} - 4668*q^{65} - 10950*q^{67} + 9864*q^{69} - 33556*q^{71} + \\
& 5520*q^{73} + 26990*q^{75} + 10760*q^{77} + 4440*q^{79} - 11223*q^{81} + 910*q^{83} - \\
& 4148*q^{85} - 1980*q^{87} - 20600*q^{89} - 9084*q^{91} - 15860*q^{93} + 36012*q^{95} + \\
& 23380*q^{97} + 5838*q^{99} + 23398*q^{101} - 10340*q^{103} - 21240*q^{105} - 27710*q^{107} - \\
& 12342*q^{109} - 27004*q^{111} + 47240*q^{113} - 36452*q^{115} - 9870*q^{117} + 43480*q^{119} + \\
& 79003*q^{121} + 23940*q^{123} - 70516*q^{125} + 22960*q^{127} - 47096*q^{129} - 1438*q^{131} - \\
& 64940*q^{133} + 28080*q^{135} - 38900*q^{137} - 18918*q^{139} + 142344*q^{141} - \\
& 46460*q^{143} - 23212*q^{145} + 67450*q^{147} + 35494*q^{149} + 50244*q^{151} - 1260*q^{153} - \\
& 84136*q^{155} - 35430*q^{157} - 186876*q^{159} - 19576*q^{161} + 82450*q^{163} + \\
& 92296*q^{165} + 16580*q^{167} + 16319*q^{169} - 22842*q^{171} + 78410*q^{173} + \\
& 53980*q^{175} - 59760*q^{177} + 200354*q^{179} - 187278*q^{181} - 71100*q^{183} -
\end{aligned}$$

$$41332*q^{185} - 35020*q^{187} - 73200*q^{189} - 39848*q^{191} - 6060*q^{193} + 22320*q^{195} + 139690*q^{197} + 141724*q^{199} + O(q^{201})$$

**48)**

$$A = \text{mfinit}([48, 13/2, 12], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

38

$$B = \text{mfmetaquo}([1, 5; 2, 5; 3, 3]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} & q - 5*q^2 + 32*q^4 - 20*q^5 - 81*q^6 + 160*q^8 + 243*q^9 - 310*q^{10} - 512*q^{11} + \\ & 340*q^{13} + 1246*q^{14} - 1024*q^{16} - 1090*q^{17} - 1215*q^{18} + 2560*q^{19} - 640*q^{20} + \\ & 3080*q^{22} + 2592*q^{24} - 8605*q^{25} - 4278*q^{26} + 17148*q^{29} - 5120*q^{32} - 5670*q^{33} \\ & - 290*q^{34} - 17920*q^{35} + 7776*q^{36} + 7060*q^{37} + 6720*q^{38} + 9920*q^{40} + \\ & 3502*q^{41} - 11340*q^{42} + 17920*q^{43} - 16384*q^{44} - 4860*q^{45} - 30284*q^{46} - \\ & 33201*q^{49} + 74275*q^{50} + 41472*q^{51} + 10880*q^{52} - 23100*q^{53} - 19683*q^{54} - \\ & 39872*q^{56} - 8890*q^{58} - 52224*q^{59} + 59916*q^{61} + 15050*q^{62} + 32768*q^{64} + \\ & 90940*q^{65} - 35840*q^{67} - 34880*q^{68} - 93960*q^{69} - 39620*q^{70} + 38880*q^{72} + \\ & 2420*q^{73} - 51098*q^{74} + 81920*q^{76} + 15400*q^{77} + 73710*q^{78} + 20480*q^{80} + \\ & 59049*q^{81} - 67670*q^{82} + 53760*q^{83} - 191200*q^{85} - 112976*q^{86} - 98560*q^{88} + \\ & 117366*q^{89} - 75330*q^{90} + 111104*q^{91} + 459260*q^{94} - 82944*q^{96} - 7900*q^{97} + \\ & 166005*q^{98} - 124416*q^{99} - 275360*q^{100} - 464780*q^{101} + 136896*q^{104} + \\ & 260820*q^{105} - 229746*q^{106} + 76800*q^{107} + 627708*q^{109} - 157740*q^{110} - \\ & 203390*q^{113} - 63018*q^{114} - 148480*q^{115} + 548736*q^{116} + 82620*q^{117} - \\ & 298740*q^{118} - 692471*q^{121} - 63170*q^{122} - 207360*q^{123} + 234600*q^{125} + \\ & 302778*q^{126} + 163840*q^{128} + 622840*q^{130} + 539648*q^{131} - 181440*q^{132} + \\ & 645680*q^{133} - 1383220*q^{134} + 9280*q^{136} - 185990*q^{137} - 494592*q^{139} - \\ & 573440*q^{140} - 154224*q^{141} + 611260*q^{142} - 248832*q^{144} - 174260*q^{145} + \\ & 1200196*q^{146} + 225920*q^{148} + 188932*q^{149} + 697005*q^{150} - 215040*q^{152} - \\ & 264870*q^{153} - 969388*q^{154} + 555520*q^{155} - 346740*q^{157} - 168490*q^{158} - \\ & 317440*q^{160} - 354676*q^{161} - 295245*q^{162} + 232960*q^{163} + 112064*q^{164} - \\ & 476936*q^{166} + 362880*q^{168} + 961273*q^{169} + 532200*q^{170} + 622080*q^{171} + \\ & 573440*q^{172} - 507620*q^{173} + 524288*q^{176} + 222750*q^{177} - 1017490*q^{178} - \\ & 2074624*q^{179} - 155520*q^{180} - 60316*q^{181} + 2100*q^{182} + 969088*q^{184} + \\ & 465500*q^{185} - 2258928*q^{186} - 56320*q^{187} + 1653040*q^{190} + 709520*q^{193} + \\ & 2225648*q^{194} + 207360*q^{195} - 1062432*q^{196} + 1372700*q^{197} + 748440*q^{198} - \\ & 2376800*q^{200} + O(q^{201}) \end{aligned}$$

49)

A=mfinit([16,13/2,1],1);

mfsturm(A)

8

B=mffrometaquo([1,2;2,11]);

Ser(mfcoefs(B,200),q)

$q - 2*q^2 - 12*q^3 + 24*q^4 + 56*q^5 - 108*q^6 - 112*q^7 + 176*q^8 + 9*q^9 + 196*q^{10} + 364*q^{11} - 1056*q^{12} - 616*q^{13} + 728*q^{14} + 432*q^{15} + 1472*q^{16} - 240*q^{17} - 990*q^{18} - 484*q^{19} - 2752*q^{20} + 2352*q^{21} - 1276*q^{22} - 2608*q^{23} + 9504*q^{24} + 1705*q^{25} - 772*q^{26} - 3024*q^{27} - 9856*q^{28} - 1848*q^{29} - 1032*q^{30} + 11168*q^{31} - 128*q^{32} - 6480*q^{33} + 13576*q^{34} + 5432*q^{35} + 216*q^{36} - 11144*q^{37} + 2620*q^{38} - 12720*q^{39} - 17248*q^{40} + 16320*q^{41} - 22680*q^{42} + 5964*q^{43} + 32032*q^{44} + 27720*q^{45} + 9176*q^{46} - 15904*q^{47} + 768*q^{48} - 33551*q^{49} - 15910*q^{50} - 20520*q^{51} + 30272*q^{52} + 1960*q^{53} - 27216*q^{54} + 26608*q^{55} - 64064*q^{56} + 65520*q^{57} + 51348*q^{58} + 18244*q^{59} + 38016*q^{60} - 65912*q^{61} + 31920*q^{62} - 1008*q^{63} - 84480*q^{64} - 111360*q^{65} + 29568*q^{66} + 33468*q^{67} - 5760*q^{68} + 30240*q^{69} - 20440*q^{70} + 45392*q^{71} + 87120*q^{72} + 145200*q^{73} - 71436*q^{74} - 95460*q^{75} - 42592*q^{76} + 51744*q^{77} - 41256*q^{78} - 79968*q^{79} + 180736*q^{80} - 174879*q^{81} - 51720*q^{82} - 43404*q^{83} - 115584*q^{84} + 64176*q^{85} + 100852*q^{86} + 26352*q^{87} + 112288*q^{88} + 267600*q^{89} + 1764*q^{90} + 122584*q^{91} - 229504*q^{92} - 107856*q^{93} - 48976*q^{94} - 41936*q^{95} - 6912*q^{96} - 357360*q^{97} + 67102*q^{98} + 180180*q^{99} + 40920*q^{100} - 215096*q^{101} + 133512*q^{102} - 66288*q^{103} + 67936*q^{104} + 272160*q^{105} + 201612*q^{106} + 23300*q^{107} - 266112*q^{108} + 236040*q^{109} - 215864*q^{110} + 342096*q^{111} + 7168*q^{112} - 188640*q^{113} - 56160*q^{114} - 490760*q^{115} + 90816*q^{116} - 5544*q^{117} - 278324*q^{118} - 354592*q^{119} + 90816*q^{120} + 373561*q^{121} - 126588*q^{122} - 75816*q^{123} + 982784*q^{124} + 270480*q^{125} + 360360*q^{126} + 29440*q^{127} - 357376*q^{128} - 422640*q^{129} - 596840*q^{130} + 473196*q^{131} - 155520*q^{132} + 140336*q^{133} + 205100*q^{134} + 108864*q^{135} - 1194688*q^{136} - 46080*q^{137} + 362544*q^{138} - 157980*q^{139} + 478016*q^{140} - 925344*q^{141} + 202776*q^{142} + 217360*q^{143} + 13248*q^{144} + 428160*q^{145} + 727696*q^{146} - 756*q^{147} + 547648*q^{148} - 27832*q^{149} - 184140*q^{150} + 291696*q^{151} - 230560*q^{152} - 118800*q^{153} - 344848*q^{154} + 110320*q^{155} - 1119360*q^{156} + 172424*q^{157} - 592016*q^{158} - 565488*q^{159} + 12544*q^{160} - 134400*q^{161} + 104814*q^{162} + 223516*q^{163} + 391680*q^{164} + 1035552*q^{165} + 290756*q^{166} - 382928*q^{167} + 1995840*q^{168} - 949031*q^{169} - 567496*q^{170} - 4356*q^{171} + 524832*q^{172} + 255528*q^{173} - 685176*q^{174} - 890960*q^{175} - 23296*q^{176} + 2093040*q^{177} + 301376*q^{178} - 750228*q^{179} - 1362240*q^{180} - 1107624*q^{181} - 342888*q^{182} + 678960*q^{183} - 807488*q^{184} - 775200*q^{185} - 309960*q^{186} + 714296*q^{187} - 1399552*q^{188} + 592704*q^{189} + 2209528*q^{190} + 1157920*q^{191} + 2144256*q^{192} - 119280*q^{193} +$

$$399848*q^{194} - 379728*q^{195} - 805224*q^{196} - 1265768*q^{197} - 11484*q^{198} + 1603536*q^{199} + 1400080*q^{200} + O(q^{201})$$

50)

$$A = \text{mfinit}([16, 15/2, 1], 1);$$

$$\text{mfstorm}(A)$$

10

$$B = \text{mfmetaquo}([1, 6; 2, 9]);$$

$$\text{Ser}(\text{mfcoefs}(B, 200), q)$$

$$\begin{aligned} & q - 6*q^2 + 64*q^4 - 84*q^5 - 252*q^6 + 512*q^7 + 384*q^8 - 1107*q^9 - 28*q^{10} + \\ & 3724*q^{13} - 792*q^{14} - 4608*q^{15} - 4096*q^{16} - 168*q^{17} + 15390*q^{18} - 5376*q^{20} + \\ & 1944*q^{21} - 27676*q^{22} + 10752*q^{23} + 16128*q^{24} - 11635*q^{25} + 20748*q^{26} + \\ & 32768*q^{28} - 31836*q^{29} - 79704*q^{30} + 21504*q^{31} - 24576*q^{32} + 60984*q^{33} + \\ & 107464*q^{34} - 70848*q^{36} - 41492*q^{37} + 20748*q^{38} - 124416*q^{39} + 1792*q^{40} + \\ & 63504*q^{41} + 68616*q^{42} + 215460*q^{45} - 175640*q^{46} + 64512*q^{47} - 315783*q^{49} - \\ & 117690*q^{50} + 238336*q^{52} - 236796*q^{53} + 462672*q^{54} + 433664*q^{55} + 50688*q^{56} \\ & - 83592*q^{57} - 865660*q^{58} - 294912*q^{60} + 332388*q^{61} + 336336*q^{62} - 566784*q^{63} \\ & + 262144*q^{64} + 361296*q^{65} + 299376*q^{66} - 10752*q^{68} - 168336*q^{69} + \\ & 731272*q^{70} - 554496*q^{71} - 984960*q^{72} + 155960*q^{73} - 677196*q^{74} + 519024*q^{77} \\ & + 577512*q^{78} + 959488*q^{79} + 344064*q^{80} + 438129*q^{81} - 377048*q^{82} + \\ & 124416*q^{84} - 3482728*q^{85} - 717516*q^{86} + 290304*q^{87} + 1771264*q^{88} - \\ & 41496*q^{89} + 30996*q^{90} + 688128*q^{92} + 3610008*q^{93} - 2751280*q^{94} + \\ & 597504*q^{95} - 1032192*q^{96} - 700840*q^{97} + 1894698*q^{98} - 744640*q^{100} - \\ & 1999116*q^{101} - 616248*q^{102} - 1293824*q^{103} - 1327872*q^{104} - 2167632*q^{105} + \\ & 6472236*q^{106} + 6866916*q^{109} - 530376*q^{110} - 2612736*q^{111} - 2097152*q^{112} + \\ & 1016496*q^{113} - 1353168*q^{114} - 2037504*q^{116} - 4122468*q^{117} - 5099220*q^{118} + \\ & 1403904*q^{119} + 5101056*q^{120} + 3391333*q^{121} + 1706964*q^{122} + 1376256*q^{124} - \\ & 335160*q^{125} + 2031480*q^{126} + 962560*q^{127} + 1572864*q^{128} - 5429592*q^{129} - \\ & 2140952*q^{130} + 3902976*q^{132} - 8574568*q^{133} - 1495716*q^{134} + 8460288*q^{135} - \\ & 6877696*q^{136} + 2651856*q^{137} - 8246448*q^{138} + 8715312*q^{141} + 9436264*q^{142} - \\ & 1537536*q^{143} + 4534272*q^{144} + 3934672*q^{145} - 1013376*q^{146} - 2655488*q^{148} - \\ & 11045772*q^{149} + 2932020*q^{150} - 18047488*q^{151} - 1327872*q^{152} + 430920*q^{153} + \\ & 4934864*q^{154} - 7962624*q^{156} + 14847588*q^{157} + 8757072*q^{158} + 4483584*q^{159} - \\ & 114688*q^{160} + 13511328*q^{161} - 18690102*q^{162} + 4064256*q^{164} - 5174928*q^{165} - \\ & 13100500*q^{166} + 1537536*q^{167} - 4391424*q^{168} - 15705275*q^{169} - 13272168*q^{170} \\ & - 1577772*q^{173} + 8423352*q^{174} + 10042880*q^{175} - 23057928*q^{177} + \\ & 9512048*q^{178} + 13789440*q^{180} + 13466012*q^{181} - 10523688*q^{182} + \\ & 14059008*q^{183} + 11240960*q^{184} - 727104*q^{185} - 1090152*q^{186} + 4128768*q^{188} - \\ & 3569184*q^{189} - 55133528*q^{190} - 14048256*q^{191} + 9270872*q^{193} + 10159464*q^{194} \end{aligned}$$

$$- 20210112*q^{196} + 8030172*q^{197} + 30637332*q^{198} + 2247168*q^{199} + 7532160*q^{200} + O(q^{201})$$