

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

DUAL KUATERNİYONLAR VE ÖTELEME YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞUŞ İLGEN

TEZ DANIŐMANI
PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2021

10425671

T.C.
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

DUAL KUATERNİYONLAR VE ÖTELEME YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞUŞ İLGEN

TEZ DANIŐMANI
PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2021

10425671

BEYAN

“Dual Kuaterniyonlar ve Öteleme Yüzeyleri” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığımı beyan ederim.

Bu çalışmam, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen Kurum:	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;	

Öğrenci Adı ve Soyadı

DOĞUŞ İLGEN

Tarih

.....

İmza

.....

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezim sırasında her daim yanımda olan, bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, karşılaştığım sorunların üstesinden gelmemde bana yardımcı olan, beni motive eden ve bana güvenen, her daim yanımda olduğumu hissettiren, sosyal hayatımda yardımcı ve yol gösteren, bana katkılarıyla minnettar olduğum ve beni öğrencisi olarak kabul ettiği için saygıdeğer hocam Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca beni bu süreçte destekleyip sabır gösteren annem Gülhanım İLGEN ve babam Mahmut İLGEN'e, yüksek lisans sürecinde her daim motive eden ve yanımda olan sevgili Ali TÜRSÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

DUAL KUATERNİYONLAR VE ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bir öteleme yüzeyi, iki rasyonel uzay eğrisinden üretilen rasyonel bir tensör çarpım yüzeyidir. Öteleme yüzeyleri, dual kuaterniyon çarpımı kullanarak iki rasyonel uzay eğrisinden de elde edilebilir. Bu tezde, dual kuaterniyonları kullanarak, bir rasyonel tensör çarpım yüzeyinin öteleme yüzeyi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulları inceleyeceğiz.

Anahtar Kelimeler

Öteleme Yüzeyi; Tensör Çarpım Rasyonel Yüzey; Dual Kuaterniyon.

ABSTRACT

DUAL QUATERNIONS AND TRANSLATIONAL SURFACES

A translational surface is a rational tensor product surface generated from two rational space curves. Translational surfaces can also be generated from two rational space curves by dual quaternion multiplication. This thesis, using dual quaternions, we investigate a necessary and sufficient for a rational tensor product surface to be a translational surface.

Keywords

Translational Surface; Tensor Product Rational Surface; Dual Quaternion.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖN SÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
2.1. Dual Sayılar	3
2.2. Reel Kuaterniyonlar	7
2.3. Dual Kuaterniyonlar	13
3. ÖTELEME YÜZEY	25
4. RASYONEL BİR YÜZEY NE ZAMAN BİR ÖTELEME YÜZEYDİR?	33
KAYNAKLAR.....	40

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1. Öteleme Yüzey Modeli.....	1
Şekil 2.1. Dual Sayı Düzlemi (Galile Düzlemi)	6
Şekil 2.2. Galile Çemberi	7
Şekil 3.1. Chadstone Alışveriş Merkezi – Avustralya	25
Şekil 3.2. Cuidad de las Artes y las Ciencias – İspanya	25
Şekil 3.3. Capital Gate – Birleşik Arap Emirlikleri	26
Şekil 3.4. Gaziantep Kalyon Stadyumu – Türkiye	26
Şekil 4.1. Örnek 4.1. Rasyonel Yüzey	38
Şekil 4.2. Örnek 4.2. Rasyonel Yüzey	39

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

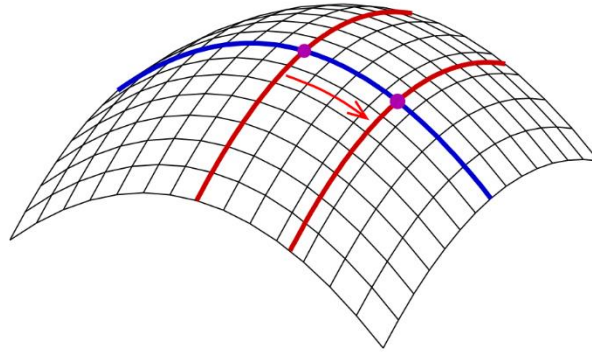
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Cümlesi
\mathbb{D}	: Dual Reel Sayılar Cümlesi
\mathbb{K}	: Reel Kuaterniyonlar Cümlesi
\mathbb{K}_1	: Birim Kuaterniyonlar Cümlesi
$\mathbb{K}_{\mathbb{D}}$: Dual Kuaterniyonlar Cümlesi
$\mathbb{K}_{\mathbb{D}}^0$: Has (Pure) Dual Kuaterniyonlar Cümlesi
$\mathbb{K}_{\mathbb{D}}^1$: Birim Dual Kuaterniyonlar Cümlesi
\wedge	: Dış Çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: İç Çarpım
$K(r) = r^*$: Bir Reel Kuaterniyonun Eşleniği
$\ \ $: Norm, Modül
$ $: Mutlak Değer
$()^{-1}$: Ters Eleman
$()^*$: Dual Kuaterniyonlarda Kuaterniyonik Eşlenik
$()^\bullet$: Dual Kuaterniyonlarda Dual Eşlenik
$()^\diamond$: Dual Kuaterniyonlarda Toplam Eşlenik
$\text{Re}()$: Dual Sayılarda Reel Kısım
$\text{Du}()$: Dual Sayılarda Dual Kısım
R	: Kuaterniyonlarda Dönme Fonksiyonu
$R_{()}^T$: Dual Kuaterniyonlarda Önce Dönme Sonra Öteleme Fonksiyonu
$T_{()}^R$: Dual Kuaterniyonlarda Önce Öteleme Sonra Dönme Fonksiyonu
$o()$: Eğri Fonksiyonu
$o'()$: Hız Vektörü Fonksiyonu
$h^1(s, t)$: Monge Yüzey Fonksiyonu
E^n	: n – Boyutlu Öklid Uzayı

\oplus	: Dual Sayılarda Toplama
\odot	: Dual Sayılarda Çarpma
\otimes	: Reel Kuaterniyonlarda Toplama
*	: Reel Kuaterniyonlarda Skaler Çarpım
\otimes	: Reel Kuaterniyonlarda Çarpma
\dagger	: Dual Kuaterniyonlarda Toplama
\otimes	: Dual Kuaterniyonlarda Çarpma
\boxplus	: Direkt Toplam
\boxtimes	: Tensör Çarpım
$[]^T$: Transpoze

1. GİRİŞ

Dual kuaterniyon cebiri, gerçel dual sayı cebiri (Fischer, 1998: 1) ile Hamilton kuaterniyon cebirini (Hamilton, 1866: 160) birleştirir. 3 boyutlu uzayda dönmenin birim uzunluktaki kuaterniyonlarla temsil edilebilmesine (Altmann, 1986: 207) benzer şekilde, 3 boyutlu uzayda katı hareketler, birim uzunluktaki dual kuaterniyonlarla temsil edilebilir (Dia, 2006: 48). Bu nedenle, dual kuaterniyonlar teorik kinematikte (McCarthy, 1990; Zatsiorsky, 1998: 1-2) yaygın olarak kullanılmaktadır ve 3 boyutlu bilgisayar grafikleri, robotik ve bilgisayar görüntüsü alanlarında da uygulamaları vardır (Daniilidis, 1999: 286-298; Funda ve Paul, 1990: 348-356; Goldman, 2010: 17-25; Jüttler, 1994: 315-326).

Bir öteleme yüzeyi, iki rasyonel uzay eğrisinden, bu eğrilerden birinin her noktasının diğer eğri boyunca paralel olarak öteleyerek oluşturulan yüzeydir.



Şekil 1.1. Öteleme Yüzey Modeli.

Kaynak: (Translation surface (differential geometry), 2021)

Öteleme yüzeyleri, bilgisayar destekli geometrik tasarım ve geometrik modellemede yaygın olarak kullanılan temel modelleme yüzeylerdir (Perez-Diaz ve Shen, 2014: 128-129). Ayrıca öteleme yüzeyleri kolayca modellenebildikleri için betimleyici geometri (Brauner, 2013: 1-236; Hohenberg, 2013: 1-319) ve mimaride (Schober, 2015: 1-248) yaygındır. Öteleme yüzeyleri iki uzay eğrisinden üretildiğinden öteleme yüzeylerinin basit temsilleri vardır. En basit ve belki de en yaygın temsili bir öteleme yüzey,

$$h'(s,t) = \alpha'(s) + \gamma'(t)$$

rasyonel parametrik gösterimi ile verilir, burada $\alpha'(s)$ ve $\gamma'(t)$ iki rasyonel uzay eğrisi üreteç eğrileri olup Darboux tarafından bu rasyonel uzay eğrilerinin toplamı ile öteleme yüzey

tanımlanmıştır (Darboux, 1972:1-524). Crutcher gerçek bir rasyonel yüzeyin öteleme yüzeyi olduğunu matris temsilleriyle ifade etmiştir (Crutcher, 2018: 140-149).

Bu çalışmada bir öteleme yüzeyinin iki rasyonel uzay eğrisinden üretilen bir tensör çarpım yüzeyi olduğu tanımlanmıştır. Öteleme yüzeyleri, dual kuaterniyon çarpımı kullanılarak iki rasyonel uzay eğrisinden elde edildiği tanımlanmıştır. Ayrıca rasyonel yüzeyin öteleme yüzey olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar dual kuaterniyonlar kullanılarak verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde dual sayılar, reel kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlarla ilgili bazı temel tanım ve teoremleri inceleyeceğiz.

2.1. Dual Sayılar

Dual sayılar, reel sayıların, kompleks sayılardakine benzer şekilde, $\varepsilon^2 = 0$ ve $\varepsilon \neq 0$ olacak şekildeki bir elemanla genişletilmesiyle oluşan bir sayı cümlesidir. Dual sayılar cebiri ilk olarak W.K. Clifford (1873) tarafından tanımlanmıştır. E. Study ise ilk kez geometrik olarak yorumlayarak, mekaniğe uygulamalarını vermiştir. Dual sayılar ayrıca Galile düzlem geometrisine karşılık gelir. Bu bölümde dual sayıların cebirsel ve geometrik özelliklerini vereceğiz (Özdemir, 2020 : 150).

Tanım 2.1.1.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $c = (a, b)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi \mathbb{D} ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983: 1):

Tanım 2.1.2. (Toplama)

$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi $c_1 = (a_1, b_1)$ ve $c_2 = (a_2, b_2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} c_1 \oplus c_2 &= (a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve \mathbb{D} deki toplama olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1983: 1).

Tanım 2.1.3. (Çarpma)

$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi $c_1 = (a_1, b_1)$ ve $c_2 = (a_2, b_2)$ olmak üzere,

$$c_1 \odot c_2 = (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

şeklinde tanımlanır ve \mathbb{D} deki çarpma olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1983: 1-2).

Tanım 2.1.4. (Eşitlik)

$c_1 = (a_1, b_1)$ ve $c_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{D}$ için

$a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$

ise c_1 ve c_2 eşittir denir ve $c_1 = c_2$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu, 1983: 2).

Tanım 2.1.5.

\mathbb{R} reel sayılar cümlesi olmak üzere $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde Tanım 2.1.2 (Toplama), Tanım 2.1.3 (Çarpma) ve Tanım 2.1.4 (Eşitlik) tanımlanmış ise \mathbb{D} cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (a, b) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoglu, 1983: 2).

Teorem 2.1.1.

$(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalihoglu, 1983: 2).

Teorem 2.1.2.

$(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalihoglu, 1983: 5).

Tanım 2.1.6.

$A \oplus X = A$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya \mathbb{D} nin sıfırı denir ve $0 = (0, 0)$ ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1983: 6).

Teorem 2.1.3.

\mathbb{D} dual sayılar halkası, \mathbb{R} reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoglu, 1983: 7).

Tanım 2.1.7.

Teorem 2.1.3.'ün sonucu olarak $(a, 0)$ dual sayısı izomorf olduğu a reel sayısı ile gösterilecektir. Yani

$$(a, 0) = a$$

alınacaktır (Hacısalihoglu, 1983: 8).

Tanım 2.1.8.

Bir $c = (a, b) \in \mathbb{D}$ dual sayısında “ a ” reel sayısına c nin reel kısmı, “ b ” reel sayısına da c nin dual kısmı denir ve $\text{Re}(c) = a$, $\text{Du}(c) = b$ şeklinde yazılır (Hacısalihoglu, 1983: 8).

Tanım 2.1.9.

$(1,0) = 1$ dual sayısına \mathbb{D} deki çarpma işleminin birim elemanı veya \mathbb{D} deki reel birim denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 8).

Tanım 2.1.10.

$(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilecektir. Yani

$$(0,1) = \varepsilon$$

alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır (Hacısalıhoğlu, 1983: 8).

Sonuç 2.1.1.

Tanım 2.1.3. gereğince

$$\begin{aligned}\varepsilon \odot \varepsilon &= (0,1) \odot (0,1) \\ &= (0.0, 0.1 + 1.0) \\ &= (0,0) \\ &= 0 \\ &= \varepsilon^2\end{aligned}$$

olduğu görülür (Hacısalıhoğlu, 1983: 8).

Teorem 2.1.4.

$c = (a,b) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $c = (a,b) = a + b\varepsilon$ şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983: 9).

Tanım 2.1.11.

$c = a + b\varepsilon$ dual sayısının eşleniği diye $\bar{c} = a - b\varepsilon$ dual sayısına denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 16).

Tanım 2.1.12.

$c = a + b\varepsilon$ dual sayısının normu,

$$\|c\| = \sqrt{\langle c, c \rangle} = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2} = |a|$$

şeklinde tanımlanır. O halde, $c\bar{c} = |a|^2$ yazılabilir. $\sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{c\bar{c}} = |a|$ reel sayı değerine, c dual sayısının modülü veya normu denir ve $\|c\|$ ile gösterilir (Özdemir, 2020 : 153).

Teorem 2.1.5.

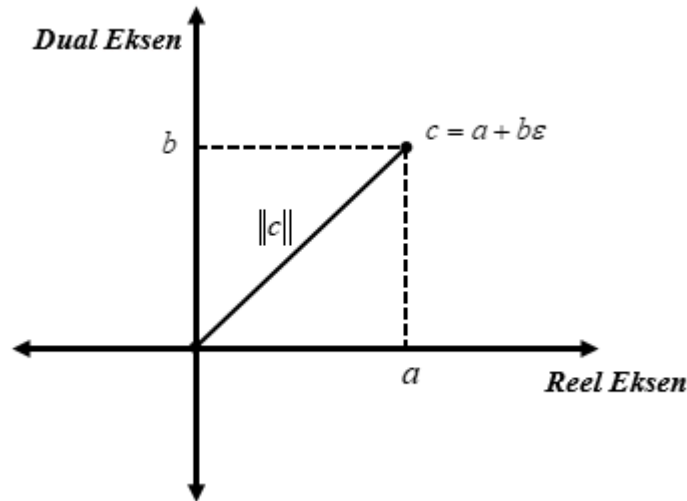
$c = a + b\varepsilon$ dual sayının tersinin olması için gerek ve yeter koşul $a \neq 0$ olmasıdır. $a \neq 0$ ise, $c = a + b\varepsilon$ elemanın tersi

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{\|c\|^2} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{b}{a^2}$$

biçimindedir (Özdemir, 2020 :155).

Tanım 2.1.13.

Herhangi bir dual sayı, reel kısmı apsis ve dual kısmı ordinat olmak üzere iki boyutlu koordinat sisteminde gösterilebilir. Ordinatin dual kısmı ifade etmesiyle elde edilen bu koordinat düzlemine dual sayı düzlemi veya Galile düzlemi denilir. Buna göre, $c = (a, b) = a + b\varepsilon$ dual sayısını şekildeki gibi gösteririz (Özdemir, 2020 : 154).



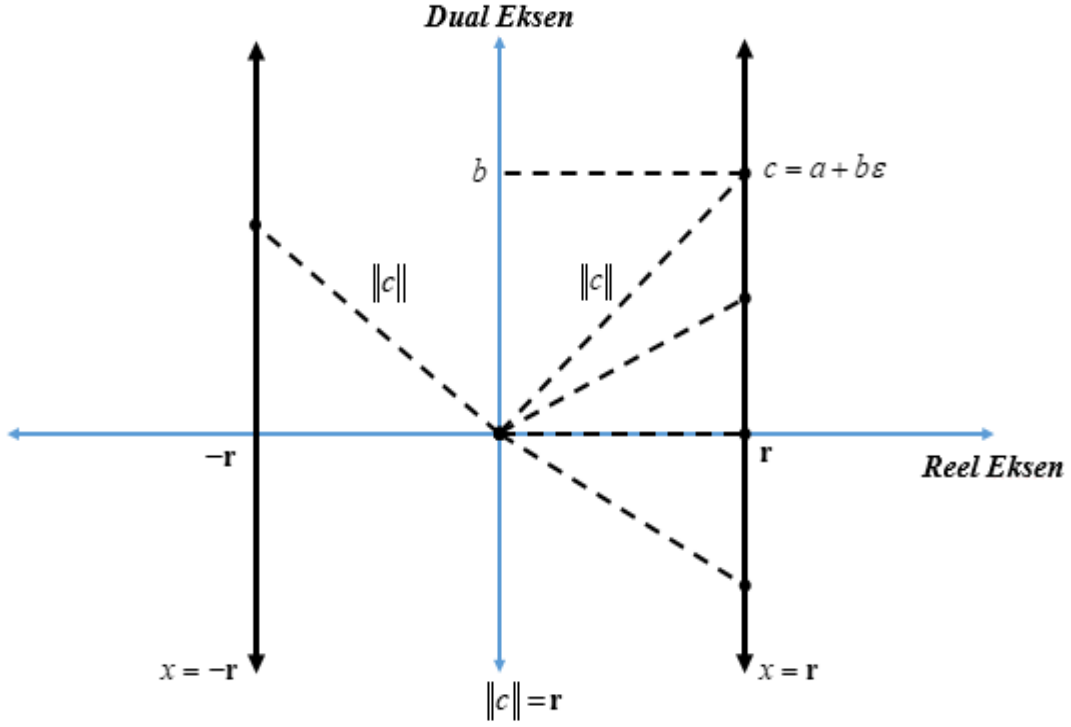
Şekil 2.1. Dual Sayı Düzlemi (Galile Düzlemi).

Tanım 2.1.14.

Dual sayılarda normu r olan dual sayıların geometrik yeri birbirine paralel iki doğru gösterir. $c = a + b\varepsilon$ için,

$$\|c\| = r \Rightarrow \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2} = r \Rightarrow |a| = r$$

olur ki, bu iki paralel doğru, Galile düzleminin çemberi olarak bilinir (Özdemir, 2020 :154).



Şekil 2.2. Galile Çemberi.

Tanım 2.1.15.

θ° herhangi iki doğru arasındaki en kısa uzaklık ve θ bu iki doğru arasındaki açı olmak üzere,

$$\theta'' = \theta + \theta^\circ \varepsilon$$

dual sayısına, dual açı denir (Özdemir, 2020 : 172).

2.2. Reel Kuaterniyonlar

Kuaterniyonların üç boyutlu uzayda dönmelere karşılık gelmesi, vektörel çalışmalarda kullanılması ve kuaterniyonlar yardımıyla küresel geometrinin ve bazı fiziksel denklemlerin yorumlanıp ifade edilmesi bu dörtlü sayıların son yıllarda kullanım alanını oldukça genişletmiştir. Hamilton 1843 yılında Dublin'deki Kraliyet Kanalı boyunca yürürken, yıllardır üzerinde çalıştığı kuaterniyon adı verilen sayı dörtlülerinin temel bağlantılarını keşfetti ve bu keşfini köprüde bulunan bir taşın üzerine yazmıştır (Özdemir, 2020 : 21).

Tanım 2.2.1.

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada, birinci birim $+1$ bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

- i. $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1$
- ii. $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- iii. $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon,

$$r = r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $r_w, r_x, r_y, r_z \in \mathbb{R}$ reel sayılarına r kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla r kuaterniyonu r_w ile gösterilen skaler kısım \vec{V}_r ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere,

$$\vec{V}_r = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$r = r_w + \vec{V}_r$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983: 78-79).

Tanım 2.2.2.

Reel kuaterniyonlar cümlesi \mathbb{K} üzerinde toplama işlemi,

$$\star: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(r, d) \mapsto r \star d = r_w + d_w + \vec{V}_r \star \vec{V}_d = r_w + d_w + \vec{V}_{r \star d}$$

olarak tanımlanır. Burada $r_w, d_w \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi \mathbb{R} deki toplama işlemidir. \vec{V}_r, \vec{V}_d de birer vektör olup \star işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde (\mathbb{K}, \star) ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsünden başka birşey değildir (Hacısalıhoğlu, 1983: 80).

Tanım 2.2.3.

Skaler ile çarpma,

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(k, r) \mapsto k * r = kr = kr_w + k\vec{V}_r$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için $\forall k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall r, d \in \mathbb{K}$ için

- i. $k * (r \boxplus d) = (k * r) \boxplus (k * d)$
- ii. $(k_1 + k_2) * r = (k_1 * r) \boxplus (k_2 * r)$
- iii. $(k_1.k_2) * r = k_1 * (k_2 * r)$
- iv. $1 * r = r$

olup $(\mathbb{K}, \boxplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), *)$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı \mathbb{K} ile göstereceğiz (Hacısalıhoğlu, 1983: 80-81).

Tanım 2.2.4.

Reel kuaterniyon çarpım,

$$\otimes: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(r, d) \mapsto r \otimes d$$

işlemi ,

\otimes	+1	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
+1	+1	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	\vec{i}	-1	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	\vec{j}	$-\vec{k}$	-1	\vec{i}
\vec{k}	\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	-1

yukarıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır. Buna göre

$$\begin{aligned}
r \otimes d &= (r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) \otimes (d_w + d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) \\
&= r_w d_w - (r_x d_x + r_y d_y + r_z d_z) \\
&\quad + (r_w d_x + r_x d_w + r_y d_z - r_z d_y) \vec{i} \\
&\quad + (r_w d_y + r_y d_w + r_z d_x - r_x d_z) \vec{j} \\
&\quad + (r_w d_z + r_z d_w + r_x d_y - r_y d_x) \vec{k}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülür.

- i. İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur.
- ii. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- iii. Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle $(\mathbb{K}, \mathbf{H}, (\mathbb{R}, +, \cdot), *, \otimes)$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca \mathbb{K} ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ve boyutu 4 tür. Özel olarak r ve d skaler iseler veya vektör kısımları orantılı $(\vec{V}_r = k * \vec{V}_d)$ ise

$$r \otimes d = d \otimes r$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1983: 81-82).

Tanım 2.2.5.

Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı $\forall r, d \in \mathbb{K}$ için

$$r = d \Leftrightarrow r_w = d_w \text{ ve } \vec{V}_r = \vec{V}_d$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983: 83).

Tanım 2.2.6.

Kuaterniyonlar için eşlenik

$$K : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$r \mapsto K(r) = r^*$$

işlemi,

$$r = r_w + \vec{V}_r \mapsto r^* = r_w - \vec{V}_r$$

şeklinde tanımlanır ve r^* kuaterniyonuna r nin eşleniği denir. $\vec{V}_{r^*} = -\vec{V}_r$ olduğundan

$$r \otimes r^* = r^* \otimes r = r_w^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983: 83-84).

Tanım 2.2.7.

Kuaterniyonlar cümlesinde, herhangi bir $r = r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \in \mathbb{K}$ kuaterniyonunun normu,

$$\| \cdot \| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$r \rightarrow \|r\| = \sqrt{r_w^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir, 2020: 30).

Teorem 2.2.1.

Kuaterniyonlar cümlesinde tanımlanan,

$$\| \cdot \| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \|r\| = \sqrt{r \otimes r^*}$$

dönüşümü bir normdur (Özdemir, 2020: 30).

Tanım 2.2.8.

Kuaterniyonlar cümlesinde, herhangi bir $r \in \mathbb{K}$ için,

$$r \otimes d = d \otimes r = 1$$

eşitliğini sağlayan, d kuaterniyonuna r kuaterniyonunun tersi denir ve r^{-1} ile gösterilir (Özdemir, 2020 : 32).

Tanım 2.2.9.

Normu 1 olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve r_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir r kuaterniyonunun normlanmışı,

$$r_0 = \frac{r}{\|r\|} = \frac{r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}}{\sqrt{r_w^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

olarak ifade edilir (Hacısalihoglu, 1983: 86-87). Burada birim kuaterniyonlar cümlesini \mathbb{K}_1 ile göstereceğiz.

Teorem 2.2.2.

Her $r \in \mathbb{K}$ kuaterniyonu,

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{V}_r}{\|\vec{V}_r\|}, \cos \theta = \frac{r_w}{\|r\|} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\|\vec{V}_r\|}{\|r\|}$$

olmak üzere,

$$r = \|r\|(\cos \theta + \vec{\mathbf{a}} \sin \theta)$$

formunda yazılabilir. Üstelik, $\vec{\mathbf{a}}^{-2} = -1$ eşitliği sağlanır (Özdemir, 2020 : 35).

Teorem 2.2.3. (De Moivre Formülü)

\mathbb{K} kuaterniyonlar cümlesinde verilen herhangi bir

$$r = \|r\|(\cos \theta + \vec{\mathbf{a}} \sin \theta)$$

kuaterniyonu için, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$r^k = \|r\|^k (\cos k\theta + \vec{\mathbf{a}} \sin k\theta)$$

eşitliği vardır (Özdemir, 2020: 40).

Teorem 2.2.4.

Her $r = \cos \theta + \vec{\mathbf{a}} \sin \theta \in \mathbb{K}_1$ birim kuaterniyonu, birim küre üzerindeki bir büyük çember yayına karşılık gelir (Özdemir, 2020 : 50).

Teorem 2.2.5.

\mathbb{K} kuaterniyonlar cümlesinde, $r, d \in \mathbb{K}$ için,

$$R : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, R_r(d) = r \otimes d \otimes r^{-1}$$

şeklinde tanımlanan R dönüşümü lineer bir dönüşümdür (Özdemir, 2020: 67).

Teorem 2.2.6.

\mathbb{K} kuaterniyonlar cümlesinde, $r, d \in \mathbb{K}$ için,

$$R : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, R_r(d) = r \otimes d \otimes r^{-1}$$

şeklinde tanımlanan R lineer dönüşümü, normu ve d kuaterniyonunun skaler kısmını korur (Özdemir, 2020 : 68).

Teorem 2.2.7.

\mathbb{K}_1 birim kuaterniyonlar cümlesinde verilen bir $r = \cos \theta + \vec{\mathbf{a}} \sin \theta \in \mathbb{K}_1$ birim kuaterniyonu için, $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$

$$R_r(\vec{v}) = r \otimes \vec{v} \otimes r^{-1}$$

dönüşümü, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ dönme eksenini etrafında 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder (Özdemir, 2020 : 68).

Sonuç 2.2.1.

\mathbb{K}_1 birim kuaterniyonlar cümlesinde verilen bir

$$r = \cos \theta + \vec{a} \sin \theta \in \mathbb{K}_1$$

birim kuaterniyonu için,

$$R_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v} \mapsto R_r(\vec{v}) = r \otimes \vec{v} \otimes r^{-1}$$

dönüşümü, \vec{v} vektörünü $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ vektörüne dik düzlemde 2θ açısı kadar döndürür (Özdemir, 2020 : 70).

Teorem 2.2.8.

Birim küre üzerindeki bir A noktasını, B noktasına götüren dönmeye karşılık gelen kuaterniyon $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$ ve $\cos \theta = \langle u, v \rangle$ olmak üzere

$$r = r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = \cos \frac{\theta}{2} + \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{a} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.2)$$

ile belirlidir (Özdemir, 2020 : 75).

2.3. Dual Kuaterniyonlar

Bileşenleri dual sayı olan kuaterniyonlara dual kuaterniyon denir. Dual kuaterniyon cebiri 8 boyutlu bir reel cebir olarak düşünülebilir. Dual kuaterniyon kavramı 1898 yılında Alexander McAulay tarafından tanımlanmış, daha sonra da Rus matematikçi Aleksandr Kotelnikov tarafından mekanik problemlerine uygulanmıştır (Özdemir, 2020 : 175).

Tanım 2.3.1.

İki reel kuaterniyon,

$$r = r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$d = d_w + d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

olmak üzere bir dual kuaterniyon

$$\sigma = r + d\varepsilon, \varepsilon^2 = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu dual kuaterniyonu

$$\sigma = c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

olarak da yazmak mümkündür. Burada

$$c = r_w + d_w \varepsilon, c_x = r_x + d_x \varepsilon, c_y = r_y + d_y \varepsilon, c_z = r_z + d_z \varepsilon$$

dur ve σ 'nun dual bileşenleri olarak adlandırılır. Bu dual kuaterniyonun skaler ve vektör kısımları, sırasıyla S_σ ve \vec{V}_σ ile gösterilirse

$$S_\sigma = r_w + d_w \varepsilon = c$$

$$\vec{V}_\sigma = \vec{V}_r + \vec{V}_d \varepsilon = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

elde edilir. Bir dual kuaterniyonunun skaler kısmı bir dual sayıdır ve vektör kısmı da bir dual vektördür (Hacısalıhoğlu, 1983: 103-104). Dual kuaterniyonlar cümlesini $\mathbb{K}_\mathbb{D}$ ile gösterelim.

Tanım 2.3.2.

Skaler kısmı sıfır olan dual kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{K}_\mathbb{D}^0 = \left\{ c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} : c_x, c_y, c_z \in \mathbb{D}, \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = \vec{i}\vec{j}\vec{k} = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu cümlenin elemanlarına da has (pür) dual kuaterniyon denir (Özdemir, 2020 : 175).

Tanım 2.3.3.

Bir dual kuaterniyonun hem reel hem de dual kısmı ayrı ayrı sıfır kuaterniyonlar iseler dual kuaterniyona sıfırdır denir (Hacısalıhoğlu, 1983: 105). Yani;

$$\sigma = r + d\varepsilon = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ve } d = 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.3.4.

İki dual kuaterniyonun reel ve dual kısımları, karşılıklı olarak, eşit iseler bu iki dual kuaterniyona eşittirler denir (Hacısalihoglu, 1983: 105). Yani;

$$\sigma_1 = r_1 + d_1\varepsilon, \sigma_2 = r_2 + d_2\varepsilon \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$$

olsun.

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow r_1 + d_1\varepsilon = r_2 + d_2\varepsilon \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ ve } d_1 = d_2$$

olmasıdır.

Tanım 2.3.5.

İki dual kuaterniyonun toplamı karşılıklı olarak bu iki dual kuaterniyonun reel ve dual kısımlarının toplamıyla elde edilir (Hacısalihoglu, 1983: 105). Yani;

$$\dot{+} : \mathbb{K}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{K}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \dot{+} \sigma_2 = (r_1 \dot{+} r_2) + (d_1 \dot{+} d_2)\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6.

Dual kuaterniyonlar cümlesi $\mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ üzerinde çarpma işlemi

$$\otimes : \mathbb{K}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{K}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \otimes \sigma_2 = r_1 \otimes r_2 + (r_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes r_2)\varepsilon$$

$$(\sigma_2, \sigma_1) \mapsto \sigma_2 \otimes \sigma_1 = r_2 \otimes r_1 + (r_2 \otimes d_1 + d_2 \otimes r_1)\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır.

- i. Genel olarak, dual kuaterniyon çarpımı dual kuaterniyonları verir. Bununla beraber $(r_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes r_2) = 0$ ise $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ çarpımı bir reel kuaterniyona indirgenir. Benzer şekilde $(r_2 \otimes d_1 + d_2 \otimes r_1) = 0$ ise $\sigma_2 \otimes \sigma_1$ çarpımı da bir reel kuaterniyona indirgenir.
- ii. Dual kuaterniyonlar çarpımı genel olarak komutatif değildir. σ_1 ve σ_2 orantılı ise (yani k bir skaler olmak üzere $\sigma_1 = k * \sigma_2$) $\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_1$ olur.
- iii. Dual kuaterniyon çarpımları dağılımlıdır.
- iv. Dual kuaterniyon çarpımları birleşimlidir (Hacısalihoglu, 1983: 105-106).

Tanım 2.3.7.

$\sigma = c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun kuaterniyonik eşleniği

$$\sigma^* = c - c_x \vec{i} - c_y \vec{j} - c_z \vec{k}$$

biçiminde, dual eşleniği ise, dual sayıların eşlenikleri alınarak

$$\sigma^\bullet = \bar{c} + \bar{c}_x \vec{i} + \bar{c}_y \vec{j} + \bar{c}_z \vec{k}$$

biçiminde tanımlanır. Hem kuaterniyonun, hem de dual sayıların eşlenikleri alınarak elde edilen

$$\sigma^\diamond = \bar{c} - \bar{c}_x \vec{i} - \bar{c}_y \vec{j} - \bar{c}_z \vec{k}$$

dual kuaterniyonuna da, σ dual kuaterniyonunun toplam eşleniği denir. Buna göre, eğer

$$\sigma = r + d\varepsilon$$

ise, eşlenik, dual eşlenik ve toplam eşlenik sırasıyla

- i.** $\sigma^* = r^* + d^* \varepsilon$
- ii.** $\sigma^\bullet = r - d\varepsilon$
- iii.** $\sigma^\diamond = r^* - d^* \varepsilon$

biçiminde tanımlanır (Özdemir, 2020 : 177).

Teorem 2.3.1.

Bir dual kuaterniyonun eşleniği, dual eşleniği ve toplam eşleniği ile ilgili aşağıdaki

- i.** $(\sigma + \omega)^* = \sigma^* + \omega^*$
- ii.** $(\sigma \otimes \omega)^\bullet = \omega^\bullet \otimes \sigma^\bullet$
- iii.** $(\sigma^*)^* = \sigma$
- iv.** $(\sigma + \omega)^\bullet = \sigma^\bullet + \omega^\bullet$
- v.** $(\sigma \otimes \omega)^\bullet = \sigma^\bullet \otimes \omega^\bullet$
- vi.** $(\sigma^\bullet)^\bullet = \sigma$
- vii.** $(\sigma + \omega)^\diamond = \sigma^\diamond + \omega^\diamond$
- viii.** $(\sigma \otimes \omega)^\diamond = \omega^\diamond \otimes \sigma^\diamond$

özellikler sağlanır (Özdemir, 2020 : 177).

Tanım 2.3.8.

$\sigma = c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonun normu :

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &= \sqrt{\sigma \otimes \sigma^*} \\ &= \sqrt{\sigma^* \otimes \sigma} \\ &= \sqrt{c^2 + c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \end{aligned}$$

ile tanımlanan dual sayıya eşittir. Eğer $\|\sigma\| = 1$ ise, σ birim dual kuaterniyondur denir. Bir

$$\begin{aligned} \sigma &= c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \\ &= (r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) + \varepsilon (d_w + d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) \\ &= r + d\varepsilon \end{aligned}$$

dual kuaterniyonunun birim olması için

$$\|r\| = 1$$

ve

$$\langle r, d \rangle = 0$$

koşullarını sağlaması gerekir.

Yani, $\sigma = (r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) + \varepsilon (d_w + d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) = r + d\varepsilon$ birim olması için

$$r_w^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

$$r_w d_w + r_x d_x + r_y d_y + r_z d_z = 0$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Herhangi bir σ dual kuaterniyonu için,

$$\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$$

dual kuaterniyonu bir birim dual kuaterniyondur (Özdemir, 2020 : 178).

Sonuç 2.3.1.

Tanım 2.3.7. den dikkat edilirse

$$\sigma \otimes \sigma^* = \|r\|^2 + 2(r_w d_w + \vec{V}_r \cdot \vec{V}_d) \varepsilon \quad (2.3)$$

olur (Wang ve Goldman, 2018: 71).

İspat:

$$\begin{aligned} \sigma \otimes \sigma^* &= (r + d\varepsilon) \otimes (r^* + d^* \varepsilon) \\ &= r \otimes r^* + (r \otimes d^* + d \otimes r^*) \varepsilon \\ &= (r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) \otimes (r_w - r_x \vec{i} - r_y \vec{j} - r_z \vec{k}) \\ &\quad + \left[(r_w + r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) \otimes (d_w - d_x \vec{i} - d_y \vec{j} - d_z \vec{k}) \right. \\ &\quad \left. + (d_w + d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) \otimes (r_w - r_x \vec{i} - r_y \vec{j} - r_z \vec{k}) \right] \varepsilon \\ &= r_w^2 - r_w r_x \vec{i} - r_w r_y \vec{j} - r_w r_z \vec{k} + r_w r_x \vec{i} + r_x^2 - r_x r_y \vec{k} + r_x r_z \vec{j} \\ &\quad + r_w r_y \vec{j} + r_x r_y \vec{k} + r_y^2 - r_y r_z \vec{i} + r_w r_z \vec{k} - r_x r_z \vec{j} + r_y r_z \vec{i} + r_z^2 \\ &\quad + (r_w d_w - r_w d_x \vec{i} - r_w d_y \vec{j} - r_w d_z \vec{k} + r_x d_w \vec{i} + r_x d_x - r_x d_y \vec{k} \\ &\quad + r_x d_z \vec{j} + r_y d_w \vec{j} + r_y d_x \vec{k} + r_y d_y - r_y d_z \vec{i} + r_z d_w \vec{k} - r_z d_x \vec{j} \\ &\quad + r_z d_y \vec{i} + r_z d_z + r_w d_w - r_x d_w \vec{i} - r_y d_w \vec{j} - r_z d_w \vec{k} + r_w d_x \vec{i} \\ &\quad + r_x d_x - r_x d_x \vec{k} + r_z d_x \vec{j} + r_w d_y \vec{j} + r_x d_y \vec{k} + r_y d_y - r_z d_y \vec{i} \\ &\quad + r_w d_z \vec{k} - r_x d_z \vec{j} + r_y d_z \vec{i} + r_z d_z) \varepsilon \\ &= r_w^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 + (2r_w d_w + 2r_x d_x + 2r_y d_y + 2r_z d_z) \varepsilon \\ &= \|r\|^2 + 2(r_w d_w + r_x d_x + r_y d_y + r_z d_z) \varepsilon \\ &= \|r\|^2 + 2(r_w d_w + \vec{V}_r \cdot \vec{V}_d) \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $\sigma \otimes \sigma^*$, r ve d 4-boyutta ortogonal vektörler ve $r_w d_w + \vec{V}_r \cdot \vec{V}_d = 0$ olmadıkça bir reel sayı değildir, bir dual sayıdır.

Tanım 2.3.9.

Bir $\sigma = c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun tersi,

$$\sigma^{-1} = \frac{\sigma^*}{\|\sigma\|^2}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Tersinin tanımlı olması için, $\|\sigma\|$ dual sayı değerinin reel kısmının sıfırdan farklı olması gerekir. Bu ise $\sigma = r + d\varepsilon$ yazılışında, $\|r\| \neq 0$ olması durumunda sağlanır. $\|r\| = 0$ olması, sadece c, c_x, c_y, c_z dual sayılarının tamamının reel kısmının sıfır olması durumunda mümkündür. O halde, $\sigma = r + d\varepsilon$ dual kuaterniyonunda $r \neq 0$ ise, σ^{-1} tanımlıdır ve

$$\sigma^{-1} = r^{-1} \otimes (1 - \varepsilon d \otimes r^{-1})$$

ile bulunur. $\sigma = d\varepsilon$ formundaki dual kuaterniyonların tersi yoktur.

$$\begin{aligned} \sigma \otimes \sigma^{-1} &= (r + d\varepsilon) \otimes (r^{-1} \otimes (1 - \varepsilon d \otimes r^{-1})) \\ &= (1 + \varepsilon d \otimes r^{-1}) \otimes (1 - \varepsilon d \otimes r^{-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur (Özdemir, 2020 : 180).

Teorem 2.3.2.

$\sigma, \omega \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları ve $c \in \mathbb{D}$ dual sayısı için, tersleri var ise aşağıdaki

- i. $(\sigma \otimes \omega)^{-1} = \omega^{-1} \otimes \sigma^{-1}$
- ii. $(c.\sigma)^{-1} = \frac{1}{c}.\sigma^{-1}$

özellikler sağlanır (Özdemir, 2020 : 180).

Tanım 2.3.10.

$\sigma = c + c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \in \mathbb{K}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun $\|\sigma\|$ normunun reel kısmı sıfırdan farklı olsun. Bu durumda,

$$\sigma = \|\sigma\| \left(\frac{c}{\|\sigma\|} + \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}{\|\sigma\|} \cdot \frac{c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}} \right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$\cos \theta = \frac{c}{\|\sigma\|},$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}{\|\sigma\|}$$

$$N = \frac{c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}$$

denilirse, $\sigma = \|\sigma\|(\cos \theta + N \sin \theta)$ olacaktır. Bu ifadeye, σ dual kuaterniyonun kutupsal gösterimi denir. Bu gösterimde $N^2 = -1$ olduğunu görebiliriz. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} N^2 &= -\langle N, N \rangle + N \times N \\ &= -\frac{b^2 + c^2 + d^2}{b^2 + c^2 + d^2} = -1 \end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi bir dual kuaterniyonu

$$\sigma = \|\sigma\|(\cos \theta + N \sin \theta)$$

biçiminde yazalım. Burada, $\|\sigma\|$, $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ ifadeleri birer dual sayıdır. Bu durumda, kuaterniyonik, dual ve toplam eşlenik sırasıyla

$$\sigma^* = \|\sigma\|(\cos \theta - N \sin \theta)$$

$$\sigma^\bullet = \|\sigma\|^\bullet \left((\cos \theta)^\bullet + N^\bullet (\sin \theta)^\bullet \right)$$

$$\sigma^\diamond = \|\sigma\|^\diamond \left((\cos \theta)^\diamond - N^\diamond (\sin \theta)^\diamond \right)$$

biçiminde tanımlanır (Özdemir, 2020 :181).

Teorem 2.3.3.

$r = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2}$ birim kuaterniyon ve $\vec{\mathbf{b}}$ herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\sigma = r + \frac{\varepsilon}{2} \vec{\mathbf{b}} \otimes r$$

biçiminde tanımlanan dual kuaterniyon birim dual kuaterniyondur. Burada

$$\begin{aligned} \sigma &= r + \frac{\varepsilon}{2} \vec{\mathbf{a}} \otimes r \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \vec{\mathbf{b}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\vec{\mathbf{b}} \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\vec{\mathbf{b}} \cos \frac{\theta}{2} + (-\langle \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle + \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}) \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

biçiminde de ifade edebiliriz (Özdemir, 2020 : 182).

Tanım 2.3.11.

Herhangi bir p noktası için,

$$\rho = 1 + \varepsilon p$$

biçiminde tanımlanan dual kuaterniyona, p noktasına karşılık gelen dual kuaterniyon denir.

\mathbb{R}^3 uzayının noktalarına karşılık gelen dual kuaterniyonların cümlesini $\mathbb{K}_{\mathbb{D}}^1$ ile gösterelim (Özdemir, 2020 : 183).

Teorem 2.3.4.

$r = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2}$ birim kuaterniyon ve $\vec{\mathbf{b}}$ herhangi bir vektör olmak üzere ,

$$\sigma = r + \frac{\varepsilon}{2} \vec{\mathbf{b}} \otimes r$$

dual kuaterniyonu verilsin. Herhangi bir p noktasına karşılık gelen dual kuaterniyon

$\rho = 1 + \varepsilon p$ olmak üzere,

$$R_{\sigma}^T : \mathbb{K}_{\mathbb{D}}^1 \rightarrow \mathbb{K}_{\mathbb{D}}^1$$

$$p \rightarrow R_{\sigma}^T(p) = \sigma(1 + \varepsilon p)\sigma^*$$

dönüşümüyle elde edilen dual kuaterniyona karşılık gelen nokta, p noktasının $\vec{\mathbf{a}}$ vektörü etrafında θ açısı kadar döndürülüp, $\vec{\mathbf{b}}$ vektörü kadar ötelenmesiyle elde edilen noktadır (Özdemir, 2020 : 183).

Teorem 2.3.5.

$r = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\mathbf{a}} \sin \frac{\theta}{2}$ birim kuaterniyon ve $\vec{\mathbf{b}}$ herhangi bir vektör olmak üzere ,

$$\sigma = r + \frac{\varepsilon}{2} r \otimes \vec{\mathbf{b}}$$

dual kuaterniyonu verilsin. Herhangi bir p noktasına karşılık gelen dual kuaterniyon $\rho = 1 + \varepsilon p$ olmak üzere,

$$T_\sigma^R : \mathbb{K}_\mathbb{D}^1 \rightarrow \mathbb{K}_\mathbb{D}^1$$

$$p \rightarrow T_\sigma^R(p) = \sigma(1 + \varepsilon p)\sigma^*$$

dönüşümüyle elde edilen dual kuaterniyona karşılık gelen nokta, p noktasının $\vec{\mathbf{b}}$ vektörü kadar ötelenip, $\vec{\mathbf{a}}$ vektörü etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen noktadır (Özdemir, 2020 : 185).

Eğer bu dönüşümde $\vec{\mathbf{b}} = (0, 0, 0)$ olursa eşitlik (2.3.3.) ten $\sigma = r$ olur ve sadece dönmeye karşılık gelir. Eğer $\theta = 0$ olursa eşitlik (2.3.3.) ten $\sigma = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \vec{\mathbf{b}}$ olur ve sadece ötelemeye karşılık gelir.

Tanım 2.3.12.

Bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen doğrultusunda ötelenmeyi ifade eden hareketlere vida hareketi denir. Bu hareketi yaptıran operatöre de vida operatörü denir (Özdemir, 2020 : 186).

Sonuç 2.3.2.

3-boyutta dönmelerin birim kuaterniyonlar ile temsil edilme şekline benzer şekilde, 3-boyutta katı hareketler birim dual kuaterniyonlar ile temsil edilebilir. 3 boyutlu bir (v_x, v_y, v_z) konum vektörü $v := 1 + (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \varepsilon$ dual kuaterniyon gösterimi oluşturularak dönüştürülebilir. Sonra σ ya bir v dönüşümü verilir (Wang ve Goldman, 2018: 72). Yani

$$\begin{aligned}
v' &= \sigma \otimes v \otimes \sigma^* \\
&= \left(r + \frac{\vec{t} \otimes r}{2} \varepsilon \right) \otimes (1 + \vec{v} \varepsilon) \otimes \left(r^* - \frac{(\vec{t} \otimes r)^*}{2} \varepsilon \right) \\
&= \left(r + (r \otimes \vec{v}) \varepsilon + \frac{\vec{t} \otimes r}{2} \varepsilon \right) \otimes \left(r^* - \frac{(\vec{t} \otimes r)^*}{2} \varepsilon \right) \\
&= \left(r + \left(r \otimes \vec{v} + \frac{\vec{t} \otimes r}{2} \right) \varepsilon \right) \otimes \left(r^* - \frac{(\vec{t} \otimes r)^*}{2} \varepsilon \right) \\
&= r \otimes r^* - \frac{r \otimes (\vec{t} \otimes r)^*}{2} \varepsilon + \left(\left(r \otimes \vec{v} + \frac{\vec{t} \otimes r}{2} \right) \otimes r^* \right) \varepsilon \\
&= 1 - \frac{r \otimes r^* \otimes \vec{t}}{2} \varepsilon + \left(r \otimes \vec{v} \otimes r^* + \frac{\vec{t} \otimes r \otimes r^*}{2} \right) \varepsilon \\
&= 1 - \frac{\vec{t}}{2} \varepsilon + \left(r \otimes \vec{v} \otimes r^* + \frac{\vec{t} \otimes r \otimes r^*}{2} \right) \varepsilon \\
&= 1 - \frac{\vec{t}}{2} \varepsilon + \left(r \otimes \vec{v} \otimes r^* + \frac{\vec{t}}{2} \right) \varepsilon \\
&= 1 + \frac{\vec{t}}{2} \varepsilon + (r \otimes \vec{v} \otimes r^*) \varepsilon + \frac{\vec{t}}{2} \varepsilon \\
&= 1 + (r \otimes \vec{v} \otimes r^* + \vec{t}) \varepsilon \tag{2.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r \otimes \vec{v} \otimes r^*$, r tarafından döndürüldükten sonra vektörü temsil eden saf bir kuarterniyondur.

3. ÖTELEME YÜZEYLER

Öteleme yüzeyleri mimarlık ve bilgisayardaki tasarımlara yardım eden yüzeylerdir. Kuadrik yüzeyler eliptik silindir, parabolik silindir, hiperbolik silindir, eliptik paraboloid ve hiperbolik silindir gibi yüzeyler ötelenerek öteleme yüzeyleri oluştururlar.

Modern mimaride ise öteleme yüzeyler karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan bazıları ise



Şekil 3.1. Chadstone Alışveriş Merkezi – Avustralya.
Kaynak: (Chadstone Shopping Centre, 2021)



Şekil 3.2. Ciudad de las Artes y las Ciencias – İspanya.
Kaynak: (Ciudad de las Artes y las Ciencias , 2021)



Şekil 3.3. Capital Gate – Birleşik Arap Emirlikleri.
Kaynak:(Capital Gate, 2021)



Şekil 3.4. Gaziantep Kalyon Stadyumu – Türkiye.
Kaynak:(Gaziantep Kalyon Stadyumu, 2021)

Tanım 3.1.

I, \mathbb{R} nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$o: I \rightarrow E^n$$

fonksiyonuna E^n de bir eğri denir. Bir $t \in I$ değerine karşılık eğrinin, elde edilen $o(t)$ noktası;

$$o(t) = (o_1(t), \dots, o_n(t))$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 2002 : 139).

Tanım 3.2.

$o: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için o nun $o(t)$ noktasındaki,

$$o'(t) = \frac{do}{dt} \Big|_t = \left(\frac{do_1}{dt}(t), \dots, \frac{do_n}{dt}(t) \right)$$

vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve $(o(t), o'(t))$ ikilisine bir tanjant vektör adı verilir.

Kısaca $o'(t)$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2002 : 143).

Tanım 3.3.

$o: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için o nun $o(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, o eğrisine regüler bir eğri denir (Carmo, 1976).

Tanım 3.4.

E^n , n - boyutlu öklid uzayında $(n-1)$ -boyutlu bir yüzey, veya $(n-1)$ -yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^n \mid f: U \xrightarrow{\text{dif. bilir}} \mathbb{R}, f(x) = c, \nabla f|_p \neq 0, \forall P \in M\}$$

biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)$ yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 2012 : 23).

Tanım 3.5.

M ve N iki diferensiyellenebilir manifold ve $f: M \rightarrow E^m$ ve $g: N \rightarrow E^n$ iki immersiyon olsun. Sırasıyla, direkt toplam ve tensör çarpım dönüşümleri

$$f \boxplus g : M \times V \rightarrow E^{m+n}$$

$$(f \boxplus g)(p, q) = (f_1(p), \dots, f_m(p), g_1(q), \dots, g_n(q)),$$

$$f \boxtimes g : M \times N \rightarrow E^{mn}$$

$$(f \boxtimes g)(p, q) = (f_1(p)g_1(q), \dots, f_1(p)g_n(q), \dots, f_m(p)g_1(q), \dots, f_m(p)g_n(q)),$$

olarak tanımlanır (Chen, 1990), (Decruyenaere, 1993).

$f \boxtimes g$ tensör çarpım dönüşümünün de E^{mn} uzayında bir immersiyon olduğu Decruyenaere tarafından elde edilmiştir.

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow E^2, \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$$

$$\eta : \mathbb{R} \rightarrow E^2, \eta(s) = (\eta_1(s), \eta_2(s))$$

iki öklidiyen düzlemsel eğri olsun. Bu durumda bu eğrilerin tensör çarpımı

$$f = \psi \boxtimes \eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow E^4$$

$$f(t, s) = (\psi_1(t)\eta_1(s), \psi_1(t)\eta_2(s), \psi_2(t)\eta_1(s), \psi_2(t)\eta_2(s))$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6.

$$h^1 : E^2 \rightarrow E^3$$

$$(s, t) \mapsto (s, t, f^1(s, t))$$

şeklinde tanımlanan yüzey Monge yüzeyi adını alır (Burada, $f^1 : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.)

(Hacısalıhoğlu, 2012).

Tanım 3.7.

Tanım 3.6. da verilen Monge yüzeyinde ,

$$f^1(s, t) = m^1(s) + n^1(t)$$

biçiminde ise bu yüzeyi

$$h^1(s, t) = (s, t, m^1(s) + n^1(t))$$

$$h^1(s, t) = (s, 0, m^1(s)) + (0, t, n^1(t))$$

veya

$$h^1(s, t) = \alpha^1(s) + \gamma^1(t) \quad (3.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda yüzey, öteleme yüzeyi adını alır (Hacısalihoglu, 2012).

Burada

$$\alpha^1(s) = \left(\frac{\alpha_1(s)}{\alpha_0(s)}, \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_0(s)}, \frac{\alpha_3(s)}{\alpha_0(s)} \right), \gamma^1(t) = \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\gamma_3(t)}{\gamma_0(t)} \right) \quad (3.2)$$

eğer $i = 1, 2, 3$ için $\alpha_i \in \mathbb{R}[s]$, $\gamma_i \in \mathbb{R}[t]$, $\max(\deg(\alpha_i(s))) = m$, $\max(\deg(\gamma_i(t))) = n$ ve $ebob(\alpha_i) = ebob(\gamma_i) = 1$ ise $h^1(s, t)$ öteleme yüzeyi ikinci derece (m, n) 'nin rasyonel bir tensor çarpımıdır. Burada $s, t \in \mathbb{R}$ olarak alınacaktır.

Öteleme yüzeylerin geometrisini anlamak için bazen bu oransal yüzeylerin homojen bir temsilini düşünmek gerekir. Eşitlik (3.2)'de $\alpha^1(s)$ ve $\gamma^1(t)$ rasyonel uzay eğrilerinin homojen temsilleri

$$\alpha(s) = [\alpha_0(s), \alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)],$$

$$\gamma(t) = [\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)]$$

şeklinde verilmiştir (Wang ve Goldman, 2018: 72).

Şimdi $\alpha^1(s)$ ve $\gamma^1(t)$ rasyonel uzay eğrilerini

$$\alpha(s) = \alpha_0(s) + (\alpha_1(s)\vec{i} + \alpha_2(s)\vec{j} + \alpha_3(s)\vec{k})\varepsilon$$

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + (\gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j} + \gamma_3(t)\vec{k})\varepsilon$$

şeklinde iki dual kuaterniyon olarak ele alalım. Burada $\alpha_0(s)$ ve $\gamma_0(t)$, $\alpha^1(s)$ ve $\gamma^1(t)$ dual kuaterniyonlarının reel kısımlarıdır.

Önerme 3.1.

$\alpha^1(s)$ ile $\gamma^1(t)$ 'nin dual kuaterniyon çarpımı bir rasyonel tensör çarpım yüzeyi oluşturur.

İspat :

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) \otimes \gamma'(t) &= \left(\alpha_0(s) + \left(\alpha_1(s)\vec{i} + \alpha_2(s)\vec{j} + \alpha_3(s)\vec{k} \right) \varepsilon \right) \otimes \\
&\quad \left(\gamma_0(t) + \left(\gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j} + \gamma_3(t)\vec{k} \right) \varepsilon \right) \\
&= \alpha_0(s)\gamma_0(t) + \alpha_0(s)\gamma_1(t)\vec{i}\varepsilon + \alpha_0(s)\gamma_2(t)\vec{j}\varepsilon + \alpha_0(s)\gamma_3(t)\vec{k}\varepsilon + \\
&\quad \alpha_1(s)\gamma_0(t)\vec{i}\varepsilon + \alpha_2(s)\gamma_0(t)\vec{j}\varepsilon + \alpha_3(s)\gamma_0(t)\vec{k}\varepsilon \\
&= \alpha_0(s)\gamma_0(t) + \left(\alpha_0(s)\gamma_1(t) + \alpha_1(s)\gamma_0(t) \right) \vec{i}\varepsilon + \\
&\quad \left(\alpha_0(s)\gamma_2(t) + \alpha_2(s)\gamma_0(t) \right) \vec{j}\varepsilon + \left(\alpha_0(s)\gamma_3(t) + \alpha_3(s)\gamma_0(t) \right) \vec{k}\varepsilon \\
&= \left[\alpha_0(s)\gamma_0(t), \alpha_0(s)\gamma_1(t) + \alpha_1(s)\gamma_0(t), \alpha_0(s)\gamma_2(t) + \right. \\
&\quad \left. \alpha_2(s)\gamma_0(t), \alpha_0(s)\gamma_3(t) + \alpha_3(s)\gamma_0(t) \right] \\
&= \left[h_0(s,t), h_1(s,t), h_2(s,t), h_3(s,t) \right] \\
&= \left(\frac{\alpha_0(s)\gamma_1(t) + \alpha_1(s)\gamma_0(t)}{\alpha_0(s)\gamma_0(t)}, \frac{\alpha_0(s)\gamma_2(t) + \alpha_2(s)\gamma_0(t)}{\alpha_0(s)\gamma_0(t)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha_0(s)\gamma_3(t) + \alpha_3(s)\gamma_0(t)}{\alpha_0(s)\gamma_0(t)} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha_1(s)}{\alpha_0(s)} + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_0(s)} + \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\alpha_3(s)}{\alpha_0(s)} + \frac{\gamma_3(t)}{\gamma_0(t)} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha_1(s)}{\alpha_0(s)}, \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_0(s)}, \frac{\alpha_3(s)}{\alpha_0(s)} \right) + \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_0(t)}, \frac{\gamma_3(t)}{\gamma_0(t)} \right) \\
&= \alpha'(s) + \gamma'(t) \\
&= h'(s,t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada \otimes dual kuaterniyon çarpımını belirtir.

Önerme 3.2.

Öteleme yüzeyler, şu anlamda katı hareketler altında invaryant kalır:

i. Bir öteleme yüzeyine dönme uygulamak, yüzeyi oluşturan rasyonel uzay eğrilerinin herbirine aynı dönmeyi uygulamaya eşdeğerdir.

ii. Bir öteleme yüzeyine öteleme uygulamak, aynı ötelemeyi yüzeyi oluşturan eğrilerden ikisinden birine uygulamaya veya daha genel olarak $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\lambda + \mu = 1$ için yüzeyi oluşturan rasyonel uzay eğrilerinden birine λ kez aynı ötelemeyi uygulamak ve yüzeyi oluşturan diğer rasyonel uzay eğrisine μ kez aynı ötelemeyi uygulamaya eşdeğerdir.

İspat:

Bir öteleme yüzeyine bir r dönmesi uygulamak eşitlik (2.5) denkleminde $\sigma = r$ almak demektir.

$$\begin{aligned}\sigma \otimes h \otimes \sigma^\diamond &= r \otimes (\alpha \otimes \gamma) \otimes r^* \\ &= r \otimes (\alpha \otimes r^* \otimes r \otimes \gamma) \otimes r^* \\ &= (r \otimes \alpha \otimes r^*) \otimes (r \otimes \gamma \otimes r^*)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece öteleme yüzeyine bir dönme uygulamak, yüzeyi oluşturan rasyonel uzay eğrilerinin herbirine aynı dönmeyi uygulamaya eşdeğerdir.

Diğer yandan, bir öteleme yüzeyine bir \vec{t} ötelemesi uygulamak, eşitlik (2.5) denkleminde $\sigma = 1 + \frac{\vec{t}}{2}\varepsilon$ almak demektir. Şimdi $\delta_\lambda = 1 + \lambda \frac{\vec{t}}{2}\varepsilon$ ve $\delta_\mu = 1 + \mu \frac{\vec{t}}{2}\varepsilon$ olsun. Burada $\lambda + \mu = 1$, λ ve μ kere aynı \vec{t} ötelemesini temsil eder. O halde $\sigma = \delta_\lambda \otimes \delta_\mu$ dir. Dolayısıyla $\sigma, \sigma^\diamond, \delta_\lambda, \delta_\lambda^\diamond$ ve $\delta_\mu, \delta_\mu^\diamond$ birbirleriyle olduğu kadar tüm noktalarda da yer değiştirdiğinden $\sigma^\diamond = \sigma, \delta_\lambda = \delta_\lambda^\diamond$ ve $\delta_\mu = \delta_\mu^\diamond$ dir.

$$\begin{aligned}\sigma \otimes h \otimes \sigma^\diamond &= \sigma \otimes \alpha \otimes \gamma \otimes \sigma^\diamond \\ &= (\sigma \otimes \alpha \otimes \sigma^\diamond) \otimes \gamma\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sigma \otimes h \otimes \sigma^\diamond &= \sigma \otimes \alpha \otimes \gamma \otimes \sigma^\diamond \\ &= \alpha \otimes (\sigma \otimes \gamma \otimes \sigma^\diamond)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sigma \otimes h \otimes \sigma^\diamond &= \sigma \otimes \alpha \otimes \gamma \otimes \sigma^\diamond \\ &= (\delta_\lambda \otimes \delta_\mu \otimes \alpha) \otimes (\gamma \otimes \delta_\lambda^\diamond \otimes \delta_\mu^\diamond) \\ &= (\delta_\lambda \otimes \alpha \otimes \delta_\lambda^\diamond) \otimes (\delta_\mu \otimes \gamma \otimes \delta_\mu^\diamond)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle, bir öteleme yüzeyine bir öteleme uygulamak, aynı ötelemeyi yüzeyi oluşturan eğrilerden ikisinden birine uygulamaya veya daha genel olarak $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\lambda + \mu = 1$ için yüzeyi oluşturan rasyonel uzay eğrilerinden birine λ kez aynı ötelemeyi uygulamak ve yüzeyi oluşturan diğer rasyonel uzay eğrisine μ kez aynı ötelemeyi uygulamaya eşdeğerdir (Wang ve Goldman, 2018: 73).

4. RASYONEL BİR YÜZEY NE ZAMAN BİR ÖTELEME YÜZEYDİR?

Bu bölümde, rasyonel parametrizasyonla tanımlanan bir reel rasyonel yüzeyin bir öteleme yüzey olması için gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz.

Bir rasyonel yüzeyi

$$\mathbf{H}(s,t) = (H_0(s,t), H_1(s,t), H_2(s,t), H_3(s,t))$$

parametrizasyonu ile ele alalım.

Dual kuaterniyonun üç eşlenikten birinin $\forall \sigma = r + d\varepsilon$ için $\sigma^* = r - d\varepsilon$ şeklinde ifade edildiğini hatırlayalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(s,t) &= (H_0(s,t), H_1(s,t), H_2(s,t), H_3(s,t)) \\ &\quad \otimes (H_0(s,t), -H_1(s,t), -H_2(s,t), -H_3(s,t)) \\ &= (H_0(s,t) + (H_1(s,t)\vec{i} + H_2(s,t)\vec{j} + H_3(s,t)\vec{k})\varepsilon) \\ &\quad \otimes (H_0(s,t) - (H_1(s,t)\vec{i} + H_2(s,t)\vec{j} + H_3(s,t)\vec{k})\varepsilon) \\ &= (H_0(s,t))^2 - H_0(s,t)(H_1(s,t)\vec{i} + H_2(s,t)\vec{j} + H_3(s,t)\vec{k})\varepsilon \\ &\quad + H_0(s,t)(H_1(s,t)\vec{i} + H_2(s,t)\vec{j} + H_3(s,t)\vec{k})\varepsilon \\ &= (H_0(s,t))^2 \\ &= ((H_0(s,t))^2, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Önerme 4.1.

$H_0(s_0, t) \neq 0$ ve $EBOB(\mathbf{H}(s_0, t)) = 1$ olacak şekilde herhangi bir parametere s_0 ve

$$\mathbf{H}(s,t) = \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(s_0,t)}{(H_0(s_0,t))^2}$$

$\mathbf{H}(s,t)$ parametrizasyonunun öteleme yüzey belirtmesi için gerek ve yeter şart

$\mathbf{H}(s,t) = \mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^4[s]$ ve $EBOB(\mathbf{H}(s)) = 1$ olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow) Eğer $\mathbf{H}(s,t)$ bir öteleme yüzeyinin parametrizasyonu ise, $\alpha(s)$ ve $\gamma(t)$ gibi iki rasyonel uzay eğrisi vardır, öyle ki

$$\mathbf{H}(s,t) = \alpha(s) \otimes \gamma(t) \text{ ve } EBOB(\alpha(s)) = EBOB(\gamma(t)) = 1$$

sağlanır. Bu nedenle

$$H_0(s_0,t) = \alpha_0(s) \gamma_0(t) \neq 0$$

olduğundan

$$\alpha_0(s) \neq 0 \text{ ve } \gamma_0(t) \neq 0$$

dır.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s,t) &= \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^\bullet(s_0,t)}{(H_0(s_0,t))^2} \\ &= \frac{(\alpha(s) \otimes \gamma(t)) \otimes (\alpha(s_0) \otimes \gamma(t))^\bullet}{(\alpha_0(s_0) \gamma_0(t))^2} \\ &= \frac{\alpha(s) \otimes \gamma(t) \otimes \gamma^\bullet(t) \otimes \alpha^\bullet(s_0)}{(\alpha_0(s_0) \gamma_0(t))^2} \\ &= \frac{\alpha(s) \otimes (\gamma(t) \otimes \gamma^\bullet(t)) \otimes \alpha^\bullet(s_0)}{(\alpha_0(s_0) \gamma_0(t))^2} \\ &= \frac{(\gamma_0(t))^2 (\alpha(s) \otimes \alpha^\bullet(s_0))}{(\alpha_0(s_0) \gamma_0(t))^2}, (\alpha_0(s_0) \neq 0, \gamma_0(t) \neq 0) \\ &= \frac{\alpha(s) \otimes \alpha^\bullet(s_0)}{(\alpha_0(s_0))^2} \\ &= \mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^4[s] \end{aligned}$$

elde edilir.

Dahası, $\alpha(s) \otimes \alpha^*(s_0)$ girdileri $\alpha(s)$ girdilerinin lineer kombinasyonları olduğundan

$$EBOB(\mathbf{H}(s)) = EBOB(\alpha(s)) = 1$$

olur.

Tersine, eğer

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}(s, t)$$

$$= \frac{\mathbf{H}(s, t) \otimes \mathbf{H}^*(s_0, t)}{(H_0(s_0, t))^2} \in \mathbb{R}^4[s]$$

ise,

$$\alpha(s) = \mathbf{H}(s),$$

$$\gamma(t) = \mathbf{H}(s_0, t)$$

olsun. Kabulümüzden

$$EBOB(\alpha(s)) = EBOB(\mathbf{H}(s)) = 1,$$

$$EBOB(\gamma(t)) = EBOB(\mathbf{H}(s_0, t)) = 1$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha(s) \otimes \gamma(t) &= \frac{\mathbf{H}(s, t) \otimes \mathbf{H}^*(s_0, t)}{(H_0(s_0, t))^2} \otimes \mathbf{H}(s_0, t) \\ &= \frac{\mathbf{H}(s, t) \otimes (\mathbf{H}^*(s_0, t) \otimes \mathbf{H}(s_0, t))}{(H_0(s_0, t))^2} \\ &= \mathbf{H}(s, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle, parametrizasyonu $\mathbf{H}(s, t)$ ile verilen rasyonel yüzey bir öteleme yüzeydir.

Sonuç 4.1.

Rasyonel bir parametrelendirme $\mathbf{H}(s,t)$ verildiğinde, Önerme 4.1., parametreleştirmelerin bir öteleme yüzeyi temsil edip etmediğini belirlemek için kullanılabilir. Eğer bu rasyonel parametrelendirme bir öteleme yüzeyi temsil ediyorsa,

$$\alpha(s) = \mathbf{H}(s,t) = \mathbf{H}(s) \text{ ve } \gamma(t) = \mathbf{H}(s_0,t)$$

olmak üzere iki üreteç eğrisini döndürür. Dikkat edilirse $\alpha(s)$ ve $\gamma(t)$ eğrileri tek değildir.

Gerçekten $h'(s,t) = \alpha'(s) + \gamma'(t)$ ise, herhangi bir \vec{v} vektörü için

$$h'(s,t) = (\alpha'(s) + \vec{v}) + (\gamma'(t) - \vec{v}) \text{ başka bir temsildir. Tek değildir.}$$

Örnek 4.1.

Rasyonel yüzeyi

$$\mathbf{H}(s,t) = (s^2t^3, s^2t + t^3s, st^3 + t^3 + s^2t^2, s^2 + t^3)$$

olarak ele alalım. $s=1$ için

$$\mathbf{H}(1,t) = (t^3, t + t^3, 2t^3 + t^2, 1 + t^3)$$

$$H_0(1,t) = t^3$$

$$EBOB(\mathbf{H}(1,t)) = EBOB(t^3, t + t^3, 2t^3 + t^2, 1 + t^3) = 1$$

dir.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s,t) &= \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(s_0,t)}{(H_0(s_0,t))^2} \\ &= \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(1,t)}{(H_0(1,t))^2} \\ &= \frac{(s^2t^3, s^2t + t^3s, st^3 + t^3 + s^2t^2, s^2 + t^3) \otimes (t^3, -t - t^3, -2t^3 - t^2, -1 - t^3)}{(t^3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\begin{bmatrix} s^2 t^6 \\ -s^2 t^4 - s^2 t^6 + s^2 t^4 + s t^6 \\ -2s^2 t^6 - s^2 t^5 + s t^6 + t^6 + s^2 t^5 \\ -s^2 t^3 - s^2 t^6 + s^2 t^3 + t^6 \end{bmatrix}^T}{t^6} \\
&= \frac{(s^2 t^6, -s^2 t^6 + s t^6, -2s^2 t^6 + s t^6 + t^6, -s^2 t^6 + t^6)}{t^6} \\
&= \frac{t^6 (s^2, -s^2 + s, -2s^2 + s + 1, -s^2 + 1)}{t^6} \\
&= (s^2, -s^2 + s, -2s^2 + s + 1, -s^2 + 1) \in \mathbb{R}^4 [s],
\end{aligned}$$

ve ayrıca

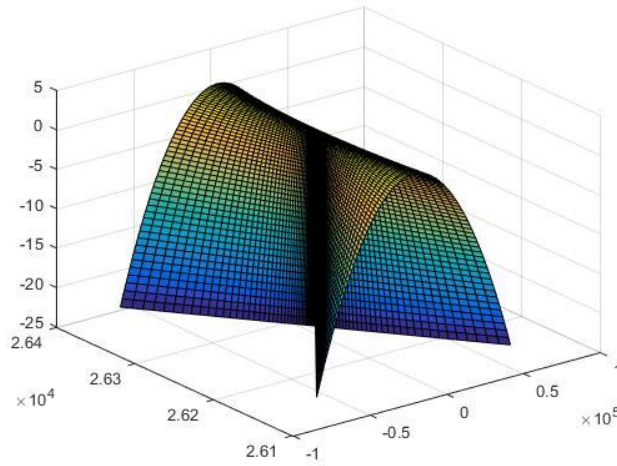
$$EBOB(\mathbf{H}(s, t)) = EBOB(s^2, -s^2 + s, -2s^2 + s + 1, -s^2 + 1) = 1,$$

elde edilir. $\mathbf{H}(s, t) = \alpha(s) \otimes \gamma(t)$ parametrizasyonu ile verilen rasyonel yüzey bir öteleme yüzeyidir, burada

$$\alpha(s) = \mathbf{H}(s, t) = (s^2, -s^2 + s, -2s^2 + s + 1, -s^2 + 1),$$

$$\gamma(t) = \mathbf{H}(1, t) = (t^3, t + t^3, 2t^3 + t^2, 1 + t^3).$$

dir.



Şekil 4.1. Örnek 4.1. Rasyonel Yüzey

Örnek 4.2.

Rasyonel yüzey

$$\mathbf{H}(s,t) = (s^3t^3 - s^2t^2 - st - 1, s^2t^3 + s^3t^2 - t + s, st^3 + t^2 + s^3t - s^2, t^3 - st^2 + s^2t + s^3)$$

parametrizasyonu ile ele alalım. $s = 0$ için

$$\mathbf{H}(0,t) = (-1, -t, t^2, t^3)$$

$$H_0(0,t) = -1$$

$$EBOB(\mathbf{H}(0,t)) = EBOB(-1, -t, t^2, t^3) = 1$$

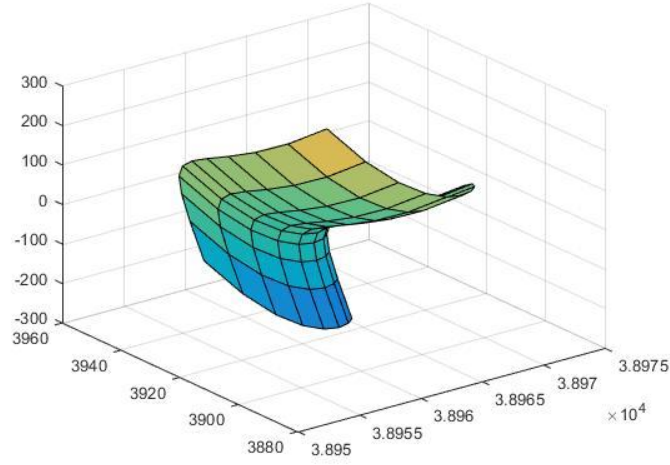
elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s,t) &= \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(s_0,t)}{(H_0(s_0,t))^2} \\ &= \frac{\mathbf{H}(s,t) \otimes \mathbf{H}^*(0,t)}{(H_0(0,t))^2} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s^3t^3 - s^2t^2 - st - 1 \\ s^2t^3 + s^3t^2 - t + s \\ st^3 + t^2 + s^3t - s^2 \\ t^3 - st^2 + s^2t + s^3 \end{bmatrix}^T \otimes (-1, t, -t^2, -t^3)}{(-1)^2} \\ &= (s^3t^3 - s^2t^2 - st - 1, s^2t^3 + s^3t^2 - t + s, st^3 + t^2 + s^3t - s^2, t^3 - st^2 + s^2t + s^3) \\ &\quad \otimes (-1, t, -t^2, -t^3) \\ &= \left(-(s^3t^3 - s^2t^2 - st - 1), -s^2t^3 - s^3t^2 + t - s + s^3t^4 - s^2t^3 - st^2 - t, \right. \\ &\quad \left. -st^3 - t^2 - s^3t + s^2 - s^3t^5 + s^2t^4 + st^3 + t^2, -t^3 + st^2 - s^2t - s^3 - s^3t^6 + s^2t^5 \right. \\ &\quad \left. + st^4 + t^3 \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(s,t) = \begin{bmatrix} -s^3t^3 + s^2t^2 + st + 1 \\ -2s^2t^3 - s^3t^2 - s + s^3t^4 - st^2 \\ -s^3t + s^2 - s^3t^5 + s^2t^4 \\ st^2 - s^2t - s^3 - s^3t^6 + s^2t^5 + st^4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4[s],$$

olduğu görülür.

Yani $\mathbf{H}(s,t)$ rasyonel parametrelendirme, öteleme yüzeyini temsil etmez.



Şekil 4.2. Örnek 4.2. Rasyonel Yüzey

KAYNAKLAR

- Altmann, S.L.** (1986). *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Oxford Science Publications, Oxford, 303.
- Brauner, H.** (2013). *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*. Springer-Verlag, Wien New York, 236.
- Capital Gate** (2021). *Öteleme yüzey modeli*. [Erişim 06.07.2021, <http://cdn.cnn.com/cnnnext/dam/assets/181017163538-untitled-1-super-tease.jpg>].
- Carmo, M.** (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 511.
- Chadstone Shopping Centre** (2021). *Öteleme yüzey modeli*. [Erişim 06.07.2021, https://www.momspumphere.com/components/com_jplaces/files/images/1046064051chadstone-shopping-centre-in-melbourne-victoria-breastfeeding-friendly.jpg].
- Chen, B.** (1990). *Geometry of Slant Submanifolds*. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 125.
- Ciudad de las Artes y las Ciencias** (2021). *Öteleme yüzey modeli*. [Erişim 06.07.2021, <https://freetourvalencia.com/wp-content/uploads/2016/09/CAC-hemisf%C3%A8ric.jpg>].
- Crutcher, A.** (2018). Translational Surfaces. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 30(2), 140-149.
- Dai, J.S.** (2006). An Historical Review of the Theoretical Development of Rigid Body Displacements from Rodrigues Parameters to the Finite Twist. *Mech. Mach. Theory*, 41, 41-52.
- Daniilidis, K.** (1999). Hand-Eye Calibration Using Dual Quaternions. *The International Journal of Robotics Research*, 18, 286-298.
- Darboux, G.** (1972). *Leçons Sur La Theorie Generale Des Surfaces Et Ses Applications Geometriques Du Calcul Infinitesimal*. Chelsea Publ. Co., New York, 524.
- Decruyenaere, F., & Dillen, F., & Verstraelen L., & Vrancken, L.** (1993). The semiring of immersions of manifolds. *Beitrage Algebra Geometry*, 34, 209-215.
- Fischer, I.** (1998). *Dual-Number Method in Kinematics, Statics and Dynamics*. CRC Press, Boca Raton, 219.
- Funda, J., & Paul, R.P.** (1990). A Computational Analysis of Screw Transformations in Robotics. *IEEE Trans. Robot. Autom*, 6, 348-356.
- Gaziantep Kalyon Stadyumu** (2021). *Öteleme yüzey modeli*. [Erişim 06.07.2021, <https://i4.hurimg.com/i/hurriyet/75/1200x675/587757260f25440e105477e9.jpg>].
- Goldman, R.** (1983). *Rethinking Quaternions: Theory and Computation*. In: Barsky, Brian A. (ed.) *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation*, vol 13. Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, 157.

- Hacısalıhoğlu, H.H.** (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 338.
- Hacısalıhoğlu, H.H.** (2002). *Diferensiyel Geometri I. Cilt*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 269.
- Hacısalıhoğlu, H.H.** (2012). *Diferensiyel Geometri II. Cilt*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 338.
- Hamilton, W.R.** (1866). *Elements of Quaternions*. Cambridge University Press, Cambridge, 762.
- Hohenberg, F.** (1966). *Konstruktive Geometrie in der Technik*. Springer Vienna, Germany, 319.
- Jüttler, B.** (1994). Visualization of Moving Objects Using Dual Quaternion Curves. *Comput. Graph.*, 18, 315-326.
- McCarthy, J.M.** (1990). *Introduction to Theoretical Kinematics*. MIT Press, Cambridge, 126.
- Özdemir, M.** (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 304.
- Perez-Diaz, S., & Shen, L.** (2014). Parametrization of Translational Surfaces. *In: Proceedings of the 2014 Symposium on Symbolic-Numeric Computation*, 128-129.
- Schober, H.** (2015). *Transparente Schalen From Topologie Tragwerk*. Wilhelm Ernst & Sohn, Germany, 256.
- Translation surface (differential geometry)** (2021). *Öteleme yüzey modeli*. [Erişim 06.06.2021, [https://en.wikipedia.org/wiki/Translation_surface_\(differential_geometry\)#/media/File:Parabol-sf-def.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Translation_surface_(differential_geometry)#/media/File:Parabol-sf-def.svg)].
- Wang, H., & Goldman, R.** (2018). Using Dual Quaternion to Study Translational Surfaces. *Mathematics in Computer Science*, 69-75.
- Zatsiorsky, V.M.** (1998). *Kinematics of Human Motion II*. Champaign, United States, 419.