



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

FRAKTAL BOYUTA DAİR

**Banu İREZ AYDIN
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Yard. Doç. Dr. Figen UYSAL**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2015

Ref.No:10080700



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

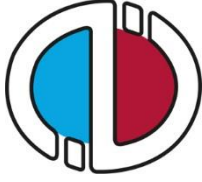
FRAKTAL BOYUTA DAİR

**Banu İREZ AYDIN
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Yard. Doç. Dr. Figen UYSAL**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2015



ANADOLU UNIVERSITY



**BILECIK SEYH EDEBALI
UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

ABOUT THE FRACTAL DIMENSION

**Banu İREZ AYDIN
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Yard. Doç. Dr. Figen UYSAL**

**Co-Advisor
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BILECIK, 2015



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 11.06.2015 tarih ve 21 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 26.06.2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Banu İREZ AYDIN 'ın "Fraktal Boyuta Dair" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Derya ÇELİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI V. :

Yrd. Doç. Dr. İlker İNAM

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim ve tez hazırlama süreci boyunca engin bilgi ve deneyimleri ile bana her zaman yol gösteren, sabrımı ve hoşgörüsünü esirgemeyen ve yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli hocam Sayın **Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**'na,

Çalışmalarım süresince bana destek ve yardımcı olan değerli hocam **Yard. Doç. Dr. Figen UYSAL**'a ve üzerimde emeği geçen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi ve Anadolu Üniversitesi'ndeki tüm hocalarıma,

Benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen hayatımın anlamı biricik oğluma, sevgili eşime ve değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada fibonacci sayıları, altın oran, altın dikdörtgen ve onun fraktalı, bu fraktalın boyutu ve fraktal boyut hesabında kullanılan Moran Denklemi ve uygulamalarına yer verilmiştir.

Öncelikle fibonacci sayıları ve altın oran ile ilgili bilgi verilmiştir. Fibonacci sayıları, Avrupa'yı Hint-Arap sayı sistemi ile tanıştıran devrinin en büyük matematikçisi Leonardo Fibonacci tarafından bulunmuştur. Bu sayılar doğadaki güzellikleri sayılarla ifade etme açısından önem kazanmıştır. Çam kozalağı, papatya ve ay çiçeğinde tohumların sarmallarının ve yaprakların düzeni gibi birçok doğal güzellikte fibonacci sayılarına ait ardışık numaralar görülür. Bu ardışık sayıların oranı Altın Oranı vermektedir. Altın Oran, irrasyonel bir sayıdır, ondalık sistemde yazılışı; 1,618033988749894...'tür ve F_i yani ϕ veya φ sembolü ile gösterilir. Altın Oran, uyum ve güzellik ölçütü olarak sanat ve estetiğin önemli bir sınıflandırmasını yapmakta önemli bir yer alır.

Sonrasında altın dikdörtgen tanımlanarak, boyutu hesaplanmıştır. Kısa kenarı 1 birim ve uzun kenarı ϕ olan dikdörtgene altın dikdörtgen denir. Altın dikdörtgenler, kendilerine oransal olarak benzeyen başka dikdörtgenler üretmeleri nedeniyle fraktal olarak incelemeye uygundur. Altın dikdörtgenden fraktal elde etmek için kenarları 1 ve ϕ olan bir altın dikdörtgenin iki ucundan $1 \times (\phi - 1)$ 'lik dikdörtgenler çıkarılır. Elde edilen iki altın dikdörtgene yine aynı işlem uygulanır. Bu işlemin defalarca tekrarlanması sonucu elde edilen şekil altın dikdörtgen fraktalını oluşturur. Oluşturulan bu fraktalın boyutu hesaplanabilir.

Son olarak fraktal boyut hesabında kullanılan Moran Denklemi ve uygulamalarına yer verilmiştir. Moran Denklemi, fraktalı oluşturan parçaların hepsi aynı ölçekli değil ise bu fraktalın boyutunu hesaplamak için önemli bir denklemdir. Değişik fraktalların boyutları bu denklem yardımıyla hesaplanabilir.

Anahtar Kelimeler

Fibonacci Sayıları; Altın Oran; Altın Dikdörtgen Fraktalı; Fraktal Boyut; Moran Denklemi

ABSTRACT

Fibonacci numbers, the golden ratio, golden rectangle and its fractal, the dimension of the fractal and Moran Equations and the applications used in the fractal dimension measurements are included in this study.

First, some information is given about the Fibonacci numbers and the golden ratio. Fibonacci numbers were found by the great mathematician Leonardo Fibonacci who introduced the Indo-Arabic number system to Europe. These numbers are important in terms of expressing beauty in nature by numbers. Successive numbers of Fibonacci numbers are seen in the flower seeds and organization of the leaves of pinecone, daisies and sunflower. The ratio of these numbers gives Golden Ratio. Golden Ratio is an irrational number, it is written in the decimal system as; 1.618033988749894... and represented by F_i , that \emptyset or φ symbol. Golden Ratio is important in the classification of art and aesthetics as a criterion of harmony and beauty.

Then, golden rectangle was defined and its dimension was calculated. A rectangle with a 1 unit short side and long side \emptyset is called as a golden rectangle. Golden rectangles are suitable for the fractal examination since they give different rectangles which resemble them proportionally. To obtain a fractal from the golden rectangle, rectangles with $1 \times (\emptyset - 1)$ are removed from the two sides of a golden rectangle with 1 and \emptyset sides. The same process is applied to the two obtained rectangles. When this operation is repeated many times the obtained figure produces the rectangle fractal. The dimension of this fractal can be calculated.

Finally, Moran equations and applications used in fractal dimension measurement were mentioned. Moran Equation is a very important equation used when all the pieces of a fractal are not in the same scale. The dimensions of the different fractals may be calculated by this equation.

Key Words

Fibonacci Numbers; Golden Ratio; Golden Rectangle Fractal; Fractal Dimension; Moran Equation

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ONAY SAYFASI

TEŞEKKÜR

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Sayı, Oran, Uyum ve Güzellik	1
1.2. Fibonacci Sayıları	1
1.3. Altın Oran	4
2. ALTIN DİKDÖRTGEN FRAKTALI	8
2.1. Altın Dikdörtgenler	8
2.2. Altın Dikdörtgen Teoremleri	9
2.3. Tanrı'nın Gözü (Eye of God)	11
2.4. Hausdorff-Besicovitch Boyutu	11
2.5. Altın Dikdörtgen Fraktalı	12
2.5.1. Kendine-benzerlik	15
2.5.2. Çevre	15
2.5.3. Alan	16
2.6. Altın Dikdörtgen Fraktalının Boyutu	16
3. MORAN DENKLEMİ VE BENZERLİK BOYUTU	18
3.1. Moran Denklemi	18
3.2. Moran Denklemi ve Benzerlik Boyutu Uygulamaları	20
3.2.1. Geometrik seri oluşturan fraktal yapı	20
3.2.2. Farklı ayrışımına sahip fraktal yapılar	22
3.2.3. Farklı ölçeklerdeki fraktal yapılar	25
3.2.4. Doğadan fraktal örneği	28
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları	2
--	---

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Ayçiçeği	2
Şekil 1.2 Çam kozalağı ve sarmalları	3
Şekil 1.3 Circium	3
Şekil 1.4 Hurma ağacı	3
Şekil 1.5 Altın oran	4
Şekil 1.6 Parmaklardaki oranlar	6
Şekil 1.7 Yüz güzelliği ve altın oran	7
Şekil 1.8 İnsan vücudunda altın oran	7
Şekil 2.1 Altın dikdörtgen	8
Şekil 2.2 Altın dikdörtgen 1	9
Şekil 2.3. Altın dikdörtgen 2	10
Şekil 2.4 Tanrı'nın gözü	11
Şekil 2.5 Altın dikdörtgen fraktal oluşturma 1. adım	13
Şekil 2.6 Altın dikdörtgen fraktal oluşturma 2. adım	13
Şekil 2.7 Altın dikdörtgen fraktal oluşturma 3. adım	14
Şekil 2.8 Altın dikdörtgen fraktal oluşturma 4. adım	15
Şekil 3.1 Fraktal örneği 1	19
Şekil 3.2 Fraktal örneği 2	20
Şekil 3.3 Fraktal örneği 3	20
Şekil 3.4 Fraktal örneği 4	21
Şekil 3.5 Fraktal örnekleri	22
Şekil 3.6 Fraktal örneklerinin farklı ayrışimleri 1	22
Şekil 3.7 Fraktal örneklerinin farklı ayrışimleri 2	23
Şekil 3.8 Fraktal örneği 5	24
Şekil 3.9 Fraktal örneği 5'in farklı ayrışimleri	24
Şekil 3.10 Fraktal örneği 6	26
Şekil 3.11 Fraktal örneği 7	26
Şekil 3.12 Fraktal örneği 8	27
Şekil 3.13 Doğadan fraktal örneği	28

1.GİRİŞ

1.1 Sayı, Oran, Uyum ve Güzellik

Pisagor (MÖ 549 – 475) : Evrenin hakimi sayılardır. Sayılar evreni yönetiyor.

Proclus (411 - ?) : Bir yerde sayı varsa orada güzellik de vardır.

Bertrand Russel (1872 – 1970) : Matematik, aynı şeyi değişik sözcüklerle söyleme sanatıdır. Matematiğin güzelliği: En yüksek sanatın gösterebileceği kesin kusursuzluğa uzanan yüce bir güzelliştir.

Leopold Kronecker (1823 - 1891) : Allah doğal sayıları yaratmış, geriye kalan tümü insanların işleridir.

Güzellik, insanlara mükemmelliği çağrıştırdığından önemsenen bir olgudur. Güzellik başkalarının gözünde dikkat çekmek, saygı ve hayranlık uyandırmak için önemli güce sahiptir.

Doğa, içinde bir geometri olduğu için mi güzeldir, yoksa geometri, doğanın her tarafında yer aldığı için mi güzeldir?

Güzellikleri sayılarla, hatta sayıların oranları ile ifade etmek için Fibonacci (1170? – 1250) sayılarını ele almak gerekir. O zaman kar taneciklerini incelemek, mineral kristallerine bakmak, tavus kuşunun kuyruğundaki sarmallara bakmak, yaban keçisinin boynuzlarındaki sarmalları seyretmek, papatyanın ve ayçiçeğinin ortalarındaki iki yönlü sarmalların, çam kozalağındaki tohumların dizilişlerine, ağaçların dallarının gelişimine, dalların uzaya dağılımına bir sayı ile değer vermek mümkün olur. Arıların peteklerinin yapısını ve mükemmelliğini de ölçmek gene sayılarla veya sayıların oranları ile ifade etmek mümkün olur. Söz konusu olan oran doğadaki güzellik ölçüsü olan 1,618... altın orandır. Altın oran bir matematiksel kavramdır. Matematiksel bakış açısı ile analiz edilmesi öncelikli bir problem olmuştur. Fakat uyum ve güzellik ölçütü olarak sanat ve estetiğin önemli bir sınıflandırmasını yapmakta önemli bir yer alır.

Altın oran, kısıtlayıcı değil, tam tersine çeşitliliği arttıran ve sonra da bu çeşitler arasında yakınlaştıracı bir birliği arayan önemli bir ölçüttür (Akdeniz, 2007).

1.2 Fibonacci Sayıları

Guilielmo Bonacci'nin oğlu olan Leonardo Fibonacci (1170?-1250), Avrupa'ya Hint-Arap sayı sistemi ile tanıştıran devrinin en büyük matematikçisi olmuştur. Tavşan popülasyonlarının çizelgesini hazırlarken 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,

610, ... dizisini bulmuştur. Bu diziye Fibonacci dizisi adı verilmiştir. Dizinin önemi, dizideki her bir sayı, kendisinden önce gelen son iki sayının toplamıdır.

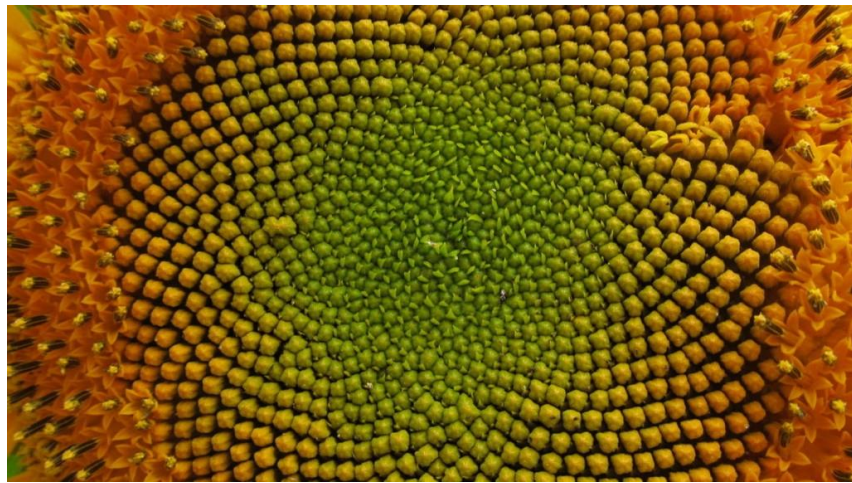
Fibonacci dizisindeki ardışık iki terimden büyüğünün küçüğüne oranına ALTIN ORAN adı verilmiştir. Dizide bu oranların özel bir kesire gittiği, yaklaştığı iyi bilinir. Bu oran $\phi = 1,618034 \dots$ dir.

Çizelge 1.1 (Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları)

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34
1.0	2.0	1.5	1.666	1.600	1.625	1.615385	1.619048	1.617647

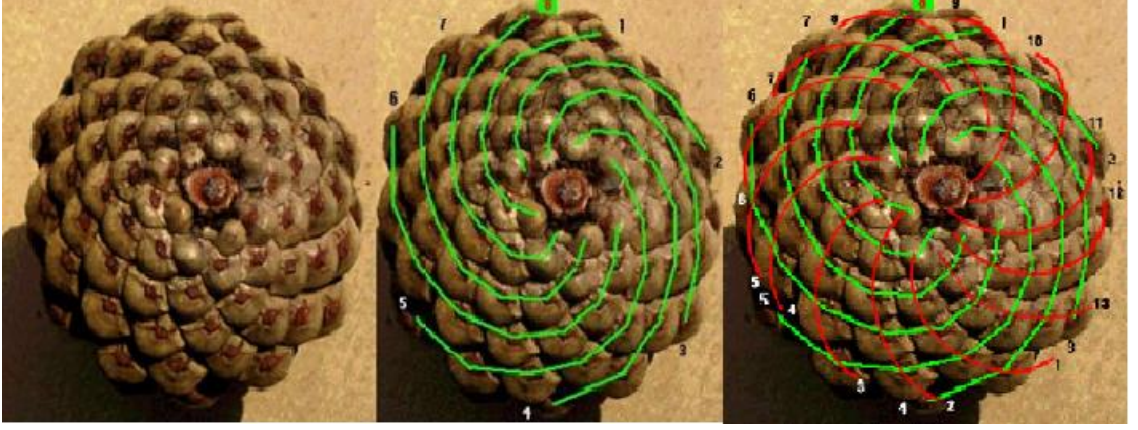
Çam kozalağı, papatya ve ay çiçeğinde tohumların sarmallarının ve yaprakların düzeninde fibonocci sayıları ile ardışık numaralar görülür.

Şekil 1.1'deki ayçiçeği başında bulunan ve her iki yöne dönen sarmalların sayıları ardışık Fibonacci sayılarıdır. Bu sarmallar saat yönünde 34 ve ters yönde 55 olan ardışık iki Fibonacci sayısıdır. Bazı ayçiçeği başlarında bu sayılar 55-89 veya 89-144 gibi ardışık Fibonacci sayılarıdır.



Şekil 1.1 Ayçiçeği.

Şekil 1.2'deki çam kozalaklarında görüldüğü gibi saat ibresi yönünde 8 sarmal ve ters yönde 13 sarmal vardır. Kozalakların büyüklüğüne göre 5 ve 8 sarmal da yer alabilir. 5-8 ve 8-13 de ardışık Fibonacci sayılarıdır.



Şekil 1.2 Çam kozalağı ve sarmalları.

Circiumda da Şekil 1.3'te görüldüğü gibi 13 ve 21 sayıda sarmal yer almaktadır. 13 ile 21 de ardışık iki Fibonacci sayısıdır.



Şekil 1.3 Circium.

Hurma ağacında, kök kısmındaki kabuklu gövdede sarmalların sayılarının 8 ve 13 olduğu Şekil 1.4'te görülmektedir (Akdeniz,2007).



Şekil 1.4 Hurma ağacı.

Sebze ve meyvelerde, meyve kesitlerinde de Fibonacci sayılarının yer aldıkları görülmektedir. Bir elmayı tam ortasından kesersek, çekirdeklerin 5 adet olduğunu görürüz. Aynı şekilde bir muz da uzunlamasına değil de tam ortadan ikiye böldüğümüzde 120°lik açılarla 3 eşit parçaya ayrıldığını görürüz. Kırmızı biberin içinde 3 boşluk, dolma biberin ve yeşil biberin içinde de 2 boşluk vardır. Limonu enine kestiğimizde 8 daire kesmesi olduğunu görürüz.

1.3 Altın Oran

Altın Oran, pi (π) gibi irrasyonel bir sayıdır ve ondalık sistemde yazılışı; 1,618033988749894...'tür. Bu oranın kısaca gösterimi: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olur. Altın Oranın ifade edilmesi için kullanılan sembol, Fi yani ϕ veya φ dir (http://tr.wikipedia.org/wiki/Altın_oran, 17.04.2015).

$a + b$ uzunluğundaki bir doğru parçasını Şekil 1.5'te görüldüğü gibi biri a ve diğeri b olmak üzere iki parçaya bölelim. $a + b$ toplam uzunluğunun a uzunluğuna oranı, a 'nın b 'ye oranına eşitse, yani

$$\phi = \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

ise ϕ 'ye altın oran denir.



Şekil 1.5 Altın oran.

O halde

$$\phi = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

veya

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

veya

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

dır. Bu ikinci derece denklemin çözümleri

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

olur. O halde

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033989$$

bulunur.

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ denkleminde $\phi = \sqrt{1 + \phi}$ bulunur. Bu değer $\sqrt{1 + \phi}$ deki ϕ yerine yazılırsa ϕ altın oranı için

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}$$

veya

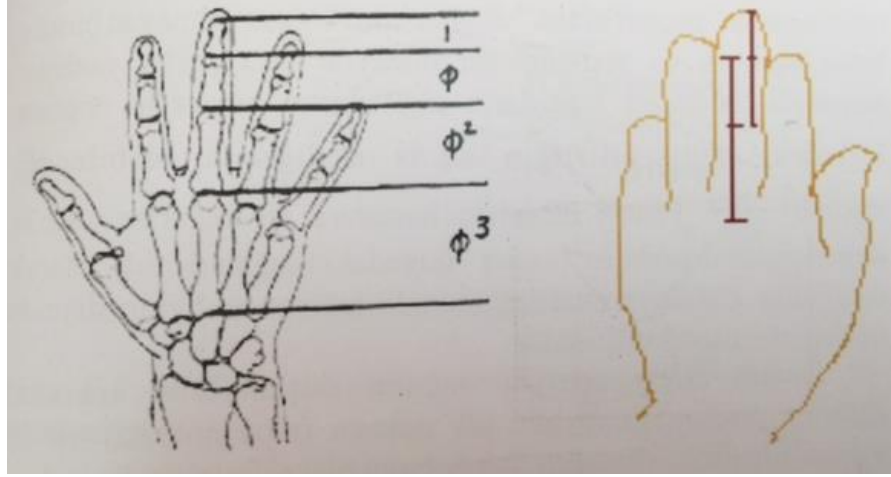
$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

bulunur (Akdeniz, 2007).

Altın oran, antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu olmuştur (Dunlap, 2011).

Altın oran, bitkilerin dallanmasında, kelebeklerin kanatlarındaki görünüm ve uyum, balıklarda ve karıncalarda ve hatta bal arılarının peteklerinde de gözlenebilir. Penguenin, gözleri, gagası, kanat ve ana gövdesi onun boyunun altın oranlarını vermektedir. Kaplanın yüzünün uzunluğunu ve genişliğini tanımlayan çizgilerin altın oran özellikleri verdiği görülmektedir.

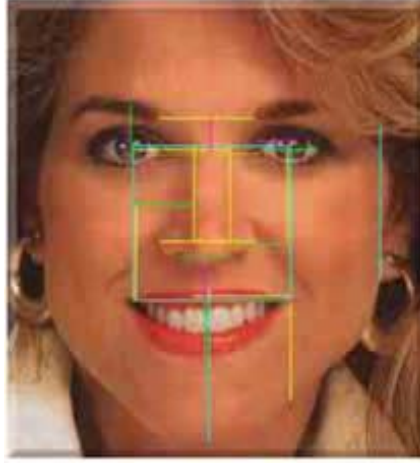
Kol, el ve parmaklarımızda altın oranı görebiliriz. İnsan vücudunun orantıları altın oranın varlığını kanıtlamıştır. Parmak kemiklerinin uzunlukları için verilen ardışık Fibonacci sayılarını kullanarak ve dirsek-bilek uzunluğu ile el uzunluğunun oranından ϕ değerleri elde edilebilmektedir. Şekil 1.6'daki en uçtaki en kısa kemik 1 birim alınırsa $1: \phi: \phi^2$ dizisi bulunur. Avuç içindeki kemiğin de eklenmesiyle parmak kemikleri için $1: \phi: \phi^2: \phi^3$ oranları yazılır.



Şekil 1.6 Parmaklardaki oranlar.

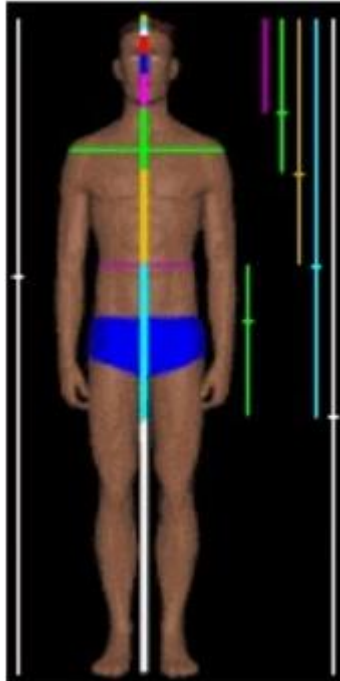
İnsan anatomisinin geometrisi ϕ altın oranı ile düzenlenmiştir. Öyle ki insan vücudu ϕ altın oranı ve 5 sayısına dayanır. Burada 5 sayısı baş, bacaklar ve kolların toplamı ve el parmakları (5 adet), ayak parmakları (5 adet) ve yüz üzerindeki gözler (2 adet) + burun delikleri (2 adet) + ağız (1 adet) = 5 dir.

Yüz güzelliği altın oran ile ölçülür. Ağız kenarları ve gözbebekleri bir mükemmel karedir. Burun, burun deliklerinin içi, üst dudakın iki başlangıç noktası, kulağın iç kısmındaki noktalar Şekil 1.7' de gösterildiği gibi mavi çizgilerle birlikte altın oran tanımlar. Burun genişliği, gözler ve göz bebekleri arasındaki uzaklık, gözbebeklerinden burun ucuna olan uzaklık sarı çizgilerle gösterilmiştir. Bu uzaklık mavi çizginin altın oranını tanımlar. Göz genişliği, burun delikleri arasındaki uzaklık, kirpikten kaşa olan uzaklık olan yeşil çizgiler, sarı çizginin altın oranını tanımlar. Mor çizgi ile gösterilen üst dudaktan burun altına kadar olan uzaklık ve gözün çeşitli boyutları yeşil çizgi ile altın oranı tanımlar.



Şekil 1.7 Yüz güzelliği ve altın oran.

Şekil 1.8’de insan vücudundaki altın oran ölçüleri ile ilgili olarak, mavi çizginin beyaz çizgiye (tüm boy) oranı altın orandır. Sarı çizginin mavi çizgiye oranı altın orandır. Yeşil çizginin sarı çizgiye oranı altın orandır. Kolların en üst kısmında içten olan uzaklığın, baştan göğüs boşluğuna kadar olan uzaklığa oranı, omuzların genişliği, kolun dirsekle bilek arasındaki uzunluğa oranı da altın oranı tanımlar. Mor çizginin yeşil çizgiye oranı altın orandır (Akdeniz, 2007).



Şekil 1.8 İnsan vücudunda altın oran.

2. ALTIN DİKDÖRTGEN FRAKTALI

Fraktallar, farklı yakınsamada kendilerini tekrar eden şekillerdir. Altın dikdörtgenler, kendilerine oransal olarak benzeyen başka dikdörtgenler üretmeleri nedeniyle fraktal olarak incelemeye son derece uygundur.

2.1 Altın Dikdörtgenler

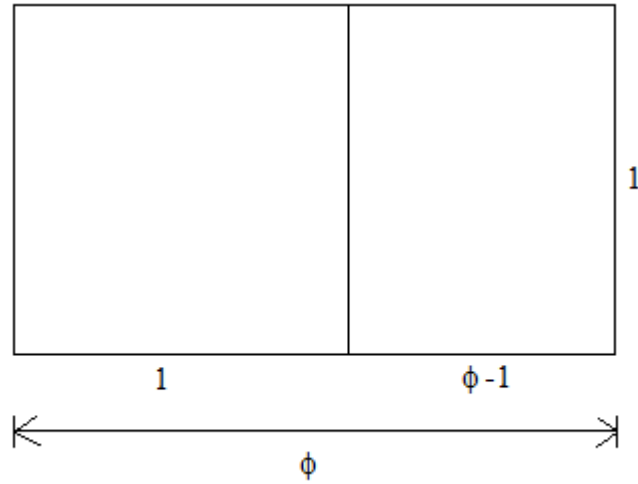
Kısa kenarı 1 birim ve uzun kenarı ϕ olan dikdörtgene ALTIN DİKDÖRTGEN denir. Şekil 2.1’de iki dikdörtgen vardır. Birisi $1 \times \phi$ ve diğeri $1 \times (\phi - 1)$ ebadındadır. İkisi de aynı orana sahiptir. Yani

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

dir. Ayrıca

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi - 1}{2 - \phi} = \frac{2 - \phi}{2\phi - 3} = \frac{2\phi - 3}{5 - 3\phi} = \dots = \phi$$

olur (Akdeniz, 2007).



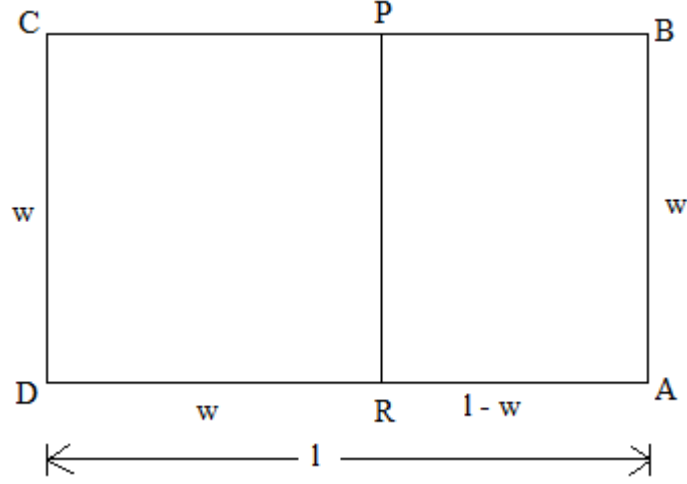
Şekil 2.1 Altın dikdörtgen.

Altın dikdörtgene uygun etrafımızda kullandığımız çok cisimlerimiz vardır: Kredi kartları, bayraklar, meşhur binaların önyüzleri, pullar... Antik Çağ’da Yunanlılar bu şekilde çizilen bir dikdörtgenin diğer tüm dikdörtgenlerden daha estetik bir görünüme sahip olduğuna inanır ve bu dikdörtgeni birçok mimari tasarımlarında kullanırlardı (Dunlap, 2011).

2.2 Altın Dikdörtgen Teoremleri

Teorem 2.2.1. Uzun kenarının kısa kenarına oranı $k > 1$ olan dikdörtgen verilsin. Bu dikdörtgenden kısa kenarına eşit uzunlukta kare çıkarılabilir. Kalan dikdörtgenle orijinal dikdörtgenin benzer olması için ancak ve ancak $k = (1 + \sqrt{5})/2$ olmalıdır.

İspat: Şekil 2.2'deki ABCD dikdörtgeninden PCDR karesi çıkarılsın ve kalan dikdörtgen BPRA olsun.



Şekil 2.2 Altın dikdörtgen 1.

Eğer ABCD dikdörtgeni ve BPRA dikdörtgeni aynı uzun kenar/kısa kenar oranına sahipse, o halde

$$k = \frac{w}{l-w} = \frac{l}{w}$$

dır. İçler dışlar çarpımı yapılır ve her iki taraf $w^2 \neq 0$ ile bölünürse,

$$\frac{l^2}{w^2} - \frac{l}{w} - 1 = 0$$

İkinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin pozitif kökü

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

olur. Eğer

$$\frac{l}{w} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

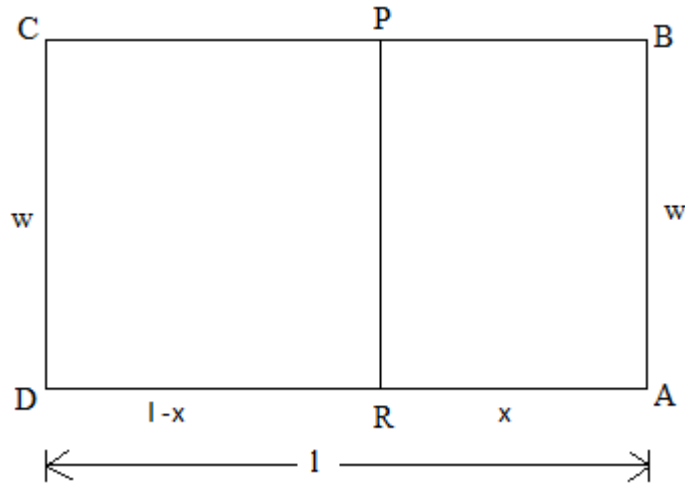
ise

$$\frac{w}{l-w} = \frac{1}{\frac{l}{w}-1} = \frac{1}{\phi-1} = \phi$$

olur. Böylece iki dikdörtgen benzerdir.

Teorem 2.2.2. Uzun kenarının kısa kenarına oranı $k > 1$ olan dikdörtgen verilsin. Bu dikdörtgenden kendisine benzer bir dikdörtgen çıkarılabilir. Kalan dikdörtgenle orijinal dikdörtgenin alanlarının oranı ancak ve ancak $k = (1 + \sqrt{5})/2$ olursa kalan dikdörtgen karedir.

İspat: Şekil 2.3'teki ABCD dikdörtgeninden şekildeki gibi BPRA dikdörtgeni çıkarılsın.



Şekil 2.3. Altın dikdörtgen 2.

O halde,

$$\frac{\text{alan}ABCD}{\text{alan}PCDR} = \frac{lw}{w(l-x)}$$

dır, fakat, ancak ve ancak

$$\frac{w}{l-w} = 1$$

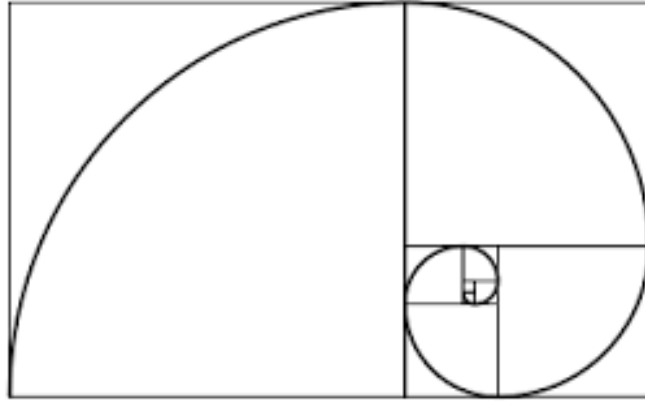
olursa

$$\frac{lw}{w(l-w)} = \frac{l}{w} = k$$

olur, veya $w = l - w$ veya PCDR karedir. Böylece, ikinci teorem, ilk teoremin sonucudur (Bicknell, vd., 1969).

2.3 Tanrı'nın Gözü (Eye of God)

Altın dikdörtgeni, daha küçük dikdörtgenler elde etmek için tekrar tekrar kullanırsak, sonsuz kere bölünmüş bir şekil elde ederiz. Bu şekil, Şekil 2.4'teki gibidir. Sonsuza giden bu spirale, Tanrı'nın Gözü ya da Altın Spiral adı verilir. Bu şeklin fraktal özellikleri olabileceğini görebilmekteyiz.



Şekil 2.4 Tanrı'nın gözü.

Fraktallar, birden fazla farklı tanıma sahip olsa da, genel olarak şu şekilde tanımlanabilir: "Parçaları bütününe belli bir biçimde benzerlik gösteren şekil." Bu tanımın Tanrı'nın Gözü şekline uyduğunu anında fark edebiliriz. Her küçük dikdörtgen, öncül dikdörtgene ϕ çarpan farkı ile benzerdir.

Şekil 2.4'teki küçük dikdörtgen, ϕ oranında büyütülürse, altın dikdörtgenin tanımı gereği büyük dikdörtgene özdeş bir cisim elde ederiz. Ancak Tanrı'nın Gözü fraktallara özgü bu özeliğe sahip olsa da, fraktalların başka özelliklerini sağlamamaktadır.

Fraktallar çoğunlukla sonsuz uzunluğa ya da çevreye sahipken, Tanrı'nın Gözü ise sabit bir uzunluğa yakınsar.

Buna ek olarak, fraktalların alanı özgün iken Tanrı'nın Gözü'nün alanı ise eklenen yeni dikdörtgenlerle değişmez. Alanı ϕ^2 olarak kalırken boyutu da 2 olarak kalır. Sonuç olarak, Tanrı'nın Gözü her ne kadar bir fraktal da olsa fraktalları ilginç kılan önemli sayıda özellikten yoksundur (Seppala-Holtzman ve Rangel, 2009).

2.4 Hausdorff-Besicovitch Boyutu

Fraktalların en ilginç özelliklerinden biri boyutlarıdır. Öklit anlamındaki şekiller tamsayılar olan boyutlara sahipken (doğru için $d = 1$, kare için $d = 2$, küp için $d = 3$

gibi) fraktallar tamsayı olmayan boyutlara sahip olabilir. Bu durum şu eşitlikten görülebilir:

$$f^d = n$$

Burada, n kendini tekrar eden şekil sayısını, f tekrar eden şeklin öncül şekle dönüşmesi için gereken yakınsama katsayısını, d ise şeklin boyutunu gösterir. Bu eşitlik, herhangi bir cismin Hausdorff-Besicovitch boyutunu bulmak için kullanılabilir. Bu eşitlik Tanrı'nın Gözü için kullanıldığında

$$n = \frac{\text{Tüm Alan}}{\text{Kısmi Alan}} = \frac{\emptyset \times 1}{1 \times (\emptyset - 1)} = 2,618$$

olur.

$$f^d = n$$

eşitliğinde $f = \emptyset$ alınırsa

$$\emptyset^d = \frac{\emptyset}{\emptyset - 1}$$

$$d \times \ln(\emptyset) = \ln \frac{\emptyset}{\emptyset - 1}$$

$$d = \frac{\ln \frac{\emptyset}{\emptyset - 1}}{\ln \emptyset}$$

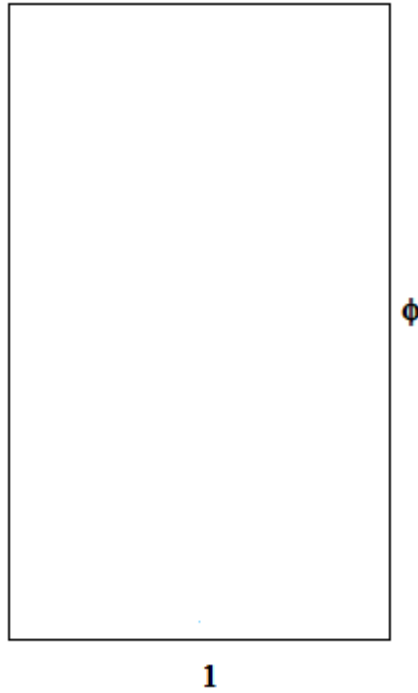
$$d = 2$$

bulunur (Fractal Geometry, 20.04.2015).

2.5 Altın Dikdörtgen Fraktalı

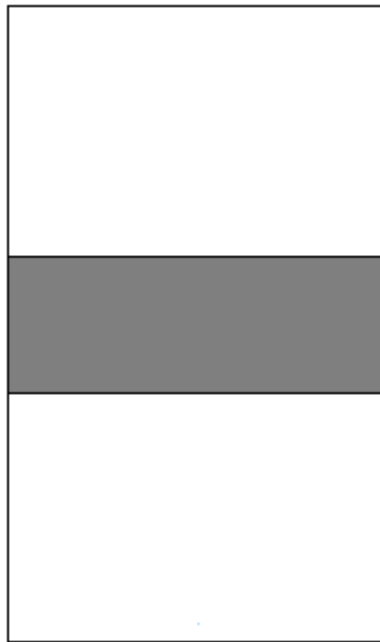
Altın dikdörtgenden ilginç bir fraktal elde etmek için bu fraktalın yukarıda belirtilen dört özeliği sağlaması gerekmektedir. Bu fraktal, temel olarak Tanrı'nın Gözü yapısında olacak, ama bir kare ve bir altın dikdörtgene bölünmek yerine iki ucundan iki altın dikdörtgene, ve arada kalan boşluğa bölünecektir. Bu yöntem sonsuz sayıda spiral üretir.

Yine kenarları 1 ve \emptyset olan Şekil 2.5'teki gibi bir altın dikdörtgen ile başlarsak:



Şekil 2.5 Altın dikdörtgen fraktalı oluşturma 1. adım.

Sonraki adımda dikdörtgenin iki ucundan $1 \times (\phi - 1)$ 'lik dikdörtgenler çıkarılır. Bu, altın dikdörtgenin yukarıda belirtilen tanımına uygun olduğu için yapılabilir. Sonraki adımda ise arada kalan dikdörtgen boyanır yada atılır: Bu alan ise Şekil 2.6'da gösterildiği gibi $(2 - \phi) \times 1$ 'lik bir alana sahiptir:

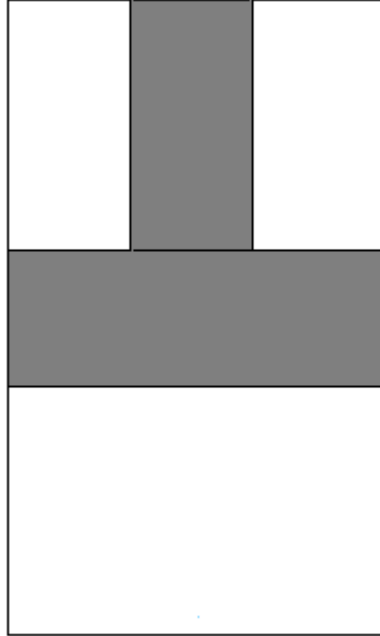


Şekil 2.6 Altın dikdörtgen fraktalı oluşturma 2. adım.

Şimdi ise elde edilen 2 tane altın dikdörtgene aynı işlem uygulanır:

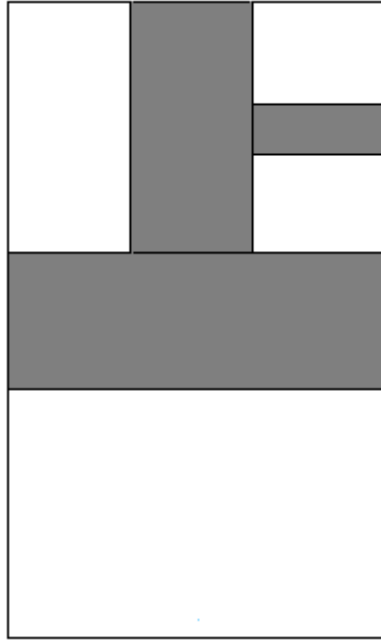
$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi - 1}{1 - (\phi - 1)}$$

Bu işlem sonucunda ise 4 tane $(\phi - 1) \times (2 - \phi)$ boyutunda fraktal elde edilir. Altın dikdörtgenler arası alanın boyanması sonucunda ise Şekil 2.7 elde edilir.



Şekil 2.7 Altın dikdörtgen fraktalı oluşturma 3. adım.

Aynı işlemin sonsuz kere tekrarlanması sonucunda ise Şekil 2.8 elde edilir. Bu şekil adımlardaki yapılan tüm çizimleri göstermemektedir. Ancak şeklin tamamını hayal etmek mümkündür.



Şekil 2.8 Altın dikdörtgen fraktalı oluşturma 4. adım.

2.5.1 Kendine-benzerlik

Altın fraktal ilginç özelliklere sahiptir. Öncelikle, fraktalın kendine-benzerlik gösterdiğini fark etmek mümkün olacaktır; çünkü şekildeki her bölünmüş parça, öncülüne benzerdir. Ek olarak, her adımda eklenen dikdörtgen sayısı 2'nin katları olarak büyümektedir. Dolayısıyla, x . adımla 2^x tane dikdörtgen elde edilir.

2.5.2 Çevre

İkinci olarak dikdörtgenlerin çevresinin büyümesi incelenebilir. Standart bir altın dikdörtgenin çevresi olan $2\phi + 2$ ile başlanır. Şekle 1 birim uzunluğunda, 2 doğru parçası eklenmesi, bu şeklin çevresini $2\phi + 2 + 2$ 'ye getirir. Sonraki adımda ise $\phi - 1$ uzunluğunda, 4 tane doğru parçası eklenmesi sonucunda şeklin çevresi $2\phi + 2 + 2 + 4(\phi - 1)$ olur. Elde edilen dikdörtgenlerin bölünmesi sonucunda ise 8 tane $(1 - (\phi - 1))$ lik doğru parçası eklenir. Sonuç olarak yeni çevre değeri $2\phi + 2 + 2 + 4(\phi - 1) + 8(1 - (\phi - 1))$ olur. Bu şekilde devam edilirse çevre $2\phi + 2 + 2 + 4(\phi - 1) + 8(1 - (\phi - 1)) + 16((\phi - 1) - (1 - (\phi - 1))) + 32((1 - (\phi - 1)) - ((\phi - 1) - (1 - (\phi - 1)))) \dots$ olur.

Dikkat edilirse eklenen terimlerin baş katsayıları ve \emptyset içeren genel ifadelerinde belli bir düzen fark edilebilir. Baş katsayılar, eklenen dikdörtgen sayısına bağlıdır, daha önce gösterildiği gibi x . adımında 2^x tanedir. Baş katsayıdan sonraki n 'inci çarpan ise $(n - 1)$ 'nci ve $(n - 2)$ 'nci çarpanların farkı olarak elde edilir. Türetilen altın dikdörtgenler öncül dikdörtgenlerin boyunu eninden çıkarmayı içeren bir süreçle elde edildiği için çarpanların birbirine bu şekilde bağlanması mantıklıdır.

Öte yandan, bu analizi daha ilginç kılmak için eklenen bütün terimlerdeki \emptyset 'leri sadeleştirmek mümkündür; $2(\emptyset) + 2(1) + 2(1) + 4(\emptyset - 1) + 8(2 - \emptyset) + 16(2\emptyset - 3) + 32(5 - 3\emptyset) + 64(5\emptyset - 8) + 128(13 - 8\emptyset) + \dots$

Burada bir Fibonacci serisinin etkisini görmek mümkündür. Her çarpanın terimindeki tamsayı, bir önceki fark teriminde elde edilen tamsayı katsayısı ile \emptyset çarpan katsayısının bir toplamı olarak yazılabilir. \emptyset çarpanları ise, bir önceki terimin fark terimindeki tamsayı olarak ifade edilebilir.

Sonuç olarak, fraktalın çevresi, her adımda daha hızlı artış göstermekte ve iraksamaktadır. Bunu serinin yaklaşık değerlerinden de görmek mümkündür:

$$\begin{aligned} &2(\emptyset) + 2(1) + 2(1) + 4(\emptyset - 1) + 8(2 - \emptyset) + 16(2\emptyset - 3) + 32(5 - 3\emptyset) \\ &\quad + 64(5\emptyset - 8) + 128(13 - 8\emptyset) + \dots \\ &3,236 + 2 + 2 + 2,472 + 3,056 + 3,777 + \dots \end{aligned}$$

2.5.3 Alan

Altın dikdörtgen fraktalının ilerleyen adımlarında alanın 0'a gittiği söylenebilir, çünkü bütün alan bölünmekte ve tekrar bölünemeyen bir noktaya yakınsamaktadır (Golden Rectangle, 20.04.2015).

2.6 Altın Dikdörtgen Fraktalının Boyutu

Altın dikdörtgen fraktalının boyutu, Tanrı'nın Gözü şeklinin fraktal boyutu ile aynı şekilde,

$$f^d = n$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Altın dikdörtgen fraktalının ilk adımında elde edilen resim Şekil 2.5'te gösterilmişti.

Büyük altın dikdörtgenin alanı, boyalı alanın şekil dışına çıkarıldığına dikkat ederek, elde edilen iki küçük altın dikdörtgenin alanına paylaştırılmıştır; yani $n = 2$ dir. Yakınsama faktörü ise hala \emptyset 'ye eşittir, yani $f = \emptyset$ 'dir. O halde

$$\emptyset^d = 2$$

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(\emptyset)}$$

$$d = \frac{0,30103}{0,20898}$$

$$d = 1,4404$$

bulunur.

Sonuç olarak bu şeklin fraktal boyutunun Öklit boyutu olmadığı 1,4404 olduğu görülür.

3. MORAN DENKLEMİ VE BENZERLİK BOYUTU

3.1 Moran Denklemi

Benzerlik boyutunu veren

$$d_b = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

formülünde parçalama oranı r ve parça sayısı N 'dir. Fakat elimizde farklı parçaları ve farklı ölçeği olan kendine benzer bir fraktal olduğu zaman fraktalın boyutunu nasıl hesaplarız?

Diyelim ki fraktalımız farklı N parçadan oluşsun. Parçalarımızın ölçekleri de r_1, r_2, \dots, r_N olsun. Her parça için

$$d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

ifadesinin i -mesafeli parça N_i için ölçeğimiz r_i olsun. Her bir parça için boyutumuz aynı ve $d_b = d$ olsun (Barnsley,1988). O halde denklemimiz

$$d \log\left(\frac{1}{r}\right) = \log(N)$$

veya buradan da

$$\left(\frac{1}{r}\right)^d = N$$

veya

$$1 = Nr^d$$

yazabiliriz. Bu son ifade ise

$$1 = \underbrace{r^d + \dots + r^d}_N$$

demektir. Bu son denkleme MORAN DENKLEMİ denir (Lanius, 2006; Lauwerier, 1991; Feoler, 1988). Bu ifadeyi $i = 1, 2, \dots, N$ numaralı parçalar için yazarsak MORAN DENKLEMİ

$$1 = r_1^d + r_2^d + \dots + r_N^d$$

olur (Çilingir, 2001).

Şimdi değişik fraktalların benzerlik boyutlarını bulalım.

Şekil 3.1'deki fraktal sağda görüldüğü gibi $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ ve $r_4 = \frac{1}{4}$ olan parçalara ayrılabilir. Böylece bu fraktal için Moran Denklemi

$$3(0.5)^d + (0.25)^d = 1$$

dir. Çözüm için $(0,5)^d = x$, $(0,25)^d = [(0,5)^2]^d = (0,5)^{2d} = [(0,5)^d]^2 = x^2$ olur. O zaman denklemimiz

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

olur. Bu denklemden pozitif kök olan

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

değerini alırız. O halde

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

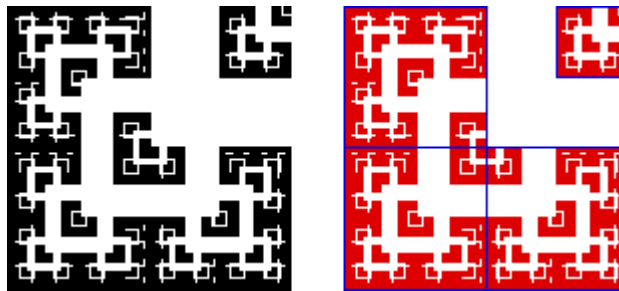
ve buradan da

$$d = \frac{\log\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ve fraktalımızın boyutu

$$d = 1.72368$$

bulunur.

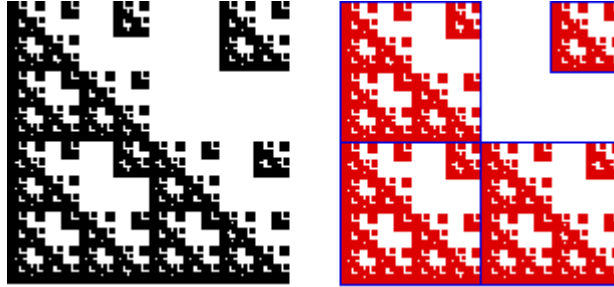


Şekil 3.1 Fraktal örneği 1.

Şekil 3.2'deki fraktalı da kırmızı ile gösterildiği gibi $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ ve $r_4 = \frac{1}{4}$ olarak ölçekleyebiliriz. O zaman Moran Denkleminde

$$3(0.5)^d + (0.25)^d = 1$$

dır. Denklemin çözümünden $d = 1.72368$ olur. Yani bu fraktalın boyutu da $d = 1.72368$ olarak bulunur.

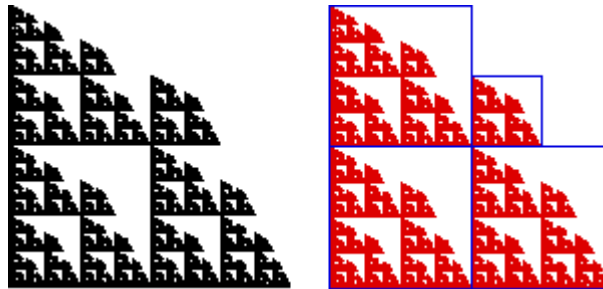


Şekil 3.2 Fraktal örneği 2.

Şekil 3.3'te gösterilen fraktalı ele alalım. Kırmızı şekilden görüldüğü gibi $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ ve $r_4 = \frac{1}{4}$ alınabilir. O zaman Moran Denklemi

$$3(0.5)^d + (0.25)^d = 1$$

olacaktır. Aynı işlemlerle $d = 1.72368$ olduğu sonucuna varılır (Hacısalıhoğlu, 2012).



Şekil 3.3 Fraktal örneği 3.

3.2 Moran Denklemi ve Benzerlik Boyutu Uygulamaları

Bu bölümde Moran Denklemi ile boyut hesabının değişik uygulamalarına yer verilmiştir.

3.2.1. Geometrik seri oluşturan fraktal yapı

Şekil 3.4'teki fraktalda gösterildiği gibi ölçeklerimiz $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{1}{4}, r_4 = \frac{1}{4}, r_5 = \frac{1}{8}, r_6 = \frac{1}{8}, \dots, r_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}, r_n = \frac{1}{2^n}, \dots$ şeklinde alınabilir. O zaman Moran Denklemi

$$2\left(\frac{1}{2^1}\right)^d + 2\left(\frac{1}{2^2}\right)^d + \dots + 2\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^d + 2\left(\frac{1}{2^n}\right)^d + \dots = 1$$

olur. Bu denklemde d aranılan fraktal boyutudur. Bu denklemi düzenlersek

$$2\frac{1}{2^d}\left(1 + \frac{1}{2^d} + \dots + \frac{1}{(2^d)^{n-1}} + \dots\right) = 1$$

veya

$$1 + \frac{1}{2^d} + \dots + \frac{1}{(2^d)^{n-1}} + \dots = 2^{d-1}$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafı ortak çarpanı $\frac{1}{2^d}$ ve ilk terimi 1 olan bir geometrik seridir. Bu serinin S_n kısmı toplamlar dizisi

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^d}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^d}} = 2 - \frac{1}{(2^d)^{n-1}}$$

dir. Buradan limite geçilerek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

olur. Demekki verilen geometrik seri yakınsaktır ve değeri 2 dir. O halde

$$2 = 2^{d-1}$$

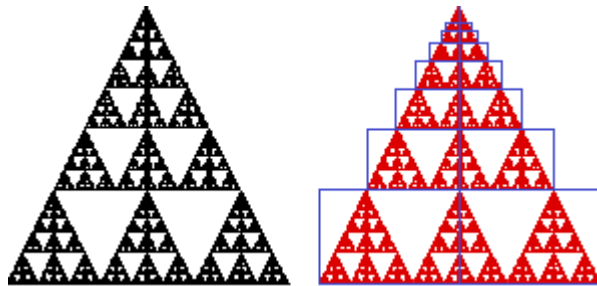
veya

$$d - 1 = 1$$

veya

$$d = 2$$

olduğu görülür. O halde fraktalımızın boyutu $d = 2$ olur.

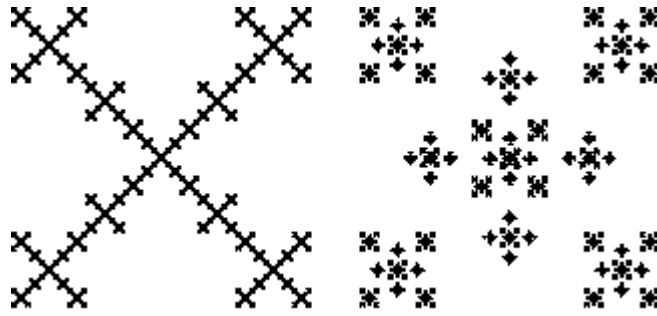


Şekil 3.4 Fraktal örneği 4.

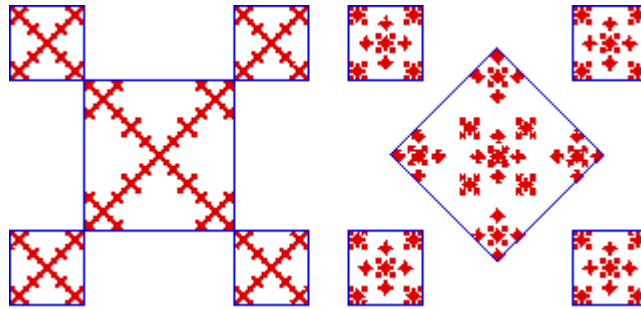
3.2.2. Farklı ayrışımara sahip fraktal yapılar

Şekil 3.5'teki fraktalları $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{4}$ ve $r_5 = \frac{1}{2}$ olan parçalara ayıralım.

Ayrışımalar şekil 3.6'da görülmektedir.



Şekil 3.5 Fraktal örnekleri.



Şekil 3.6 Fraktal örneklerinin farklı ayrışımaları 1.

Moran denkleminde

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

veya

$$4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^d\right]^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

olur. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ dersek, Moran denklemi

$$4x^2 + x - 1 = 0$$

dır. Bu denklemin çözümünden pozitif kök

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$$

olur. O halde

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$$

veya

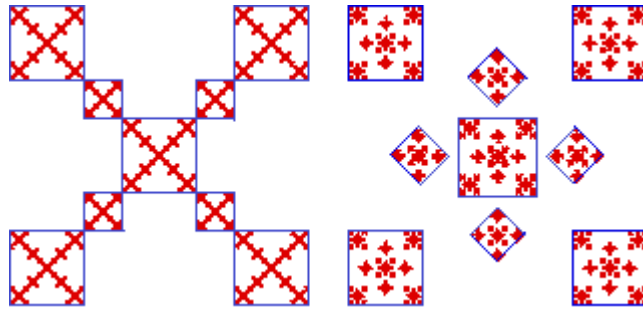
$$d = \frac{\log\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

veya

$$d = 1,35702$$

bulunur. Bu değer fraktalımızın boyutudur.

Şekil 3.5'teki fraktalların $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{8}$ ve $r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = r_9 = \frac{1}{4}$ olan ayrışmaları şekil 3.7'de olduğu gibidir.



Şekil 3.7 Fraktal örneklerinin farklı ayrışmaları 2.

Moran denklemini yazarsak

$$4 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^d \right]^3 + 5 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^d \right]^2 = 1$$

olur. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ seçersek

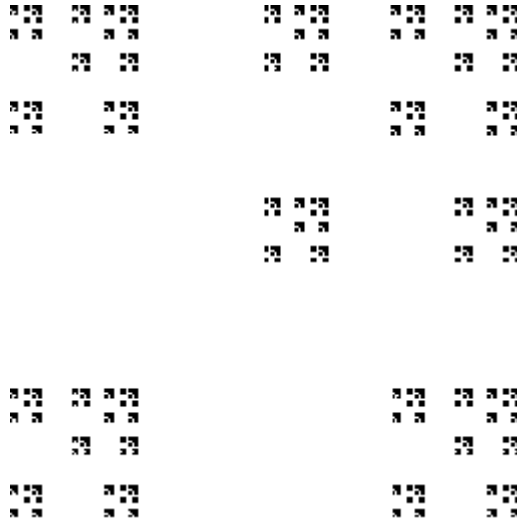
$$4x^3 + 5x^2 = 1$$

olur. Bu denklemin pozitif kökü yine

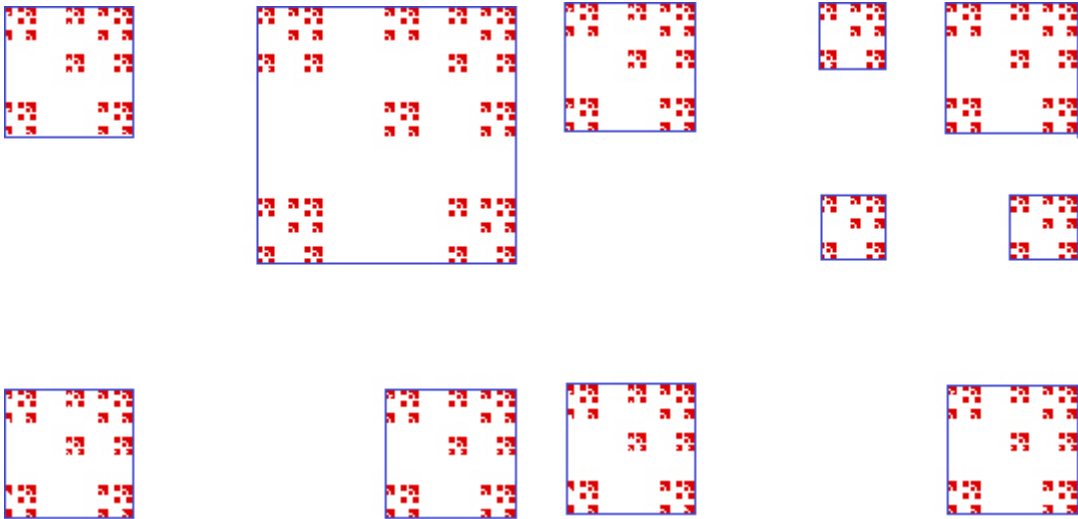
$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$$

bulunur. Aynı işlemlerle fraktalımızın boyutu $d = 1,35702$ dir.

Şekil 3.8'deki fraktalın iki farklı ayrışımı Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.8 Fraktal örneği 5.



Şekil 3.9 Fraktal örneği 5'in farklı ayrışmaları.

Fraktal $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{4}$ ve $r_4 = \frac{1}{2}$ olan parçalara ayrılabilir. Böylece bu fraktal için Moran Denklemi

$$(0,5)^d + 3(0,25)^d = 1$$

dir. Çözüm için $(0,5)^d = x$, $(0,25)^d = [(0,5)^2]^d = (0,5)^{2d} = [(0,5)^d]^2 = x^2$ olur.

O zaman denkleminiz

$$3x^2 + x - 1 = 0$$

olur. Bu denklemden pozitif kök olan

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

değerini alırız. O halde

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

ve buradan da

$$d = \frac{\log\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Fraktalımızın boyutu

$$d = 1.20337$$

bulunur.

Fraktalın bir diğer ayrışımındaki parçaları $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{8}$ ve $r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = \frac{1}{4}$ olur. Buna göre Moran denklemi

$$3 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^d \right]^3 + 4 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^d \right]^2 = 1$$

olur. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ seçersek

$$3x^3 + 4x^2 - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin pozitif kökü yine

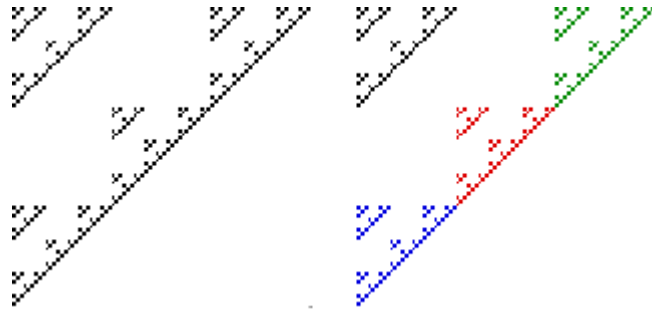
$$x = 0,43426$$

olur. Aynı işlemlerle fraktalımızın boyutu $d = 1,20337$ dir.

Örneklerimizden de görüldüğü gibi Moran denklemi ile benzerlik boyutu hesabında farklı ayrışımalar fraktal boyutunu değiştirmemiştir.

3.2.3 Farklı ölçeklerdeki fraktal yapılar

Şekil 3.10'daki fraktalı ele alalım. Renklendirilmiş şekilden görüldüğü gibi $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{3}$ alınabilir.



Şekil 3.10 Fraktal örneği 6.

O zaman Moran Denklemi

$$4 \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

veya

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d = \frac{1}{4}$$

veya

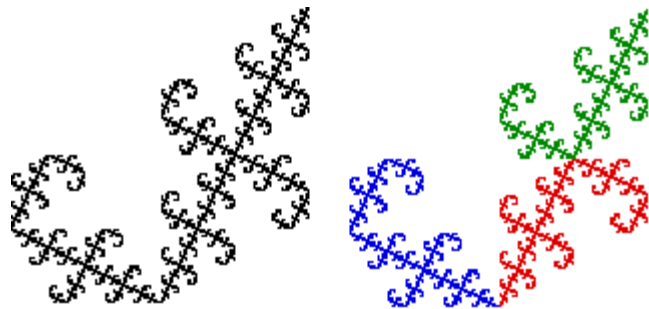
$$d = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

veya

$$d = 1,26186$$

bulunur. Bu değer fraktalımızın boyutudur.

Şekil 3.11'deki fraktalda ölçeklerimiz renklendirilmiş şekillerdeki gibi $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ alınabilir.



Şekil 3.11 Fraktal örneği 7.

Bu fraktal için Moran Denklemi

$$3 \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

veya

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{1}{3}$$

veya

$$d = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

veya

$$d = 1,58496$$

bulunur. Böylece fraktallarımızın boyutu 1,58496'dır.

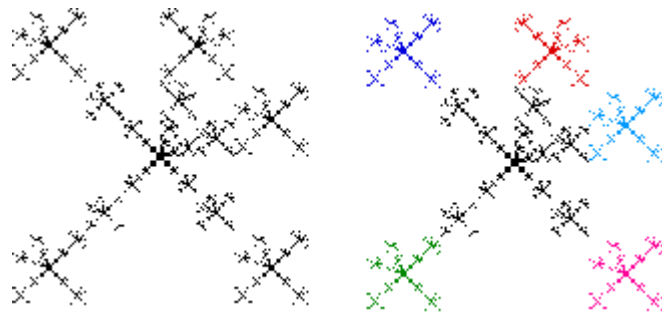
Şekil 3.12'deki Fraktal örneği 8'deki fraktalı $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = \frac{1}{4}$ ve $r_6 = \frac{1}{2}$ olan parçalara ayırılım. Moran denkleminden

$$5 \left(\frac{1}{4}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

olur. Denklemin çözümünden

$$d = 1,48093$$

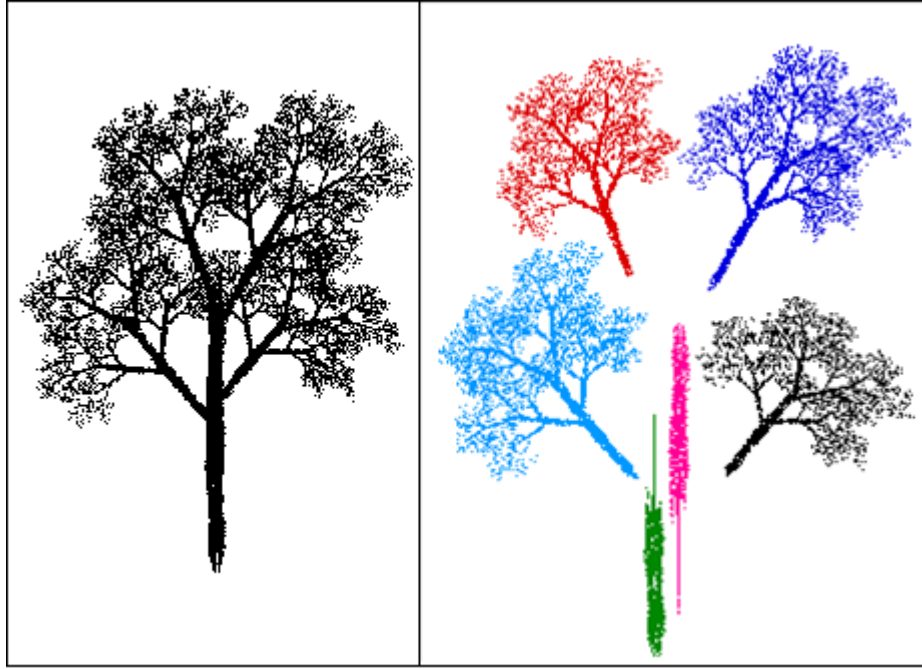
bulunur. Bu değer fraktalımızın boyutudur.



Şekil 3.12 Fraktal örneği 8.

3.2.4 Doğadan fraktal örneği

Şekil 3.13'teki ağacın tamamının, kendisinin ölçekli kopyası olan dört temel dalından oluştuğu görülebilir. Fraktalımızı renklendirilmiş şekildeki gibi $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{2}$ ölçekli parçalara ayırabiliriz.



Şekil 3.13 Doğadan fraktal örneği

Buna göre Moran denklemini yazarsak

$$4 \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

veya

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{1}{4}$$

veya

$$d = \frac{\log\left(\frac{1}{4}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

veya

$$d = 2$$

bulunur. Böylece ağaç fraktalımızın boyutu 2'dir.

KAYNAKLAR

- Akdeniz, F., “Doğada, Sanatta, Mimaride Altın Oran ve Fibonacci Sayıları”, **Nobel Kitabevi**, Adana (2007).
- Altın Oran, http://tr.wikipedia.org/wiki/Altın_oran (Ziyaret Edilme Tarihi, 17.04.2015).
- Barnsley, M. F., “Fractals Everywhere”, **Acad Press Inc**, Boston (1988).
- Bicknell, M. And Verner, E. Hoggatt, Jr., “Golden Triangles, Rectangles, and Cuboids”, *The Fibonacci Quarterly*, 7: 73-92 (1969)
- Çilingir, F., “The Dynamics of Relaxes Newton’s Method on the Exponential Function and its Fractals”, **Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultaten der Georg-August-Universität zu Göttingen** (2001).
- Dunlap, R.A., “Altın Oran ve Fibonacci Sayıları” **TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları**, Ankara (2011)
- Feoler, J., “Fractals”, **Plenum Press**, New York (1988).
- Fractal Geometry, <http://classes.yale.edu/fractals/> (Ziyaret Edilme Tarihi, 20.04.2015)
- Golden Rectangle, <http://goldennumber.net/> (Ziyaret Edilme Tarihi, 20.04.2015)
- Hacısalıhoğlu, H. H., “Fraktal Geometri I”, **Bilecik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü**, Bilecik (2012).
- Lanius, C., “Fraktal Dimensions”, <http://math.rice.edu/~lanius/fractals/dim.html> (Ziyaret Edilme Tarihi, 16.03.2015)
- Lauwerier, H. A., “Fractals Images of Chaos”, **Princeton University**, (1991).
- Seppala-Holtzman, D. N. and Rangel, F. R., “Converging on the Eye of God” *Mathematics Teacher*, 103(2): 151-155 (2009).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Banu İREZ AYDIN
Doğum Yeri ve Tarihi : Eskişehir / 04.08.1977



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar :
Projeler :
Çalıştığı Kurumlar : Anadolu Üniversitesi, Bilecik Meslek Yüksekokulu
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Meslek Yüksekokulu

İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi MYO Elektronik
Haberleşme Tek. Programı BİLECİK
Tel : (228) 214 15 99
E-Posta Adresi : banu.irez@bilecik.edu.tr

Akademik Çalışmaları

—

Yabancı Dil Bilgisi : İngilizce (Orta Seviye)

Tarih:08/06/2015