ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÜÇ BOYUTLU KOMPAKT LIE GRUPLARINDA EĞRİLER ÜZERİNE

Caner DEĞİRMEN
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

BİLECİK, 2017
Ref.No: 10158852

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTSİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÜÇ BOYUTLU KOMPAKT LIE GRUPLARINDA EĞRİLER ÜZERİNE

Caner DEĞİRMEN
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

BİLECİK, 2017

ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

ON CURVES IN THREE DIMENSIONAL COMPACT LIE GROUPS

Caner DEĞİRMEN
Master's Thesis

Thesis Advisor
Asst. Prof. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

BILECIK, 2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21/06/2017 tarih ve 32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Caner DEĞİRMEN'in "Üç Boyutlu Kompakt Lie Gruplarında Eğriler Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

ÜYE : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Şirin AKTAY

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../........ tarih ve ..../............ sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlamasında, sunulmasında, başında ve sonunda; maddi ve manevi emek veren, ilgi ve alakalarını hiç eksik etmeyen, değerli zamanlarını ayıran saygı değer hocam, **Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'** ya sonsuz minnet ve hürmetlerimi sunarım.

Ayrıca, eğitim ve öğretim hayatımın her kademesinde beni destekleyen, şevklendiren, bana güven veren ve yol gösteren fedakâr annem **Gülay DEĞİRMEN** ve aileme bana kattıkları her şey için çok teşekkür ederim.

Caner DEĞİRMEN

Temmuz 2017

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayındaki temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir. Dahası özel eğrilerden genel helis ve slant helis eğrilerinin tanımları ve bu eğrilere ait önemli karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak Lie grupları ve Lie cebirleri ile ilgili tanımlar ve temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında genel helisler ve slant helisler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, konum vektörü bir diğer eğrinin Frenet vektör alanları ile oluşturulan Smarandache eğrilerinin Frenet invaryantları 3-boyutlu Lie gruplarında elde edilmiştir. Beşinci bölümde, 3-boyutlu Lie grubunda verilen bir birim hızlı eğri için $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ hareketli alternatif çatısı verilmiş ve bu çatıya göre $\mathbb{C}$-slant helisler tanımlanmıştır. Ayrıca bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler

Genel helisler; Slant helisler; Smarandache eğrileri; Lie grubu; Lie cebiri.

ABSTRACT

This thesis consist of five sections. The first section is devoted to the introduction. In the second section, basic concepts in 3-dimensional Euclidean space are given. In addition, basic concepts about curves in 3-dimensional Euclidean space are mentioned. Moreover, definitions of general helix and slant helix curves from special curves and important characterizations of these curves are given. Finally, definitions and basic concepts related to Lie groups and Lie algebras are mentioned. In the third section, general helices and slant helices are introduces in 3-dimensional Lie groups wit a bi-invariant metric. In the next section, the Frenet invariants of Smarandache curves, for which position vector is composed by Frenet vector fields on a given curve, are obtained in the 3-dimensional Lie groups. In the final section, the moving alternative frame $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ is given for a unit speed curve given in the 3-dimensional Lie group and $\mathbb{C}$-slant helices are defined according to this frame. In addition, some characterizations of these curves are obtained.

Key Words

General helices; Slant helices; Smarandache curves; Lie group; Lie algebra.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\lVert\ \rVert$	: Norm operatörü
$<,>$	: İç çarpım operatörü
$\wedge$	: $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında vektörel çarpım operatörü
κ	: Eğrinin birinci eğriliği
τ	: Eğrinin ikinci eğriliği, burulması veya torsiyonu
$\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$	: Hareketli Frenet çatısı
D	: Darboux vektörü
W	: Birim Darboux vektörü
$\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}, f, g\}$	: Hareketli alternatif çatı
G	: 3-boyutlu Lie grubu
h	: Harmonik eğrilik

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri çalışmalarında eğriler teorisi önemli bir yere sahiptir. Eğriler teorisi ile ilgilenen araştırmacıların ilgilerini en çok çeken şey ise özel eğriler ve bu eğrilerin karakterizasyonlarıdır. Bu özel eğrilerden bazıları genel helisler, slant helisler, Bertrant eğrileri, Mannheim eğrileri, Smarandache eğrileri v.b. dir. Bu tip eğrilerin karakterizasyonları Öklid uzaylarında ve Öklid olmayan Minkowski, Galileo gibi uzaylarda uzun yıllardan beri çalışmaktadır ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu eğrilerden genel helisler; 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin her noktasında sabit doğrultulu bir doğruyla sabit açı yapması durumundaki eğrilere verilen isimdir. Genel helislerle ilgili ilk olarak 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ortaya konan ve B. de Saint Venant tarafından 1845 yılında ispatlanan en önemli koşul; eğrinin genel helis olabilmesi için eğrilikleri oranının sabit olması gerektiğidir. Bu özel eğrilerden bir diğeri olan slant helisler ilk kez 2004 yılında Izumiya tarafından tanımlanmış ve bu eğrilere ait karakterizasyonlar elde edilmiştir. Sonrasında bu tip eğriler birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve çalışmıştır.

Uzunoğlu ve arkadaşları (2016) 3-boyutlu Öklid uzayında, eğri üzerinde yeni bir alternatif çatı tanımlamışlardır ve bu çatıya göre eğrileri karakterize etmişlerdir.

Çiftçi (2009) bir çalışmasında 3-boyutlu Lie gruplarında genel helis tanımını vermiş ve genel helisler ile küresel resimleri arasındaki ilişkileri incelemiştir. Daha sonrasında Okuyucu (2013) yılında doktora tezinde 3- boyutlu Lie gruplarında Slant helisleri, Bertrand ve Mannheim eğrilerini çalışmıştır.

Bu tezde 3-boyutlu Lie gruplarından Frenet çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımları verilmiş ve bu eğrilerinin Frenet invaryantları elde edilmiştir. Son olarak 3-boyutlu Lie gruplarında bir eğrinin alternatif çatısı verilmiş ve $\mathbb{C}$-slant helisler tanımlanmıştır. Ayrıca bu eğriler ile ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. $\mathbb{E}^3$, Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında temel kavramlar ile bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi verilmiş olsun.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 3\}$$

cümlesi üzerinde tanımlı, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$+ \ : \mathbb{R}^3 \ x \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\cdot \ : \mathbb{R} \ \ x \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\lambda, \vec{x}) \longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} \ = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

işlemleri ile $\mathbb{R}^3$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Gray, 2006).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayındaki $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$<,>: \ \mathbb{R}^3 \ x \ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow < \vec{x}, \vec{y} > = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlı fonksiyona standart Öklid iç çarpımı denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.3. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\|\vec{x}\| \ = \ \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >}$$

eşitliği ile tanımlı fonksiyona $\vec{x}$ vektörünün normu denir (Gray, 2006).

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayı normlu bir vektör uzayı olup bu norm yardımıyla tanımlanan $d: \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, d(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir metriktir. Bu metrikle beraber $\mathbb{R}^3$ uzayına Öklid uzayı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.4. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ için,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

eşitliği ile tanımlı işleme Öklidiyen anlamda vektörel çarpım denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.5. $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ fonksiyonu diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise α ya bir eğri denir. Burada $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığına eğrinin parametre aralığı denir. α fonksiyonu $\forall t \in I$ değerine $\mathbb{E}^3$ ün bir $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \in \mathbb{E}^3$ noktasını karşılık getirir. Burada t değişkenine eğrinin parametresi denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.6. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olmak üzere $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) = (\alpha_1{}'(t), \alpha_2{}'(t), \alpha_3{}'(t))$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.7. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olmak üzere α eğrisinin bir $t \in \alpha$ noktasında hız vektörlerinin cümlesi α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır ve $T_{\mathbb{E}^3}(\alpha(t))$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ise α eğrisine regülerdir denir (Korkmaz, 2012).

Teorem 2.1.1. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de regüler her eğrinin birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.9. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \mathbb{T}(s) \\ \frac{\alpha''(s)}{\| \alpha''(s) \|} &= \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{T}(s) \wedge \mathbb{N}(s) &= \mathbb{B}(s) \end{aligned}$$

dir. Burada $\mathbb{T}(s)$ eğrinin birim teğet vektör alanı, $\mathbb{N}(s)$ eğrinin asli normal vektör alanı ve $\mathbb{B}(s)$ eğrinin binormal vektör alanıdır. Buradan $\mathbb{T}(s)$, $\mathbb{N}(s)$, $\mathbb{B}(s)$ vektör alanlarına Frenet vektör alanları denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında yay parametreli bir eğri olmak üzere, $\|\mathbb{T}'(s)\| = \kappa(s)$ sayısına α eğrisinin s noktasındaki birinci eğriliği denir. $\alpha''(s) \neq 0$ için $\mathbb{B}'(s) = \tau(s)\mathbb{N}(s)$ eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin ikinci eğriliği veya burulması denir (Korkmaz, 2012).

Teorem 2.1.2. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri ve $\mathbb{T}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$ Frenet vektör alanları olmak üzere, κ eğrinin eğriliği ve τ eğrinin torsiyonu olmak üzere

$$\kappa = \frac{\| \alpha' \wedge \alpha'' \|}{\| \alpha' \|}$$

$$\tau = \frac{< \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' >}{\| \alpha' \wedge \alpha'' \|^2}$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri, $\mathbb{T}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$ Frenet vektör alanları ve $\kappa > 0$ eğrinin eğriliği ve τ eğrinin torsiyonu olmak üzere, Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \mathbb{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbb{N}(s) \\ \mathbb{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbb{T}(s) + \tau(s)\mathbb{B}(s) \\ \mathbb{B}'(s) &= -\tau(s)\mathbb{N}(s) \end{aligned}$$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.12. α, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektör alanı $\mathbb{T}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$ olmak üzere, α eğrisi boyunca birim teğet vektör alanları birim küre üzerinde bir eğri çizeler. Bu eğriye α eğrisinin teğetler göstergesi denir. Benzer şekilde α eğrisinin asli normaller göstergesinin ve binormaller göstergesinin birim küre üzerinde çizdiği eğrilere sırasıyla, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve binormaller göstergesi denir (Struik, 1988).

Teorem 2.1.3. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olmak üzere, α, eğrisi düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır (O'Neill, 1966).

Teorem 2.1.4. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\kappa = 0$ ise α eğrisi bir doğrudur. Tersine α eğrisi bir doğru ise $\kappa = 0$ dır (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\mathbb{T}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$ Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareket yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$D(s) = \tau(s)\mathbb{T}(s) + \kappa(s)\mathbb{B}(s) = \mathbb{N}(s) \wedge \mathbb{N}'(s)$$

olup eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü olarak isimlendirilir.
D Darboux vektörü yardımıyla Frenet çatı elemanlarının değişimini veren

$$\begin{aligned} \mathbb{T}'(s) &= D(s) \wedge \mathbb{T}(s) \\ \mathbb{N}'(s) &= D(s) \wedge \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{B}'(s) &= D(s) \wedge \mathbb{B}(s) \end{aligned}$$

Darboux vektörleri elde edilir. W vektörü, D Darboux vektörü yönündeki birim vektör ise

$$\|D(s)\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} > 0$$

olmak üzere

$$W(s) = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbb{B}(s)$$

şeklinde elde edilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında yay parametreli bir eğri ve bu eğrinin her $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(s)$ ve torsiyonu $\tau(s)$ olmak üzere,

$$H : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s \longrightarrow H(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$$

ile tanımlı H fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki harmonik eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.15. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\mathbb{N}(s)$ vektör alanı α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı olmak üzere $\mathbb{C}(s) = \frac{\mathbb{N}'(s)}{\|\mathbb{N}'(s)\|}$ ve $W(s) = \frac{\tau(s)\mathbb{T}(s) + \kappa(s)\mathbb{B}(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}$ için $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{N} \wedge \mathbb{C} = W\}$ üçlüsü α eğrisi için bir hareketli çatı olur. Bu çatıya $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, W\}$ – çatısı denir. Buradan $f = \kappa\sqrt{1 + H^2}$, $H = \frac{\tau}{\kappa}$ ve $g = \sigma f, \sigma = \frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{3/2}}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}'(s) \\ \mathbb{C}'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{C}(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

türevleri elde edilir (Uzunoğlu, 2015).

2.2. $\mathbb{E}^3$, Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Karakterizasyonları

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$, Öklid uzayında çalışılan bazı özel eğrilerin tanımları ve bu eğriler için ifade edilen önemli karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir α eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbb{T}$, sabit bir u vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa, yani $< \mathbb{T}, u > = cos\varphi$ ise, α eğrisine genel helis denir (Lancret, 1802).

Teorem 2.2.1. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. α eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa} = c \in \mathbb{R}$ olmasıdır (Lancret, 1802).

Tanım 2.2.2. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun. Eğrinin asli normal vektörü $\mathbb{N}$, eğrinin her noktasındaki sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa, yani $< \mathbb{N}, u > = cos\varphi$ ise, α eğrisine slant helis denir (Izimuya ve Takeuchi, 2004).

Teorem 2.2.2. α eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin eğriliği $\kappa \neq 0$ olmak üzere, α eğrisinin slant helis olması için gerek yeter koşul α eğrisinin asli normaller göstergesinin küresel resminin geodezik eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)(s)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır (Izimuya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 2.2.3. α eğrisi $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisi

$$\psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s))$$

olarak tanımlanır (Ahmad, 2010).

Tanım 2.2.4. α eğrisi $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere $\mathbb{TB}$-Smarandache eğrisi

$$\omega(s_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s))$$

olarak tanımlanır (Ahmad, 2010).

Tanım 2.2.5. α eğrisi $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere $\mathbb{NB}$-Smarandache eğrisi

$$\phi(s_\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s))$$

olarak tanımlanır (Ahmad, 2010).

Tanım 2.2.6. α eğrisi $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında s yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisi

$$\varsigma(s_\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s))$$

olarak tanımlanır (Ahmad, 2010).

Tanım 2.2.7. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, W\}$ olsun. α eğrisinin $\mathbb{C}$ vektör alanı, α eğrisinin her noktasındaki sabit u doğrultusu ile sabit bir açı yapıyorsa, yani $< \mathbb{C}, u > = cos\varphi; \varphi \neq \frac{\pi}{2}$, ise α eğrisine C-slant helis denir (Uzunoğlu, vd., 2016).

2.3. Lie Grupları ve Lie Cebiri

Tanım 2.3.1. G bir grup ve M bir diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

L_1 : G nin her elemanı M nin noktaları ile çakışır,
L_2 : $M \, x \, M \longrightarrow M, \ (a,b) \longrightarrow ab^{-1}$ işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir,

aksiyomları sağlanırsa M ye Lie grubunun temel manifoldu, G ye Lie grubunun temel grubu ve (M, G) ikilisine de Lie Grubu denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.2. K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun.

$$\begin{aligned} [\ \ ] : V \, x \, V &\longrightarrow \ V \\ (X,Y) &\longrightarrow [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü,

i. Bilineer,
ii. Antisimetrik,
iii. $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$

özelliklerini sağlıyor ise K üzerinde bir Lie operatörü veya parantez operatörü adını alır. $(V,\ [,])$ ikilisine de bir Lie Cebiri denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.3. G bir Lie grubu olmak üzere bir $g_0 \in G$ noktasında $\forall g \in G$ için

$$l_{g_0} : G \longrightarrow G,\ \ l_{g_0}(g) = g_0 g$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme G üzerinde sol paralelizm (öteleme) denir.

Benzer şekilde bir $g_0 \in G$ noktasında $\forall g \in G$ için

$$r_{g_0} : G \longrightarrow G,\ \ r_{g_0}(g) = g g_0$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme de G üzerindeki sağ paralelizm (öteleme) denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.4. Matrislerde bilinen çarpma işlemine göre $\left\{ \left[a_{ij}\right]_{nxn} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ matris uzayının bir altmanifoldu grup ise bu gruba matris Lie grubu denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.5. G matris Lie grubu üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere $\forall g_0, g_1 \in G$ için,

$$l_{(g_0)_*} X(g_1) = X(g_0 g_1)$$

yani $\forall g \in G$

$$l_{(g)_*} \circ X = X \circ l_{(g)}$$

ise X vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir.

$$\chi_l = \left\{ X \mid \ \ X \in \chi\ , \qquad l_{(g)_*} \circ X = X \circ l_{(g)} \right\}$$

X vektör alanları uzayının bir alt uzayı olan bu uzaya sol invaryant vektör alanlarının uzayı denir.

Benzer şekilde, G matris Lie grubu üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere $\forall g_0, g_1 \in G$ için,

$$r_{(g_0)_*}X(g_1) = X(g_1 g_0)$$

yani $\forall g \in G$

$$r_{(g)_*} \circ X = r_{(g)} \circ X$$

ise X vektör alanına sağ invaryant vektör alanı denir.

$$\chi_r = \{X \mid \; X \in \chi \,, \qquad r_{(g)_*} \circ X = r_{(g)} \circ X\}$$

X vektör alanları uzayının bir alt uzayı olan bu uzaya sağ invaryant vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.6. G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının uzayının oluşturduğu Lie cebiri, G Lie grubunun Lie cebiri olarak tanımlanabilir. Ayrıca G nin e birim noktasındaki $T_G(e)$ tanjant uzayı Lie cebir yapısı ile birlikte, G Lie grubunun Lie cebiri olarak alınabilir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.7. $d : G \, x \, G \to \mathbb{R}$, G Lie grubu üzerinde bir metrik olsun. $\forall a \in G$ ve $\forall x, y \in G$ için,

i. $d(ax, ay) = d(x, y)$ ise d metriğine sol invaryant metrik,
ii. $d(xa, ya) = d(x, y)$ ise d metriğine sağ invaryant metrik

denir (Hacısalihoğlu, 2006).

Tanım 2.3.8. G Lie grubu üzerindeki bir d metriği, hem sağ invaryant hem sol invaryant ise d metriğine bi-invaryant metrik denir (Hacısalihoğlu, 2006).

3. 3-BOYUTLU LIE GRUPLARINDA GENEL VE SLANT HELİSLER

Bu bölümde Çiftçi (2009) ve Okuyucu (2013) nun çalışmalarında ele alınan 3-boyutlu Lie gruplarında genel helisler ve slant helisler tanıtılacak, bu eğriler ile ilgili bazı teoremler ispatsız verilecektir.

Bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubu G olsun. G Lie grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olmak üzere, G Lie grubunun e birim elemanı için $\mathfrak{g}$ Lie cebiri ile $T_G(e)$ tanjant uzayının Lie cebir yapısı izomorftur. G Lie grubunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve $<,>$ bi-invaryant metrik olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\langle X,[Y,Z]\rangle = \langle [X,Y],Z\rangle$$

ve

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$$

dir.

3-boyutlu Lie grubu G de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve $\mathfrak{g}$ nin ortonormal bir bazı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olmak üzere, eğri boyunca alınan iki vektör alanı ξ ve ζ için, $\xi = \sum_{i=1}^{3} \xi_i V_i$ ve $\zeta = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i V_i$ şeklinde ifade edilebilir. Burada ξ_i ve ζ_i reel değerli düzgün fonksiyonlardır. Burada ξ ve ζ vektör alanları için Lie çarpımı

$$[\xi,\zeta] = \sum \xi_i \, \zeta_j [V_i, V_j]$$

eşitliği ile tanımlıdır. $\mathbb{T} = \alpha'$ ve $\dot{\xi} = \sum_{i=1}^{3} \dot{\xi}_i V_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\xi_i}{dt} V_i$ olmak üzere, α eğrisi boyunca herhangi bir ξ vektör alanın kovaryant türevi $\nabla_{\alpha'}\xi$,

$$\nabla_{\alpha'}\xi = \dot{\xi} + \frac{1}{2}[\mathbb{T},\xi] \qquad (3.1)$$

şeklindedir. Burada ξ, bir sol invaryant vektör alanın α eğrisine kısıtlanmışı ise $\dot{\xi} = 0$ dır (Crouch ve Silva, 1995).

Tanım 3.1. 3-boyutlu Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve $X \in \mathfrak{g}$ bir birim sol invaryant vektör alanı olsun. α eğrisi ile X, α eğrisinin her noktasında sabit bir açı yapıyorsa, yani α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı $\mathbb{T}$, bir sol invaryant vektör alanı X ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere

$$\langle \mathbb{T}(s), X\rangle = cos\varphi$$

ise α eğrisine G de genel helis denir (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.2. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun.

$$\tau_G = \frac{1}{2}\langle [\mathbb{T}, \mathbb{N}], \mathbb{B}\rangle$$

veya

$$\tau_G = \frac{1}{2\kappa^2\tau}\langle [\ddot{\mathbb{T}}, \mathbb{T}], \dot{\mathbb{T}}\rangle + \frac{1}{4\kappa^2\tau}\|[\mathbb{T}, \mathbb{T}]\|^2$$

dir (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.3. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olmak üzere

$$h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$$

eşitliği ile verilen h fonksiyonuna α eğrisinin harmonik eğriliği denir (Okuyucu, 2013).

Teorem 3.1. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $c \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olmak üzere, α eğrisinin genel helis olması için gerek yeter şart

$$\tau = c\kappa + \tau_G$$

olmasıdır (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.3. ve Teorem 3.1. bir arada düşünülürse, G de birim hızlı bir α eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa} = c = sabit$$

olmasıdır.

Tanım 3.4. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}$ ile $X \in \mathfrak{g}$ birim sol invaryant vektör alanı sabit açı yapıyorsa, yani $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere

$$\langle \mathbb{N}(s), X \rangle = cos\varphi$$

ise α eğrisi G de slant helistir (Okuyucu, 2013).

Tanım 3.5. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. α eğrisinin asli normaller göstergesinin küresel resminin geodezik eğriliği,

$$\sigma_{\mathbb{N}} = \frac{\kappa(1 + h^2)^{3/2}}{h'}$$

eşitliği ile tanımlıdır (Okuyucu, 2013).

Lemma 3.1. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun.

$$[\mathbb{T}, \mathbb{N}] = \langle [\mathbb{T}, \mathbb{N}], \mathbb{B} \rangle \mathbb{B} = 2\tau_G \mathbb{B} \quad (3.2)$$

$$[\mathbb{T}, \mathbb{B}] = \langle [\mathbb{T}, \mathbb{B}], \mathbb{N} \rangle \mathbb{N} = -2\tau_G \mathbb{N} \quad (3.3)$$

dir (Okuyucu, 2013).

Teorem 3.2. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ fonksiyonu α eğrisinin harmonik eğriliği ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere, α eğrisi bir slant helis ise α eğrisinin ekseni

$$X = \left\{\frac{\kappa h(1+h^2)}{h'}\mathbb{T} + \mathbb{N} + \frac{\kappa(1+h^2)}{h'}\mathbb{B}\right\} cos\varphi$$

dir (Okuyucu, 2013).

Teorem 3.3. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ fonksiyonu α eğrisinin harmonik eğriliği ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere, α eğrisinin slant helis olması için gerek yeter şart

$$\sigma_{\mathbb{N}} = \frac{\kappa(1+h^2)^{3/2}}{h'} = tan\varphi = sabit$$

olmasıdır (Okuyucu, 2013).

Tanım 3.6. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ortonormal bir bazı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. α eğrisinin teğetler göstergesi $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ olmak üzere,

$$\beta(s_\beta) = \mathbb{T}(s) = \sum_{i=1}^{3} t_i V_i$$

dir. Burada s_β, β eğrisinin yay parametresi ve s, α eğrisinin yay parametresidir.

Ayrıca α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$, β eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\beta, \mathbb{N}_\beta, \mathbb{B}_\beta, \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olmak üzere α ve β eğrisinin Frenet vektör alanları arasındaki ilişkiler:

$$\mathbb{T}_\beta(s_\beta) = \mathbb{N}(s),$$
$$\mathbb{N}_\beta(s_\beta) = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s),$$
$$\mathbb{B}_\beta(s_\beta) = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s)$$

şeklindedir (Okuyucu, 2013).

Teorem 3.4. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin teğetler göstergesi olan β eğrisinin genel helis olmasıdır (Okuyucu, 2013).

Tanım 3.7. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ortonormal bir bazı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. α eğrisinin normaller göstergesi $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{g}$ olmak üzere,

$$\gamma(s_\gamma) = \mathbb{N}(s) = \sum_{i=1}^{3} n_i V_i$$

dir. Burada s_γ, γ eğrisinin yay parametresi ve s, α eğrisinin yay parametresidir.
Ayrıca α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$, γ eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\gamma, \mathbb{N}_\gamma, \mathbb{B}_\gamma, \kappa_\gamma, \tau_\gamma\}$ ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olmak üzere γ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbb{T}_\gamma$ nın α eğrisinin Frenet vektör alanları cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{T}_\gamma(s_\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s)$$

(Okuyucu, 2013).

Teorem 3.5. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G$ olsun. α eğrisinin slant helis ise α eğrisinin normaller göstergesi olan γ eğrisi düzlemsel bir eğridir (Okuyucu, 2013).

Tanım 3.8. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ortonormal bir bazı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. α eğrisinin binormaller göstergesi $\delta : I \subseteq \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ olmak üzere,

$$\delta(s_\delta) = \mathbb{B}(s) = \sum_{i=1}^{3} b_i V_i$$

dir. Burada s_δ, δ eğrisinin yay parametresi ve s, α eğrisinin yay parametresidir.
Ayrıca α eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$, δ eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\delta, \mathbb{N}_\delta, \mathbb{B}_\delta, \kappa_\delta, \tau_\delta\}$, $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ ve $\varepsilon = \begin{cases} 1 & , \quad \kappa h > 0 \\ -1 & , \quad \kappa h < 0 \end{cases}$ olmak üzere α ve δ eğrisinin Frenet vektör alanları arasındaki ilişkiler:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_\delta(s_\delta) &= -\varepsilon \mathbb{N}(s), \\
\mathbb{N}_\delta(s_\delta) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+h^2}} \mathbb{T}(s) - \frac{\varepsilon h}{\sqrt{1+h^2}} \mathbb{B}(s), \\
\mathbb{B}_\delta(s_\delta) &= -\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \mathbb{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \mathbb{B}(s)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (Okuyucu, 2013).

Teorem 3.6. 3-boyutlu G Lie grubunda yay parametreli bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin binormaller göstergesi olan δ eğrisinin genel helis olmasıdır (Okuyucu, 2013).

4. 3-BOYUTLU LIE GRUPLARINDA FRENET ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu G Lie gruplarından bir birim hızlı eğrinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ üçlüsü yardımıyla Smarandache eğrilerinin tanımları verilecek ve bu eğriler için Frenet elemanları elde edilecektir.

3-boyutlu Lie grubu G de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. G Lie grubunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere, α eğrisinin Frenet elemanları için

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{T} \\ \nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{N} \\ \nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{B} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

dir. Buradan (3.1), (3.2), (3.3) ve (4.1) eşitlikleri yardımıyla,

i) α eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}$ için,

$$\nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{T} = \dot{\mathbb{T}} + \frac{1}{2}[\mathbb{T}, \mathbb{T}]$$
$$\dot{\mathbb{T}} = \kappa\mathbb{N}$$

dir.

ii) α eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}$ için,

$$\nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{N} = \dot{\mathbb{N}} + \frac{1}{2}[\mathbb{T}, \mathbb{N}]$$
$$\dot{\mathbb{N}} = -\kappa\mathbb{T} + (\tau - \tau_G)\mathbb{B}$$

dir.

iii) α eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbb{B}$ için,

$$\nabla_{\mathbb{T}}\mathbb{B} = \dot{\mathbb{B}} + \frac{1}{2}[\mathbb{T}, \mathbb{B}]$$

$$\dot{\mathbb{B}} = -(\tau - \tau_G)\mathbb{N}$$

dir.

(i), (ii) ve (iii) eşitliklerinden α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ için

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{T}}(s) \\ \dot{\mathbb{N}}(s) \\ \dot{\mathbb{B}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & (\tau - \tau_G) \\ 0 & -(\tau - \tau_G) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T}(s) \\ \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{B}(s) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

türev formülleri elde edilir.

Tanım 4.1. G, 3-boyutlu Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda G de $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisi

$$\psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s)) \tag{4.3}$$

dir.

Şimdi $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisi nin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\psi, \mathbb{N}_\psi, \mathbb{B}_\psi, \kappa_\psi, \tau_\psi\}$ yi hesaplayalım. (4.3) denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\psi' = \frac{d\psi}{ds_\psi}\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\mathbb{T}}(s) + \dot{\mathbb{N}}(s)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.2) türev formülleri kullanılır ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğu düşünülürse

$$\mathbb{T}_\psi \frac{ds_\psi}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(-\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\right) \tag{4.4}$$

denklemi elde edilir. (4.4) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\sqrt{2+h^2} \tag{4.5}$$

dir. (4.5) den $\frac{ds_\psi}{ds}$ değeri (4.4) denkleminde yazılırsa $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}_\psi$;

$$\mathbb{T}_\psi(s_\psi) = \frac{-\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)}{\sqrt{2+h^2}} \tag{4.6}$$

olarak bulunur.

(4.6) denkleminde her iki tarafın türevini alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\kappa_\psi \mathbb{N}_\psi(s_\psi)\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{(-\kappa(2+h^2)+hh')\mathbb{T}(s) + (-\kappa(1+h^2)(2+h^2) - hh')\mathbb{N}(s)}{(2+h^2)^{3/2}} + \frac{\big((\kappa h + h')(2+h^2) - h^2h'\big)\mathbb{B}(s)}{(2+h^2)^{3/2}}$$

veya

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\psi &= -\kappa(2+h^2) + hh', \\
\mathcal{B}_\psi &= -\kappa(1+h^2)(2+h^2) - hh', \\
\mathcal{C}_\psi &= (\kappa h + h')(2+h^2) - h^2h'
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\kappa_\psi \mathbb{N}_\psi(s_\psi)\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{\mathcal{A}_\psi\mathbb{T}(s) + \mathcal{B}_\psi\mathbb{N}(s) + \mathcal{C}_\psi\mathbb{B}(s)}{(2+h^2)^{3/2}} \tag{4.7}$$

denklemi elde edilir. (4.5) den $\frac{ds_\psi}{ds}$ eşitliği (4.7) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafın normu alınırsa $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisinin eğriliği κ_ψ;

$$\kappa_\psi = \left\|\dot{\mathbb{T}}_\psi\right\| = \frac{\sqrt{2}}{\kappa(2+h^2)^2}\sqrt{\mathcal{A}_\psi^2 + \mathcal{B}_\psi^2 + \mathcal{C}_\psi^2} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir.

(4.5), (4.7) ve (4.8) denklemlerinden $\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\psi$;

$$\mathbb{N}_\psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}_\psi^2 + \mathcal{B}_\psi^2 + \mathcal{C}_\psi^2}}\left(\mathcal{A}_\psi\mathbb{T}(s) + \mathcal{B}_\psi\mathbb{N}(s) + \mathcal{C}_\psi\mathbb{B}(s)\right) \tag{4.9}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbb{B}_\psi$;

$$\mathbb{B}_\psi(s_\psi) = \mathbb{T}_\psi(s_\psi) \wedge \mathbb{N}_\psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{2+h^2}\sqrt{\mathcal{A}_\psi^2 + \mathcal{B}_\psi^2 + \mathcal{C}_\psi^2}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & h \\ \mathcal{A}_\psi & \mathcal{B}_\psi & \mathcal{C}_\psi \end{vmatrix},$$

dan $p = \sqrt{2+h^2}$ ve $q = \sqrt{\mathcal{A}_\psi^2 + \mathcal{B}_\psi^2 + \mathcal{C}_\psi^2}$ olmak üzere

$$\mathbb{B}_\psi(s_\psi) = \frac{1}{pq}\left\{\left(\mathcal{C}_\psi - h\mathcal{B}_\psi\right)\mathbb{T}(s) + \left(\mathcal{C}_\psi + h\mathcal{A}_\psi\right)\mathbb{N}(s) - \left(\mathcal{B}_\psi + \mathcal{A}_\psi\right)\mathbb{B}(s)\right\}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TN}$-Smarandache eğrisinin ikinci eğriliği τ_ψ değerini hesaplamak için

$$\psi' = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(-\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\right)$$

denkleminden iki kez türev alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\psi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(-\kappa^2 - \kappa')\mathbb{T}(s) + \left(\kappa' - \kappa^2(1+h^2)\right)\mathbb{N}(s) + (\kappa^2 h + \kappa' h + \kappa h')\mathbb{B}(s)\right\}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{&\left(-3\kappa\kappa' - \kappa'' + \kappa^3(1+h^2)\right)\mathbb{T}(s)\\ &+(-(\kappa^3 + 3\kappa\kappa')(1+h^2) + \kappa'' - 3\kappa^2 hh')\mathbb{N}(s)\\ &+(-\kappa^3 h(1+h^2) + 3\kappa\kappa' h + (\kappa^2 + 2\kappa')h' + \kappa'' h + \kappa h'')\mathbb{B}(s)\}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\ell &= -3\kappa\kappa' - \kappa'' + \kappa^3(1+h^2),\\ \mathcal{m} &= -(\kappa^3 + 3\kappa\kappa')(1+h^2) + \kappa'' - 3\kappa^2 hh',\\ \mathcal{n} &= \kappa^2 h + \kappa' h + \kappa h'\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\psi''' = \frac{\ell\mathbb{T}(s) + \mathcal{m}\mathbb{N}(s) + \mathcal{n}\mathbb{B}(s)}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\tau_\psi = \frac{det(\psi', \psi'', \psi''')}{\|\psi' \wedge \psi''\|}$$

den

$$\tau_\psi = \frac{\sqrt{2}\{(\kappa h\mathcal{p}^2 + h')\ell + h'\mathcal{m} + \kappa\mathcal{p}^2\mathcal{n}\}}{(\kappa^2 h\mathcal{p}^2 + \kappa h')^2 + (\kappa h')^2 + \kappa^4\mathcal{p}^4}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.2. G, 3-boyutlu Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda G de $\mathbb{T}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisi

$$\omega(s_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s)) \tag{4.10}$$

dir.

Şimdi $\mathbb{T}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisi nin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\omega, \mathbb{N}_\omega, \mathbb{B}_\omega, \kappa_\omega, \tau_\omega\}$ yı hesaplayalım. (4.10) denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\omega' = \frac{d\omega}{ds_\omega}\frac{ds_\omega}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\mathbb{T}}(s) + \dot{\mathbb{B}}(s)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.2) türev formülleri kullanılır ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğu düşünülürse

$$\mathbb{T}_\omega \frac{ds_\omega}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1-h)\mathbb{N}(s) \tag{4.11}$$

denklemi elde edilir. (4.11) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\omega}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1-h) \tag{4.12}$$

dir. (4.12) den $\frac{ds_\omega}{ds}$ değeri (4.11) denkleminde yazılırsa $\mathbb{T}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}_\omega$;

$$\mathbb{T}_\omega(s_\omega) = \mathbb{N}(s) \tag{4.13}$$

olarak bulunur.

(4.13) denkleminde her iki tarafın türevini alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\kappa_\omega \mathbb{N}_\omega(s_\omega)\frac{ds_\omega}{ds} = -\kappa\mathbb{T}(s) + \kappa h\mathbb{B}(s) \tag{4.14}$$

denklemi elde edilir. (4.12) den $\frac{ds_\omega}{ds}$ eşitliği (4.14) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafın normu alınırsa $\mathbb{TB}$-Smarandache eğrisinin eğriliği κ_ω;

$$\kappa_\omega = \|\dot{\mathbb{T}}_\omega\| = \frac{\sqrt{2}}{(1-h)}\sqrt{1+h^2} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir.

(4.12), (4.14) ve (4.15) denklemlerinden $\mathbb{TB}$-Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\omega$;

$$\mathbb{N}_\omega(s_\omega) = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s) \tag{4.16}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TB}$-Smarandache eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbb{B}_\omega$;

$$\mathbb{B}_\omega(s_\omega) = \mathbb{T}_\omega(s_\omega) \wedge \mathbb{N}_\omega(s_\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h \end{vmatrix},$$

$$\mathbb{B}_\omega(s_\omega) = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\,\mathbb{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s)$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TB}$-Smarandache eğrisinin ikinci eğriliği τ_ω değerini hesaplamak için

$$\omega' = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1-h)\mathbb{N}(s)$$

denkleminden iki kez türev alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsa

$$\omega'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-\kappa^2(1-h)\mathbb{T}(s) + (\kappa'(1-h) - \kappa h')\mathbb{N}(s) + \kappa^2 h(1-h)\mathbb{B}(s)\}$$

ve

$$\begin{aligned}\omega''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{&(-3\kappa\kappa'(1-h) + 2\kappa^2 h')\mathbb{T}(s)\\ &+(-\kappa^3(1-h)(1+h^2) + \kappa''(1-h) - 2\kappa' h' - \kappa h'')\mathbb{N}(s)\\ &+\big(3\kappa\kappa' h(1-h) + \kappa^2 h'(1-3h)\big)\mathbb{B}(s)\}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}&\ell = -3\kappa\kappa'(1-h) + 2\kappa^2 h',\\ &m = -\kappa^3(1-h)(1+h^2) + \kappa''(1-h) - 2\kappa' h' - \kappa h'',\\ &n = 3\kappa\kappa' h(1-h) + \kappa^2 h'(1-3h)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\omega''' = \frac{\ell\mathbb{T}(s) + m\mathbb{N}(s) + n\mathbb{B}(s)}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\tau_\omega = \frac{det(\omega', \omega'', \omega''')}{\|\omega' \wedge \omega''\|}$$

den

$$\tau_\omega = \frac{\sqrt{2}(n + h\ell)}{\kappa^3(1-h)^2(1+h^2)}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.3. G, 3-boyutlu Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda G de $\mathbb{NB}$-Smarandache eğrisi

$$\phi(s_\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)) \tag{4.17}$$

dir.

Şimdi $\mathbb{NB}$-Smarandache eğrisi nin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_\phi, \mathbb{N}_\phi, \mathbb{B}_\phi, \kappa_\phi, \tau_\phi\}$ yi hesaplayalım. (4.17) denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\phi' = \frac{d\phi}{ds_\phi}\frac{ds_\phi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\mathbb{N}}(s) + \dot{\mathbb{B}}(s)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.2) türev formülleri kullanılır ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğu düşünülürse

$$\mathbb{T}_\phi \frac{ds_\phi}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(-\mathbb{T}(s) - h\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\right) \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir. (4.18) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\phi}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2h^2} \tag{4.19}$$

dir. (4.19) dan $\frac{ds_\phi}{ds}$ değeri (4.18) denkleminde yazılırsa $\mathbb{NB}$-Smarandache eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}_\phi$;

$$\mathbb{T}_\phi(s_\phi) = \frac{-\mathbb{T}(s) - h\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)}{\sqrt{1+2h^2}} \tag{4.20}$$

olarak bulunur.

(4.20) denkleminde her iki tarafın türevini alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\kappa_\phi \mathbb{N}_\phi(s_\phi)\frac{ds_\phi}{ds} = \frac{(\kappa h(1+2h^2) + 2hh')\mathbb{T}(s) + (-\kappa(1+h^2)(1+2h^2) - h')\mathbb{N}(s)}{(1+2h^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{(-\kappa h^2(1+2h^2) + h')\mathbb{B}(s)}{(1+2h^2)^{3/2}}$$

veya

$$\mathcal{A}_\phi = \kappa h(1+2h^2) + 2hh',$$
$$\mathcal{B}_\phi = -\kappa(1+h^2)(1+2h^2) - h',$$
$$\mathcal{C}_\phi = -\kappa h^2(1+2h^2) + h'$$

olmak üzere

$$\kappa_\phi \mathbb{N}_\phi(s_\phi)\frac{ds_\phi}{ds} = \frac{\mathcal{A}_\phi\mathbb{T}(s) + \mathcal{B}_\phi\mathbb{N}(s) + \mathcal{C}_\phi\mathbb{B}(s)}{(1+2h^2)^{3/2}} \tag{4.21}$$

denklemi elde edilir. (4.19) den $\frac{ds_\phi}{ds}$ eşitliği (4.21) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafın normu alınırsa $\mathbb{N}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisinin eğriliği κ_ϕ;

$$\kappa_\phi = \left\|\dot{\mathbb{T}}_\phi\right\| = \frac{\sqrt{2}}{\kappa(1+2h^2)^2}\sqrt{\mathcal{A}_\phi^2 + \mathcal{B}_\phi^2 + \mathcal{C}_\phi^2} \tag{4.22}$$

olarak elde edilir.

(4.19), (4.21) ve (4.22) denklemlerinden $\mathbb{N}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\phi$;

$$\mathbb{N}_\phi(s_\phi) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}_\phi^2 + \mathcal{B}_\phi^2 + \mathcal{C}_\phi^2}}\left(\mathcal{A}_\phi \mathbb{T}(s) + \mathcal{B}_\phi \mathbb{N}(s) + \mathcal{C}_\phi \mathbb{B}(s)\right) \tag{4.23}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{N}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbb{B}_\phi$;

$$\mathbb{B}_\phi(s_\phi) = \mathbb{T}_\phi(s_\phi) \wedge \mathbb{N}_\phi(s_\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+2h^2}\sqrt{\mathcal{A}_\phi^2 + \mathcal{B}_\phi^2 + \mathcal{C}_\phi^2}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -h & h \\ \mathcal{A}_\phi & \mathcal{B}_\phi & \mathcal{C}_\phi \end{vmatrix},$$

dan $\wp = \sqrt{1+2h^2}$ ve $q = \sqrt{\mathcal{A}_\phi^2 + \mathcal{B}_\phi^2 + \mathcal{C}_\phi^2}$ olmak üzere

$$\mathbb{B}_\phi(s_\phi) = \frac{1}{\wp q}\{-h(\mathcal{C}_\phi + \mathcal{B}_\phi)\mathbb{T}(s) + (\mathcal{C}_\phi + h\mathcal{A}_\phi)\mathbb{N}(s) + (-\mathcal{B}_\phi + h\mathcal{A}_\phi)\mathbb{B}(s)\}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{N}\mathbb{B}$-Smarandache eğrisinin ikinci eğriliği τ_ϕ değerini hesaplamak için

$$\phi' = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(-\mathbb{T}(s) - h\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\right)$$

denkleminden iki kez türev alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\phi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{&(-\kappa' + \kappa^2 h)\mathbb{T}(s) + (-\kappa^2(1+h^2) - \kappa' h - \kappa h')\mathbb{N}(s) \\ &+(-\kappa^2 h^2 + \kappa' h + \kappa h')\mathbb{B}(s)\}\end{aligned}$$

ve

$$\phi''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-\kappa'' + 3\kappa\kappa'h + 2\kappa^2h' + \kappa^3(1 + h^2))\mathbb{T}(s)$$
$$+(\kappa^3h(1 + h^2) - 3\kappa\kappa' - \kappa''h - 2\kappa'h' - \kappa h'' - 3\kappa h(\kappa h)')\mathbb{N}(s)$$
$$+(-\kappa^3h(1 + h^2) - 3\kappa h(\kappa h)' + \kappa''h + 2\kappa'h' + \kappa h'')\mathbb{B}(s)\}$$

veya

$$\ell = -\kappa'' + 3\kappa\kappa'h + 2\kappa^2h' + \kappa^3(1 + h^2),$$
$$m = \kappa^3h(1 + h^2) - 3\kappa\kappa' - \kappa''h - 2\kappa'h' - \kappa h'' - 3\kappa h(\kappa h)',$$
$$n = -\kappa^3h(1 + h^2) - 3\kappa h(\kappa h)' + \kappa''h + 2\kappa'h' + \kappa h''$$

olmak üzere

$$\phi''' = \frac{\ell\mathbb{T}(s) + m\mathbb{N}(s) + n\mathbb{B}(s)}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\tau_\phi = \frac{det(\phi', \phi'', \phi''')}{\|\phi' \wedge \phi''\|}$$

den

$$\tau_\phi = \frac{\sqrt{2}\{\kappa h p^2\ell + h'm + (\kappa p^2 + h')n\}}{2\kappa^2h'(h' + \kappa p^2) + \kappa^4p^4(1 + h^2)}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.4. G, 3-boyutlu Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda G de $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisi

$$\varsigma(s_\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)) \tag{4.24}$$

dir.

Şimdi $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisi nin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}_ç, \mathbb{N}_ç, \mathbb{B}_ç, \kappa_ç, \tau_ç\}$ yi hesaplayalım. (4.24) denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$ç' = \frac{dç}{ds_ç}\frac{ds_ç}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\mathbb{T}}(s) + \dot{\mathbb{N}}(s) + \dot{\mathbb{B}}(s)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.2) türev formülleri kullanılır ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğu düşünülürse

$$\mathbb{T}_ç\frac{ds_ç}{ds} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\left(-\mathbb{T}(s) + (1-h)\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\right) \tag{4.25}$$

denklemi elde edilir. (4.25) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_ç}{ds} = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{3}}\sqrt{1-h+h^2} \tag{4.26}$$

dir. (4.26) den $\frac{ds_ç}{ds}$ değeri (4.25) denkleminde yazılırsa $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}_ç$;

$$\mathbb{T}_ç(s_ç) = \frac{-\mathbb{T}(s) + (1-h)\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)}{\sqrt{2}\sqrt{1-h+h^2}} \tag{4.27}$$

olarak bulunur.

(4.27) denkleminde her iki tarafın türevini alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\kappa_\varsigma \mathbb{N}_\varsigma(s_\varsigma)\frac{ds_\varsigma}{ds} = \frac{\left(-2(1-h+h^2)(1-h)-h'(1-2h)\right)}{2\sqrt{2}(1-h+h^2)^{3/2}}\mathbb{T}(s)$$
$$+\frac{\left(2(1-h+h^2)(-\kappa-h'-\kappa h^2)+h'(1-2h)(1-\mathrm{h})\right)}{2\sqrt{2}(1-h+h^2)^{3/2}}\mathbb{N}(s)$$
$$+\frac{(2(1-h+h^2)(\kappa h(1-h)+h')+hh'(1-2h))}{2\sqrt{2}(1-h+h^2)^{3/2}}\mathbb{B}(s)$$

veya

$$\mathcal{A}_\varsigma = -2(1-h+h^2)(1-h)-h'(1-2h),$$
$$\mathcal{B}_\varsigma = 2(1-h+h^2)(-\kappa-h'-\kappa h^2)+h'(1-2h)(1-\mathrm{h}),$$
$$\mathcal{C}_\varsigma = 2(1-h+h^2)(\kappa h(1-h)+h')+hh'(1-2h)$$

olmak üzere

$$\kappa_\varsigma \mathbb{N}_\varsigma(s_\varsigma)\frac{ds_\varsigma}{ds} = \frac{\mathcal{A}_\varsigma\mathbb{T}(s)+\mathcal{B}_\varsigma\mathbb{N}(s)+\mathcal{C}_\varsigma\mathbb{B}(s)}{2\sqrt{2}(1-h+h^2)^{3/2}} \tag{4.28}$$

denklemi elde edilir. (4.26) den $\frac{ds_\varsigma}{ds}$ eşitliği (4.28) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafın normu alınırsa $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisinin eğriliği κ_ς;

$$\kappa_\varsigma = \left\|\dot{\mathbb{T}}_\varsigma\right\| = \frac{\sqrt{3}}{4\kappa(1-h+h^2)^2}\sqrt{\mathcal{A}_\varsigma^2+\mathcal{B}_\varsigma^2+\mathcal{C}_\varsigma^2} \tag{4.29}$$

olarak elde edilir.

(4.26), (4.28) ve (4.29) denklemlerinden $\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\varsigma$;

$$\mathbb{N}_\varsigma(s_\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}_\varsigma^2+\mathcal{B}_\varsigma^2+\mathcal{C}_\varsigma^2}}\left(\mathcal{A}_\varsigma\mathbb{T}(s)+\mathcal{B}_\varsigma\mathbb{N}(s)+\mathcal{C}_\varsigma\mathbb{B}(s)\right) \tag{4.30}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbb{B}_{\varsigma}$;

$$\mathbb{B}_{\varsigma}(s_{\varsigma}) = \mathbb{T}_{\varsigma}(s_{\varsigma}) \wedge \mathbb{N}_{\varsigma}(s_{\varsigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-h+h^2}\sqrt{\mathcal{A}_{\varsigma}^2+\mathcal{B}_{\varsigma}^2+\mathcal{C}_{\varsigma}^2}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1-h & h \\ \mathcal{A}_{\varsigma} & \mathcal{B}_{\varsigma} & \mathcal{C}_{\varsigma} \end{vmatrix},$$

dan $\wp = \sqrt{1-h+h^2}$ ve $q = \sqrt{\mathcal{A}_{\varsigma}^2+\mathcal{B}_{\varsigma}^2+\mathcal{C}_{\varsigma}^2}$ olmak üzere

$$\mathbb{B}_{\varsigma}(s_{\varsigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}\wp q}\{\big((1-h)\mathcal{C}_{\varsigma} - h\mathcal{B}_{\varsigma}\big)\mathbb{T}(s) + \big(\mathcal{C}_{\varsigma} + h\mathcal{A}_{\varsigma}\big)\mathbb{N}(s) - \big(\mathcal{B}_{\psi} + (1-h)\mathcal{A}_{\psi}\big)\mathbb{B}(s)\}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{TNB}$-Smarandache eğrisinin ikinci eğriliği τ_{ς} değerini hesaplamak için

$$\varsigma' = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\big(-\mathbb{T}(s) + (1-h)\mathbb{N}(s) + h\mathbb{B}(s)\big)$$

denkleminden iki kez türev alır ve (4.2) türev formüllerini kullanırsak

$$\varsigma'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\{(-\kappa^2(1-h)-\kappa')\mathbb{T}(s) + (-\kappa^2(1+h^2)+\kappa'(1-h)-\kappa h')\mathbb{N}(s) + (\kappa^2 h(1-h)+\kappa' h+\kappa h')\,\mathbb{B}(s)\}$$

ve

$$\varsigma''' = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\big(-\kappa''-3\kappa\kappa'(1-h)+2\kappa^2 h'+\kappa^3(1+h^2)\big)\mathbb{T}(s) + (-\kappa^3(1-h)(1+h^2)-3\kappa\kappa'+\kappa''(1-h)-2\kappa' h'-\kappa h''-3\kappa h(\kappa h)')\mathbb{N}(s) + (-\kappa^3 h(1+h^2)-2\kappa^2 hh'+\kappa h(1-h)(3\kappa'+\kappa)+\kappa'' h+2\kappa' h'+\kappa h'')\mathbb{B}(s)\}$$

veya

$$\ell = -\kappa'' - 3\kappa\kappa'(1-h) + 2\kappa^2 h' + \kappa^3(1+h^2),$$
$$m = -\kappa^3(1-h)(1+h^2) - 3\kappa\kappa' + \kappa''(1-h) - 2\kappa'h' - \kappa h'' - 3\kappa h(\kappa h)',$$
$$n = -\kappa^3 h(1+h^2) - 2\kappa^2 hh' + \kappa h(1-h)(3\kappa' + \kappa) + \kappa'' h + 2\kappa' h' + \kappa h''$$

olmak üzere

$$\varsigma''' = \frac{\ell\mathbb{T}(s) + m\mathbb{N}(s) + n\mathbb{B}(s)}{\sqrt{3}}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\tau_\varsigma = \frac{det(\varsigma', \varsigma'', \varsigma''')}{\|\varsigma' \wedge \varsigma''\|}$$

den

$$\tau_\varsigma = \frac{\sqrt{3}\{(2\kappa^2 h p^2 + \kappa h')\ell + \kappa h' m + (2\kappa^2 p^2 + \kappa h')n\}}{4\kappa^5 h^4 p^4 + 3\kappa^3 (h')^2 + 4\kappa^4 h' p^2 (1+h)}$$

olarak elde edilir.

5. 3-BOYUTLU LIE GRUPLARINDA ALTERNATİF $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ ÇATISI ve BU ÇATIYA GÖRE $\mathbb{C}$-SLANT HELİSLER

Bu bölümde G, 3-boyutlu Lie grubunda alınan birim hızlı bir eğrinin üzerinde hareketli alternatif $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ çatısı oluşturulacak ve $\mathbb{C}$-slant helis eğrisinin tanımı ile bu tip eğrilere ait bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca bir eğrinin $\mathbb{C}$-slant helis olması durumunda bu eğri ile küresel gösterge eğrileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 5.1. 3-boyutlu Lie grubu G de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\mathbb{D} \wedge \mathbb{T} = \dot{\mathbb{T}}, \mathbb{D} \wedge \mathbb{N} = \dot{\mathbb{N}}, \mathbb{D} \wedge \mathbb{B} = \dot{\mathbb{B}}$ koşullarını sağlayan $\mathbb{D} = (\tau - \tau_G)\mathbb{T} + \kappa\mathbb{B} = \mathbb{N} \wedge \dot{\mathbb{N}}$ vektörüne 3-boyutlu G Lie grubunda α eğrisinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektör alanı denir.

$\mathbb{D}$ Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\mathbb{W}$ olsun. $\|\mathbb{D}\| = \sqrt{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2}$ olmak üzere

$$\mathbb{W} = \frac{\mathbb{D}}{\|\mathbb{D}\|} \ ,$$

$$\mathbb{W} = \frac{(\tau - \tau_G)}{\sqrt{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2}}\mathbb{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + (\tau - \tau_G)^2}}\mathbb{B}$$

dir. Son eşitlikte $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğu düşünülür ise $\mathbb{W}$ birim Darboux vektörü

$$\mathbb{W}(s) = \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}\mathbb{B}(s) \tag{5.1}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.2. 3-boyutlu Lie grubu G de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\mathbb{C}(s) = \frac{\dot{\mathbb{N}}(s)}{\|\dot{\mathbb{N}}(s)\|}$ alınırsa, $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ üçlüsü α eğrisi için bir ortonormal hareketli çatı olur.

Gerçekten; $\mathbb{C}(s) = \frac{\dot{\mathbb{N}}(s)}{\|\dot{\mathbb{N}}(s)\|}$ ve $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olmak üzere, (4.2) eşitliği yardımıyla

$$\mathbb{C}(s) = \frac{-1}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\mathbb{B}(s) \tag{5.2}$$

elde edilir. Buradan 3-boyutlu G Lie grubunda bir birim hızlı α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ üçlüsü için (5.1) ve (5.2) eşitlikleri yardımıyla

$$\langle \mathbb{N}(s), \mathbb{N}(s) \rangle = 1, \qquad \langle \mathbb{C}(s), \mathbb{C}(s) \rangle = 1, \qquad \langle \mathbb{W}(s), \mathbb{W}(s) \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbb{N}(s), \mathbb{C}(s) \rangle = 0, \qquad \langle \mathbb{N}(s), \mathbb{W}(s) \rangle = 0, \qquad \langle \mathbb{C}(s), \mathbb{W}(s) \rangle = 0$$

şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ üçlüsü α eğrisi için bir ortonormal çatı olur.

Teorem 5.1. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ çatısı için türev formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{N}}(s) \\ \dot{\mathbb{C}}(s) \\ \dot{\mathbb{W}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta(s) & 0 \\ -\eta(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{C}(s) \\ \mathbb{W}(s) \end{bmatrix}.$$

Burada $\eta(s) = \kappa\sqrt{1+h^2}$, $\mu(s) = \eta(s)\frac{1}{\sigma_{\mathbb{N}}} = \frac{h'}{1+h^2}$ ve $\sigma_{\mathbb{N}}(s) = \frac{\kappa(1+h^2)^{3/2}}{h'}$ dir.

İspat: 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri α olsun. α eğrisinin $\mathbb{N}$ vektör alanı için (4.2) eşitliğinden

$$\dot{\mathbb{N}}(s) = -\kappa\mathbb{T}(s) + (\tau - \tau_G)\mathbb{B}(s)$$

dir. $h = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$ olduğundan

$$\dot{\mathbb{N}}(s) = -\kappa\mathbb{T}(s) + \kappa h\,\mathbb{B}(s)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlik (5.2) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde

$$\dot{\mathbb{N}}(s) = \kappa\sqrt{1 + h^2}\,\mathbb{C}(s) \tag{5.3}$$

elde edilir.

$\mathbb{C}(s)$ vektör alanı için (5.2) eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\dot{\mathbb{C}}(s) = \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + h^2}}\right)'\mathbb{T}(s) + \frac{-1}{\sqrt{1 + h^2}}\dot{\mathbb{T}}(s) + \left(\frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\right)'\mathbb{B}(s) + \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\dot{\mathbb{B}}(s)$$

dir. (4.2) türev formülleri yardımıyla bu eşitlik düzenlenirse,

$$\dot{\mathbb{C}}(s) = \frac{hh'}{(1 + h^2)^{3/2}}\mathbb{T}(s) - \kappa\sqrt{1 + h^2}\,\mathbb{N}(s) + \frac{h'}{(1 + h^2)^{3/2}}\mathbb{B}(s),$$

$$\dot{\mathbb{C}}(s) = -\kappa\sqrt{1 + h^2}\,\mathbb{N}(s) + \frac{h'}{1 + h^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}\mathbb{B}(s)\right).$$

Bu eşitlikle beraber (5.1) eşitliği bir arada düşünülürse

$$\dot{\mathbb{C}}(s) = -\kappa\sqrt{1 + h^2}\,\mathbb{N}(s) + \frac{h'}{1 + h^2}\mathbb{W}(s) \tag{5.4}$$

olarak elde edilir.

$\mathbb{W}(s)$ Darboux vektör alanı için (5.1) eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\dot{\mathbb{W}}(s) = \left(\frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\right)'\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}\dot{\mathbb{T}}(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}\right)'\mathbb{B}(s) + \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}\dot{\mathbb{B}}(s),$$

$$\dot{\mathbb{W}}(s) = \frac{h'}{(1+\ h^2)^{3/2}}\mathbb{T}(s) - \frac{hh'}{(1+\ h^2)^{3/2}}\mathbb{B}(s)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı $\frac{h'}{1+h^2}$ parantezine alınır ve (5.2) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$\dot{\mathbb{W}}(s) = \frac{-h'}{1+h^2}\mathbb{C}(s) \tag{5.5}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ çatısı (5.3), (5.4) ve (5.5) için türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{N}}(s) \\ \dot{\mathbb{C}}(s) \\ \dot{\mathbb{W}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa\sqrt{1+\ h^2} & 0 \\ -\kappa\sqrt{1+\ h^2} & 0 & \frac{-h'}{1+h^2} \\ 0 & -\frac{-h'}{1+h^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{C}(s) \\ \mathbb{W}(s) \end{bmatrix}$$

veya $\eta(s) = \kappa\sqrt{1+\ h^2}$ ve $\mu(s) = \frac{h'}{1+h^2}$ denilirse

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{N}}(s) \\ \dot{\mathbb{C}}(s) \\ \dot{\mathbb{W}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta(s) & 0 \\ -\eta(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & -\mu(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{C}(s) \\ \mathbb{W}(s) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.3. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ olmak üzere bu eğrinin üzerindeki alternatif hareketli çatı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ ve $X \in \mathfrak{g}$ bir birim sol invaryant vektör alanı olsun. α eğrisinin $\mathbb{C}$ vektör alanı ile X birim sol invaryant vektör alanı sabit bir açı yapıyorsa, yani $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere,

$$\langle \mathbb{C}(s), X \rangle = cos\theta$$

ise α eğrisine G de $\mathbb{C}$-slant helis denir.

Teorem 5.2. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olmak üzere, α eğrisi G de bir $\mathbb{C}$-slant ise ekseni

$$X = \left\{ -\frac{\eta^2(s) + \mu^2(s)}{\mu(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{N}(s) + \mathbb{C}(s) - \frac{\eta(s)\left(\eta^2(s) + \mu^2(s)\right)}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{W}(s) \right\} cos\theta \tag{5.7}$$

dir.

İspat: α eğrisi G de bir $\mathbb{C}$-slant helis olsun. O halde $\lambda_1 = \langle \mathbb{N}(s), X \rangle$, $\lambda_2 = \langle \mathbb{C}(s), X \rangle$ ve $\lambda_3 = \langle \mathbb{W}(s), X \rangle$ olmak üzere, α $\mathbb{C}$-slant helis eğrisinin ekseni X,

$$X = \lambda_1 \mathbb{N}(s) + \lambda_2 \mathbb{C}(s) + \lambda_3 \mathbb{W}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

G Lie grubunda $\mathbb{C}$-slant helis tanımından,

$$\langle \mathbb{C}(s), X \rangle = cos\theta = sabit \tag{5.8}$$

dir. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa;

$$\langle \dot{\mathbb{C}}(s), X \rangle + \langle \mathbb{C}(s), \dot{X} \rangle = 0$$

olmak üzere (5.6) türev formüllerinden

$$-\eta(s)\langle \mathbb{N}(s), X \rangle + \mu(s)\langle \mathbb{W}(s), X \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbb{W}(s), X \rangle = \frac{\eta(s)}{\mu(s)}\langle \mathbb{N}(s), X \rangle \tag{5.9}$$

elde edilir. (5.9) dan tekrar türev alırsak,

$$\langle \dot{\mathbb{W}}(s), X\rangle = \left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)' \langle \mathbb{N}(s), X\rangle + \frac{\eta(s)}{\mu(s)} \langle \dot{\mathbb{N}}(s), X\rangle$$

olmak üzere, (5.6) türev formülleri bu eşitlikte kullanılırsa

$$-\mu(s)\langle \mathbb{C}(s), X\rangle = \left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)' \langle \mathbb{N}(s), X\rangle + \frac{\eta^2(s)}{\mu(s)} \langle \mathbb{C}(s), X\rangle,$$

$$\langle \mathbb{N}(s), X\rangle = -\frac{\eta^2(s) + \mu^2(s)}{\mu(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'} \langle \mathbb{C}(s), X\rangle \tag{5.10}$$

elde edilir.

(5.10) eşitliği (5.9) de yazılırsa,

$$\langle \mathbb{W}(s), X\rangle = -\frac{\eta(s)\left(\eta^2(s) + \mu^2(s)\right)}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'} \langle \mathbb{C}(s), X\rangle \tag{5.11}$$

dir.

Böylece (5.9), (5.10) ve (5.11) eşitliklerinden;

$$\lambda_1 = -\frac{\eta^2(s) + \mu^2(s)}{\mu(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'} cos\theta, \qquad \lambda_2 = cos\theta, \qquad \lambda_3 = -\frac{\eta(s)\left(\eta^2(s) + \mu^2(s)\right)}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'} cos\theta$$

olmak üzere, α $\mathbb{C}$-slant helis eğrisinin ekseni X;

$$X=\left\{-\frac{\eta^2(s)+\mu^2(s)}{\mu(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{N}(s)+\mathbb{C}(s)-\frac{\eta(s)\left(\eta^2(s)+\mu^2(s)\right)}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{W}(s)\right\}cos\theta$$

olarak bulunur.

Teorem 5.3. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olmak üzere, α eğrisinin G de bir $\mathbb{C}$-slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\Gamma(s)=\frac{\left(\eta^2(s)+\mu^2(s)\right)^{3/2}}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}=tan\theta,\theta\neq\frac{\pi}{2}\ sabit,$$

olmasıdır.

İspat: α eğrisi G de bir $\mathbb{C}$-slant helis olsun. Teorem 5.2. den bu eğrinin ekseni,

$$X=\left\{-\frac{\eta^2(s)+\mu^2(s)}{\mu(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{N}(s)+\mathbb{C}(s)-\frac{\eta(s)\left(\eta^2(s)+\mu^2(s)\right)}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}\mathbb{W}(s)\right\}cos\theta$$

ve X bir birim vektör alanı olduğundan $\|X\|=1$ şartı kullanılırsa

$$\Gamma(s)=\frac{\left(\eta^2(s)+\mu^2(s)\right)^{3/2}}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'}=tan\theta$$

sabit olduğu kolayca görülebilir.

Tersine $\Gamma(s)$ sabit olduğunda, α eğrisinin G de bir $\mathbb{C}$-slant helis olması gerektiği açıktır.

Teorem 5.4. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğrinin üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olmak üzere, α eğrisi $\mathbb{C}$-slant helis ise

$$\sigma_{\mathbb{N}}(s) = \frac{\sqrt{\tan^2\theta - \left(\int f(s)ds\right)^2}}{\int f(s)ds}$$

dir.

İspat: α eğrisi $\mathbb{C}$-slant helis olsun. O halde Teorem 5.3. den

$$\Gamma(s) = \frac{\left(\eta^2(s) + \mu^2(s)\right)^{3/2}}{\mu^2(s)\left(\frac{\eta(s)}{\mu(s)}\right)'} = tan\theta$$

dır. $\sigma_{\mathbb{N}} = \frac{\eta(s)}{\mu(s)}$ olduğundan bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılarak

$$tan\theta = \frac{\mu(s)(1 + \sigma_{\mathbb{N}}^2(s))^{3/2}}{\sigma_{\mathbb{N}}'(s)},$$

$$\mu(s)cot\theta = \frac{\sigma_{\mathbb{N}}'(s)}{(1 + \sigma_{\mathbb{N}}^2(s))^{3/2}},$$

$$\mu(s)\sigma_N cot\theta = \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_N^2(s)}}\right)',$$

$$\eta(s)\, cot\theta = \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_N^2(s)}}\right)'$$

elde edilir. Burada her iki tarafın integrali alınırsa,

$$cot\theta \int \eta(s)\, ds = -\frac{1}{\sqrt{1+\sigma_N^2(s)}}$$

veya

$$\frac{tan\theta}{\int \eta(s)\, ds} = -\sqrt{1+\sigma_N^2(s)}$$

dir. Son eşitlikten σ_N çekilirse

$$\sigma_N(s) = \frac{\sqrt{\tan^2\theta - (\int \eta(s)\, ds)^2}}{\int \eta(s)\, ds}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.5. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğri üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olsun. G de α eğrisinin teğetler göstergesi olan eğri β olmak üzere, α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olması için gerek ve yeter şart β eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki α eğrisi G Lie grubunda $\mathbb{C}$-slant helis olsun. Tanım 5.3. den $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere,

$$\langle \mathbb{C}(s), X \rangle = cos\theta$$

dir. G Lie grubunda, α eğrisinin $\mathbb{C}$ vektör alanı

$$\mathbb{C}(s) = \frac{-1}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s)$$

ve Tanım 3.6. dan β eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\beta$;

$$\mathbb{N}_\beta(s_\beta) = -\frac{1}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s)$$

olup bu eşitlikler yardımıyla kolayca görülebilir ki $\langle \mathbb{C}(s), X\rangle = cos\theta$ olması

$$\langle \mathbb{N}_\beta(s_\beta), X\rangle = cos\theta$$

olmasını gerektirir. Bu da β eğrisinin G de bir slant helis olduğunu söyler.

Benzer şekilde β eğrisinin G Lie grubunda bir slant helis olması durumunda α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olacağı gösterilebilir.

Teorem 5.6. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğri üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{ \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olsun. G de α eğrisinin asli normaller göstergesi olan eğri γ olmak üzere, α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin genel helis olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki α eğrisi G Lie grubunda $\mathbb{C}$-slant helis olsun. Tanım 5.3. den $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere,

$$\langle \mathbb{C}(s), X\rangle = cos\theta$$

dir. G Lie grubunda, α eğrisinin $\mathbb{C}$ vektör alanı

$$\mathbb{C}(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s)$$

ve Tanım 3.7. dan γ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{T}_\gamma$;

$$\mathbb{T}_\gamma(s_\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s)$$

olup bu eşitlikler yardımıyla kolayca görülebilir ki $\langle \mathbb{C}(s), X\rangle = cos\theta$ olması

$$\langle \mathbb{T}_\gamma(s_\gamma), X\rangle = cos\theta$$

olmasını gerektirir. Bu da γ eğrisinin G de bir genel helis olduğunu söyler.

Benzer şekilde γ eğrisinin G Lie grubunda bir genel helis olması durumunda α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olacağı gösterilebilir.

Teorem 5.7. 3-boyutlu G Lie grubunda birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to G$ ve bu eğri üzerindeki alternatif hareketli çatısı $\{\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{W}\}$ olsun. G de α eğrisinin binormaller göstergesi olan eğri δ olmak üzere, α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olması için gerek ve yeter şart δ eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki α eğrisi G Lie grubunda $\mathbb{C}$-slant helis olsun. Tanım 5.3. den $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ sabit bir açı olmak üzere,

$$\langle \mathbb{C}(s), X \rangle = cos\theta$$

dir. G Lie grubunda, α eğrisinin $\mathbb{C}$ vektör alanı

$$\mathbb{C}(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) + \frac{h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s)$$

ve Tanım 3.8. den $\varepsilon = \begin{cases} 1 & , \quad \kappa h > 0 \\ -1 & , \quad \kappa h < 0 \end{cases}$ olmak üzere δ eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}_\delta$;

$$\mathbb{N}_\delta(s_\delta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{T}(s) - \frac{\varepsilon h}{\sqrt{1+\ h^2}}\mathbb{B}(s),$$

olup bu eşitlikler yardımıyla kolayca görülebilir ki $\langle \mathbb{C}(s), X \rangle = cos\theta$ olması

$$\langle \mathbb{N}_\delta(s_\delta), X \rangle = -\varepsilon cos\theta$$

olmasını gerektirir. Bu da δ eğrisinin G de bir slant helis olduğunu söyler.

Benzer şekilde δ eğrisinin G Lie grubunda bir slant helis olması durumunda α eğrisinin $\mathbb{C}$-slant helis olacağı gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S., "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica", ***Taylor & Francis Group***, Boca Raton (2006).

O' Neill, B., "Elementary Differential Geometry", ***Academic Press***, New York (1966).

Korkmaz, B., "Diferensiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler", ***Türkiye Bilimler Akademisi***, Ankara (2012).

Sabuncuoğlu, A., "Diferensiyel Geometri", ***Nobel Yayınevi***, Ankara (2010).

Hacısalihoğlu, H. H., "Diferensiyel Geometri I", ***Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi***, Ankara (1998).

Izumiya, S. and Takeuchi, N., "New Special Curves and Developable Surfaces", ***Turkish Journal of Mathematics***, 28: 153-163 (2004).

Uzunoğlu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y., "A New Approach on Curves of Constant Precession", ***Applied Mathematics and Computation***, 275: 317-323 (2016).

Lancret, M. A., "Mémoire sur les courbes à double courbure", ***Mémoires présentés à I'Institut 1***, 416-454 (1806).

Struik, D. J., "Lectures on Classical Differential Geometry", ***Dover Publication***, New York (1961).

Ahmad, T., "Special Smarandache Curves in the Euclidean Space", ***International Journal of Mathemathical Combin.***, 2: 30-36 (2010).

Hacısalihoğlu, H. H., "Yüksek Diferensiyel Geometri'ye Giriş, ***Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları***, Elazığ (2006).

Okuyucu, O. Z., "Bazı Manifoldlar Üzerinde Özel Eğriler", Doktora Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara (2013).

Çiftçi, Ü., "A Generalization of Lancret's Theorem", ***Journal of Geometry Physics***, 59: 1597-1603 (2009).

Crouch, P. and Silva, F. L., "The Dynamic İnterpolation Problem: On Riemannian Manifolds Lie Groups and Symmetric Spaces", ***Journal of Dyn. Control Syst.***, 1(2): 177-202 (1995).

Okuyucu, O. Z., Gök, İ., Yaylı, Y. and Ekmekci, N., "Slant Helices in three Dimensional Lie Groups", ***Applied Mathematics and Computation***, 221: 672-683 (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Caner DEĞİRMEN

Doğum Yeri ve Tarihi : Amasya – 01.03.1991

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetler :

İş Deneyimi

Stajlar : Matematik Öğretmenliği Ortaöğretim ve Ortaokul

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Devlet Okulları ve Özel Okullar

İletişim

Adres : Yeşilkent Mahallesi Atilla İlhan Caddesi G72 Sokak No:4 Daire:2 Avcılar/İSTANBUL, 34325

Tel : 0534 873 10 69

E-Posta Adresi : caner.deo@gmail.com

Akademik Çalışmaları

- **Caner Değirmen**, O. Zeki Okuyucu, Ö. Gökmen Yıldız, "*Smarandache Curves in three Dimensional Lie Groups*", 5^{th} International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016) (Bildiri-Poster Sunum).

Yabancı Dil Bilgisi : İngilizce (Orta Seviye)

Tarih: 19/06/2017