

**ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**
**BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

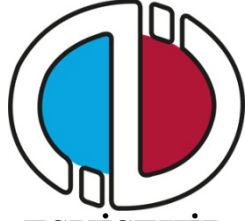
**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı**

**ÖZEL MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK
PROBLEMLERİ**

**Sümeyye ACAR
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ**

**BİLECİK, 2019
Ref.No: 10285608**



**ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ
BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı**

**ÖZEL MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK
PROBLEMLERİ**

**Sümeyye ACAR
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ**

BİLECİK, 2019



ESKİŞEHİR
ANADOLU UNIVERSITY



BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ
BİLECİK
ŞEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

STABILITY PROBLEMS OF SPECIAL MATRIX
FAMILIES

Sümeyye ACAR
Msc. Thesis

Thesis Advisor
Dr. Öğr. Bengi YILDIZ

BİLECİK, 2019



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 31.07.2019 tarihli 41-11 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 20.08.2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Sümeyye ACAR' ın "Özel Matris Ailelerinin Kararlılık Problemleri" başlıklı tez çalışması Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ

ÜYE : Prof. Dr. Vakıf CAFER

ÜYE : Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen, her zaman gerek davranışlarıyla, gerek sabrıyla bana örnek olan çok değerli hocam tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ ' a sonsuz teşekkür ederim.

Bu süreçte çalışmış olduğum okullardaki idare, öğretmen arkadaşlarım ve çok sevimli öğrencilerimin desteklerinden ötürü her birine ayrı ayrı teşekkürü borç bilirim.

Bilimsel anlamda yolun başlangıcı olarak kabul ettiğim lisans eğitimimdeki hocalarıma ayrıca yüksek lisans eğitimim sürecinde samimi ve içten davranışlarıyla iyi ki tanıdım dediğim Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca hiçbir zaman desteklerini benden esirgemeyen, maddi- manevi her türlü yardımda bulunan güzel aileme ve hayata dair doğrularımın belki de en güzeli olan canım eşim Naim Acar' a ve sanırım hayatımda sahip olabileceğim en güzel varlığım henüz daha 1.5 yaşında olan canım kızım Mina Nur' uma sonsuz minnettarım.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmada kullanılmadığını beyan ederim.

...../...../ 2019

Sümeyye ACAR

ÖZEL MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK PROBLEMLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında sistemlerin kararlılıkları ele alınmıştır. Sistemlerin kararlılıklarıyla matrislerin özdeğerleri arasındaki ilişkiler göz önünde bulundurulmuştur. Bu sebepten dolayı bazı özel matris ve matris aileleri ele alınıp kararlılıkları ile ilgili tanım ve kriterler verilmiş ve bunlarla ilgili çeşitli örnekler verilip açıklanmıştır. Özellikle bu özel matrislerin Hurwitz, Schur ve diyagonal kararlılıkları üzerinde durulmuştur.

Özel olarak aralık Metzler ailesinin Hurwitz kararlılığı ile ilgili bir gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Elde edilen sonuç verilen çeşitli örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Metzler Matrisleri; Özel Matrisler; Diyagonal Kararlılık; Hurwitz Kararlılık; Schur Kararlılık

STABILITY PROBLEMS OF SPECIAL MATRIX FAMILIES

ABSTRACT

In this thesis, the stability of the systems is investigated. The relationships between the stability of the systems and the eigenvalues of the matrices are considered. For this reason, some stability definitions and criteria of special matrix and matrix families are given. Also various examples are given and explained. Especially, Hurwitz, Schur and diagonal stabilities of these special matrices are focused on.

In particular, for Hurwitz stability of interval Metzlerian matrix families one necessary and sufficient condition is obtained. The obtained result is illustrated by number of examples.

Keywords: Metzlerian Matrices; Special Matrices; Diagonal Stability; Hurwitz Stability; Schur Stability

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
TEŞEKKÜR	
BEYANNAME	
ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
İÇİNDEKİLER	III
ŞEKİLLER DİZİNİ	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	V
1 GİRİŞ.....	1
2 BAZI ÖZEL MATRİSLERİN ÇEŞİTLİ KARARLILIK PROBLEMLERİ	14
2.1 Quasidominant Matrislerin Diyagonal Kararlılığı	14
2.2 Metzler Matrislerinin Hurwitz Kararlılığı	17
2.3 Checkerboard Matrisleri ve Schur Kararlılıkları	20
2.4 Morishima Matrisleri.....	21
2.5 Hankel Matrisleri.....	25
3 ARALIK METZLER MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK PROBLEMLERİ	31
4 SONUÇ	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	

ŞEKİLLER DİZİNİ**Sayfa No**

Şekil 1.1 Sürekli zamanlı sistemlerin kararlılığı için söz konusu katsayılar matrisinin özdeğerlerinin konumu	2
Şekil 1.2 Ayrık zamanlı sistemlerin kararlılığı için söz konusu katsayılar matrisinin özdeğerlerinin konumu	2

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tamsayılar kümesi
\mathbb{R}	: Gerçek sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	: n boyutlu gerçel vektör uzayı
\mathbb{C}^n	: n boyutlu kompleks vektör uzayı
D	: Kararlılık bölgesi
$\det A$: A matrisinin determinanı
$Re z$: z kompleks sayısının gerçel kısmı
$A > 0$: $A = (a_{ij})$ için “ $a_{ij} > 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ ” dir.
λ	: Özdeğer
$diag(d_1, \dots, d_n)$: Köşegen üzerindeki elemanları d_1, \dots, d_n olan köşegen matris
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
$A > 0$: A pozitif belirli matris
$A < 0$: A negatif belirli matris
\mathcal{A}	: Matrisler ailesi
$\mathbb{R}^{n \times n}$: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n \times n}$: $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\sigma(A)$: A matrisinin spektral yarıçapı

1. GİRİŞ ve ÖN BİLGİLER

Kararlılık problemi sistemlerin modellenmesinde ve incelenmesinde önemli bir problemdir.

Bir sistemin düzgün çalışabilmesi için kararlı olması önemlidir, eğer bir sistem kararsız ise kullanılamaz olarak kabul edilir. Sürekli-zaman sistemleri, ayrık-zaman sistemleri, lineer sistemler, lineer olmayan sistemler, zamandan bağımsız sistemler, zamana bağımlı sistemler ve kontrol edilebilir sistemler gibi çeşitli sistemler göz önünde bulundurulduğunda farklı kararlılık tanımlarıyla karşılaşılır. Sistemlerin kararlılığı incelenmek istendiğinde o sisteme ilişkin katsayılar matrisinin özdeğerlerinin yerini belirlemek gerekmektedir.

Katsayılar matrisinin özdeğerlerinin yerini belirleme problemi matrisin boyutunun yüksek olması nedeni ile zor bir problemdir. Sistemin kararlılığını belirlemek için ise özdeğerlerin tam olarak belirlenmesine gerek yoktur. Özdeğerlerin tamamının nerede olduğunu belirlemek yeterli olacaktır. Örneğin; uygulamada yer alan iki temel sistemin kararlılıklarını belirlemek için sistemlere ait katsayılar matrisinin özdeğerlerinin konumu aşağıdaki gibidir.

- i. Sürekli zamanlı sistem; yani $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$\dot{x} = Ax \quad (1.1)$$

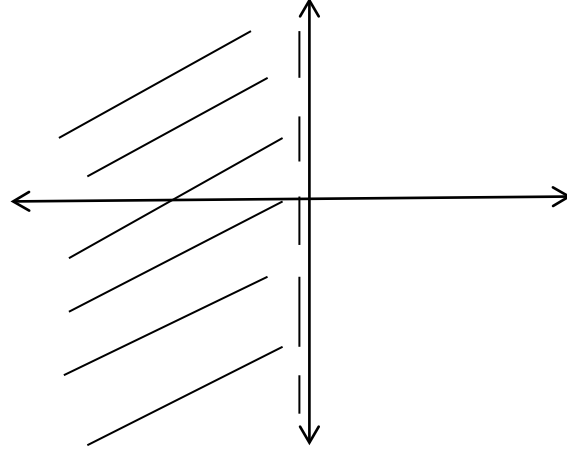
sistemi için A katsayılar matrisinin özdeğerlerinin sol yarı düzlemde olmasıdır. (Bknz. Şekil 1.1)

- ii. Ayrık zamanlı sistem; yani

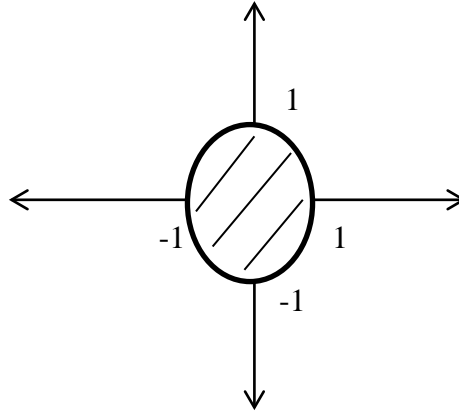
$$x_{k+1} = A x_k \quad (1.2)$$

için ise A katsayılar matrisinin özdeğerlerinin birim yuvar içinde olmasıdır. (Şekil 1.2)

Sistemler ve matrisler arasındaki bu ilişkiden dolayı matrislerin kararlılığını incelemek önemlidir.



Şekil 1.1: Sürekli zamanlı sistemlerin kararlılığı için söz konusu katsayılar matrisinin özdeğerlerinin konumu



Şekil 1.2: Ayrık zamanlı sistemlerin kararlılığı için söz konusu katsayılar matrisinin özdeğerlerinin konumu

\mathbb{R} gerçel sayılar kümesi olmak üzere \mathbb{R}^n ile n boyutlu gerçel vektör uzayı, benzer biçimde \mathbb{C} kompleks sayılar kümesi olmak üzere \mathbb{C}^n ile n boyutlu kompleks vektör uzayı gösterilsin.

$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi $\mathbb{R}^{n \times n}$ ile gösterilsin. Benzer şekilde $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi de $\mathbb{C}^{n \times n}$ ile gösterilsin. Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin eşlenik transpozu kendisine eşit ise, yani $A^* = A$ ise A matrisine Hermityen matris adı verilir. Gerçel matrisin eşlenik transpozu bu matrisin transpozuna eşit olduğu için yani $A^* = A^T$ olduğu için gerçel bir Hermityen matris simetrik bir matristir.

Tanım 1.1. (Pozitif Belirlilik)

i) A bir Hermitiyen matris olsun. $\forall z \in \mathbb{C}^n$ ($z \neq 0$) kompleks vektörü için

$$z^* A z > 0$$

eşitsizliğini sağlayan A matrisine pozitif belirli matris denir ve $A > 0$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde negatif belirli matris de $-A > 0$ özelliğini sağlayan matristir ve $A < 0$ şeklinde gösterilir.

ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. A simetrik ve \mathbb{R}^n deki sıfırdan farklı her x vektörü için

$$x^T A x > 0$$

koşulu sağlanıyorsa A ya pozitif belirli (gerçel) matris denir.

Bir başka ifade ile gerçel bir matrisin pozitif belirli olması demek simetrik ve tüm özdeğerlerinin pozitif olması demektir.

Gerçel bir matrisin pozitif belirliliği için bir kriter aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 1.2. (Sylvester Kriteri)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik bir matris olsun. A matrisinin pozitif belirli olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin esas asli minörlerinin (leading principal minor) pozitif olmasıdır.

Tanım 1.3. Bir matriste kendisiyle beraber ardışık olarak son satır ve son sütunların çıkarılmasıyla oluşan karesel matrislerin determinantı o matrisin esas asli minörlerini oluşturur.

Örnek 1.4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 8 & 3 & 9 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Esas asli minörleri 5 , $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ ve $\det A$ olup sırasıyla 5 , -33 , -575 dir.

Örnek 1.5. $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

matrisinin esas asli minörleri,

$$4, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ ve } \det B$$

dir. Reel ve simetrik B matrisinin esas asli minörlerine bakıp gerçekten pozitif belirli bir matris olup olmadığı belirlenebilir:

$$|4| = 4$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

olup determinantlar pozitif olduğundan Sylvester kriterine göre B matrisi pozitif belirlidir.

a_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$) ler gerçel (veya kompleks) sayılar olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

matrisi verilsin. Eğer (1.1) matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin basit bağlantılı açık bir D kümesinde ise bu matrise D -kararlı matris denir.

- Eğer D bölgesi, sol açık yarı düzlem ise D -kararlılığa Hurwitz kararlılık denir. Yani sözü edilen matris Hurwitz kararlı matris adını alır.

- Eğer D bölgesi, kompleks düzlemde açık birim yuvar ise bu matrise Schur kararlı matris denir.

Bir gerçel (veya kompleks) A matrisinin Hurwitz kararlılığı Lyapunov Teoremi adı verilen teorem ile belirlenebilir, Schur kararlılığı ise Stein Teoremi ile belirlenebilir.

Bu teoremler sırasıyla aşağıdaki gibidir (Gantmacher, 1959 ; Stein, 1952) :

Teorem 1.6. (Lyapunov Teoremi)

i) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kompleks matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^*P + PA < 0 \quad (1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan P pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gerçel matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T P + PA < 0 \quad (1.3)$$

eşitsizliğini sağlayan P gerçel pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

Teorem (1.6) da yer alan (1.2) ve (1.3) eşitsizlikleri Lyapunov eşitsizlikleri olarak bilinir.

$Q > 0$ olmak üzere,

$$A^*P + PA = -Q \text{ ve } A^T P + PA = -Q \quad (1.4)$$

denklemlerine Lyapunov denklemleri denir.

(1.4) teki Lyapunov eşitliği, yani

$$A^T P + PA = -Q$$

eşitliği göz önünde bulundursun. Buradaki A matrisinin Hurwitz kararlı olması durumunda (1.4) denkleminin pozitif belirli tek bir P çözümü vardır ve

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \quad (1.5)$$

şeklindedir. Buradaki e^{At} gibi eksponansiyel matris fonksiyonu

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad (1.6)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada $(sI - A)^{-1}$ ters matrisi, \mathcal{L}^{-1} ise ters Laplace dönüşümünü ifade etmektedir.

Gerçekten, P matrisi (1.4) denkleminin tek çözümüdür. Bunu görmek için P nin pozitif belirli olduğu ve (1.4) denklemini sağladığı görülmelidir. (Chen, 1984)

Keyfi $Q > 0$ alınsın.

$$A^T P + PA = -Q \quad (1.7)$$

denkleminin çözümünün (1.5) teki gibi tanımlı P matrisi olduğu gösterilmek isteniyor, yani (1.5) matrisinin pozitif belirli olduğu ve (1.7) denklemini sağladığı görülmelidir.

$$\begin{aligned} P^T &= \int_0^\infty (e^{A^T t} Q e^{At})^T dt = \int_0^\infty e^{(At)^T} Q e^{(A^T t)^T} dt \\ &= \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt = P \end{aligned}$$

olduğundan P simetriktir.

P nin pozitif belirliliğini göstermek için “ $\forall x \neq 0$ için $x^T P x > 0$ ” olduğu görülmelidir.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} x^T P x &= x^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) x \\ &= \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt \\ &= \int_0^\infty \left[Q^{\frac{1}{2}} e^{At} x \right]^T \left[Q^{\frac{1}{2}} e^{At} x \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left\| Q^{\frac{1}{2}} e^{At} x \right\|^2 dt > 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla P pozitif belirlidir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} &PA + A^T P \\ &= \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) A + A^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) \\ &= \int_0^\infty (e^{A^T t} Q e^{At} A) dt + \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{At}) dt \\ &= \int_0^\infty (e^{A^T t} Q e^{At} A + A^T e^{A^T t} Q e^{At}) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_{t=0}^\infty = -Q \end{aligned}$$

Şimdi de çözümün tekliği gösterilsin.

$\tilde{P} \neq P$ denklemin iki farklı çözümü olsun.

$$\tilde{P}A + A^T\tilde{P} = -Q$$

$$PA + A^TP = -Q$$

olduğundan

$$\tilde{P}A + A^T\tilde{P} = PA + A^TP$$

olur ve buradan

$$(\tilde{P} - P)A + A^T(\tilde{P} - P) = 0$$

$$\Rightarrow e^{A^T t}[(\tilde{P} - P)A + A^T(\tilde{P} - P)]e^{At} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{A^T t}(\tilde{P} - P)e^{At}) = 0$$

olup son eşitliğin her iki tarafının integrali alındığında

$$e^{A^T t}(\tilde{P} - P)e^{At} = c \text{ (sabit)}$$

elde edilir. $\forall t$ için son elde edilen eşitlik sağlandığından

$$t = 0 \text{ için } \Rightarrow (\tilde{P} - P) = c$$

dir. O halde

$$\tilde{P} - P = e^{A^T t}(\tilde{P} - P)e^{At}$$

dir. $t \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\tilde{P} - P = 0$$

elde edilir.

$$\tilde{P} = P$$

olur ki bu da çözümün tek olduğunu verir.

Teorem 1.7. (Stein Teoremi)

i) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kompleks matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^*PA - P < 0 \quad (1.8)$$

eşitsizliğini sağlayan P pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gerçel matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T PA - P < 0 \quad (1.9)$$

eşitsizliğini sağlayan P gerçel pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

Teorem (1.7) deki (1.8) ve (1.9) eşitsizlikleri Lyapunov eşitsizlikleri olarak bilinir.

$Q > 0$ olmak üzere,

$$A^*PA - P = -Q \text{ ve } A^T PA - P = -Q \quad (1.10)$$

eşitlikleri ise Stein denklemleri olarak bilinir.

Bir matrisin karakteristik denklemi matrisin karakteri hakkında bilgi verdiği için ve karakteristik denklem de bir polinom olduğu için matrislerin kararlılıkları polinomların kararlılıkları yardımıyla belirlenebilir.

Matrislerin kararlılığını özdeğeri belirlerken, polinomların kararlılık tipini ise polinomun kökleri belirler.

$a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ gerçel (veya kompleks) sayılar olmak üzere ,

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad (a_n \neq 0) \quad (1.11)$$

polinomu verilsin.

(1.11) polinomunun Hurwitz kararlılığı için Hurwitz kriteri adı verilen bir kriter aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.8. (Hurwitz Matrisi)

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad (a_n > 0) \quad (1.12)$$

için

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

ile tanımlı matris Hurwitz matrisi denir.

Örnek 1.9. $p(t) = t^4 + 2t^3 + 7t^2 + 3t + 5$

polinomu için Hurwitz matrisi aşağıdaki gibidir.

$$H(p) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorem 1.10. (Hurwitz Kriteri) (Barmish, 1994)

(1.12) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul buna karşılık gelen (1.13) Hurwitz matrisinin esas asli minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0$$

.

.

.

$$\Delta_n = \det H(p) > 0$$

i) n=1 durumu :

1. dereceden polinomun kararlılığı için gerek ve yeter koşul polinomun katsayılarının aynı işaretli olmasıdır.

Gerçekten,

$$p(t) = a_1 t + a_0, \quad (a_1 > 0)$$

polinomu için Hurwitz matrisi a_0 olup pozitif olmalıdır. $a_1 > 0$ olduğundan a_0 ile a_1 aynı işaretli olmalıdır. Bu durum kararlılık tanımından da görülebilir. Kararlılık tanımı gereği

$$\frac{-a_0}{a_1} < 0$$

olmalıdır. O halde a_0 ile a_1 aynı işaretli olmalı.

ii) n = 2 durumu :

2. dereceden polinomun kararlılığı için gerek ve yeter koşul polinomun katsayılarının aynı işaretli olmasıdır.

Gerçekten,

$$p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

için Hurwitz matrisi $a_2 > 0$ olmak üzere

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

dır. Hurwitz kriteri gereği

$$p(t) \text{ kararlıdır} \Leftrightarrow a_1 > 0, \quad a_0 a_1 > 0$$

dır. Hurwitz matrisini de göz önünde bulundurarak $p(t)$ nin kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

olmasıdır.

iii) n = 3 durumu :

3. dereceden polinomun da kararlılığı için gerek ve yeter koşul $n=1$ ve $n=2$ durumlarındakine benzer olarak polinomun katsayılarının aynı işaretli olmasıdır.

Gerçekten,

$$p(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0; \quad a_3 > 0$$

polinomu için Hurwitz matrisi

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

dir.

$$p(t) \text{ kararlı} \Leftrightarrow 1) a_2 > 0$$

$$2) \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$$

$$3) \det H(p) = 0 + 0 + a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \\ = a_0 (a_2 a_1 - a_3 a_0) > 0$$

$(a_2 a_1 - a_3 a_0) > 0$ sağlanıyorsa $a_0 > 0$ olduğundan $\det H(p) > 0$ da sağlanır.

Matrislerde Hurwitz kararlılık Schur kararlılığa bir dönüşüm yardımıyla dönüştürülebilir. Tersisi durum da geçerlidir. Yani Schur kararlılık da Hurwitz kararlılığa dönüştürülebilir. Matrisler arasındaki bu dönüşüme Cayley Dönüşümü adı verilir.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi verilsin ve I_n birim matris olsun. (Tausky, 1964)' de gösterildiği gibi,

i) A matrisi Hurwitz kararlı ise $(I_n - A)^{-1}(I_n + A)$ matrisi Schur kararlıdır.

ii) A matrisi Schur kararlı ise $(A + I_n)^{-1}(A - I_n)$ matrisi Hurwitz kararlıdır.

(1.4) Lyapunov ve (1.10) Stein eşitliklerinde pozitif belirli olarak alınan pozitif P matrisi köşegen (diyagonal) matris ise bu kararlılığa özel bir isim verilir.

Eğer $S > 0$ olmak üzere

$$A^T D + D A = -S \tag{1.14}$$

olacak şekilde pozitif D köşegen matrisi varsa A ya Hurwitz diyagonal kararlı matris denir. Benzer şekilde Schur diyagonal kararlılık tanımlanabilir. Yani

Eğer $S > 0$ olmak üzere

$$A^T D A - D = -S \tag{1.15}$$

olacak şekilde pozitif D köşegen matrisi varsa A ya Schur diyagonal kararlı matris denir.

(1.1) matrisi göz önünde bulundurulduğunda matrisin elemanlarının sabit olduğu görülmektedir. Birçok problemde bu elemanların değerleri kesin olarak bilinmediğinden (1.1) matrisi yerine her elemanı bir parametreye bağlı olarak değişen

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{q}) & a_{12}(\mathbf{q}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{q}) \\ a_{21}(\mathbf{q}) & a_{22}(\mathbf{q}) & \cdots & a_{2n}(\mathbf{q}) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{q}) & a_{n2}(\mathbf{q}) & \cdots & a_{nn}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

matrisler ailesi ele alınır. Burada q belirsizlik parametresidir ve kompakt bir Q kümesi üzerinde değişmektedir. Q genellikle \mathbb{R}^ℓ uzayında bir kutu olarak ele alınmaktadır.

Yani;

$$Q = \{ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^\ell : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, (i = 1, 2, \dots, \ell) \} \quad (1.17)$$

bu durumda aile aralık matrisler ailesi olarak adlandırılır.

$g: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $i = 1, 2, \dots, \ell$ için $q \in Q$ nun q_i bileşeni dışındaki diğer bileşenler sabit olmak üzere q_i ye göre afin ise g ye multilineer fonksiyon denir.

Q kümesi bir kutu olarak ele alındığında (Barmish,1994) te yer alan multilineer fonksiyonun maksimum ve minimum değerini veren önemli bir teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.11. (Barmish,1994)

(1.17) deki gibi bir Q kutusu ele alınsın. Bu durumda $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ multilineer bir fonksiyon ise g maksimum ve minimum değerlerini Q nun köşe noktalarında alır.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sistemlerin kararlılığı için matrislerin özdeğerlerinin konumlandırılmasından bahsedilmiştir ve matrislerin kararlılığıyla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise bazı özel matrislerin özellikleri hakkında bilgi verilip, bu matrislerin çeşitli kararlılık problemleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise aralık Metzler matris ailelerinin özellikleri ve Metzler ailesinin kararlılık problemlerinden bahsedilmiştir. Metzler aralık sistemleri için Lyapunov matris eşitsizliğinin ortak diyagonal çözümlerinin varlığı problemine bakılmıştır.

Tezde elde edilen sonuçlar pek çok örnekle pekiştirilmiştir.

2 BAZI ÖZEL MATRİSLERİN ÇEŞİTLİ KARARLILIK PROBLEMLERİ

Bu bölümde bazı özel matrislerin çeşitli kararlılık problemleri incelenmiştir. Ayrıca bu inceleme için gerekli olan bazı özel matrislerin tanım ve teoremlerine yer verilip, çeşitli örneklerle ele alınan konu desteklenmiştir.

2.1 Quasidominant Matrislerin Diyagonal Kararlılığı

Tanım 2.1. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde bir matris olsun . $p = \text{diag}(p_1, \dots, p_2) > 0$ olacak şekilde pozitif diyagonal matrisi

$$a_{ii} \cdot p_i \geq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| p_j, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

ya da

$$a_{jj} \cdot p_j \geq \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}| p_i, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

eşitsizliklerinden herhangi birini sağlayacak şekilde varsa A matrisine quasidominant matris denir.

Örnek 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 4 & 11 & 6 \\ -7 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı $P > 0$ ve A matrisleri ele alınsın:

$i = 1$ için (2.1) eşitsizliğinden

$$a_{11}p_1 \geq |a_{12}|p_1 + |a_{13}|p_1$$

olduğundan A ve P matrisleri göz önünde bulundurulduğunda

$$6p_1 \geq 2p_1 + 3p_1$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $i = 2$ için (2.1) eşitsizliğinden

$$a_{22}p_2 \geq |a_{21}|p_2 + |a_{23}|p_2$$

olduğundan A ve P matrisleri göz önünde bulundurulduğunda

$$11p_2 \geq 4p_2 + 6p_2$$

eşitsizliği ve $i = 3$ için (2.1) eşitsizliğinden

$$a_{33}p_3 \geq |a_{31}|p_3 + |a_{32}|p_3$$

olduğundan A ve P matrisleri için

$$16p_3 \geq 7p_3 + 8p_3$$

dir. Dolayısıyla quasidominant matris tanımı gereği A matrisinin quasidominant bir matris olduğu görülür.

Teorem 2.3 (Moy, 1977)

Bir A kare matrisinin quasidominant bir matris olması için gerek ve yeter koşul her K işaret matrisi için $KAKx > 0$ olacak şekilde pozitif bir x vektörünün olmasıdır.

İspat Teoremde yer alan

$$KAKx > 0$$

koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir

$$a_{ii} \cdot x_i > - \sum_{j \neq i} k_{ij} k_{jj} a_{ij} x_j . \quad (2.3)$$

(2.3) eşitsizliğindeki her seçim için $k_{ij} k_{jj} = \{-1, +1\}$ olmak zorundadır, buradan da

$$a_{ii} \cdot x_i > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| x_j .$$

olup (2.3) eşitsizliğinin quasidominant matris koşuluna eşdeğer olduğu görülür.

Lemma 2.4 (Tau, 1949)

Bir quasidominant matrisin tüm minörleri pozitifdir. Özel olarak her simetrik quasidominant matris pozitif belirlidir.

Teorem 2.5 (Moy,1977)

Eğer A matrisi quasidominant matris ise,

$$PA + A^T P > 0$$

olacak şekilde pozitif belirli P diyagonal matrisi vardır.

İspat : A quasidominant olduğunda A^T de quasidominant matris olduğundan Teorem (2.3) den her K işaret matrisi için $x > 0$ ve $y > 0$ vektörleri sırasıyla $KAKx > 0$ ve $KA^T Ky > 0$ olacak şekilde vardır.

P matrisi $p_i := \frac{y_i}{x_i}$ ($\forall i = 1, \dots, n$) olacak şekilde pozitif köşegen elemanlarına sahip diyagonal matris olarak alınsın.

Bu durumda

$$\begin{aligned} K(PA + A^T P)Kx &= PKAKx + KA^T KPx \\ &= PKAKx + KA^T Ky > 0 \end{aligned}$$

dır, ki bu eşitsizlik Teorem (2.3) den dolayı $PA + A^T P$ nin quasidominant olması demektir. Aynı zamanda $PA + A^T P$ simetrik matris olduğundan Lemma (2.4) den $PA + A^T P$ matrisi pozitif belirlidir.

Sonuç 2.6. A matrisi quasidominant matris ise $-A$ matrisi diyagonal kararlıdır.

İspat : Diyagonal kararlılık tanımından ve Teorem (2.5)den açık olarak görülür.

Örnek 2.7.

Örnek (2.2) de yer alan A matrisi göz önünde bulundurulsun.

İddia: $B = -A$ ile tanımlı matris diyagonal kararlıdır.

İddianın doğruluğunu görmek için aşağıdaki gibi iki pozitif belirli diyagonal matrisler ele alınsın:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P_1 diyagonal matrisi için

$$B^T P_1 + P_1 B = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 10 \\ -6 & -22 & -14 \\ 10 & -14 & -32 \end{bmatrix}$$

dır ve özdeğerlerinin reel kısımları -1.1234, -42.6914, -22.1852 olup negatiftirler. Dolayısıyla $B^T P_1 + P_1 B$ matrisi negatif belirlidir.

P_2 diyagonal matrisi için

$$B^T P_2 + P_2 B = \begin{bmatrix} -36 & -26 & 23 \\ -26 & -110 & -46 \\ 23 & -46 & -64 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerlerinin reel kısımları -2.1821, -139.5116, -68.3064 dür. Buradan $B^T P_2 + P_2 B$ matrisi negatif belirlidir.

B matrisi için $B^T P + P B < 0$ olacak şekilde en az bir $P > 0$ diyagonal matrisi var olduğundan B diyagonal kararlıdır.

2.2 Metzler Matrislerinin Hurwitz Kararlılığı

Metzler matrisleri birçok çalışma alanında ortaya çıkmaktadır. Örneğin; zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerin ve pozitif lineer dinamik sistemlerin analizinde, iletişim ağları (Meyn, 2008), biyoloji (Arcat ve Sontag, 2006), ekonomi (Johnson, 1974) gibi alanlarda vb.

Tanım 2.8. $n \times n$ tipinde gerçel bir $A = (a_{ij})$ matrisi “ $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), $\forall i \neq j$ ” özelliğini sağlıyor ise A matrisine Metzler matrisi denir.

Bir başka ifade ile köşegen üzerindeki elemanlar hariç tüm elemanları negatif olmayan bir matrise Metzler matrisi adı verilir.

Örnek 2.9.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 9 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisi 3×3 lük bir Metzler matrisidir.

Notasyon 2.10 $n \times n$ tipinde “ $A = (a_{ij})$ olmak üzere $\forall i, j = 1, \dots, n$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} \leq 0$ ” özelliğini sağlayan matrisler sınıfı \mathfrak{N} ile gösterilsin.

Teorem 2.11. (Siljak, 2007)

Eğer $A \in \mathfrak{N}$ ise, aşağıdaki koşullar denktir:

(1) $Ax > 0$ olacak şekilde bir $x > 0$ vektörü vardır.

(2) $n \times n$ tipinde öyle bir pozitif diyagonal $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ matrisi vardır öyleki, $ADe > 0$ dır. Burada e vektörü $(1, 1, \dots, 1)^T$ şeklinde bir n boyutlu vektördür.

(3) Eğer $B \in \mathfrak{N}$ ve $B \succcurlyeq A$ ($\forall i, j = 1, \dots, n$ için $b_{ij} \geq a_{ij}$ demektir) durumunda, B^{-1} vardır.

(4) A nın her gerçel özdeğeri pozitiftir.

(5) A nın tüm minörleri pozitiftir.

(6) A nın tersi vardır ve $A^{-1} > 0$ dir.

(7) A nın her bir özdeğerinin reel kısmı pozitiftir.

Teorem (2.11) den de anlaşılacağı gibi $A \in \mathfrak{N}$ olması demek Teorem (2.11) in koşullarından birini sağlaması demektir.

Notasyon 2.12. $A \in \mathfrak{N}$ olan tüm matrislerin sınıfı \mathcal{M} ile gösterilsin.

Teorem (2.11) in bir sonucu olarak Metzler matrislerinin Hurwitz kararlılığı ile ilgili bir teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.13. Bir Metzler matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul terslenebiliyor olması ve tersinin negatif olmasıdır.

İspat : A Metzler matrisinin Hurwitz kararlı olması demek A nın özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olması demektir. O halde $-A$ nın her bir özdeğerinin reel kısımları pozitif olacaktır.

Diğer taraftan A Metzler matrisi olduğundan Metzler matrisi tanımı gereği $-A \in \mathfrak{N}$ olmalıdır.

Teorem (2.11) den $-A$ nın her bir özdeğerinin reel kısımlarının pozitif olması $-A$ nın terslenebilir ve $(-A)^{-1}$ tersinin pozitif olmasına denktir. Bu da A nın terslenebilir ve A^{-1} nın negatif olması demektir.

Örnek 2.14.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0.4 \\ 1 & -4 & 0.2 & 2 \\ 0.1 & 0.4 & -2 & 0.7 \\ 0.01 & 1 & 0.5 & -8 \end{bmatrix}$$

matrisi ele alınsın. A matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları pozitif olduğundan bir Metzler matrisidir.

Özdeğerleri $-0.0448, -4.0487, -2.4037, -8.5027$ olup kompleks düzlemde sol yarı düzlemde yer alırlar. Dolayısıyla A matrisi Hurwitz kararlı bir matristir.

A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -15.47 & -11.82 & -25.90 & -5.99 \\ -4.30 & -3.55 & -7.24 & -1.73 \\ -1.86 & -1.49 & -3.65 & -0.78 \\ -0.67 & -0.55 & -1.16 & -0.39 \end{bmatrix}$$

olup tüm elemanları negatiftir, yani A^{-1} matrisi negatiftir. Buradan Teorem (2.13) ün sağlandığı görülür.

Hurwitz kararlı olan bir Metzler matrisine M-matrisi denir ve M-matrisleri ailesi M_n ile gösterilir.

Metzler matrislerinin kararlılığı ile ilgili bir başka teorem de aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.15 (Horn, R. ve Johnson, C., 1991)

A matrisi Metzler matrisi olsun. A nın Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeterli koşul negatif olmayan bir B matrisi için $\alpha > \sigma(B)$ olmak üzere $A = B - \alpha I$ formunda yazılabilmektedir. Burada $\sigma(B)$, B nin spektral yarıçapını göstermektedir. Yani $\sigma(B) = \lambda_{max}(B)$ dir.

İspat A Metzler matrisi Hurwitz kararlı olsun. O halde A nın özdeğerlerinin reel kısımları negatif olmalıdır. Yani A nın özdeğerleri λ_i ile gösterilmek üzere $Re\lambda_i < 0$ $\forall i = 1, \dots, n$ olmalıdır.

Şimdi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı $B = A + \alpha I \succcurlyeq 0$ olacak şekilde alınsın. Bu durumda A nın özdeğerleri kompleks düzlemde merkezi α , yarıçapı $\sigma(B)$ olan disk içinde yer alırlar. Dolayısıyla A Metzler matrisi olduğu için $\sigma(A) = \sigma(B) - \alpha$ reel ve $\sigma(A) \geq Re\lambda_i, \forall i = 1, \dots, n$ dir, yani A nın her λ_i özdeğeri için

$$Re\lambda_i \leq \sigma(B) - \alpha \quad (2.4)$$

eşitsizliği sağlanır. $Re\lambda_i$ ler negatif olduğu ve (2.4) eşitsizliği göz önüne alındığında $\alpha > \sigma(B)$ olması durumunda A nın $A = B - \alpha I$ formunda yazılabileceği görülür.

Tersi durum için $\alpha > \sigma(B)$ olmak üzere $A = B - \alpha I$ formunda yazılabilir. Bu durumda A nın özdeğerleri, $\lambda(B)$ B nin özdeğerini göstermek üzere $\lambda(B) - \alpha$ şeklindedir.

Dolayısıyla A nın her özdeğeri için (2.4) eşitsizliği geçerlidir. $\alpha > \sigma(B)$ olduğundan $\sigma(B) - \alpha < 0$ dir. O halde (2.4) eşitsizliğinden

$$Re\lambda \leq \sigma(B) - \alpha < 0$$

dir. Bu da A nın Hurwitz kararlı olması demektir.

2.3 Checkerboard Matrisleri ve Schur Kararlılıkları

Tanım 2.16. (Bau, 1963)

Eğer $|K_i| = I$ ($i = 1, 2$) ve $K_1 A K_2 = |A|$ olacak şekilde K_1, K_2 diyagonal matrisleri varsa A matrisi Checkerboard matrisi olarak adlandırılır.

Burada $|A|$, A matrisinin tüm elemanlarının mutlak değerlerinin alınmasıyla elde edilen matrisi gösterir.

Ayrıca kararlı Checkerboard matrislerinin sınıfı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

{ A : A bir Checkerboard ve $|A|$ kararlıdır. }

Teorem 2.17. (Bhaya, 2000)

Bir Checkerboard matrisi Schur kararlı ise Schur diyagonal kararlıdır.

İspat: A matrisi Schur kararlı bir Checkerboard matrisi olsun. Kararlı Checkerboard matrisi tanımından dolayı $|S_i| = I$, ($i = 1, 2$) olacak şekilde S_1, S_2 matrisleri vardır, öyle ki $S_1 A S_2$ negatif olmayan Schur kararlı bir matristir.

(Moy, 1977) de yer alan “ $|A|$ Schur kararlı ise A Schur diyagonal kararlıdır” teoreminden dolayı A ’nın Schur diyagonal kararlı olduğu söylenebilir. Dolayısıyla öyle bir pozitif diyagonal P matrisi vardır ki, $|A|$ matrisi için Stein eşitsizliği sağlanır, yani

$$|A|^T P |A| - P < 0$$

dir. Buradan Checkerboard matrisi tanımı gereğince

$$(S_1 A S_2)^T P (S_1 A S_2) - P < 0$$

$$\Rightarrow S_2^T A^T S_1^T P S_1 A S_2 - P < 0$$

$$\Rightarrow S_2 A^T S_1 P S_1 A S_2 - P < 0$$

dir. P diyagonal matrisi ve $|S_1| = I$ için

$$S_1 P S_1 = P$$

olduğundan

$$S_2 A^T P A S_2 - P < 0$$

dir. $S_2^{-1} = S_2$ olduğu için son bulunan eşitsizlik sağdan ve soldan S_2 ile çarpıldığında

$$A^T P A - P < 0$$

elde edilir. Bu da A ’nın Schur diyagonal kararlı olması demektir.

2.4 Morishima Matrisleri

Tanım 2.18. Eğer bir A matrisi ve $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i = \{-1, +1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekildeki bir diyagonal matrisi için $S A S = |A|$ eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi Morishima matrisi olarak adlandırılır.

Uyarı : Tanımdan da anlaşılacağı gibi Morishima matrisleri Checkerboard matrislerinin bir özel halidir.

Teorem 2.19. (Bhaya, 2000)

Eğer A matrisi Schur kararlı bir Morishima matrisi ise $|A|$ matrisi de Schur diyagonal kararlıdır.

İspat : A Schur kararlı bir Morishima matrisi olsun. Morishima matrisleri Checkerboard matrislerinin özel bir hali olduğundan Teorem (2.17) nin ispatındaki yol izlenerek ve $S_1 = S_2$ alınarak Schur kararlı olan A matrisinin Schur diyagonal kararlı olduğu elde edilir . Bu durumda Schur diyagonal kararlılığının tanımından P pozitif ($P > 0$) diyagonal matrisi

$$A^T P A - P < 0$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde vardır.

O halde Morishima matrisinin tanımındaki söz konusu S matrisi göz önünde bulundurulduğunda

$$S^{-1} A^T S P S A S^{-1} - S^{-1} P S^{-1} < 0$$

elde edilir .

$S^{-1} = S$ ve $S P S = P$ olduğu için

$$S A^T S P S A S - S P S < 0$$

$$\Rightarrow (S A S)^T P (S A S) - P < 0$$

dir. $S A S = |A|$ olduğu için

$$\Rightarrow |A|^T P |A| - P < 0$$

elde edilir . Bu da $|A|$ nın Schur diyagonal kararlı olmasına denktir.

Örnek 2.20.

Aşağıdaki gibi bir A matrisini ele alalım :

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 \\ -0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$S = \text{diag}(1, -1)$ olarak ele alınırsa $|S| = I$ olur. Söz konusu S matrisi için

$$\begin{aligned} SAS &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 \\ -0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= |A| \end{aligned}$$

olduğundan A matrisi bir Morishima matrisidir .

Ayrıca A nın özdeğerleri $\lambda_1 = -0.332455$ ve $\lambda_2 = 0.932455$ olduğundan $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2$) olduğu için A Schur kararlıdır.

$$P_1 = \text{diag}(3.359173, 5.426356) > 0$$

pozitif diyagonal matrisi, keyfi $Q > 0$ için

$$A^T P_1 A - P_1 + Q = 0$$

Stein eşitsizliğinin bir çözümü olduğundan A matrisi Schur diyagonal kararlıdır.

Bunun yanı sıra , $|A|$ için $P_2 = \text{diag}(13.343984, 23.865317)$

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} > 0$$

olmak üzere Stein denkleminin pozitif belirli bir diyagonal çözümüdür. Buradan $|A|$ Schur diyagonal kararlıdır.

Örnek 2.21.

Aşağıdaki gibi bir B matrisi ele alınsın.

$$B = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.73 \\ -0.73 & 0.004 \end{bmatrix}$$

$S = \text{diag}(-1, 1)$ olmak üzere B matrisi için $|S| = I$ dir. S matrisi ile B matrisine gerekli işlemler yapıldığında B matrisinin Morishima matrisi olduğu görülür.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
SBS &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.12 & -0.73 \\ -0.73 & 0.004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.12 & 0.73 \\ 0.73 & 0.004 \end{bmatrix} \\
&= |B|
\end{aligned}$$

olup B matrisi bir Morishima matrisidir.

B nin özdeğerleri $\lambda_1 = -0.670300$ ve $\lambda_2 = 0.794300$ olup birim disk içerisinde yer aldıklarından B Schur kararlıdır.

$$P_2 = \text{diag}(2.298019, 2.227250) > 0$$

diyagonal matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$B^T P_2 B - P_2 + Q = 0$$

Stein eşitsizliğinin bir çözümü olduğundan B matrisi Schur diyagonal kararlıdır. Bunun yanı sıra, $|B|$ için de P_2 Stein denkleminin pozitif belirli bir diyagonal çözümüdür. O halde $|B|$ Schur diyagonal kararlıdır.

Örnek 2.22.

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 & -0.001 \\ -0.2 & 0.5 & 0.006 \\ -1 & 0.08 & 0.5 \end{bmatrix}$$

matrisi için $S = \text{diag}(-1, 1, 1)$ olmak üzere $SCS = |C|$ olduğundan C matrisi bir Morishima matrisidir.

Aynı zamanda C nin özdeğerleri

$$-0.012347, 0.640284, 0.472062$$

olduğundan C Schur kararlıdır.

$$P_3 = \text{diag}(2.718461, 2.075280, 1.336268)$$

için

$$|C|^T P |C| - P = \begin{bmatrix} -1.27 & 0.39 & 0.67 \\ 0.39 & -1.30 & 0.06 \\ 0.67 & 0.06 & -1.00 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri -1.944803, -1.278296, -0.354267 negatif yani negatif belirlidir. Yani $|C|$ Schur diyagonal kararlıdır. O halde Teorem (2.19) C matrisi için sağlanır.

2.5 Hankel Matrisleri

Polinom ve matris hesaplamaları arasındaki ilişkinin kullanıldığı uygulamalarda etkili sayısal çözüm algoritmaları geliştirmek için Hankel matrislerine sıkça rastlanılmaktadır.

Tanım 2.23. $n \times n$ tipinde aşağıdaki gibi tanımlanan A matrisine Hankel matrisi denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n-3} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & \dots & a_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Bir başka ifade ile $A = (a_{ij})$ olmak üzere “ $i \leq j$ ise $a_{ij} = a_{i+k, j-k}$, $\forall k = 0, \dots, j - 1$ özelliğini sağlayan matris tipidir.

Tanımdan da anlaşıldığı gibi Hankel matrisi simetrik matristir.

2×2 tipinde bir Hankel matrisi ele alınsın:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gibi bir Hankel matrisi göz önünde bulundursun. A nın Hurwitz kararlılığı için bir gerek ve yeter koşul aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.24. (2.6) daki gibi bir A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul köşegen üzerindeki elemanların negatif olması ve $\det A$ nın pozitif ($\det A > 0$) olmasıdır.

İspat: A nın karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (-a_0 - a_2)\lambda + a_0 \cdot a_2 - a_1^2$$

olduğundan polinomlar için Hurwitz kriterinden

$$a_0 \cdot a_2 - a_1^2 > 0 \text{ ve } -a_0 - a_2 > 0 \quad (2.7)$$

olmalıdır. (2.7) nin birinci eşitsizliğinin solundaki ifade $\det A$ olduğundan $\det A > 0$ dir.

(2.7) nin birinci eşitsizliğinden

$$a_0 \cdot a_2 - a_1^2 > 0 \Rightarrow a_0 \cdot a_2 > a_1^2 > 0$$

dır. Yani a_0 ile a_2 aynı işaretli olmalıdır. Bir başka ifade ile köşegen üzerindeki elemanlar aynı işaretli olmalıdır.

(2.7) nin ikinci eşitsizliğinden

$$a_0 + a_2 < 0$$

dolayısıyla a_0 ile a_2 aynı işaretli olduğundan a_0 ve a_2 negatif olmalıdır.

Örnek 2.25. Şimdi de bir Hankel matrisi örneğini göz önüne alırsak,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Teoremden (2.24) den dolayı A matrisi Hurwitz kararlıdır.

Gerçekten de

$$\det A = (-1) \cdot (-2) - 1^2 = 1 > 0$$

ve köşegen üzerindeki elemanları negatif olup Teorem (2.24) ün koşulları sağlanır.

Uyarı: Teorem (2.24) ün ispatı matrisler için Sylvester kriterini kullanarak da görülebilir.

Gerçekten , Sylvester kriterine göre

$$a_0 < 0 \text{ ve } \det A > 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\det A = a_0 \cdot a_2 - a_1^2 > 0$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot a_2 > a_1^2 > 0$$

a_0 negatif olduğu için a_2 de negatif olmalıdır.

Teorem 2.26. (Cross, 1978)

Reel 2×2 lik

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

matrisinin Hurwitz diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$a_1 < 0, \quad a_4 < 0 \text{ ve } a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3 > 0$$

olmasıdır.

Teorem (2.24) ve Teorem (2.26) gösterir ki 2×2 lik reel Hankel matrisleri için Hurwitz kararlılık ile Hurwitz diyagonal kararlılık denktir.

Örnek 2.27.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı mı incelensin:

$$\det B = (-2) \cdot (-5) - 3^2 = 1 > 0$$

ve köşegen elemanları negatif olup Teorem (2.26) dan Hurwitz kararlıdır. Gerçekten B nin özdeğerleri $-0.145898, -6.854101$ dir.

Hurwitz diyagonal kararlılığı incelensin:

Teorem (2.26) nın koşullarının sağlandığı görülmüştü.

Gerçekten

$$P = \text{diag}(1.66, -0.66)$$

matrisi için $B^T P + P B$ negatif belirlidir. Dolayısıyla Hurwitz diyagonal kararlıdır.

Görüldüğü gibi Hurwitz kararlı olan A matrisi aynı zamanda Hurwitz diyagonal kararlıdır.

Örnek 2.28.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Hankel matrisi göz önünde bulundursun.

Teorem (2.24) den dolayı Hurwitz kararlıdır. 2×2 lik reel Hankel matrisi için Hurwitz kararlılık ile Hurwitz diyagonal kararlılık denk olduğu için ele alınan A matrisi Hurwitz diyagonal kararlıdır.

Eğer A matrisine $(I-A)^{-1}(I+A)$ Cayley Dönüşümü uygulanırsa

$$B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

şeklindeki başka bir Hankel matrisi elde edilir. Bu matris (Taussky,1964) de yer alan Cayley dönüşümü ile ilgili teoreme göre Schur kararlıdır.

Gerçekten de

$$P = \begin{bmatrix} 1.083 & -0.291 \\ -0.291 & 1.791 \end{bmatrix} > 0$$

ve

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix} > 0$$

matrisleri için $B^T P B - P = -Q$ Stein denklemi sağlanır. Buradan B matrisi Schur kararlı olur.

Ayrıca yine Cayley dönüşümü ile ilgili teoremden B nin Schur diyagonal kararlı olduğu söylenebilir.

Gerçekten de

$$P = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix} > 0$$

ve

$$Q = I > 0$$

için Stein denklemi sağlanır. Dolayısıyla A ya Cayley dönüşümü uygulanması ile elde edilen B matrisi aynı zamanda Schur diyagonal karardır.

Tanım 2.29. (Aralık Hankel Matris Ailesi)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} : a_1 \in [a_1^-, a_1^+], \right. \\ a_2 \in [a_2^-, a_2^+], \\ a_3 \in [a_3^-, a_3^+], \\ \left. a_4 \in [a_4^-, a_4^+] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde \mathcal{A} aralık matris ailesi verilsin. Eğer ailedeki tüm matrisler Hankel matrisi ise bu aileye aralık Hankel matris ailesi denir.

Eğer \mathcal{A} ailesindeki tüm matrisler Hurwitz diyagonal karardır ise aileye gürbüz Hurwitz diyagonal karardır denir.

Aralık Hankel matris ailesinin gürbüz Hurwitz karardır ile ilgili bir teorem aşağıdaki gibi incelenmiştir (Yıldız vd. ,2014):

Teorem 2.30.

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} : a_i \in [a_i^-, a_i^+], i=1,2,3 \right\} \quad (2.9)$$

aralık Hankel matris ailesinin gürbüz Hurwitz diyagonal karardır olması için gerek ve yeter koşul

$$a_1^+ < 0, a_3^+ < 0 \text{ ve } a_1^+ \cdot a_3^+ > \max\{a_2^2\} \quad (2.10)$$

olmasıdır.

İspat: Teorem (2.26) dan dolayı her $a = (a_1, a_2, a_3) \in [a_1^-, a_1^+] \times [a_2^-, a_2^+] \times [a_3^-, a_3^+]$ için

$$a_1 < 0, a_3 < 0, a_1 a_3 - a_2^2 > 0$$

ya da

$$\max a_1 < 0, \max a_3 < 0, \min\{a_1 a_3\} - \max\{a_2^2\} > 0$$

ya da Teorem (1.10) gereği maksimum uç noktalarda hesaplandığından

$$a_1^+ < 0, a_3^+ < 0 \text{ ve } a_1^+ \cdot a_3^+ > \max\{a_2^2\}$$

dır. $\max\{a_2^2\} \geq 0$ olduğundan $a_1^+ \cdot a_3^+ > 0$ olmalıdır. Buradan da köşegen elemanlarının sağ uç noktaları negatif olmalıdır.

Örnek 2.31.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-1, -0.5] & [-0.4, 0] \\ [-0.4, 0] & [-0.5, -0.1] \end{bmatrix}$$

ailesi için $a_1^+ = -0.5 < 0$, $a_3^+ = -0.1 < 0$ olup (2.10) daki ilk iki koşul sağlanır. Ancak $a_1^+ \cdot a_3^+ = 0.05$ ve $\max\{a_2^2\} = 0.16$ olup $0.05 \not> 0.16$ olduğundan Teorem (2.30) gereği aile gürbüz Hurwitz kararlı değildir.

Gerçekten; \mathcal{A} ailesinde rastgele alınan bir

$$A = \begin{bmatrix} -0.517 & -0.336 \\ -0.336 & -0.111 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -0.707985 , 0.078666 olup hepsi sol yarı düzlemde yer almazlar. Dolayısıyla A Hurwitz kararlı değildir. A Hankel matrisi ve Hankel matrislerinde Hurwitz kararlılık ile Hurwitz diyagonal kararlılık denk olduğu biliniyor. O halde A Hurwitz kararlı olmadığından Hurwitz diyagonal kararlı değildir. \mathcal{A} ailesindeki her eleman Hurwitz diyagonal kararlı değildir. Buradan ailenin gürbüz Hurwitz diyagonal kararlı olmadığı söylenebilir.

3 ARALIK METZLER MATRİS AİLELERİNİN KARARLILIK

PROBLEMLERİ

Bu bölümde n inci dereceden Metzler aralık sistemleri için Lyapunov matris eşitsizliğinin ortak diyagonal çözümlerinin varlığı problemi dikkate alındı. Bu anlamda Hurwitz (diyagonal) kararlılık için basit bir gerek ve yeter koşul elde edildi. Ayrıca elde edilen teorik sonucun uygulanabilirliğini göstermek için yeterince sayısal örneğe yer verildi.

Tanım 3.1. (Aralık Metzler Matris Ailesi)

Eğer $n \times n$ boyutlu bir matriste her eleman bir parametreye bağlı olarak değişiyorsa bu aileye matris ailesi denir. Q belirsizlik parametresi olmak üzere $A(q)$ ile gösterilir. Yani;

$$A(q) = \{a_{ij}(q) : q \in Q\} \quad (3.1)$$

Genellikle Q , \mathbb{R}^ℓ uzayında bir kutu olarak alınmaktadır.

$$Q = \{q = (q_1, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^\ell : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i=1,2,\dots,\ell\}$$

Eğer Q bir kutu ve (3.1) ailesindeki tüm matrisler Metzler matrisi ise bu aileye aralık Metzler ailesi adı verilir.

Bu bölümde elde edilen sonuç için kullanılacak olan (Shorten v.d., 2009)' da yer alan tersinir bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin bir parçalanışını elde eden prosedür aşağıdaki gibidir:

Prosedür 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1}^T & d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Burada $(n-1)$ alt indisi matrisin boyutunu temsil etmek üzere $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, b_{n-1} , $c_{n-1}^T \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ve $d_{n-1} \in \mathbb{R}$ dir. $d_{n-1} \neq 0$ olsun. Bu durumda A^{-1} nin de parçalanışı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{n-1} & 1_{n-1} \\ m_{n-1}^T & \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Burada $B_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, 1_{n-1} , $m_{n-1}^T \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ve $\gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ dir.

A. $A^{-1} = I_n$ (I_n , $\mathbb{R}^{n \times n}$ 'de birim matrisi temsil etmektedir.) olduğu için doğrudan

$$B_{n-1} = \left(A_{n-1} - \frac{b_{n-1} c_{n-1}^T}{d_{n-1}} \right)^{-1} \quad (3.4)$$

ve buradan da

$$B_{n-1}^{-1} = \left(A_{n-1} - \frac{b_{n-1} c_{n-1}^T}{d_{n-1}} \right) \quad (3.5)$$

elde edilir.

Bundan sonra kolaylık sağlması açısından $B_{n-1}^{-1} = A[n-1]$ ile gösterilecektir.

Şimdi aşağıdaki gibi bir \mathcal{A} aralık Metzler ailesi göz önünde bulundursun.

$$\mathcal{A} = \{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : U^- \leq A \leq U^+, \forall i \neq j \text{ için } a_{ij}^- \geq 0, \forall i \text{ için } a_{ii}^+ < 0 \} \quad (3.6)$$

(Burada $U^- = (a_{ij}^-)$ ve $U^+ = (a_{ij}^+)$ sabit matrislerdir.)

Teorem 3.3. (3.6) daki gibi bir aralık Metzler ailesi verilsin. Bu aile için ortak Hurwitz diyagonal çözümün var olması için gerek ve yeter koşul U matrisi sağ uç matris olmak üzere U nun Prosedür (3.2) ile ortaya çıkan tüm alt matrislerinin negatif diyagonal elemanlara sahip olmasıdır.

İspat (\Rightarrow): (3.6) ailesinin bir ortak Hurwitz diyagonal çözümü var olsun. U sağ uç matrisinin parçalanışı Prosedür (3.2) deki gibi ele alınsın ve

$$U = \begin{bmatrix} U_{n-1} & v_{n-1} \\ w_{n-1}^T & z_{n-1} \end{bmatrix}$$

olsun. (Burada $U_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, v_{n-1} , $w_{n-1}^T \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ve $z_{n-1} \in \mathbb{R}$) dir.

U \mathcal{A} ailesinin bir elemanı olduğundan Hurwitz diyagonal karalıdır. U nun Hurwitz diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul U_{n-1} ile $U[n-1]$ in bir ortak diyagonal Lyapunov fonksiyona sahip olmasıdır (Shorten v.d., 2009) . Buna denk

olarak da $U[n - 1]$ Metzler olduğu için v_{n-1}, w_{n-1}^T negatif olmayan girdilere sahip olduğundan $U[n - 1]$ Hurwitz diyagonal kararlıdır. ($U[n - 1]$ in

$$U[n - 1] = U_{n-1} - \frac{v_{n-1} \cdot w_{n-1}^T}{z_{n-1}}$$

tanımı göz önünde bulundurulduğunda ve Lyapunov teoremini de kullanarak bu görülür.)

Bir Metzler matrisinin köşegen üzerinde olmayan elemanlarının negatif olmamasından dolayı söz konusu matrisin Hurwitz kararlılığı köşegen elemanların negatif olmasıdır. Dolayısıyla $U[n - 1]$ in köşegen elemanları negatif olmak zorundadır. Aynı sebepten dolayı $U[n - 1]$ in Hurwitz diyagonal kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $U[n - 2]$ in Hurwitz kararlı olmasıdır. Buradan $U[n - 2]$ nin de köşegen elemanları negatif olmak zorundadır. Bu şekilde işlemler tekrar edilirse U nun Hurwitz kararlı olması durumunda $U[1], \dots, U[n]$ matrislerinin köşegen elemanlarının negatif olduğu elde edilir.

(\Leftarrow ;) U matrisi için $U[1], \dots, U[n]$ alt matrislerinin köşegen üzerindeki elemanlarının kesin negatif olduğu kabul edilsin. Bu durumda $U[i], (\forall i = 1, \dots, n)$ matrisleri Metzler matrisleri olduklarından Hurwitz kararlıdır. $U[n] = U$ idi dolayısıyla U matrisi de Hurwitz kararlıdır.

U matrisinin yapısından dolayı

$$U + \lambda I \geq 0 \tag{3.7}$$

olacak şekilde pozitif bir λ sayısı her zaman bulunabilir. Ayrıca

$$U + \lambda I - \lambda I = U$$

dır. U matrisi Hurwitz kararlı bir Metzler matrisi olduğu için Teorem (2.13) gereği

$$\sigma(U + \lambda I) < \lambda \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. ($\sigma(\cdot)$ spektral yarıçap idi.)

Şimdi (3.6) ailesinde keyfi bir A matrisi ele alınsın. U uç matris olduğu için ve $\lambda > 0$ olduğu için

$$0 \preceq A + \lambda I \preceq U + \lambda I \quad (3.9)$$

dır.

(“ \preceq ” sembolü $n \times n$ boyutlu $X = (x_{ij})$ ve $Y = (y_{ij})$ matrisleri için “ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için $x_{ij} \leq y_{ij}$ ” anlamındadır.)

(Bhattacharyya vd., 1995) de yer alan “ $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için $0 \preceq X \preceq Y$ ise $\sigma(X) \leq \sigma(Y)$ dir” teoreminden dolayı.

$$A + \lambda I \preceq U + \lambda I$$

ise

$$\sigma(A + \lambda I) \leq \sigma(U + \lambda I)$$

dır. Dolayısıyla (3.8) eşitsizliğinden

$$\sigma(A + \lambda I) \leq \sigma(U + \lambda I) < \lambda$$

yani

$$\sigma(A + \lambda I) < \lambda$$

elde edilir. Yine Teorem (2.13) gereği ve A Metzler matrisi olduğundan A Hurwitz kararlıdır. Metzler matrisler için Hurwitz kararlılık ile Hurwitz diyagonal kararlılık denk olduğu için aynı zamanda A Hurwitz diyagonal kararlıdır.

$A \in \mathcal{A}$ keyfi olduğundan A ailesi için ortak Hurwitz diyagonal çözüm vardır.

Örnek 3.4. Aşağıdaki gibi bir

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-4, -3] & [0, 1] & [1, 2] \\ [0, 1] & [-7, -6] & [0, 1] \\ [1, 3] & [0, 2] & [-8, -6] \end{bmatrix}$$

aralık Metzler matris ailesi göz önünde bulundursun. Bu aileye Teorem (3.3) uygulandığında ailenin ortak Hurwitz diyagonal çözümün var olduğu elde edilir.

Bu aile için sağ uç matris

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. $U[2]$ ve $U[1]$ matrisleri Prosedür 3.2. deki gibi bulunsun:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad d_2 = -6$$

şeklindeki matrisler elde edilir. Burada

$$U[2] = U_2 - \frac{b_2 c_2^T}{d_2}$$

olmak üzere

$$U[2] = \begin{bmatrix} -2 & 1.67 \\ 1.50 & -5.67 \end{bmatrix}$$

dir. $U[2]$ nin köşegen elemanları negatif dolayısıyla Hurwitz diyagonal kararlıdır.

$U[1]$ için:

$$U_1 = -2, \quad b_1 = 1.67, \quad c_1 = 1.50, \quad d_1 = -5.67$$

olup

$$U[1] = U_1 - \frac{b_1 c_1^T}{d_1}$$

olmak üzere

$$U[1] = -1.56$$

dir.

Bulunan değer $U[2]$ de olduğu gibi negatif olduğundan Hurwitz diyagonal kararlıdır.

Örnek 3.5.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} [-12, -10] & [0, 1] & [1, 2] & [1, 3] \\ [0, 1] & [-9, -8] & [4, 6] & [1, 2] \\ [0, 1] & [1, 2] & [-15, -12] & [0, 3] \\ [-1, 1] & [2, 4] & [3, 5] & [-6, -5] \end{bmatrix}$$

gibi bir aralık Metzler matris ailesi için U sağ uç matrisi

$$U = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -12 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi $U[3]$, $U[2]$ ve $U[1]$ matrisleri prosedürdeki gibi bulunsun.

$U[3]$ için:

$$U_3 = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 6 \\ 1 & 2 & -12 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad d_3 = -5$$

olduğundan $U[3]$ tanım gereği

$$U[3] = \begin{bmatrix} -\frac{47}{5} & \frac{17}{5} & 5 \\ \frac{7}{5} & -\frac{32}{5} & 8 \\ \frac{8}{5} & \frac{22}{5} & -9 \end{bmatrix}$$

olup köşegen elemanları negatiftir. Dolayısıyla $U[3]$ Hurwitz diyagonal kararlıdır.

$U[2]$ için:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{47}{5} & \frac{17}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{32}{5} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{22}{5} \end{bmatrix}, \quad d_2 = -9$$

olup $U[2]$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U[2] = U_2 - \frac{b_2 c_2^T}{d_2} = \begin{bmatrix} \frac{-383}{45} & \frac{263}{45} \\ \frac{127}{45} & \frac{-112}{45} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup Hurwitz diyagonal kararlıdır.

Aynı şekilde $U[1]$ için:

$$U_1 = \frac{-383}{45}, \quad b_1 = \frac{263}{45}, \quad c_1 = \frac{127}{45}, \quad d_1 = \frac{-112}{45}$$

$U[1]$ matrisinin girdileri olup

$$U[1] = U_1 - \frac{b_1 c_1^T}{d_1} = -1.883$$

dır.

$U[1]$, $U[2]$ ve $U[3]$ alt matrislerinin negatif diyagonal elemanlara sahip olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem (3.3) den dolayı ele alınan aile Hurwitz kararlıdır. Görüldüğü gibi tek bir matristen tüm ailenin kararlılığı elde edildi.

Örnek 3.6.

5×5 lik aralık Metzler matris ailesi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{bmatrix} [-18, -13.57] & [1, 2.43] & [2, 3] & [1, 7.86] & [2, 5.43] \\ [0, 1.21] & [-19, -14.79] & [4, 7] & [1, 6.93] & [1, 2.21] \\ [0, 1.07] & [1, 1.07] & [-15, -14] & [0, 1.64] & [0, 1.07] \\ [-1, 2.07] & [2, 3.07] & [3, 4] & [-15, -13.36] & [0, 1.07] \\ [-1, 1.5] & [2, 2.5] & [3, 4] & [-15, 9.5] & [-9, -8.5] \end{bmatrix}$$

aralık Metzler matris ailesi göz önüne alınırsa, bu aile için U matrisi,

$$U = \begin{bmatrix} -13.57 & 2.43 & 3 & 7.86 & 5.43 \\ 1.21 & -14.79 & 7 & 6.93 & 2.21 \\ 1.07 & 1.07 & -14 & 1.64 & 1.07 \\ 2.07 & 3.07 & 4 & -13.36 & 1.07 \\ 1.5 & 2.5 & 4 & 9.5 & -8.5 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$U[4]$, $U[3]$, $U[2]$ ve $U[1]$ matrisleri Prosedür (3.2) gibi hesaplınsın.

$$U_4 = \begin{bmatrix} -13.57 & 2.43 & 3 & 7.86 \\ 1.21 & -14.79 & 7 & 6.93 \\ 1.07 & 1.07 & -14 & 1.64 \\ 2.07 & 3.07 & 4 & -13.36 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 5.43 \\ 2.21 \\ 1.07 \\ 1.07 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 4 \\ 9.5 \end{bmatrix},$$

$d_4 = -8.5$ olduğundan $U[4]$ aşağıdaki gibidir.

$$U[4] = \begin{bmatrix} -12.61 & 4.03 & 5.55 & 13.92 \\ 1.61 & -14.13 & 8.04 & 9.40 \\ 1.26 & 1.39 & -13.50 & 2.84 \\ 2.26 & 3.39 & 4.50 & -12.16 \end{bmatrix}$$

$U[4]$ ün köşegen elemanları negatiftir, buradan Hurwitz diyagonal kararlı olduğu görülür.

$U[3]$ için:

$$U_3 = \begin{bmatrix} -12.61 & 4.03 & 5.55 \\ 1.61 & -14.13 & 8.04 \\ 1.26 & 1.39 & -13.50 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 13.92 \\ 9.40 \\ 2.84 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 2.26 \\ 3.39 \\ 4.50 \end{bmatrix}, \quad d_3 = -12.16$$

olup $U[3]$ aşağıdaki gibidir.

$$U[3] = \begin{bmatrix} -10.02 & 7.90 & 10.71 \\ 3.35 & -11.52 & 11.53 \\ 1.79 & 2.18 & -12.44 \end{bmatrix}$$

$U[3]$ ün köşegen elemanları negatif olduğundan Hurwitz diyagonal kararlıdır.

$U[2]$ için:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -10.02 & 7.90 \\ 3.35 & -11.52 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 10.71 \\ 11.53 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1.79 \\ 2.18 \end{bmatrix}, \quad d_2 = -12.44$$

şeklindedir. Buradan $U[2]$ aşağıdaki gibi olup Hurwitz diyagonal kararlıdır.

$$U[2] = \begin{bmatrix} -8.49 & 9.78 \\ 5.01 & -9.50 \end{bmatrix}$$

Aynı şekilde $U[1]$ hesaplandığında

$$U_1 = -8.49, \quad b_1 = 9.78, \quad c_1 = 5.01, \quad d_1 = -9.50$$

olup

$$U[1] = -3.33$$

dir.

$U[1]$, $U[2]$, $U[3]$ ve $U[4]$ alt matrislerinin negatif diyagonal elemanlara sahip olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem (3.3) den dolayı aile Hurwitz kararlıdır.

5 SONUÇ

Bu çalışmada bazı özel tipteki matrisler ve matris aileleri üzerinde çeşitli kararlılık kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınıp, $n \times n$ boyutlu sistemlerin kararlılık problemleri matris ve matris aileleri yardımıyla incelenmiştir.

İletişim ağları, ekonomi, kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulamaları olan quasidefinite, Metzler, Checkerboard, Hankel, Morishima matrislerinin çeşitli kararlılık problemleri incelenmiş ve bu matris türlerinden bazılarını daha da genişleterek aralık matris aileleri olmaları durumunda kararlılıkları için basit birkaç gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Bu sonuçlar örnekler üzerinde açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

- Arcat, M. ve Sontag, E. (2006). *Diagonal stability of a class of cyclic systems and its connection with the secant criterion*. Automatica, 42(9):1531-1537 .
- Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems* Macmillan, New York.
- Bauer, F. L. (1963) *Optimally scaled matrices*. Numerische Mathematik, 5:73-87 .
- Bhattacharyya, S. P. ve Chapellat, H., ve Keel, L. H. (1995), *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Bernstein, D. S. (2005). *Matrix mathematics : theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- Chen, C.T. (1984.). *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston.
- Cross, G. W. (1978). *Three types of matrix stability*, Linear Algebra and its Applications, 20:253-263 .
- Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*, volume II, Chelsea Publishing Company, New York .
- Horn, R. A. ve Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge University Press .
- Horn, R. ve Johnson, C. (1991). *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- Johnson, C. R. (1974). *Sufficient condition for d-stability*. J. Econom, 9(1):53-62.
- Kaszikurewicz, E. ve Bhaya, A. (2000). *Matrix diagonal stability in systems and Computation*. Birkhauser, Boston .
- Meyn, S. (2008).. *Control Techniques for Complex Networks*. Cambridge Univ. Press,
- Moylan P. J. (1977). *Matrices with positive principal minors*. Linear Algebra and its Applications, 17:53-58.
- Narendra, K. ve Shorten, R. (2007). *Necessary and sufficient conditions for the existence of a common lyapunov function for a finite number of stable second*

order linear time- invariant systems, International Journal of Adaptive Control and Signal Process- ing, 16:709-728

Narendra, K. ve Shorten, R. (2010). *Hurwitz Stability of Metzler matrices*, IEEE Transactions on Automatic Control, 55(6) :1484-1487.

Shorten, R. ve Narendra, K. (2009). *On a theorem on diagonal stability by Redheffer*, Linear Algebra Appl. 431(12) 2317-2329 .

Siljak, D. D. (2007). *Large scale dynamic systems stability and structure*. Dover Publications, 396.

Stein, P. (1952). *Some general theorems on iterants*, J. Res. Natl. Bur. Stand., 48:82-83 .

Taussky, O. (1949). *A recurring theorem on determinants*. American Monthly., 56:672-676.

Taussky, O. (1964)., *Matrices c with $c^n \rightarrow 0$* . Journal of Algebra, 1:5-10.

Yıldız, B., Büyükköroğlu, T., ve Dzhafarov, V. (2014). *Common diagonal stability of second order interval systems*. 2014 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO) 223-227

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Sümeyye ACAR
Doğum Yeri ve Tarihi : BORNOVA/ İZMİR – 09.05.1991



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce, Almanca
Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Kazımpaşa Ortaokulu Serdivan / SAKARYA

İletişim

E-Posta Adresi : andsaysumeyye123@hotmail.com

Akademik Çalışmaları

- 6. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı 26-28 Nisan 2019 KONYA “On Hurwitz Stability Of Matrix Families” Adlı Sözlü Bildiri
- 2010 Study Abroad Program Howard Community College (USA)
- 2011-2012 Friedrich Schiller Universitat JENA Erasmus Programı (ALMANYA)
- 2011 “Karatekin Mathematics Days” Katılım Sertifikası (ÇANKIRI)

– Tarih:...../...../2019