

T.C.  
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK YAPILARI İNŞA ETMENİN DOĞAL  
BİR YOLU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN KARABABA

TEZ DANIŐMANI  
DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2021

10409034

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK YAPILARI İNŞA ETMENİN DOĞAL  
BİR YOLU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN KARABABA

TEZ DANIŐMANI  
DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2021

10409034

## BEYAN

“Hemen Hemen Kompleks B-metrik Yapıları İnşa Etmenin Doğal Bir Yolu” adlı yüksek lisans tezi hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR</b>
Destek alındı ise;	
<b>Destekleyen Kurum:</b>	
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
<b>Diğer; .....</b>	

**Yasemin KARABABA**

**Tarih**

..../..../2021

**İmza**

## **ÖN SÖZ**

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, tez konusunun seçimi ve yürütülmesinde sabrını, desteğini, rehberliğini ve zamanını benden esirgemenen çalışmanın olgunlaşması için yaptığı katkı ve eleştirileriyle her zaman bana yol gösteren kıymetli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet SOLGUN'a çok teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme ve abim Abdulsamet KARABABA'ya minnettarım.

**Yasemin KARABABA**

## ÖZET

### HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK YAPILARI İNŞA ETMENİN DOĞAL BİR YOLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde düzgün manifoldlar ve üzerindeki temel yapılar verilmiş ve bu yapılar kullanılarak Riemann manifoldları, hemen hemen kompleks manifoldlar ve hemen hemen kontakt manifoldlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde hemen hemen kontakt B-metrik manifoldlar çalışılmış ve bu manifoldların temel tensörüne dair yapılan sınıflandırmalar verilmiştir. Dördüncü bölümde hemen hemen kompleks B-metrik manifoldlar ve bu manifoldların sınıflandırılması incelenmiştir. Ayrıca hemen hemen kompleks B-metrik yapıdan hemen hemen kontakt B-metrik yapı elde edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde ise hemen hemen kontakt B-metrik yapıdan hemen hemen kompleks B-metrik yapı kurulup bu yapıların bazı sınıfları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hemen hemen kompleks B-metrik yapı, Hemen hemen kontakt B-metrik yapı, Norden metrik

**ABSTRACT**  
**A NATURAL WAY TO CONSTRUCT AN ALMOST COMPLEX B-METRIC**  
**STRUCTURE**

This work consists of five chapters. In the first chapter introduction part has been presented. In the second chapter, basic structures defined over smooth manifolds are given and by using these structures Riemannian manifolds, almost complex manifolds, almost contact manifolds are mentioned.

In the third chapter, almost contact B-metric manifolds have been studied and the classifications of the basic tensor of these manifolds are given. In the fourth chapter, almost complex B-metric manifolds and the classifications of these manifolds have been examined. In addition, the almost contact B-metric structure have been obtained from the almost complex B-metric structure and the classes in which these two structures are equivalent are given.

Finally, in the fifth chapter, the almost complex B-metric structure are obtained from the almost contact B-metric structure is established and the connections between some classes of these structure are investigated.

**Key Words:** Almost complex B-metric structure, Almost contact B-metric structure, Norden metric

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER LİSTESİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR .....	2
2.1. Düzgün Manifoldlar .....	2
2.2. Riemann Manifoldları.....	7
2.3. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar.....	9
2.4. Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar.....	10
3. HEMEN HEMEN KONTAKT B-METRİK MANİFOLDLAR.....	14
4. HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK MANİFOLDLAR .....	21
4.1. Hemen Hemen Kompleks B-Metrik Manifoldlar.....	21
4.3. Hemen Hemen Kompleks B-Metrik Yapıdan Hemen Hemen Kontakt B-Metrik Yapı Elde Etme.....	26
5. HEMEN HEMEN KONTAKT B-METRİK YAPIDAN HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK YAPI KURMA.....	33
KAYNAKLAR.....	47

## SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel vektör uzayı
$M$	: Düzgün manifold
$\chi(M)$	: Vektör alanları uzayı
$\chi^*(M)$	: 1- formlar uzayı
$T_s^r(M)$	: Tensör alanları uzayı
$C^\infty(M)$	: Düzgün fonksiyonlar kümesi
$g, h$	: Riemann (semi-Riemann) metrik
$\nabla$	: Kontakt (hemen hemen kontakt) manifoldun kovaryant türevi
$\tilde{\nabla}$	: Kompleks (hemen hemen kompleks) manifoldun kovaryant türevi
$N$	: Hemen hemen kontakt manifoldun Nijenhuis tensörü
$\tilde{N}$	: Hemen hemen kompleks manifoldun Nijenhuis tensörü
$(\phi, \xi, \eta)$	: Hemen hemen kontakt yapı
$(M, \phi, \xi, \eta, g)$	: Hemen hemen kontakt metrik manifold
$J$	: Hemen hemen kompleks yapı
$(M, J, h)$	: Hemen hemen kompleks metrik manifold
$\phi$	: (1,1) tensör
$\eta$	: 1-form
$\xi$	: Vektör alanı
$d$	: Dış türev
$\delta$	: Ko-türev
$F_i$	: Hemen hemen kontakt B-metrik manifoldların sınıfları
$W_i$	: Hemen hemen kompleks B-metrik manifoldların sınıfları

## 1.GİRİŞ

Kompleks manifoldlara ait çalışmalar, 1930 yılında J. A. Schouten ve D. Van Dantzig'in Riemann metriği ve afin konneksiyona sahip manifoldların diferensiyel geometrisindeki sonuçları bu uzaylara taşınmalarıyla başlar. Bu çalışmada simetrik konneksiyon ile birlikte Hermityen adı verilen uzay elde edilir. 1933 yılında bunlardan bağımsız olarak E. Kaehler tarafından bugün Kaehler manifoldlar adı verilen aynı konneksiyonlu manifoldlar ortaya konur. Kaehler manifoldların diferensiyel geometrisi üzerine S. Bochner, H. Guggenheimer, A. Licherowicz vb. matematikçiler çalışmalarda bulunurlar. A. Weil 1947 ve 1950 yıllarında yayınlanan çalışmalarında bu konuya farklı bir noktadan yaklaşarak kompleks manifoldda karesi eksi birime eşit olan (1,1) mertebeli tensörün varlığını ortaya koyar. C. Ehresman 1947 ve 1950 yıllarındaki çalışmalarında bu tensörü kullanarak çift boyutlu diferensiyellenebilir manifold olan hemen hemen kompleks manifoldları tanımlar. Bir kompleks manifoldun hemen hemen kompleks manifold olduğu fakat bunun tersinin doğru olmadığı görülür. Buradan hareketle C. Ehresman ve P. Liberman bir hemen hemen kompleks yapının kompleks yapı olması üzerinde çalışmalarda bulunurlar. Bu problemin çözümünde A. Nijenhuis tarafından tanımlanan Nijenhuis tensör alanı önemli bir rol oynar.

Ganchev ve Borisov (1986) çift boyutlu hemen hemen kompleks manifoldlar üzerinde  $J$  kompleks yapısını  $J^2(X) = -X$  ve  $(n, n)$  tipindeki  $h$  semi-Riemann metriğini  $h(J(X), J(Y)) = -h(X, Y)$  şeklinde tanımlayarak hemen hemen kompleks B-metrik manifoldları kurmuş ve 3 temel sınıfa ayırmıştır. Daha sonra Ganchev, Mihova ve Gribachev (1993) çift boyutlu hemen hemen kompleks manifoldların tek boyutlu hemen hemen kontakt manifoldların doğal bir genişlemesi olarak düşünülebilirliğini vurgulamış ve hemen hemen kontakt manifoldlar üzerinde belli koşulları sağlayan  $(n+1, n)$  tipinde  $g$  semi-Riemann metriğini tanımlayarak hemen hemen kontakt B-metrik manifoldları inşa etmiş ve 11 temel sınıfa ayırmıştır.

Bu çalışmada hemen hemen kontakt B-metrik manifolddan hemen hemen kompleks B-metrik manifold elde edilmiş olup bu yapıların bazı sınıflarının denk olduğu gösterilmiş ve bu iki yapının kovaryant türevleri cinsinden birbirleriyle ilişkisi incelenmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde düzgün manifoldlar, Riemann manifoldları, hemen hemen kompleks manifoldlar ve hemen hemen kontakt manifoldlar ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

### 2.1. Düzgün Manifoldlar

**Tanım 2.1.1.** Bir  $M$  topolojik uzayında aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde  $M$  ye bir ( $n$ -boyutlu) topolojik manifold denir (Lee, 2003: 3).

- 1)  $M$  Hausdorff uzayıdır. (Yani her  $p, q \in M$  farklı noktalarının ayrık komşulukları mevcuttur.)
- 2)  $M$  ikinci sayılabilir uzaydır. (Yani sayılabilir bir tabana sahiptir.)
- 3)  $M$  ( $n$ -boyutlu) lokal Öklidyendir. (Yani her bir  $p \in M$  noktasının bir  $U$  açık komşuluğu  $\mathbb{R}^n$  nin bir açık alt kümesine homeomorftur.)

Burada üçüncü koşul şu şekilde de açıklanabilir. Her  $p \in M$  noktası için

- i) Her  $p \in M$  noktası için  $p \in U$  olacak şekilde bir  $U \subset M$  açık alt kümesi,
- ii)  $\mathbb{R}^n$  nin bir  $U' \subset \mathbb{R}^n$  açık alt kümesi,
- iii) Bir  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) = U'$  homeomorfizmi mevcuttur.

$(U, \varphi)$  ikilisine de  $M$  nin ( $p$  noktasında) bir haritası (koordinat komşuluğu yada koordinat sistemi) denir. Böylece bir  $n$ - boyutlu  $M$  topolojik manifoldunun her bir  $p$  noktası için bir  $n$ -boyutlu  $(U, \varphi)$  haritası mevcuttur.

**Örnek 2.1.2**  $\mathbb{R}^n$  uzayı bir  $n$ -boyutlu topolojik manifolddur.

**İspat**  $\mathbb{R}^n$  uzayı bir metrik uzaydır ve her metrik uzay bir Hausdorff uzay olduğundan  $\mathbb{R}^n$  bir Hausdorff uzaydır.  $\mathbb{R}^n$  ,  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  şeklinde sayılabilir bir tabana sahip olduğundan ikinci sayılabilir uzaydır.  $\mathbb{R}^n$  nin kendisi açık olduğundan  $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim dönüşümü sayesinde kendisine homeomorftur. Yani  $\mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu lokal Öklidyendir ki bu isteneni verir.

**Örnek 2.1.3 (Çarpım Manifoldları)** Kabul edelim ki  $M_1, M_2, \dots, M_k$  sırasıyla  $n_1, n_2, \dots, n_k$  boyutlu birer topolojik manifold olsun. Bu durumda  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$  çarpım uzayı  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  boyutlu bir topolojik manifolddur (Lee, 2003: 3).

Gerçekten de, Hausdorff uzayların sonlu çarpımından elde edilen çarpım uzayı Hausdorff uzay ve ikinci sayılabilir uzayların sonlu çarpımından elde edilen çarpım uzayı da ikinci sayılabilir uzaydır. Böylece  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$  çarpım uzayının Hausdorff uzay ve ikinci sayılabilir uzay olduğu açıktır. Bu yüzden sadece lokal Öklidyen olma özelliğini göstermek yeterlidir.

Herhangi bir  $(p_1, p_2, \dots, p_k) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$  noktası verilsin.  $p_i \in U_i$  olan her bir  $M_i$  manifoldu için  $(U_i, \varphi_i)$  haritasını ele alalım.

$$\varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_k : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2+\dots+n_k}$$

çarpım dönüşümü  $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\dots+n_k}$  nin açık bir alt kümesi ile görüntüsü üzerinde bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$  çarpım uzayı  $(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_k)$  biçimindeki haritalara sahip  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  boyutlu bir topolojik manifolddur.

**Tanım 2.1.4.** Bir  $M$  topolojik manifoldunun  $(U, \varphi)$  ve  $(V, \psi)$  gibi iki tane haritası olsun.  $U \cap V \neq \emptyset$  olmak üzere; Eğer

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

dönüşümleri her mertebeden diferensiyellenebilir ise bu iki harita düzgün örtüşür (yada  $C^\infty$  - uyumludur.) denir ve  $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$  ile gösterilir (Lee, 2003: 12).

Eğer  $(U \cap V) = \emptyset$  küme ise bu durumda  $(U, \varphi)$  ve  $(V, \psi)$  haritaları düzgün örtüşür denir. Ayrıca her haritanın kendisiyle düzgün örtüştüğü açıktır.

**Tanım 2.1.5.**  $A = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  ailesi  $M$  uzayının n-boyutlu haritalarının bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa  $A$  ya  $M$  uzayının bir düzgün atlası (yada  $C^\infty$  - atlası) denir.

$$1) \quad M = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ (Yani } M \text{ uzayı bu haritaların birleşimine eşittir.)}$$

2) Her  $i \in I$  için  $(U_i, \varphi_i) \sim (V_j, \psi_j)$  (Yani  $A$  içindeki her iki harita birbiriyle düzgün örtüşür.).

**Tanım 2.1.6.**  $A = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  ailesi  $M$  topolojik manifoldu üstünde bir atlas olsun.  $A$  atlasının her bir haritası yine  $A$  nın elemanı oluyorsa  $A$  ya  $M$  topolojik manifoldu üstünde bir tam atlas denir (Lee, 2003: 13).

**Teorem 2.1.7.**  $A$ ,  $M$  topolojik uzayı üstünde bir atlas ise  $A$  atlasını kapsayan bir ve yalnız bir tam atlas vardır (Lee, 2003: 13).

**Tanım 2.1.8.**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold olsun.  $M$  manifoldu bir tam atlas ile birlikte  $n$ -boyutlu düzgün ( $C^\infty$  - diferensiyellenebilir yada pürüzsüz) manifolddur ve  $M^n$  ile gösterilir (Lee, 2003: 13).

$M^n$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bir dönüşüm ve  $p \in M$  olsun.  $p$  noktasındaki bir  $(U, \varphi)$  haritası için  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonu  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$  noktasında düzgün ise  $f$  fonksiyonu  $p$  noktasında düzgündür denir.  $f$ ,  $M$  nin her noktasında düzgün bir fonksiyon ise  $M$  üzerinde düzgündür denir.  $M$  den  $\mathbb{R}$  ye giden tüm düzgün fonksiyonların kümesi  $C^\infty(M)$  ile gösterilir.

$f, g \in C^\infty(M)$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $f + g$  ve  $\lambda f$  fonksiyonları da düzgün fonksiyonlardır. Üstelik, bu işlemler ile birlikte  $C^\infty(M)$  bir reel vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca fonksiyonlarda toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte  $C^\infty(M)$  bir değişmeli halka; çarpma işlemi ile de  $\mathbb{R}$  üzerinde bir değişmeli ve birleşmeli cebirdir.

**Tanım 2.1.9.**  $M$  bir manifold,  $p \in M$  olsun. Bu durumda keyfi  $f, g \in C^\infty(M)$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için

$$V_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü

$$1) \quad V_p(\alpha f + \beta g) = \alpha V_p f + \beta V_p g \text{ (linear)}$$

$$2) \quad V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p g \text{ (Leibniz)}$$

koşullarını sağlarsa  $V_p$  ye  $p$  deki bir tanjant (teğet) vektörü denir.  $p$  noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin kümesi  $T_p M$  ile gösterilir.  $T_p M$  kümesi

$$(V_p + W_p)(f) = V_p(f) + W_p(f)$$

$$(\alpha V_p)(f) = \alpha V_p(f)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır. Buradan  $T_p M$  vektör uzayına  $M$  manifoldunun  $p$  noktasındaki tanjant uzayı (teğet uzayı) denir (O'Neill, 1983: 7).

**Tanım 2.1.10.**  $M$  bir manifold,  $p \in M$  ve  $T_p M$   $p$  deki tanjant uzayı olsun. Manifoldun her bir noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren diferensiyellenebilir bir dönüşüme vektör alanı denir. Böylece  $M$  manifoldu üzerindeki bir vektör alanı

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\mapsto X_p \in T_p M \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümdür. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması her  $f \in C^\infty(M)$  için

$$\begin{aligned} Xf : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto Xf(p) = X_p(f) \end{aligned}$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olmasıdır. Bir vektör alanı tanjant vektörlerinin topluluğudur.  $M$  üzerindeki düzgün vektör alanlarının kümesi  $\chi(M)$  ile gösterilir.

$X, Y \in \chi(M)$  için keyfî  $p \in M$  ve  $f \in C^\infty(M)$  alalım.

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p$$

$$(fX)_p = f(p)X_p$$

tanımlanırsa  $X+Y$  ve  $fX$  de  $M$  üzerinde birer vektör alanıdır. Yukarıdaki işlemlerle birlikte  $\chi(M)$  vektör alanı  $C^\infty(M)$ -modüldür (O'Neill, 1983: 12).

**Tanım 2.1.11.**  $M$  bir manifold,  $T_p M$  manifoldun  $p$  deki tanjant uzayı olmak üzere

$$T_p^* M := \left\{ f \mid f : T_p M \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \right\}$$

uzayına manifoldun  $p$  deki kotanjant uzayı denir (O'Neill, 1983: 14).

**Tanım 2.1.12.**  $M$  bir manifold ve  $T_p^*M$  manifoldun  $p$  deki kotalanjant uzayı olmak üzere bir  $p \in M$  noktasına kotalanjant vektörü karşılık getiren diferensiyellenebilir bir dönüşüme 1-form denir. Böylece  $M$  manifoldu üzerinde 1- form

$$\begin{aligned}\theta : M &\rightarrow T^*M \\ p &\mapsto \theta(p) := \theta_p : T_pM \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned}\theta X : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (\theta X)(p) := \theta_p X_p\end{aligned}$$

dönüşümünü ele alalım. Burada  $\theta_p \in C^\infty(M)$  ve  $X_p \in T_pM$  dir. Her  $X \in \chi(M)$  için  $\theta X : M \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu düzgün ise  $\theta$  1-formuna düzgündür denir.  $M$  üzerindeki düzgün 1-formların kümesi  $\chi^*(M)$  ile gösterilir.

$\theta, \omega \in \chi^*(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  ve her  $p \in M$  için 1-formlar uzayında toplama ve çarpma işlemleri

$$\begin{aligned}(\theta + \omega)(p) &:= \theta(p) + \omega(p) = \theta_p + \omega_p \\ (f\theta)(p) &:= f(p)\theta_p\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu işlemler ile birlikte 1-formlar  $C^\infty(M)$  halkası üzerinde bir modüldür (O'Neill, 1983: 15).

$V$  sonlu boyutlu vektör uzayı ve  $V^*$  da  $V$  uzayının dual uzayı (yani reel değerli lineer fonksiyonların uzayı) olsun. Bu durumda

$$\phi : \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{r\text{-tan e}} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^{s\text{-tan e}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan  $\phi$  dönüşümü her bir değişkenine göre lineer (çoklu lineer) olan bir dönüşümdür. Burada  $\phi$  dönüşümüne  $(r, s)$ -tipinde tensör ( $r$ . mertebeden kovaryant,  $s$ . mertebeden kontravaryant tensör) denir.  $r$ . mertebeden kovaryant ve  $s$ . mertebeden kontravaryant tensörlerin kümesi  $T_s^r(\mathbb{R})$  ile gösterilir.  $T_s^r(\mathbb{R})$  kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte reel vektör uzayı yapısına sahiptir. Şimdi herhangi bir  $F$  cismi üzerindeki tensörü tanımlayalım.

**Tanım 2.1.13.** Her ikisi aynı anda sıfır olmamak üzere  $r \geq 0, s \geq 0$  tamsayıları için

$$A: V^r \times (V^*)^s \rightarrow F$$

her bir değişkenine göre  $F$ -lineer fonksiyonu  $V$  üzerinde  $(r, s)$  tipinde bir tensördür.  $V$  üzerindeki tüm tensörlerin kümesi  $T_s^r(V)$  ile gösterilir.  $(0, 0)$  tipindeki bir tensör  $F$  nin bir elemendir (O'Neill, 1983: 34).

**Tanım 2.1.14.**

$$A: \chi(M)^r \times \chi^*(M)^s \rightarrow C^\infty(M)$$

$$(X, \theta) \mapsto A(X, \theta) = A(X^1, \dots, X^r, \theta_1, \dots, \theta_s) \in C^\infty(M)$$

şeklinde tanımlanan  $A$  fonksiyonu  $C^\infty(M)$ -multilineer (her değişkenine göre lineer) bir fonksiyondur.

$$T_s^r(M) = \left\{ A \mid A: \chi(M)^r \times \chi^*(M)^s \xrightarrow{C^\infty(M)\text{-multilineer}} C^\infty(M) \right\}$$

kümesi  $M$  manifoldu üzerinde  $(r, s)$ -tensör alanıdır. Tensör alanları kümesi  $C^\infty(M)$  halkası üzerinde bir modüldür (O'Neill, 1983: 35).

## 2.2. Riemann Manifoldları

**Tanım 2.2.1.**  $M$  diferensiyellenebilir (veya pürüzsüz) bir manifold olsun. Diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  ve  $M$  den  $\mathbb{R}$  ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  olmak üzere  $M$  üzerinde

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \mapsto g(X, Y): M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto g(X, Y)(p) := \langle X_p, Y_p \rangle \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı  $(0, 2)$  tensörü pozitif tanımlı, simetrik ve bi-lineer ise, yani  $X, Y \in \chi(M)$  için

- i)  $g(X, X) \geq 0$ ,
- ii)  $g(X, Y) = g(Y, X)$ ,
- iii) Her  $X$  için  $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ .

koşulları sağlanıyorsa  $g$  bilineer formuna  $M$  manifoldu üzerinde bir metrik tensör (Riemann metriği) denir. Böylece  $M$  ye Riemann manifoldu denir ve  $(M, g)$  ile gösterilir (Şahin, 2012: 105).

**Tanım 2.2.2.**  $g$  Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine her  $Y$  için  $g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$  aksiyomu sağlanırsa  $(M, g)$  ikilisine semi-Riemann manifoldu denir. Bu aksiyoma metriğin yozlaşmama (non-dejenere olma) aksiyomu denir.

**Tanım 2.2.3.**  $M$  diferensiyellenebilir bir manifold olsun.  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall f \in C^\infty(M)$  için

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü

$$\text{i) } \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \quad (2.1)$$

$$\text{ii) } \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.2)$$

$$\text{iii) } \quad \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \text{ (Leibniz koşulu)} \quad (2.3)$$

koşullarını sağlıyorsa  $\nabla$  dönüşümüne  $M$  üzerinde tanımlı bir afin (lineer) konneksiyon denir (O’neill, 1983: 59).

**Tanım 2.2.4.**  $X, Y \in \chi(M)$  ve  $f \in C^\infty(M)$  olmak üzere  $X$  ve  $Y$  vektör alanlarının Lie braketi

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.2.5.**  $(M, g)$  bir semi-Riemann manifoldu,  $\nabla$ , lineer konneksiyon olsun.  $X, Y, Z \in \chi(M)$  olmak üzere  $\nabla$  dönüşümü

$$\text{i) } \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \text{ (sıfır torsiyon özelliği)} \quad (2.5)$$

$$\text{ii) } \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ (metrik uyumluluk koşulu)} \quad (2.6)$$

koşullarını sağlıyorsa  $\nabla$  ya  $M$  üzerinde Riemann konneksiyonu denir. Ayrıca bu kovaryant türev

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X[g(Y, Z)] + Y[g(X, Z)] - Z[g(X, Y)] \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X]) \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklindeki Koszul formülüyle tek türlü belirlidir (O’neill, 1983: 61).

### 2.3. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

**Tanım 2.3.1.**  $M$   $2n$ -boyutlu bir manifold ve  $J : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  şeklinde tanımlı  $(1,1)$  tensör alanı

$$J^2 = -I \quad (2.8)$$

eşitliğini sağlıyorsa,  $J$  ye  $M$  üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı denir. Böylece  $M$  manifoldu hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır ve  $(M, J)$  ile gösterilir (Gray, 1966: 354).

**Tanım 2.3.2.**  $(M, J)$  hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki bir  $h$  Riemann metriği her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$h(JX, JY) = h(X, Y) \quad (2.9)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $(M, J, h)$  üçlüsüne hemen hemen kompleks metrik manifold denir (Gray, 1966: 354).

**Tanım 2.3.3.**  $M$  hemen hemen kompleks manifoldu için Nijenhuis tensörü her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$\tilde{N} : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

olmak üzere

$$\tilde{N}(X, Y) := [X, Y] + J[J(X), Y] + J[X, J(Y)] - [J(X), J(Y)] \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Gray, 1966: 354).

**Teorem 2.3.4.**  $(M, J)$  hemen hemen kompleks manifoldunun kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır.

**Tanım 2.2.5.**  $M$  hemen hemen kompleks metrik manifoldu üzerinde her  $X, Y \in \chi(M)$  için temel 2-form (Kaehler formu)

$$F(X, Y) = h(J(X), Y) \quad (2.11)$$

ve 1-form (Lee form)

$$\varphi(X) = \left( \frac{(-1)}{(n-1)} \right) \delta F(J(X)) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradaki  $\delta$  ko-türevdir (Gray ve Hervella, 1980: 39).

$M$  hemen hemen kompleks manifoldunun  $F$  Kaehler formunun kovaryant türevi bazı simetrilere sahiptir. Açıkça görülebilir ki  $\nabla_X(F)(Y,Z)$   $Y$  ve  $Z$  de anti-simetriktir. Ayrıca

$$\nabla_X(F)(Y, J(Y)) = XF(Y, J(Y)) - F(\nabla_X Y, J(Y)) - F(Y, \nabla_X J(Y)) = 0$$

olduğundan her  $X, Y, Z \in \chi(M)$  için

$$\nabla_X(F)(Y, Z) = -\nabla_X(F)(J(Y), J(Z))$$

dir (Gray ve Hervella 1980: 40).

#### 2.4. Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

**Tanım 2.4.1.**  $M$   $(2n+1)$ -boyutlu pürüzsüz bir manifold ve  $\phi, \eta, \xi$  sırasıyla bir  $(1,1)$  -tensör alanı, 1-form ve vektör alanı olsun. Her  $X \in \chi(M)$  için

$$\phi: \chi(M) \rightarrow \chi(M) ; (1,1) \text{ tensör yani endomorfizm}$$

$$\eta: \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) ; (0,1) \text{ tensör yani 1-form}$$

$$\xi: \chi^*(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) ; (1,0) \text{ tensör yani vektör alanı}$$

olmak üzere;

$$\text{i) } \eta(\xi) = 1 \quad (2.13)$$

$$\text{ii) } \phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (2.14)$$

koşulları sağlanıyorsa  $(M, \phi, \xi, \eta)$  yapısına hemen hemen kontakt manifold denir (Chinea ve Gonzalez, 1990: 16).

$M$  hemen hemen kontakt manifoldunun

$$\phi(\xi) = 0 \quad (2.15)$$

$$\eta \circ \phi = 0 \quad (2.16)$$

eşitliklerini sağladığını gösterelim.

(2.14) eşitliğinde  $X$  yerine  $\xi$  yazarsak

$$\phi^2(\xi) = -\xi + \eta(\xi)\xi = -\xi + \xi = 0$$

olur.  $\phi(\xi) = 0$  eşitliğini olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım.  $\phi(\xi) \neq 0$  olsun.  $\phi^2(\xi) = 0$  ifadesinde  $\xi$  yerine  $\phi(\xi)$  alınır

$$\phi(\phi^2(\xi)) = \phi^2(\phi(\xi)) = -\phi(\xi) + \eta(\phi(\xi))\phi(\xi) = 0$$

elde edilir. Buradan  $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\phi(\xi)$  dir. Burada  $\eta(\phi(\xi)) = 0$  veya  $\eta(\phi(\xi)) \neq 0$  olmak üzere iki durum ortaya çıkar. Birinci durumda  $\eta(\phi(\xi)) = 0$  ise  $\phi(\xi) = 0$  olup çelişki elde edilir. İkinci durumda ise  $\eta(\phi(\xi)) \neq 0$  olduğunda  $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\phi(\xi)$  eşitliğine  $\phi$  yi uygularsak

$$\phi^2(\xi) = \eta(\phi(\xi))\phi(\xi)$$

olur. Burada  $\phi^2(\xi) = 0$  ve  $\eta(\phi(\xi)) \neq 0$  olduğundan  $\phi(\xi) = 0$  çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak

$$\phi(\xi) = 0$$

olmalıdır. Şimdi (2.16) eşitliğini gösterelim. Bunun için (2.14) eşitliğinde  $X$  yerine  $\phi(X)$  yazarsak

$$\phi^2(\phi(X)) = -\phi(X) + \eta(\phi(X))\phi(X)$$

$$\phi^3(X) = \phi(\phi^2(X)) = \phi(-X + \eta(X)\xi) = -\phi(X) + \eta(X)\phi(\xi)$$

$\phi(\xi) = 0$  olduğunu biliyoruz. O halde

$$\phi^3(X) = -\phi(X)$$

elde edilir.  $\xi \neq 0$  olduğundan  $\eta \circ \phi = 0$  dır.

**Tanım 2.4.2.**  $(M, \phi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontakt manifold olsun.  $M$  üzerinde  $g$  Riemann metriği

$$\text{i)} \quad g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.17)$$

$$\text{ii)} \quad \eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.18)$$

koşullarını sağlıyorsa  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  yapısına hemen hemen kontakt metrik manifold denir (Chinea ve Gonzalez, 1990: 16).

Buradan  $g$  metriğinin  $\phi$  endomorfizmine göre anti-simetrik olduğu şu şekilde görülebilir.

$$\begin{aligned} g(X, \phi(Y)) &= g(\phi(X), \phi^2(Y)) \\ &= g(\phi(X) - Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -g(\phi(X), Y) + \eta(Y)g(\phi(X), \xi) \\ &= -g(\phi(X), Y) + \eta(Y)\eta(\phi(X)) \\ &= -g(\phi(X), Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

$(M, \phi, \eta, \xi, g)$  manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\mapsto \Phi(X, Y) := g(X, \phi(Y)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir 2-formdur. Bu 2-forma hemen hemen kontakt metrik yapının temel 2-formu denir (Chinea ve Gonzalez, 1990: 17).

**Önerme 2.4.3.**  $M$  hemen hemen kontakt manifoldu üzerindeki  $g$  metriğinin Riemann konneksiyonu  $\nabla$  olmak üzere  $\Phi$  temel 2-formun ve  $\eta$  1-formun kovaryant türevleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Chinea, Gonzalez 1990).

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z) \\ \text{(ii)} \quad &(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi(Y), \phi(Z)) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi(Y) - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi(Z) \\ \text{(iii)} \quad &(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi(Y)) \end{aligned}$$

**Tanım 2.4.4.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  manifoldu üzerindeki  $\eta$  1-formun ve  $\Phi$  temel 2-formun dış türevleri sırasıyla

$$\text{i)} \quad d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}((\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X) \quad (2.20)$$

$$\text{ii)} \quad d\Phi(X, Y, Z) = \frac{1}{3}((\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_Y \Phi)(Z, X) + (\nabla_Z \Phi)(X, Y)) \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlıdır (Chinea ve Gonzalez, 1990: 17).

**Tanım 2.4.5.**  $M$  hemen hemen kontakt metrik manifoldunun bir açık alt kümesi üzerinde lokal bir ortanormal tabanı

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n), \xi\}$$

olarak alalım. Bu tabana göre  $\eta$  1-formu ve  $\Phi$  temel 2-formun ko-türevleri

$$\text{i)} \quad \delta\eta = -\sum_{i=1}^n \left\{ (\nabla_{e_i} \eta)(e_i) + (\nabla_{\phi(e_i)} \eta)(\phi(e_i)) \right\} \quad (2.22)$$

$$\text{ii)} \quad \delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^n \left\{ (\nabla_{e_i} \Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\phi(e_i)} \Phi)(\phi(e_i), X) - (\nabla_{\xi} \Phi)(\xi, X) \right\} \quad (2.23)$$

şeklindedir (Chinea ve Gonzalez, 1990: 17).

**Tanım 2.4.6.**  $(M, \phi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontakt manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$N_\phi : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

olmak üzere

$$N_\phi(X, Y) := \phi^2([X, Y]) + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi([\phi(X), Y]) - \phi([X, \phi(Y)]) \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlıdır (Chinea ve Gonzalez, 1990: 18).

### 3. HEMEN HEMEN KONTAKT B-METRİK MANİFOLDLAR

**Tanım 3.1.**  $(M, \phi, \xi, \eta)$  bir hemen hemen kontakt manifold ve  $g$  bu manifold üzerinde  $(n+1, n)$  tipinde bir semi-Riemann metrik olsun. Eğer her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  manifolduna bir hemen hemen kontakt B-metrik manifold denir (Ganchev vd., 1993: 262).

Hemen hemen kontakt B-metrik manifold tanımındaki (3.1) eşitliğinde  $Y = \xi$  olarak alındığında  $g(\phi(X), \phi(\xi)) = -g(X, \xi) + \eta(X)\eta(\xi)$  ve  $\eta(\xi) = 1$ ,  $\phi(\xi) = 0$  olduğundan

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (3.2)$$

elde edilir.  $(M, \phi, \xi, \eta)$  manifoldu üzerindeki  $g$  Riemann metriğinin

$$g(\phi(X), Y) = g(X, \phi(Y)) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağladığı şu şekilde görülebilir.  $g(\phi(X), Y)$  ifadesine  $\phi$  dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} g(\phi^2(X), \phi(Y)) &= g(\phi(\phi(X)), \phi(Y)) \\ &= -g(\phi(X), Y) + \eta(\phi(X))\eta(Y) \\ &= -g(\phi(X), Y) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(\phi^2(X), \phi(Y)) &= g(-X + \eta(X)\xi, \phi(Y)) \\ &= g(-X, \phi(Y)) + g(\eta(X)\xi, \phi(Y)) \\ &= -g(X, \phi(Y)) \end{aligned}$$

dir. Buradan görülür ki

$$g(\phi(X), Y) = g(X, \phi(Y))$$

dir.

**Örnek 3.2.**  $\mathbb{R}^{2n+1} = \{u^1, u^2, \dots, u^n, v^1, v^2, \dots, v^n, t: u^i, v^i, t \in \mathbb{R}\}$  olmak üzere

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \eta = dt, \phi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \phi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^i}, \phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$

olsun.

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{için} \quad g(X, X) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 + \beta_i^2) + v^2$$

alalım.  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen kontakt B-metrik manifolddur (Ganchev vd., 1993: 270).

Öncelikle sırasıyla (2.13) ve (2.14) eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$\eta(\xi) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \phi^2(X) &= \phi \left( \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \phi \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right) + \beta_i \phi \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) + v \phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= \phi \left( \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \phi \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) - \beta_i \phi \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) - v \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial t} \\ &= -X + v \frac{\partial}{\partial t} \quad (v = \eta(X)) \\ &= -X + \eta(X) \xi \end{aligned}$$

(3.1) eşitliğinin varlığını göstermek için

$$g(\phi(X), \phi(X)) = -g(X, X) + \eta(X)\eta(X)$$

olduğunu göstermek kafidir.

$\phi(X) = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$  olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\phi(X), \phi(X)) &= g\left(\sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right), \sum_{j=1}^n \left( \alpha_j \frac{\partial}{\partial v^j} - \beta_j \frac{\partial}{\partial u^j} \right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g\left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i}, \alpha_j \frac{\partial}{\partial v^j} - \beta_j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) - \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) + \sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \alpha_i \alpha_i g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right) - \alpha_i \beta_i g\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_i \beta_i g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right) + \beta_i \beta_i g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 - \beta_i^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$-g(X, X) + \eta(X)\eta(X) = -\left(\sum_{i=1}^n (-\alpha_i^2 + \beta_i^2) + v^2\right) + v^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 - \beta_i^2)$$

olup (3.1) eşitliği sağlanır. Buradan görülür ki  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen kontakt B-metrik manifolddur.

**Tanım 3.3.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifold olsun.

$$\begin{aligned}
F : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
(X, Y, Z) &\mapsto g((\nabla_X \phi)Y, Z) := g(\nabla_X(\phi(Y)) - \phi(\nabla_X Y), Z)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanan  $F$ , (0,3) tipinde bir tensör alanıdır (Ganchev vd., 1993: 262).

**Önerme 3.4.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  manifoldu üzerindeki  $F$  tensör alanı her  $X, Y, Z \in \chi(M)$  için aşağıdaki eşitliklerini sağlar.

$$(i) \quad F(X, Y, Z) = F(X, Z, Y) \quad (3.5)$$

$$(ii) \quad F(X, \phi(Y), \phi(Z)) = F(X, Y, Z) - \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi) \quad (3.6)$$

$$(iii) \quad F(X, \xi, \xi) = 0 \quad (3.7)$$

**İspat** Birinci eşitliğin sağlandığını göstermek için ilk ifadeden ikinci ifadeyi çıkaralım

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) - F(X, Z, Y) &= g((\nabla_x \phi)Y, Z) - g((\nabla_x \phi)Z, Y) \\ &= g(\nabla_x \phi(Y), Z) - g(\phi(\nabla_x Y), Z) \\ &\quad - [g(\nabla_x \phi(Z), Y) - g(\phi(\nabla_x Z), Y)] \\ &= g(\nabla_x \phi(Y), Z) + g(\nabla_x Z, \phi(Y)) \\ &\quad - [g(\nabla_x Y, \phi(Z)) + g(\nabla_x \phi(Z), Y)] \\ &= X[g(\phi(Y), Z)] - X[g(Y, \phi(Z))] \\ &= X[g(\phi(Y), Z) - g(Y, \phi(Z))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylelikle  $F(X, Y, Z) = F(X, Z, Y)$  olduğu elde edilir.

İkinci eşitlik için öncelikle  $F(X, \phi(Y), \phi(Z))$  ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned} F(X, \phi(Y), \phi(Z)) &= g((\nabla_x \phi)\phi(Y), \phi(Z)) \\ &= g(\nabla_x \phi^2(Y), \phi(Z)) - g(\phi(\nabla_x \phi(Y)), \phi(Z)) \\ &= -g(\nabla_x Y, \phi(Z)) + g(\nabla_x (\eta(Y)\xi), \phi(Z)) - g(\nabla_x \phi(Y), \phi^2(Z)) \\ &= -g(\nabla_x Y, \phi(Z)) + \eta(Y)g(\nabla_x \xi, \phi(Z)) \\ &\quad + g(\nabla_x \phi(Y), Z) - g(\nabla_x \phi(Y), \eta(Z)\xi) \\ &= g(\nabla_x \phi(Y), Z) - g(\phi(\nabla_x Y), Z) \\ &\quad + \eta(Y)g(\phi(\nabla_x \xi), Z) - \eta(Z)g(\nabla_x \phi(Y), \xi) \end{aligned}$$

$$= g((\nabla_x \phi)Y, Z) + \eta(Y)g(\phi(\nabla_x \xi), Z) - \eta(Z)g(\nabla_x \phi(Y), \xi) \quad (*)$$

Şimdi ise (ii) eşitliğinin diğer tarafını ele alalım.

$$\begin{aligned} & F(X, Y, Z) - \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi) \\ &= g((\nabla_x \phi)Y, Z) - \eta(Y)g((\nabla_x \phi)\xi, Z) - \eta(Z)g((\nabla_x \phi)Y, \xi) \\ &= g((\nabla_x \phi)Y, Z) + \eta(Y)g(\phi(\nabla_x \xi), Z) - \eta(Z)g(\nabla_x \phi(Y), \xi) \end{aligned} \quad (**)$$

(\*) ve (\*\*) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$F(X, \phi(Y), \phi(Z)) = F(X, Y, Z) - \eta(Y)F(X, \xi, Z) - \eta(Z)F(X, Y, \xi)$$

olduğu elde edilir. Son olarak üçüncü eşitlik için

$$\begin{aligned} F(X, \xi, \xi) &= g((\nabla_x \phi)\xi, \xi) \\ &= g(\nabla_x \phi(\xi), \xi) - g(\phi(\nabla_x \xi), \xi) \\ &= -g(\phi(\nabla_x \xi), \xi) \\ &= -g(\nabla_x \xi, \phi(\xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Tanım 3.5.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik yapısındaki  $\eta$  1-formun kovaryant türevi, dış türevi, ko-türevi sırasıyla

- i)  $(\nabla_x \eta)(Y) = g(\nabla_x \xi, Y) = F(X, \phi(Y), \xi)$
- ii)  $d\eta(X, Y) = (\nabla_x \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)$
- iii)  $\delta\eta(X, Y) = -\sum_{i=1}^n \left\{ (\nabla_{e_i} \eta)e_i + (\nabla_{\phi(e_i)} \eta)(\phi(e_i)) \right\}$

şeklindedir (Chinea ve Gonzalez, 1990: 17).

**Tanım 3.6.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifold,  $\{e_i, \xi\}$  ( $i=1, 2, \dots, 2n$ )  $T_p M$  tanjant uzayının bir bazı ve  $(g^{ij})$  de  $(g_{ij})$  matrisinin tersi olmak üzere;  $\theta$ ,  $\theta^*$  ve  $\omega$  1-formlarının (Lee formları)  $F$  ile ilişkisi

$$\theta(X) = g^{ij} F(e_i, e_j, x)$$

$$\theta^*(X) = g^{ij}F(e_i, \phi(e_j), x)$$

$$\omega(X) = g^{ij}F(\xi, \xi, x)$$

biçiminde tanımlıdır (Ganchev vd., 1993: 263).

Ganchev, Mihova ve Gribachev hemen hemen kontakt B-metrik manifoldların  $F$  temel tesörüne dair sınıflandırılmasını  $\phi$  yapısının kovaryant türevlerinin uzayında çalışarak 11 temel sınıfa ayırmıştır. Bu sınıfların tanımlama bağıntılarını verelim.  $F_i, (i=1, \dots, 11)$  için sınıflar aşağıdaki şekildedir.

$$F_1 : F(X, Y, Z) = \frac{1}{2n} \{ g(X, \phi(Y))\theta(\phi(Z)) + g(X, \phi(Z))\theta(\phi(Y)) \\ + g(\phi(X), \phi(Y))\theta(\phi^2(Z)) + g(\phi(X), \phi(Z))\theta(\phi^2(Y)) \}$$

$$F_2 : F(\xi, Y, Z) = F(X, \xi, Z) = 0, \\ F(X, Y, \phi(Z)) + F(Y, Z, \phi(X)) + F(Z, X, \phi(Y)) = 0, \theta = 0$$

$$F_3 : F(\xi, Y, Z) = F(X, \xi, Z) = 0 \\ F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) = 0$$

$$F_4 : F(X, Y, Z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n} \{ g(\phi(X), \phi(Y))\eta(Z) + g(\phi(X), \phi(Z))\eta(Y) \}$$

$$F_5 : F(X, Y, Z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ g(X, \phi(Y))\eta(Z) + g(X, \phi(Z))\eta(Y) \}$$

$$F_6 : F(X, Y, Z) = -F(\phi(X), \phi(Y), Z) - F(\phi(X), Y, \phi(Z)) \\ = -F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) - 2F(\phi(X), \phi(Y), Z), \\ \theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0$$

$$F_7 : F(X, Y, Z) = -F(\phi(X), \phi(Y), Z) - F(\phi(X), Y, \phi(Z)) \\ = -F(Y, Z, X) - F(Z, X, Y)$$

$$F_8 : F(X, Y, Z) = F(\phi(X), \phi(Y), Z) + F(\phi(X), Y, \phi(Z)) \\ = -F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) + 2F(\phi(X), \phi(Y), Z)$$

$$F_9 : F(X, Y, Z) = F(\phi(X), \phi(Y), Z) + F(\phi(X), Y, \phi(Z)) \\ = -F(Y, Z, X) - F(Z, X, Y)$$

$$F_{10} : F(X, Y, Z) = \eta(X)F(\xi, \phi(Y), \phi(Z))$$

$$F_{11} : F(X, Y, Z) = \eta(X)\{\eta(Y)w(Z) + \eta(Z)w(Y)\}$$

$F_0$  sınıfındaki hemen hemen kontakt B-metrik manifold  $F(X, Y, Z) = 0$  ile sağlanır.

**Tanım 3.7.**  $(\phi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontakt yapısı üzerindeki  $N$  Nijenhuis tensörü

$$N(X, Y) = [\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi \quad (3.8)$$

şeklindedir (Manev ve Gribachev, 1993: 289).

$$[\phi, \phi](X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi(X), \phi(Y)] - \phi[\phi(X), Y] - \phi[X, \phi(Y)] \quad (3.9)$$

$$d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X) \quad (3.10)$$

olduğundan  $N$  Nijenhuis tensörü keyfi  $X, Y \in \chi(M)$  için kovaryant türevleri cinsinden şu şekildedir.

$$\begin{aligned} N(X, Y) = & (\nabla_{\phi(X)} \phi)Y - (\nabla_{\phi(Y)} \phi)X - \phi((\nabla_X \phi)(Y)) + \phi((\nabla_Y \phi)(X)) \\ & + (\nabla_X \eta)(Y)\xi - (\nabla_Y \eta)(X)\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Tanım 3.8.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu için  $F_0, F_1, F_4, F_5$  sınıflarının tanımlama bağıntıları

$$F_0 : N = [\phi, \phi] = d\eta = F = \nabla_\phi = \nabla_\eta = \nabla_\xi = \theta = \theta^* = w = 0$$

$$F_1 : N = [\phi, \phi] = d\eta = \nabla_\eta = \nabla_\xi = \theta(\xi) = \theta^*(\xi) = w = 0$$

$$F_4 : N = [\phi, \phi] = d\eta = \theta^* = w = 0$$

$$F_5 : N = [\phi, \phi] = d\eta = \theta = w = 0$$

şeklinde de verilir (Manev ve Gribachev, 1993: 289).

## 4. HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK MANİFOLDLAR

### 4.1. Hemen Hemen Kompleks B-Metrik Manifolddar

**Tanım 4.1.1.**  $M$   $2n$ -boyutlu düzgün bir manifold,  $J$  hemen hemen kompleks yapı,  $h$  bu manifold üzerindeki  $(n, n)$  tipinde bir semi-Riemann metrik;  $X, Y \in \chi(M)$  olmak üzere

$$\text{i) } J^2(X) = -X \quad (4.1)$$

$$\text{ii) } h(J(X), J(Y)) = -h(X, Y) \quad (4.2)$$

koşulları sağlanıyor ise  $(M^{2n}, J, h)$  üçlüsüne hemen hemen kompleks B-metrik manifold denir (Ganchev ve Borisov, 1985: 31).

**Örnek 4.1.2.**  $\mathbb{R}^{2n} = \{(u^1, u^2, \dots, u^n, v^1, v^2, \dots, v^n); u^i, v^i \in \mathbb{R}\}$  manifoldu

$$J : \chi(\mathbb{R}^{2n}) \times \chi(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^{2n}) \\ \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, -\frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

biçiminde tanımlanan  $J$  yapısı ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifolddur.

Öncelikle  $J$  yapısının hemen hemen kompleks manifold olduğunu gösterelim.

$\alpha_i, \beta_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$   $X = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right)$  olmak üzere

$$J(X) = J \left( \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) \\ = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

dir. Kompleks yapı olması için  $J^2(X) = -X$  olmalıdır.

$$J^2(X) = J(J(X)) \\ = J \left( \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right) \\ = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i J \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) - \beta_i J \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( -\alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\
&= -X
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $(\mathbb{R}^{2n}, J)$  hemen hemen kompleks manifolddur. Şimdi gösterelim ki  $\mathbb{R}^{2n}$  üzerinde  $h(X, X) = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i^2 + \beta_i^2)$  ile tanımlanan  $h$  metriğini aldığımızda  $(\mathbb{R}^{2n}, J, h)$  yapısı hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

$$\begin{aligned}
h(J(X), J(X)) &= h \left( \sum_{i=1}^n \left( -\beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \sum_{j=1}^n \left( -\beta_j \frac{\partial}{\partial u^j} + \alpha_j \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( \beta_i \beta_j h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) - \beta_i \alpha_j h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_i \beta_j h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \alpha_i \alpha_j h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right)
\end{aligned}$$

dir. Burada  $i \neq j$  iken

$$h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = 0$$

dir.  $i = j$  iken

$$h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = -1, \quad h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i} \right) = 1$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
h(J(X), J(X)) &= h \left( \sum_{i=1}^n \left( -\beta_i \frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \sum_{j=1}^n \left( -\beta_j \frac{\partial}{\partial u^j} + \alpha_j \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left[ \beta_i \beta_j h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) - \beta_i \alpha_j h \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_i \beta_j h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \alpha_i \alpha_j h \left( \frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left[ \beta_i^2 h\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) + \alpha_i^2 h\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n (-\beta_i^2 + \alpha_i^2) \\
&= -h(X, X)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak  $(\mathbb{R}^{2n}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

Her  $X, Y \in \chi(M)$  için  $h$  metriğinin

$$h(J(X), Y) = h(X, J(Y)) \quad (4.3)$$

özelliğini sağladığını gösterelim. Burada  $h(J(X), Y)$  ifadesine  $J$  dönüşümü uygulandığında

$$h(J^2(X), J(Y)) = h(J(J(X)), J(Y)) = -h(J(X), Y)$$

olur. Diğer taraftan

$$h(J^2(X), J(Y)) = h(-X, J(Y)) = -h(X, J(Y))$$

olduğundan

$$h(X, J(Y)) = h(J(X), Y)$$

elde edilir.

**Tanım 4.1.3.**  $(M^{2n}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifold,  $\tilde{\nabla}$   $h$  metriğinin Riemann konneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}
W : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
(X, Y, Z) &\mapsto (\tilde{\nabla}_X h)(Y, Z) = h((\tilde{\nabla}_X J)Y, Z) \\
&= h((\tilde{\nabla}_X J)Y, Z) - h(J(\tilde{\nabla}_X Y), Z)
\end{aligned} \quad (4.4)$$

biçiminde tanımlanan  $W$ , (0,3) tipinde bir tensör alanıdır (Ganchev ve Borisov, 1985: 31).

**Önerme 4.1.4.**  $W$  tensörü keyfi  $X, Y, Z \in \chi(M^{2n})$  için

$$\text{i) } W(X, Y, Z) = W(X, Z, Y) \quad (4.5)$$

$$\text{ii)} \quad W(X, Y, Z) = W(X, J(Y), J(Z)) \quad (4.6)$$

eşitliklerini sağlar.

### İspat

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad W(X, Y, Z) - W(X, Z, Y) &= h((\tilde{\nabla}_X J)(Y), Z) - h((\tilde{\nabla}_X J)(Z), Y) \\ &= h(\tilde{\nabla}_X J(Y), Z) - h(J(\tilde{\nabla}_X Y), Z) \\ &\quad - [h(\tilde{\nabla}_X J(Z), Y) - h(J(\tilde{\nabla}_X Z), Y)] \\ &= h(\tilde{\nabla}_X J(Y), Z) + h(\tilde{\nabla}_X Z, J(Y)) \\ &\quad - [h(\tilde{\nabla}_X J(Z), Y) + h(\tilde{\nabla}_X Y, J(Z))] \\ &= X [h(J(Y), Z) - h(J(Z), Y)] \\ &= X [h(J(Y), Z) - h(J(Y), Z)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad W(X, Y, Z) &= h((\tilde{\nabla}_X J)(Y), Z) \\ &= h(\tilde{\nabla}_X J(Y), Z) - h(J(\tilde{\nabla}_X Y), Z) \\ &= h(\tilde{\nabla}_X J(Y), Z) - h(\tilde{\nabla}_X Y, J(Z)) \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} W(X, J(Y), J(Z)) &= h((\tilde{\nabla}_X J)J(Y), J(Z)) \\ &= h(\tilde{\nabla}_X J^2(Y), J(Z)) - h(J(\tilde{\nabla}_X J(Y)), J(Z)) \\ &= -h(\tilde{\nabla}_X Y, J(Z)) + h(\tilde{\nabla}_X J(Y), Z) \end{aligned} \quad (**)$$

(\*) ve (\*\*) eşitliklerinden görülür ki

$$W(X, Y, Z) = W(X, J(Y), J(Z))$$

dir.

**Tanım 4.1.5.**  $\{e_i\} (i=1,2,\dots,2n)$  ,  $M$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldunun bir  $p$  noktasındaki tanjant uzayının tabanı  $x$  bu tanjant uzayının elemanı ve  $h^{ij}$  ,  $h_{ij}$  matrisinin tersi olmak üzere  $W$  tensörü ile ilişkili  $\varphi$  1-formu

$$\varphi(X) = h^{ij}W(e_i, e_j, x); x \in T_p M \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır (Ganchev ve Borisov, 1985: 31).

**Tanım 4.1.6.**  $(M, J, h)$   $2n$ -boyutlu hemen hemen kompleks B-metrik manifold,  $\tilde{\nabla}$  ,  $h$  metriğinin Riemann konneksiyonu olsun.  $M$  manifoldu üzerinde  $\tilde{N}$  Nijenhuis tensörü her  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$\tilde{N}(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)J(Y) - (\tilde{\nabla}_Y J)J(X) + (\tilde{\nabla}_{J(X)} J)(Y) - (\tilde{\nabla}_{J(Y)} J)(X) \quad (4.8)$$

biçimindedir (Ganchev ve Borisov, 1985: 33).

Ganchev ve Borisov hemen hemen kompleks B-metrik manifoldları sınıflandırmak için  $\varphi$  1-formun tanjant uzayının elemanlarını kullanarak 8 tane sabit alt uzaya ayırmıştır. Daha sonra bu alt uzaları hemen hemen kompleks B-metrik manifoldlara genişleterek bu 8 tane sınıfın sağlandığını söylemiştir. Ayrıca bu sınıfların bazıları için tanımlanan şartlar hemen hemen kompleks manifoldlar ile paralellik gösterir. Bu manifoldlara Kaehlerian manifoldları örnek verilebilir (Ganchev ve Borisov, 1985: 33).

Bu sınıfların tanımlama bağıntıları şu şekildedir.

- 1)  $W_0$  Sınıfı: Kaehler B-metrik manifoldlar

$$W(X, Y, Z) = 0$$

- 2)  $W_1$  Sınıfı: Konformal Kaehler B-metrik manifoldlar

$$W(X, Y, Z) = \frac{1}{2n} \{h(X, Y)\varphi(Z) + h(X, Z)\varphi(Y) + h(X, J(Y))\varphi(J(Z)) + h(X, J(Z))\varphi(J(Y))\}$$

- 3)  $W_2$  Sınıfı: Özel Kompleks B-metrik manifoldlar

$$W(X, Y, J(Z)) + W(Y, Z, J(X)) + W(Z, X, J(Y)) = 0, \varphi = 0$$

- 4)  $W_3$  Sınıfı: Quasi-Kaehler B-metrik manifoldlar

$$W(X, Y, Z) + W(Y, Z, X) + W(Z, X, Y) = 0$$

5)  $W_1 \oplus W_2$  Sınıfı: Kompleks B-metrik manifoldlar

$$W(X, Y, J(Z)) + W(Y, Z, J(X)) + W(Z, X, J(Y)) = 0$$

6)  $W_2 \oplus W_3$  Sınıfı: Semi-Kaehler B-metrik manifoldlar

$$\varphi = 0$$

7)  $W_1 \oplus W_3$  Sınıfı:

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z) + W(Y, Z, X) + W(Z, X, Y) = \frac{1}{n} \{ & h(X, Y)\varphi(Z) + h(Z, X)\varphi(Y) \\ & + h(Y, Z)\varphi(X) + h(X, J(Y))\varphi(J(Z)) \\ & + h(Y, J(Z))\varphi(J(X)) + h(Z, J(X))\varphi(J(Y)) \} \end{aligned}$$

8)  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  Sınıfı: Tüm sınıflar

Gribachev bir makalesinde  $W_1 \oplus W_2$  sınıfı incelemiş ve bu sınıfın manifoldlarını normal genelleştirilmiş B-manifoldlar olarak adlandırmıştır. Gribachev bir diğer makalesinde  $W_3$  sınıfını incelemiş ve bu sınıfın manifoldlarını AB-manifoldlar olarak adlandırmıştır.

**Teorem 4.1.7.** Her hemen hemen kompleks B-metrik manifoldlar Kaehlerian B-metrik manifoldlara uygun olarak eşdeğerdir ve  $W_1$  sınıfına aittir (Ganchev ve Borisov, 1985: 33)

## 4.2. Hemen Hemen Kompleks B-Metrik Yapıdan Hemen Hemen Kontakt B-Metrik Yapı Elde Etme

**Tanım 4.2.1.**  $M$   $2n$ -boyutlu hemen hemen kompleks B-metrik manifold olsun.  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontakt B-metrik manifolddur. Burada bahsi geçen çarpım pozitif tanımlı skaler çarpımdır (Manev, 1995: 63).

$M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki herhangi bir vektör alanı  $(X, a \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$

biçimindedir. Burada  $X \in \chi(M^{2n})$ ,  $a: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  düzgün fonksiyon ve  $t$ ,  $\mathbb{R}$  nin koordinatıdır.

$\phi: \chi(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R})$  endomorfizmini,  $\xi$  vektör alanını ve  $\eta$  1-formunu

$$\phi(X, a \frac{d}{dt}) = (J(X), 0), \quad \xi = (0, \frac{d}{dt}), \quad \eta(X, a \frac{d}{dt}) = a \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanırsa  $(\phi, \xi, \eta)$  yapısı  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde bir hemen hemen kontakt yapıdır (Manev, 1995: 63).

Bunun için sırasıyla (2.14), (2.15) ve (2.16) eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$\phi^2(X, a \frac{d}{dt}) = \phi(\phi(X, a \frac{d}{dt})) = \phi(J(X), 0) = (J^2(X), 0) = -(X, 0) \quad (*)$$

$$-(X, a \frac{d}{dt}) + \eta(X, a \frac{d}{dt})(0, \frac{d}{dt}) = -(X, a \frac{d}{dt}) + a(0, \frac{d}{dt}) = -(X, 0) \quad (**)$$

(\*) ve (\*\*) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$\phi^2(X, a \frac{d}{dt}) = -(X, a \frac{d}{dt}) + \eta(X, a \frac{d}{dt})\xi \quad (4.10)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi (2.15) eşitliğini görelim.

$$\phi(0, \frac{d}{dt}) = (J(0), 0) = (0, 0) = 0$$

Yani  $\phi(\xi) = 0$  dır. Son olarak (2.16) için;

$$(\eta \circ \phi)(X, a \frac{d}{dt}) = \eta(\phi(X, a \frac{d}{dt})) = \eta(J(X), 0) = 0$$

dır. Yani  $(\eta \circ \phi)(X, a \frac{d}{dt}) = 0$  dır.

**Tanım 4.2.2.**  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen kontakt manifoldu üzerindeki  $g$  metriği

$$g((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) := h(X, Y) + ab \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlıdır (Manev, 1995: 63).

Gösterelim ki  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $g$  metriği ile birlikte bir hemen hemen kontakt B-metrik yapıya sahiptir. Bunun için (3.1) eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} g(\phi(X, a \frac{d}{dt}), \phi(Y, b \frac{d}{dt})) &= g((J(X), 0), (J(Y), 0)) \\ &= h(J(X), J(Y)) \end{aligned}$$

$$= -h(X, Y). \quad (*)$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} -g\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) + \eta\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\eta\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) &= -h(X, Y) - ab + ab \\ &= -h(X, Y) \end{aligned} \quad (**)$$

bulunur.

(\*) ve (\*\*) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$g\left(\phi\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \phi\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) = -g\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) + \eta\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\eta\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Buradan görülür ki  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu yukarıda tanımlanan  $g$  metriği ile birlikte bir hemen hemen kontakt B-metrik yapıya sahiptir. Yani  $(M \times \mathbb{R}, \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen kontakt B-metrik manifolddur.

$\nabla$ ,  $g$  metriğinin Riemann konneksiyonu olsun.  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} F : \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) &\mapsto g\left(\left(\nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm (0,3) tipinde bir tensör alanıdır.

$M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki keyfi bir vektör alanının kovaryant türevini

$$\nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \left(Y, b \frac{d}{dt}\right) = \left(\tilde{\nabla}_X Y, \left(X[b] + a \frac{db}{dt}\right) \frac{d}{dt}\right) \quad (4.14)$$

biçimindedir. Böylece  $(M \times \mathbb{R}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerindeki  $\phi$  endomorfizminin,  $\xi$  vektör alanının ve  $\eta$  1-formunun kovaryant türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Manev, 1995: 63).

$$\mathbf{i)} \quad \left(\nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) = \left(\left(\tilde{\nabla}_X J\right)(Y), 0\right) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{ii)} \quad \nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \xi = 0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{iii)} \quad \left(\nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \eta\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) = 0 \quad (4.17)$$

Şimdi  $M \times \mathbb{R}$  üzerindeki  $F$  tensör alanının

$$F\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) = W(X, Y, Z) \quad (4.18)$$

eşitliğini sağladığını gösterelim. Bunun için öncelikle  $\phi$  kontakt yapısının kovaryant türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} \phi)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) &= \nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} \phi\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) - \phi\left(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= \nabla_X J(Y) - \phi\left(\nabla_X Y + X[b] \frac{d}{dt} + a \frac{db}{dt} \frac{d}{dt}\right) \\ &= \nabla_X J(Y) - J(\nabla_X Y) \\ &= (\nabla_X J)(Y) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} \phi)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) = (\nabla_X J)(Y) \quad (4.19)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.18) eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} F\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) &= g\left(\left(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} \phi\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= g\left(\left((\nabla_X J)(Y), 0\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\ &= h\left(\left(\tilde{\nabla}_X J\right)(Y), Z\right) + 0.c \\ &= W(X, Y, Z) \end{aligned}$$

Buradan görülür ki  $(M \times \mathbb{R}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik yapı üzerinde tanımlanan tensör alanının sıfır olması için hemen hemen kompleks B-metrik yapı üzerindeki tensör alanının sıfır olması hem gerekli hem yeterlidir.

**Sonuç 4.2.3.** Hemen hemen kompleks B-metrik yapı  $W_0$  sınıfında ise bundan elde ettiğimiz hemen hemen kontakt B-metrik yapı  $F_0$  sınıfındadır (Manev, 1995: 63).

Şimdi gösterelim ki hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerinde tanımlanan 1-form aynı zamanda hemen hemen kompleks B-metrik manifold üzerinde tanımlanan 1-forma eşittir. Bunun için

$$\theta(X, a \frac{d}{dt}) = \varphi(X) \quad (4.20)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \theta(X, a \frac{d}{dt}) &= \sum_{i=1}^n F((e_i, 0), (e_i, 0), (X, a \frac{d}{dt})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n F((Je_i, 0), (Je_i, 0), (X, a \frac{d}{dt})) \\ &\quad + F((0, \frac{d}{dt}), (0, \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt})) \\ &= \sum_{i=1}^n W(e_i, e_i, X) - \sum_{i=1}^n W(Je_i, Je_i, X) \\ &= \varphi(X) \end{aligned}$$

**Teorem 4.2.4.**  $M^{2n}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_1$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $M^{2n} \times \mathbb{R}$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_1$  sınıfında olur (Manev, 1995: 63).

**İspat** Yukarıdaki (4.4), (4.5), (4.11), (4.13) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} F_1((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) &= \frac{1}{2n} \left\{ g((X, a \frac{d}{dt}), \phi(Y, b \frac{d}{dt})) \theta(\phi(Z, c \frac{d}{dt})) \right. \\ &\quad + g((X, a \frac{d}{dt}), \phi(Z, c \frac{d}{dt})) \theta(\phi(Y, b \frac{d}{dt})) \\ &\quad + g(\phi(X, a \frac{d}{dt}), \phi(Y, b \frac{d}{dt})) \theta(\phi^2(Z, c \frac{d}{dt})) \\ &\quad \left. + g(\phi(X, a \frac{d}{dt}), \phi(Z, c \frac{d}{dt})) \theta(\phi^2(Y, b \frac{d}{dt})) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \{ h(X, Y) \varphi(Z) + h(X, Z) \varphi(Y) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h\left(X, J(Y)\right)\phi\left(J(Z)\right)+h\left(X, J(Z)\right)\phi\left(J(Y)\right)\} \\
& =W_1(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

**Teorem 4.2.5.**  $M^{2n}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_2$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_2$  sınıfında olur (Manev, 1995: 63).

**İspat**  $F_2$  sınıfının sağlaması gereken şartlar üç tane olduğundan bu ispatı üç adımda gösterelim. Birinci adım için ispat aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
& F\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \phi\left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
& +F\left(\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right), \phi\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\right) \\
& +F\left(\left(Z, c \frac{d}{dt}\right), \left(X, a \frac{d}{dt}\right), \phi\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) = g\left(\left(\nabla_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \phi\left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
& +g\left(\left(\nabla_{\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(Z, c \frac{d}{dt}\right), \phi\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\right) \\
& +g\left(\left(\nabla_{\left(Z, c \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \phi\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) \\
& = h\left\{\left(\left(\tilde{\nabla}_X J\right)(Y), 0\right), \left(J(Z), 0\right)\right\} \\
& +h\left\{\left(\left(\tilde{\nabla}_Y J\right)(Z), 0\right), \left(J(X), 0\right)\right\} \\
& +h\left\{\left(\left(\tilde{\nabla}_Z J\right)(X), 0\right), \left(J(Y), 0\right)\right\} \\
& = h\left(\left(\tilde{\nabla}_X J\right)(Y), J(Z)\right)+h\left(\left(\tilde{\nabla}_Y J\right)(Z), J(X)\right) \\
& +h\left(\left(\tilde{\nabla}_Z J\right)(X), J(Y)\right) \\
& =W(X, Y, J(Z))+W(Y, Z, J(X)) \\
& +W(Z, X, J(Y)) \\
& =0
\end{aligned}$$

Şimdi ikinci adım için ispatı verelim.

$$\begin{aligned}
F\left(\left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) &= g\left(\left(\nabla_{\left(0, \frac{d}{dt}\right)} \phi\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= g\left(0, \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Benzer şekilde  $F\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right)$  ifadesinin de sıfır olduğu gösterilebilir.

Son olarak üçüncü adım (4.20) eşitliğinden

$$\theta\left(X, a \frac{d}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \varphi(X) = 0$$

olduğu açıktır.

**Teorem 4.2.6.**  $M^{2n}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_3$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $M^{2n} \times \mathbb{R}$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_3$  sınıfında olur (Manev, 1995: 63).

**İspat** (4.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&F\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&+ F\left(\left(Y, b \frac{d}{dt}\right), \left(Z, c \frac{d}{dt}\right), \left(X, a \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&+ F\left(\left(Z, c \frac{d}{dt}\right), \left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) = W(X, Y, Z) + W(Y, Z, X) + W(Z, X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

## 5. HEMEN HEMEN KONTAKT B-METRİK YAPIDAN HEMEN HEMEN KOMPLEKS B-METRİK YAPI KURMA

**Tanım 5.1.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$   $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontakt B-metrik manifold olsun. Bu manifoldu reel sayılar uzayı ile skaler olarak çarptığımızda  $M \times \mathbb{R}$ ,  $(2n+2)$ -boyutlu hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

$M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir bir vektör alanını  $(X, a \frac{d}{dt})$  olarak tanımlayalım. Buradaki  $X$ ,  $M$  manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesinin elemanı,  $a$ ,  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde reel değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve  $t$  ise  $\mathbb{R}$  nin koordinatıdır.

Şimdi  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde

$$J : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$(X, a \frac{d}{dt}) \mapsto J(X, a \frac{d}{dt}) := (\phi(X) - a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (5.1)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

**Önerme 5.2.** (5.1) tanımlanan  $J$  dönüşümü  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

**İspat** Bunun için göstermemiz gerekir ki  $J$  yapısı (4.1) eşitliğini sağlar. Her

$(X, a \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$  için

$$\begin{aligned} J^2(X, a \frac{d}{dt}) &= J(J(X, a \frac{d}{dt})) \\ &= J(\phi(X) - a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \\ &= (\phi(\phi(X) - a\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\phi(X) - a\xi) \frac{d}{dt}) \\ &= (\phi^2(X) - a\phi(\xi) - \eta(X)\xi, ((\eta \circ \phi)(X) - a\eta(\xi)) \frac{d}{dt}) \\ &= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -a \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

$$= -(X, a \frac{d}{dt})$$

elde edilir. Yani  $J^2 = -Id$  dir.

**Tanım 5.3.**  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde  $(n+1, n+1)$  işaretli  $h$  metriği keyfi

$(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$  için

$$h((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) := g(X, Y) - ab \quad (5.2)$$

şeklindedir.

**Önerme 5.4.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifold olsun. Bu manifolddan elde ettiğimiz  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu  $J$  kompleks yapısı ve  $h$  metriği ile birlikte bir hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

**İspat** Bunun için sadece (4.2) eşitliğini göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} h(J(X, a \frac{d}{dt}), J(Y, b \frac{d}{dt})) &= h((\phi(X) - a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}), (\phi(Y) - b\xi, \eta(Y) \frac{d}{dt})) \\ &= g(\phi(X) - a\xi, \phi(Y) - b\xi) - \eta(X)\eta(Y) \\ &= g(\phi(X), \phi(Y)) - bg(\phi(X), \xi) \\ &\quad - ag(\xi, \phi(Y)) + abg(\xi, \xi) - \eta(X)\eta(Y) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) + ab - \eta(X)\eta(Y) \\ &= -(g(X, Y) - ab) \\ &= -h((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) \end{aligned}$$

O halde  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  yapısı bir hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

Şimdi hemen hemen kontakt B-metrik yapı ile bu yapıdan elde ettiğimiz hemen hemen kompleks B-metrik yapının kovaryant türevleri arasındaki bağıntıları verelim. Bunun için öncelikle şu dönüşümleri tanımlayalım.  $(p_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$  alalım.

$$i: M \rightarrow M \times \mathbb{R} \quad j: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$p \mapsto i(p) = (p, t_0) \quad \text{ve} \quad t \mapsto j(t) = (p_0, t)$$

Bu yüzden  $X \in \mathcal{X}(M)$  ve  $a \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$  için  $X(a \circ i)$  ve  $\frac{d}{dt}(a \circ j)$  terimleri

$X(a)$  ve  $\frac{d}{dt}(a)$  tarafından basitçe belirtilecek.

$(M, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifold ve  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifold olsun.  $\nabla$  ve  $\tilde{\nabla}$  yı sırasıyla  $g$  ve  $h$  metriklerinin semi-Riemann konneksiyonu olarak alalım. Bu iki yapının kovaryant türevleri

$$(\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})})(Y, b \frac{d}{dt}) = (\nabla_X Y, (X[b] + a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \quad (5.3)$$

şeklindedir. Şimdi (5.3) eşitliğini kullanarak  $J$  kompleks yapısının  $\phi$  kontakt yapısı cinsinden gösterimini elde edelim.

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}) &= \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y, b \frac{d}{dt})) - J(\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt})) \\ &= \tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} (\phi(Y) - b\xi, \eta(Y) \frac{d}{dt}) - J(\tilde{\nabla}_X Y + (X[b] + a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \\ &= (\nabla_X (\phi(Y) - b\xi) + \nabla_X (\eta(Y) \frac{d}{dt})) \\ &\quad + \nabla_{(a \frac{d}{dt})} (\phi(Y) - b\xi) + \nabla_{(a \frac{d}{dt})} (\eta(Y) \frac{d}{dt}) \\ &\quad - (\phi(\nabla_X Y) - (X[b] + a \frac{db}{dt}) + \eta(\nabla_X Y) \frac{d}{dt}) \\ &= \nabla_X \phi(Y) - X[b]\xi - b\nabla_X \xi + \nabla_X (\eta(Y) \frac{d}{dt}) - a \frac{db}{dt} \xi \\ &= -\phi(\nabla_X Y) + X[b]\xi + a \frac{db}{dt} - \eta(\nabla_X Y) \frac{d}{dt} \\ &= (\nabla_X (\phi(Y)) - \phi(\nabla_X Y) - b\nabla_X \xi \\ &\quad + \nabla_X (\eta(Y) \frac{d}{dt}) - \eta(\nabla_X Y) \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

$$=(\nabla_x \phi)(Y) - b\nabla_x \xi + (\nabla_x \eta)(Y) \frac{d}{dt}$$

Buradan görülür ki

$$(\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}) = (\nabla_x \phi)(Y) - b\nabla_x \xi + (\nabla_x \eta)(Y) \frac{d}{dt} \quad (5.4)$$

eşitliği geçerlidir.

$M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerindeki  $W$  temel tensörünü

$$\begin{aligned} W : \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) &\rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}) \\ ((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) &\mapsto W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \end{aligned} \quad (5.5)$$

dönüşümü altında

$$W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) := h((\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlayalım.

**Önerme 5.5.**  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu üzerindeki temel tensör  $W$  ve  $M$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerindeki temel tensör  $F$  olmak üzere

$$W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) = F(X, Y, Z) - bF(X, \xi, \phi(Z)) - cF(X, \phi(Y), \xi) \quad (5.7)$$

eşitliği vardır.

**İspat:** İspat için sırasıyla (5.6) ve (5.2) eşitliklerini kullandığımızda (5.7) eşitliğini şu şekilde görebiliriz.

$$\begin{aligned} W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) &= h((\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \\ &= h(((\tilde{\nabla}_x \phi)(Y) - b\tilde{\nabla}_x \xi, (\tilde{\nabla}_x \eta)(Y) \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \\ &= g(((\nabla_x \phi)(Y) - b\nabla_x \xi, Z) - c(\nabla_x \eta)(Y)) \\ &= g(((\nabla_x \phi)(Y), Z) - bg(\nabla_x \xi, Z) - c(\nabla_x \eta)(Y)) \\ &= F(X, Y, Z) - bF(X, \xi, \phi(Z)) - cF(X, \phi(Y), \xi) \end{aligned}$$

$(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörünü

$$\begin{aligned} \tilde{N} : \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) &\rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}) \\ ((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) &\mapsto \tilde{N}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) \end{aligned}$$

dönüşümü altında

$$\begin{aligned} \tilde{N}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) &= (\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(J(Y, b \frac{d}{dt})) - (\tilde{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(J(X, a \frac{d}{dt})) \\ &\quad + (\tilde{\nabla}_{J(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}) - (\tilde{\nabla}_{J(Y, b \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlayalım.

**Önerme 5.6.**  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü  $\tilde{N}$  ve  $M$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü  $N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{N}((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) &= N(X, Y) + b \left\{ \phi(\tilde{\nabla}_X \xi) - \tilde{\nabla}_{\phi(X)} \xi + (\tilde{\nabla}_\xi \phi)(X) \right\} \\ &\quad - a \left\{ \phi(\tilde{\nabla}_Y \xi) - \tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \xi + (\tilde{\nabla}_\xi \phi)(Y) \right\} \\ &\quad , \left( (\tilde{\nabla}_X \eta) \phi(Y) - (\tilde{\nabla}_Y \eta)(X) + (\tilde{\nabla}_{\phi(X)} \eta)(Y) \right) \\ &\quad - \left( (\tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \eta)(X) - a(\tilde{\nabla}_\xi \eta)(Y) + b(\tilde{\nabla}_\xi \eta)(X) \right) \frac{d}{dt} \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitliği vardır.

**İspat:** (5.9) eşitliğini göstermek için öncelikle

- i)  $J(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y, b \frac{d}{dt})))$
- ii)  $\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt})$
- iii)  $J(\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt}))$
- iv)  $\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y, b \frac{d}{dt}))$
- v)  $(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(J(Y, b \frac{d}{dt})) + (\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt})$

$$\text{vi)} \quad (\nabla_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(J(X, a \frac{d}{dt})) + (\nabla_{J(Y, b \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt})$$

kovaryant türevlerini sırasıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad J(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y, b \frac{d}{dt}))) &= J(\nabla_X \phi(Y) - X[b]\xi - b\nabla_X \xi - a \frac{db}{dt} \xi, \nabla_X (\eta(Y)) \frac{d}{dt}) \\ &= \phi(\nabla_X \phi(Y) - X[b]\xi - b\nabla_X \xi - a \frac{db}{dt} \xi) - \nabla_X (\eta(Y)) \xi \\ &\quad , \eta(\nabla_X \phi(Y) - X[b]\xi - b\nabla_X \xi - a \frac{db}{dt} \xi) \frac{d}{dt} \\ &= (\phi(\nabla_X \phi(Y)) - b\phi(\nabla_X \xi) - \nabla_X (\eta(Y)) \xi \\ &\quad , (\eta(\nabla_X \phi(Y)) - X[b] - a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt}) &= \nabla_{(\phi(X) - a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt}) \\ &= \nabla_{\phi(X)} Y + \nabla_{\phi(X)} (b \frac{d}{dt}) - \nabla_{a\xi} Y - \nabla_{a\xi} (b \frac{d}{dt}) + \nabla_{\eta(X) \frac{d}{dt}} (b \frac{d}{dt}) \\ &= \nabla_{\phi(X)} Y + (\phi(X)) [b] \frac{d}{dt} - a \nabla_{\xi} Y - a \xi [b] \frac{d}{dt} + (\eta(X) \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt} \\ &= (\nabla_{\phi(X)} Y - a \nabla_{\xi} Y, ((\phi(X) - a\xi)[b] + \eta(X) \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad J(\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt})) &= J(\nabla_{\phi(X)} Y - a \nabla_{\xi} Y, ((\phi(X) - a\xi)[b] + \eta(X) \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \\ &= \phi(\nabla_{\phi(X)} Y - a \nabla_{\xi} Y) - ((\phi(X) - a\xi)[b] + \eta(X) \frac{db}{dt}) \xi \\ &\quad , \eta(\nabla_{\phi(X)} Y - a \nabla_{\xi} Y) \frac{d}{dt} \\ &= \phi(\nabla_{\phi(X)} Y) - a \phi(\nabla_{\xi} Y) - (\phi(X) - a\xi)[b] \xi - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi \\ &\quad , (\eta(\nabla_{\phi(X)} Y - a \nabla_{\xi} Y)) \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv)} \quad \nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (J(Y, b \frac{d}{dt})) &= \nabla_{(\phi(X) - a\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})} (\phi(Y) - b\xi, \eta(Y) \frac{d}{dt}) \\
&= \nabla_{\phi(X)} \phi(Y) - (\phi(X) - a\xi)[b]\xi - b\nabla_{\phi(X)} \xi + \nabla_{\phi(X)} (\eta(Y) \frac{d}{dt}) \\
&\quad - a\nabla_{\xi} (\phi(Y)) + ab\nabla_{\xi} \xi - a\nabla_{\xi} (\eta(Y) \frac{d}{dt}) - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi \\
&= (\nabla_{\phi(X)} \phi(Y) - (\phi(X) - a\xi)[b]\xi - b\nabla_{\phi(X)} \xi - a\nabla_{\xi} (\phi(Y)) \\
&\quad + ab\nabla_{\xi} \xi - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi, (\phi(X) - a\xi) [\eta(Y)] \frac{d}{dt} \xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{v)} \quad (\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(J(Y, b \frac{d}{dt})) \\
+ (\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}) &= \nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} J^2(Y, b \frac{d}{dt}) - J(\nabla_{(X, a \frac{d}{dt})} J(Y, b \frac{d}{dt})) \\
&\quad + \nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} J(Y, b \frac{d}{dt}) - J(\nabla_{J(X, a \frac{d}{dt})} (Y, b \frac{d}{dt})) \\
&= -(\nabla_X Y, (X[b] + a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt}) \\
&\quad - [(\phi(\nabla_X \phi(Y)) - b\phi(\nabla_X \xi) - \nabla_X (\eta(Y)) \xi \\
&\quad , (\eta(\nabla_X \phi(Y)) - X[b] - a \frac{db}{dt}) \frac{d}{dt} \xi] \\
&\quad + [\nabla_{\phi(X)} \phi(Y) - (\phi(X) - a\xi)[b]\xi - b\nabla_{\phi(X)} \xi \\
&\quad - a\nabla_{\xi} (\phi(Y)) + ab\nabla_{\xi} \xi - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi \\
&\quad , (\phi(X) - a\xi) [\eta(Y)] \frac{d}{dt} \xi] \\
&\quad - [\phi(\nabla_{\phi(X)} Y) - a\phi(\nabla_{\xi} Y) - (\phi(X) - a\xi)[b]\xi - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi \\
&\quad , (\eta(\nabla_{\phi(X)} Y - a\eta(\nabla_{\xi} Y))) \frac{d}{dt} \xi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ -\nabla_X Y - \phi(\nabla_X \phi(Y)) + b\phi(\nabla_X \xi) \xi \right. \\
&+ \nabla_X (\eta(Y)) \xi + \nabla_{\phi(X)} \phi(Y) - (\phi(X) - a\xi)[b] \\
&- b\nabla_{\phi(X)} \xi - a\nabla_\xi (\phi(Y)) + ab\nabla_\xi \xi - \eta(X) \frac{db}{dt} \xi - \phi(\nabla_{\phi(X)} Y) \\
&+ a\phi(\nabla_\xi Y) + (\phi(X) - a\xi)[b] \xi + \eta(X) \frac{db}{dt} \xi \\
&\left. , \left[ -(X[b] + a \frac{db}{dt}) - \eta(\nabla_X \phi(Y)) + (X[b] + a \frac{db}{dt}) + \phi(X)[\eta(Y)] \right. \right. \\
&\left. \left. - a\xi[\eta(Y)] - \eta(\nabla_{\phi(X)} Y) + a\eta(\nabla_\xi Y) \right) \frac{d}{dt} \right] \\
&= \left[ -\nabla_X Y - \phi(\nabla_X \phi(Y)) + b\phi(\nabla_X \xi) + \nabla_X (\eta(Y)) \xi + (\nabla_{\phi(X)} \phi)(Y) \right. \\
&- b\nabla_{\phi(X)} \xi - a\nabla_\xi (\phi(Y)) + ab\nabla_\xi \xi \\
&\left. , \left( -\eta(\nabla_X \phi(Y)) + (\nabla_{\phi(X)} \eta)(Y) - a(\nabla_\xi \eta)(Y) \right) \frac{d}{dt} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{vi)} \quad & (\nabla_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(J(X, a \frac{d}{dt})) \\
& + (\nabla_{J(Y, b \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt}) = \nabla_{(Y, b \frac{d}{dt})} J^2(X, a \frac{d}{dt}) - J(\nabla_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt}) \\
& + \nabla_{J(Y, b \frac{d}{dt})} J(X, a \frac{d}{dt}) - J(\nabla_{J(Y, b \frac{d}{dt})} (X, a \frac{d}{dt})) \\
& = -\nabla_Y X - \phi(\nabla_Y \phi(X)) + a\phi(\nabla_Y \xi) \\
& + \nabla_Y (\eta(X)) \xi + (\nabla_{\phi(Y)} \phi)(X) \\
& - a\nabla_{\phi(Y)} \xi - b(\nabla_\xi \phi)(X) + ab\nabla_\xi \xi \\
& , \left( -\eta(\nabla_Y \phi(X)) + (\nabla_{\phi(Y)} \eta)(X) - b(\nabla_\xi \eta)(X) \right) \frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

Şimdi (i-vi) eşitliklerini kullanarak (5.9) eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{N}\left(\left(X, a \frac{d}{dt}\right), \left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) &= \left(\tilde{\nabla}_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(J\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) - \left(\tilde{\nabla}_{\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(J\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&+ \left(\tilde{\nabla}_{J\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) - \left(\tilde{\nabla}_{J\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(X, a \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\tilde{\nabla}_{\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(J\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)\right) + \left(\tilde{\nabla}_{J\left(X, a \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(Y, b \frac{d}{dt}\right) \\
&- \left[ \left(\tilde{\nabla}_{\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(J\left(X, a \frac{d}{dt}\right)\right) + \left(\tilde{\nabla}_{J\left(Y, b \frac{d}{dt}\right)} J\right)\left(X, a \frac{d}{dt}\right) \right] \\
&= -\nabla_X Y - \phi\left(\nabla_X \phi(Y)\right) + b\phi\left(\nabla_X \xi\right) \\
&+ \nabla_X\left(\eta(Y)\right)\xi + \left(\nabla_{\phi(X)} \phi\right)(Y) \\
&- b\nabla_{\phi(X)} \xi - a\nabla_\xi\left(\phi(Y)\right) + ab\nabla_\xi \xi \\
&\cdot \left(-\eta\left(\nabla_X \phi(Y)\right) + \left(\nabla_{\phi(X)} \eta\right)(Y) - a\left(\nabla_\xi \eta\right)(Y)\right) \frac{d}{dt} \\
&- \left[-\nabla_Y X - \phi\left(\nabla_Y \phi(X)\right) + a\phi\left(\nabla_Y \xi\right)\right] \\
&+ \nabla_Y\left(\eta(X)\right)\xi + \left(\nabla_{\phi(Y)} \phi\right)(X) \\
&- a\tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \xi - b\left(\tilde{\nabla}_\xi \phi\right)(X) + ab\tilde{\nabla}_\xi \xi \\
&\cdot \left(-\eta\left(\tilde{\nabla}_Y \phi(X)\right) + \left(\tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \eta\right)(X) - b\left(\tilde{\nabla}_\xi \eta\right)(X)\right) \frac{d}{dt} \\
&= \left(\nabla_{\phi(X)} \phi\right)(Y) - \left(\nabla_{\phi(Y)} \phi\right)(X) - \phi\left(\left(\nabla_X \phi\right)(Y)\right) + \phi\left(\nabla_Y \phi(X)\right) \\
&+ b\phi\left(\nabla_X \xi\right) - a\phi\left(\nabla_Y \xi\right) - b\nabla_{\phi(X)} \xi + a\nabla_{\phi(Y)} \xi \\
&- a\left(\nabla_\xi \phi\right)(Y) + b\left(\nabla_\xi \phi\right)(X) + \nabla_X\left(\eta(Y)\right)\xi - \nabla_Y\left(\eta(X)\right)\xi \\
&\cdot \left(\left(\nabla_X \eta\right)\phi(Y) - \left(\nabla_Y \eta\right)(X) + \left(\nabla_{\phi(X)} \eta\right)(Y)\right) \\
&- \left(\nabla_{\phi(Y)} \eta\right)(X) - a\left(\nabla_\xi \eta\right)(Y) + b\left(\nabla_\xi \eta\right)(X)\right) \frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

$M$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü

$$N(X, Y) = (\nabla_{\phi(X)}\phi)(Y) - \phi((\nabla_X\phi)(Y)) - (\nabla_{\phi(Y)}\phi)(X) \\ + \phi((\nabla_Y\phi)(X)) + (\nabla_X\eta)(Y)\xi - (\nabla_Y\eta)(X)\xi$$

olduğundan (5.9) eşitliği sağlanır. Buradan görülür ki  $M \times \mathbb{R}$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü sıfır ise  $M$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu üzerindeki Nijenhuis tensörü sıfırdır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Bunun sağlanabilmesi için (5.9) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci bileşenden

$$\begin{cases} N(X, Y) = 0 \\ \phi(\nabla_X\xi) + (\nabla_\xi\phi)X - \nabla_{\phi(X)}\xi = 0 \end{cases}$$

ve ikinci bileşenden

$$\begin{cases} (\nabla_\xi\eta)(X) = 0 \\ (\nabla_{\phi(X)}\eta)(Y) + (\nabla_X\eta)(\phi(Y)) = 0 \end{cases}$$

eşitliklerinin aynı anda sağlanması gerekir.

**Teorem 5.7.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_0$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_0$  sınıfında olur.

**İspat** Önerme 5.5. ten açıktır.

**Teorem 5.8.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_2$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_1 \oplus W_2$  sınıfında olur.

**İspat**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  manifoldu  $F_2$  sınıfında olsun. Her

$(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$  için

$$W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), J(Z, c \frac{d}{dt})) \\ + W((Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}), J(X, a \frac{d}{dt}))$$

$$\begin{aligned}
+W((Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt}), J(Y, b \frac{d}{dt})) &= h((\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}), J(Z, c \frac{d}{dt})) \\
&+h((\tilde{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(Z, c \frac{d}{dt}), J(X, a \frac{d}{dt})) \\
&+h((\tilde{\nabla}_{(Z, c \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt}), J(Y, b \frac{d}{dt})) \\
&= h \left[ ((\tilde{\nabla}_X \phi)(Y) - b \tilde{\nabla}_X \xi, (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)) \frac{d}{dt} \right. \\
&\quad \left. , (\phi(Z) - c \xi, \eta(Z)) \frac{d}{dt} \right] \\
&+h \left[ ((\tilde{\nabla}_Y \phi)(Z) - c \tilde{\nabla}_Y \xi, (\tilde{\nabla}_Y \eta)(Z)) \frac{d}{dt} \right. \\
&\quad \left. , (\phi(X) - a \xi, \eta(X)) \frac{d}{dt} \right] \\
&+h \left[ ((\tilde{\nabla}_Z \phi)(X) - a \tilde{\nabla}_Z \xi, (\tilde{\nabla}_Z \eta)(X)) \frac{d}{dt} \right. \\
&\quad \left. , (\phi(Y) - b \xi, \eta(Y)) \frac{d}{dt} \right] \\
&= g((\tilde{\nabla}_X \phi)(Y) - b \tilde{\nabla}_X \xi, \phi(Z) - c \xi) - \eta(Z) (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y) \\
&+g((\tilde{\nabla}_Y \phi)(Z) - c \tilde{\nabla}_Y \xi, \phi(X) - a \xi) - \eta(X) (\tilde{\nabla}_Y \eta)(Z) \\
&+g((\tilde{\nabla}_Z \phi)(X) - a \tilde{\nabla}_Z \xi, \phi(Y) - b \xi) - \eta(Y) (\tilde{\nabla}_Z \eta)(X) \\
&= F(X, Y, \phi(Z)) + F(Y, Z, \phi(X)) + F(Z, X, \phi(Y)) \\
&\quad - cF(X, Y, \xi) + cF(Y, X, \xi) - aF(Y, Z, \xi) \\
&\quad + aF(Z, Y, \xi) - bF(Z, X, \xi) + bF(X, Z, \xi) \\
&\quad - \eta(Z) F(X, \phi(Y), \xi) - \eta(X) F(Y, \phi(Z), \xi) \\
&\quad - \eta(Y) F(Z, \phi(X), \xi)
\end{aligned}$$

$$= 0$$

**Teorem 5.9.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_3$  sınıfında ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  Quasi-Kaehler B-metrik manifoldu  $W_3$  sınıfında olur.

**İspat**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  manifoldu  $F_3$  sınıfında olsun. Her

$$(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} & W((X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \\ & + W((Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt})) \\ & + W((Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt}), (Y, a \frac{d}{dt})) = h((\tilde{\nabla}_{(X, a \frac{d}{dt})} J)(Y, b \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt})) \\ & \quad + h((\tilde{\nabla}_{(Y, b \frac{d}{dt})} J)(Z, c \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt})) \\ & \quad + h((\tilde{\nabla}_{(Z, c \frac{d}{dt})} J)(X, a \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt})) \\ & = h \left[ ((\tilde{\nabla}_X \phi)(Y) - b \tilde{\nabla}_X \xi, (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y) \frac{d}{dt}), (Z, c \frac{d}{dt}) \right] \\ & \quad + h \left[ ((\tilde{\nabla}_Y \phi)(Z) - c \tilde{\nabla}_Y \xi, (\tilde{\nabla}_Y \eta)(Z) \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt}) \right] \\ & \quad + h \left[ ((\tilde{\nabla}_Z \phi)(X) - a \tilde{\nabla}_Z \xi, (\tilde{\nabla}_Z \eta)(X) \frac{d}{dt}), (Y, b \frac{d}{dt}) \right] \\ & = g((\nabla_Y \phi)(Z) - c \nabla_Y \xi, Z) - c(\nabla_X \eta)(Y) \\ & \quad + g((\nabla_Y \phi)(Z) - c \nabla_Y \xi, X) - a(\nabla_Y \eta)(Z) \\ & \quad + g((\nabla_Z \phi)(X) - a \nabla_Z \xi, Y) - b(\nabla_Z \eta)(X) \\ & = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -bF(X, \phi(Z), \xi) + bF(Z, \phi(X), \xi) - cF(X, \phi(Y), \xi) \\
& + cF(Y, \phi(X), \xi) - aF(Y, \phi(Z), \xi) + aF(Z, \phi(Y), \xi) \\
& = 0
\end{aligned}$$

**Teorem 5.10.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu ve bu manifolddan elde ettiğimiz  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifold olsun.  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  semi-Kaehler B-metrik manifolddur ancak ve ancak  $\theta = 0$  ve  $\delta\eta = 0$  dir.

**İspat** İspata başlamadan önce şu bilgileri verelim.

$M$   $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontakt manifoldunun  $\phi$  taban olarak adlandırılan  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n), \xi\}$  şeklinde bir ortonormal tabanı vardır. Bu taban

$$g(e_i, e_j) = -g(\phi(e_i), \phi(e_j)) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ile birlikte hemen hemen kontakt B-metrik manifolddur. Ayrıca bu taban  $M \times \mathbb{R}$  manifoldu üzerinde  $\left\{ E_1 = (e_1, 0), \dots, E_n = (e_n, 0), JE_1 = \phi(e_1, 0), \dots, JE_n = \phi(e_n, 0), (0, \frac{d}{dt}) \right\}$  şeklinde bir  $J$  taban meydana getirir.  $J$  tabanı

$$h(E_i, E_j) = -h(JE_i, JE_j) = -h\left((0, \frac{d}{dt}), (0, \frac{d}{dt})\right) = \delta_{ij}$$

ile birlikte hemen hemen kompleks B-metrik manifolddur.

Her  $(X, a \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$  için

$$\begin{aligned}
\varphi(X, a \frac{d}{dt}) &= W((e_1, 0), (e_1, 0), (X, a \frac{d}{dt})) \\
&+ \dots + W((e_n, 0), (e_n, 0), (X, a \frac{d}{dt})) \\
&+ W((\xi, 0), (\xi, 0), (X, a \frac{d}{dt})) \\
&- \left[ W((\phi(e_1), 0), (\phi(e_1), 0), (X, a \frac{d}{dt})) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + W((\phi(e_n), 0), (\phi(e_n), 0), (X, a \frac{d}{dt})) \Big] \\
& + W((0, a \frac{d}{dt}), (0, a \frac{d}{dt}), (X, a \frac{d}{dt})) \\
& = F(e_1, e_1, X) - a(\nabla_{e_1} \eta)(e_1) + \dots + F(e_n, e_n, X) \\
& - a(\nabla_{e_n} \eta)(e_n) + F(\xi, \xi, X) \\
& - \left[ F(\phi(e_1), \phi(e_1), X) - a(\nabla_{\phi(e_1)} \eta)(\phi(e_1)) \right. \\
& \left. + \dots + F(\phi(e_n), \phi(e_n), X) - a(\nabla_{\phi(e_n)} \eta)(\phi(e_n)) \right] \\
& - \left[ F(\phi(e_1), \phi(e_1), X) + \dots + F(\phi(e_n), \phi(e_n), X) \right] \\
& - a \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \eta)(e_i) + a \sum_{i=1}^n (\nabla_{\phi(e_i)} \eta)(\phi(e_i)) \\
& = \theta(X) - a\delta\eta \\
& = 0
\end{aligned}$$

**Sonuç 5.11**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu  $F_2$  sınıfında olsun. Eğer  $\delta\eta = 0$  ise bu manifolddan elde ettiğimiz  $(M \times \mathbb{R}, J, h)$  hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu  $W_2$  sınıfında olur.

### Sonuç ve Öneriler

**Sonuç** Elimizde  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontakt B-metrik manifoldu var olsun. Bu manifoldu  $\mathbb{R}$  manifoldu ile skaler olarak çarptığımızda bir çift boyutlu hemen hemen kompleks B-metrik manifoldu elde ederiz. Eğer hemen hemen kontakt yapı  $F_0, F_2, F_3$  sınıflarında ise bu yapıdan elde ettiğimiz hemen hemen kompleks B-metrik yapı sırasıyla  $W_0, W_1 \oplus W_2, W_3$  sınıflarında olur.

**Öneri** Bu yapıların birçok sınıfları vardır. Bu tezde birkaç tanesi incelenmiştir. Bu sınıfların diğerleri çalışılabilir. Ayrıca bu yapıların eğriliklerine, eğrilik özelliklerine ve sınıfların eğrilikleri arasındaki ilişkilere bakılabilir.

## KAYNAKLAR

- Chinea, D. Gonzales, C.** (1990). A Classification of Almost Contact Metric Manifolds. *Ann Mat Pura Appl.* 156, 15-36.
- Ganchev, G. T. Borisov, A. V.** (1986). Note on the Almost Complex Manifolds with a Norden Metric. *Compt Rend Acad Bulg Sci.* 39, 31-34
- Ganchev, G. Mihova, V. Gribachev, K.** (1993). Almost Contact Manifolds with B-metric. *Math Balkanica.* 7(3-4), 261-276.
- Gray, A.** (1966). Some Examples of Almost Hermitian Manifolds. *Illinois Journal of Mathematics* 10(2), 353-366.
- Gray, A. Hervella, L.** (1980). The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants. *Ann Mat Pura Appl.* 123, 35-58.
- Lee, J. M.** (2003). *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 3-13.
- Lee, J. M.** (2010). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, New York, 38-45.
- Manev, M.** (1995). Examples of Almost Contact Manifolds with B-metric, Derived From Almost Complex Manifolds with B-metric. *Plovdiv Univ. Sci. Works-Math* 32(3), 61-66
- Manev, M. Gribachev, K.** (1993). Contactly Conformal Transformations of Almost Contact Manifolds with B-metric. *Serdica Math.* J19, 287-299
- O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*. Academic Press, New York, 6-40.
- Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 105.