T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÜKÜMLÜ YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE ACAR

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2022

10437179

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÜKÜMLÜ YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE ACAR

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2022

10437179

BEYAN

Bükümlü Yüzeyler Üzerine adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2- TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;……</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">……/……</td></tr>
</table>

MERVE ACAR

26.01.2022

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamın yürütülmesi esnasında çalışmalarıma yön veren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bana her türlü desteği sağlayan değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'ya ve çalışmam süresince deneyimleri ile bana yol gösteren Sayın Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ hocama teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme en derin duygularımla teşekkür ederim.

Merve Acar
26.01.2022

ÖZET

BÜKÜMLÜ YÜZEYLER ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde yoğunluklu Öklid uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ardından bükümlü yüzeyler incelenmiş olunup; düz bükümlü yüzeyler ve minimal bükümlü yüzeylerden bahsedilmiştir. Ayrıca bükümlü yüzeyler ile ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde yoğunluklu Öklid uzayında ağırlıklı düz ve ağırlıklı minimal bükümlü yüzeyler incelenmiştir. Yüzeylerin ağırlıklı Gauss ve ağırlıklı ortalama eğrilikleri hesaplanarak ait oldukları yüzey sınıfları belirlenmiştir. Son olarak ağırlıklı bükümlü yüzeyler ile ilgili örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yoğunluklu Öklid Uzayı, Bükümlü Yüzey, Ağırlıklı Düz Bükümlü Yüzey, Ağırlıklı Minimal Bükümlü Yüzey.

ABSTRACT

ON TWISTED SURFACES

This study consists of four parts. The first chapter includes the introduction. In the second part, basic concepts in Euclidean space are given. In addition, in this section, curves and surfaces in Euclidean space are mentioned.

In the third chapter, basic concepts in Euclidean space with density are given. Then twisted surfaces have been examined; flat twisted surfaces and minimal twisted surfaces are mentioned. In addition, examples of twisted surfaces are given.

The fourth part is the original part of this study. In this section, weighted flat and weighted minimal twisted surfaces in Euclidean space with density have been examined. By calculating the weighted Gaussian and weighted mean curvatures of the surfaces, the surface classes they belong to have been determined. Finally, examples related to the weighted twisted surfaces are given.

Keywords: Euclidean Space with Density, Twisted Surface, Weighted Flat Twisted Surface, Weighted Minimal Twisted Surface.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖN SÖZ ..... **i**

ÖZET ..... **ii**

ABSTRACT ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **v**

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ ..... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR **3**

2.1. Öklid Uzayı **3**

2.2. Öklid Uzayında Eğriler **6**

2.3. Öklid Uzayında Yüzeyler **13**

3. YOĞUNLUKLU ÖKLİD UZAYI **24**

3.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Temel Kavramlar **24**

3.2. Bükümlü Yüzeyler **26**

3.3. Bükümlü Yüzey Örnekleri **28**

3.4. Düz Bükümlü Yüzeyler **30**

3.5. Minimal Bükümlü Yüzeyler **33**

4. YOĞUNLUKLU ÖKLİD UZAYINDA AĞIRLIKLI DÜZ VE AĞIRLIKLI MİNİMAL BÜKÜMLÜ YÜZEYLER **35**

4.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Ağırlıklı Düz Bükümlü Yüzeyler **35**

4.2. Yoğunluklu Öklid Uzayında Ağırlıklı Minimal Bükümlü Yüzeyler **44**

KAYNAKÇA **55**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. $\mathbb{R}^n$ de eğri **6**

Şekil 2.2. Parametre değişimi **7**

Şekil 2.3. Frenet vektörleri **10**

Şekil 2.4. Silindir **15**

Şekil 2.5. Koni **16**

Şekil 2.6. Helikoid **20**

Şekil 2.7. Katenoid **21**

Şekil 2.8. Monge yüzeyi **22**

Şekil 2.9. Öteleme yüzeyi **23**

Şekil 3.1. Bükümlü bir yüzeyin parametrizasyonunun koordinat düzleminde gösterimi **27**

Şekil 3.2. Möbius şeridi **29**

Şekil 3.3. Bükümlü Klein şişesi **30**

Şekil 3.4. Teorem 3.4.1. de $b = 1/2$ ve $c = 1$ alındığında elde edilen koni yüzeyi **32**

Şekil 3.5. Teorem 3.4.1. de $b = c = 1$ alındığında elde edilen koni yüzeyi **32**

Şekil 3.6. Bükümlü küre **33**

Şekil 4.1. Ağırlıklı bükümlü yüzey **53**

Şekil 4.2. Dönel yüzey **54**

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Simgeler

$\mathbb{E}^n$: n-Boyutlu Öklid Uzayı

$\mathbb{R}$: Reel İç Çarpım Uzayı

$\boldsymbol{V}$: Vektör Uzayı

$\langle , \rangle$: İç Çarpım Fonksiyonu

$\boldsymbol{T_p(S)}$: S'nin P Noktasındaki Tanjant Uzayı

$\| , \|$: Norm

$\wedge$: Vektörel Çarpım

$\boldsymbol{d}$: Metrik

$\boldsymbol{V_i}$: $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında i-yinci Frenet Vektörü

$\boldsymbol{k_i}$: $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında i-yinci Frenet Eğriliği

$\{\boldsymbol{T(s)}, \boldsymbol{N(s)}, \boldsymbol{B(s)}\}$: Frenet Vektörleri

$\boldsymbol{K}$: Gauss Eğriliği

$\boldsymbol{H}$: Ortalama Eğrilik

$\boldsymbol{\nabla}$: Gradiyent

Δ : Laplas operatörü

$\boldsymbol{I}$: Birinci Temel Form

$\boldsymbol{II}$: İkinci Temel Form

$\boldsymbol{\rho}$: Eğrilik Yarıçapı

$\boldsymbol{\kappa}$: Eğrilik Fonksiyonu

$\boldsymbol{\tau}$: Burulma Fonksiyonu

$\boldsymbol{\mathcal{X}}$: Regüler Yama

$\boldsymbol{\varphi}$: Yoğunluk Fonksiyonu

$\boldsymbol{dA}$: Ağırlıklı Alan

$\boldsymbol{dV}$: Ağırlıklı Hacim

$\mathbb{G}^{\boldsymbol{m}}$: Gauss Uzayı

$\boldsymbol{\chi}$: Euler Karakteristiği

1. GİRİŞ

Klasik diferansiyel geometrinin en önemli kısmını, yüzeylerle ilgili çalışmalar oluşturur. Sabun köpüğünden kan hücrelerine kadar 3-boyutlu Öklid uzayındaki tüm yüzey şekilleri, çeşitli eğrilikler tarafından belirlenir (Osserman, R., (1990)). Yüzeyler üzerindeki eğriliklerden ilk akla gelenler; yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleridir. Bu eğriliklerin hesaplanması için, yüzeylerin birinci ve ikinci temel form katsayılarından yararlanılmaktadır. Yüzeylerin birinci ve ikinci temel form katsayıları, yüzeyler hakkında diferansiyel geometrik bilgiler vermektedir. Gauss eğriliği, yüzeyin içsel bir özelliğidir; yani yüzeyin birinci temel formu ile onun türevinden elde edilebilir. Ortalama eğrilik ise, yüzeyin uzayda nasıl yattığını ölçen dışsal bir özelliktir (Germain, S., (1831)).

Son zamanlarda çeşitli uzaylarda dönel yüzeyler, regle yüzeyler, helikoidal yüzeyler vb. birçok yüzey türü incelenmiştir. Gray A., 3-boyutlu Öklid uzayında Möbius şeridini ve bükümlü Klein şişesini oluşturmak için kullanılan yapıyı genelleştirerek ‘‘bükümlü yüzey’’ terimini tanıttı (Gray, A., (1998)). Stanilov ve Slavova, bükümlü yüzeylerin yönlendirilebilirliğini ve güç serilerini incelediler (Stanilov, G., & Slavova, S., (2006)). Goemans ve Woestyne tarafından 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında düz, minimal, sabit Gauss eğrilikli ve sabit ortalama eğrilikli bükümlü yüzeyler sınıflandırılmıştır (Goemans, W., & Woestyne, I. Van de, (2013); Goemans, W., & Woestyne, I. Van de, (2014)). Ayrıca son zamanlarda geometri ve fizikçiler için önemli bir konu olan yoğunluklu manifold kavramı birçok bilim insanı tarafından incelenmiştir. Öklid, Minkowski ve Galile uzaylarında yoğunluklu manifoldlar üzerindeki eğrilerin ve hiperyüzeylerin diferansiyel geometrisi geometriciler, fizikçiler vb. için önemli bir konu olmaya başlamıştır. Belarbi ve Belkhelfa yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyleri incelediler ve yoğunluklu bir Riemann manifoldu için bazı sonuçlar verdiler (Belarbi, L., Belkhelfa, M., (2012); Belarbi, L., Belkhelfa, M., (2015)). Ağırlıklı ortalama ve ağırlıklı Gauss eğriliklerine sahip helikoidal yüzeyler, yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında (Yoon, D.W.; Kim, D.S.; Kim, Y.H.; Lee, J.W., (2017)), yoğunluklu Minkowski uzayında (Yıldız, Ö.G.; Hızal, S.; Akyiğit, M., (2018)) vb. birçok farklı uzayda çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı düz bükümlü yüzeyler ve ağırlıklı minimal bükümlü yüzeyler incelenmiştir. İlk olarak yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında bükümlü yüzeyin ağırlıklı Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Daha sonra e^z yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında bükümlü yüzeyin ağırlıklı ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Bu eğrilikler ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ deki eğriler ve yüzeyler konusu ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $\forall P, Q, R \in A$ için aşağıda verilen iki aksiyomu sağlayan

$$f: \ A \ x \ A \ \rightarrow \ V$$

$$(P, Q) \ \rightarrow \ f\ (P, Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$$

dönüşümü varsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş *afin uzayı* denir:

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f\ (P,R) = f\ (P,Q) + f\ (Q,R)$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall\ x \in V$ için $f\ (P,Q) = x$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektörünün başlangıç noktası P, bitiş noktası ise Q'dur (Hacısalihoğlu, 2000: 1).

Tanım 2.1.2. V bir vektör uzayı olsun. A, V vektör uzayı ile eşlenen afin uzay olmak üzere, $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektörlerinin kümesi V vektör uzayının bir tabanı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ –lisine A afin uzayının *afin çatısı* adı verilir. P_0 noktasına çatının *başlangıç noktası*, $P_i\ ;\ 1 \leq i \leq n$, noktalarına ise çatının *uç noktaları* denir. $boyV = n$ ise A, *n-boyutlu bir afin uzay* olur. (Yüce, 2017: 4).

Tanım 2.1.3. A bir reel afin uzay, A ile eşlenen vektör uzayı ise V olsun. V üzerinde

$$\langle , \rangle: \ V \ x \ V \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

şeklinde tanımlanan reel değerli fonksiyon, $\forall\ x, y, z \in V$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

i) Pozitif Tanımlılık (Kararlılık) Aksiyomu:

$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

ii) Simetri Aksiyomu:

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

iii) 1. Yere Göre Lineerlik:

$\langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

iv) 2. Yere Göre Lineerlik:

$\langle x, y + az \rangle = \langle x, y\rangle + a\langle x, z\rangle$

aksiyomlarını sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım fonksiyonu* denir (Axler, 2015: 166).

Tanım 2.1.4. A bir reel afin uzay, A ile eşlenen vektör uzayı ise V olsun. V vektör uzayında

$\langle , \rangle$: $V \; x \; V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,, \qquad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

olacak şekilde Öklid iç çarpımı (standart iç çarpım) tanımlanırsa A afin uzayında uzaklık ve açı gibi metrik kavramlardan bahsedilebilir. Böylece A afin uzayına *n-boyutlu Öklid uzayı* denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$ ile eşlenen reel vektör uzayı V ise $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000: 4).

Özel olarak; 3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım.

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

olmak üzere $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı;

$\langle , \rangle$: $\mathbb{R}^3 \; x \; \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. n-boyutlu standart reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ ile birleşen Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olmak üzere; $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektörlerinin kümesi $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortonormal tabanı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)-$lisine $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir *Öklid çatısı* adı verilir (Yüce, 2013: 11).

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.7. V n-boyutlu bir iç çarpım uzayı, V ile birleşen Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$d: \mathbb{R}^n x\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

eşitliği ile tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında *uzaklık fonksiyonu* denir ve $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$ için x ile y noktaları arasındaki uzaklık $d(x,y)$ ile gösterilir. d uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metrik belirtir ve belirttiği metriğe *Öklid metriği* denir (Yüce, 2013: 13).

Tanım 2.1.8. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ üç farklı nokta olsun. $\overrightarrow{xy}$ ile $\overrightarrow{xz}$ vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\|\ \|\overrightarrow{xz}\|}$$

eşitliği ile hesaplanır (Yüce, 2013: 13).

Tanım 2.1.9. $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı ve $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\wedge: \mathbb{R}^3\ x\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \to x \wedge y = \sum_{i=1}^{3} det(e_i, x, y) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

biçiminde tanımlı $\wedge: \mathbb{R}^3\ x\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna *vektörel çarpım* denir. $x \wedge y$ vektörü, x ve y vektörlerinin her ikisine de diktir. Ayrıca *vektörel çarpımın normu*

$$\|x \wedge y\| = \|x\|\ \|y\| \sin\theta$$

eşitliği ile tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

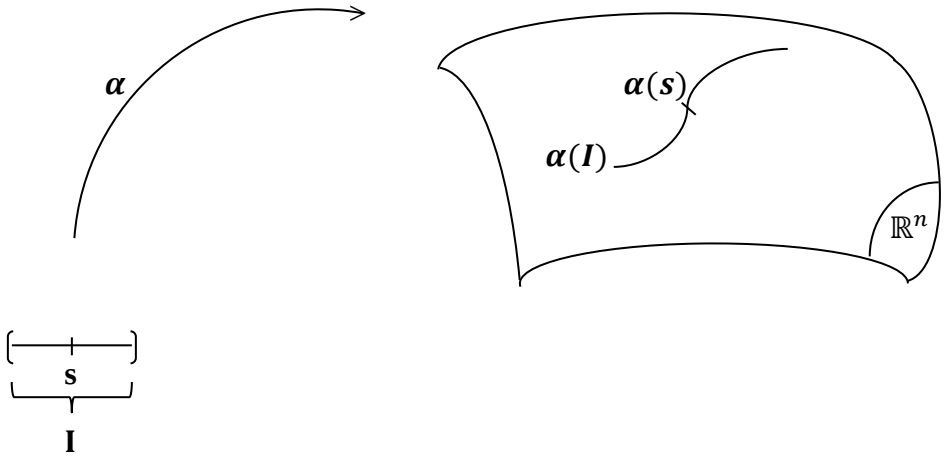
2.2. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı ve $I = (a, b)$, $\mathbb{R}$ nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere;

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ cümlesine, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir *eğri* denir. $I \subset \mathbb{R}$ alt cümlesine α eğrisinin *parametre aralığı* ve $s \in I$ reel sayısına da α eğrisinin *parametresi* denir (Hacısalihoğlu, 2000: 139).

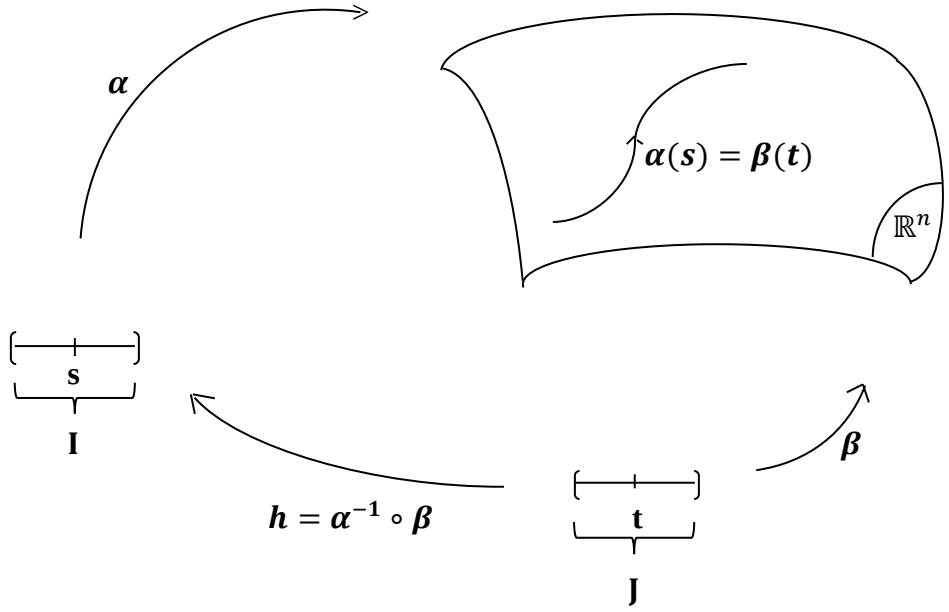


Şekil 2.1. $\mathbb{R}^n$ de eğri

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}^n$ de bir α eğrisi ile (I, α) ve (J, β) şeklinde iki koordinat komşuluğu verilsin. α eğrisinin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi olan

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta \; ; \; J \to I$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna α nın bir *parametre değişimi* adı verilir (Yüce, 2013: 100).



Şekil 2.2. Parametre Değişimi

Tanım 2.2.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall\, s \in I$ için $\alpha(s+t) = \alpha(s)$ eşitliğini sağlayan en az bir t pozitif tam sayısı varsa α eğrisine *kapalıdır* denir (Millman ve Parker, 1977: 53).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^n$ de bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$

$s \in I$ ve $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$ olmak üzere, $\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \dots, \alpha'_n(s))$ şeklinde tanımlanan vektöre, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *hız vektörü* denir (Yüce, 2013: 97).

Tanım 2.2.5. Her noktasındaki teğet vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* adı verilir. Yani;

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$

olmak üzere, $\forall\, s \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa, α eğrisi regüler eğridir (Hacısalihoğlu, 2000: 150).

Tanım 2.2.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R}$$

$$s \to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\|$$

biçiminde tanımlı fonksiyona α eğrisinin *skaler hız fonksiyonu*, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *skaler hızı* denir (Yüce, 2013: 98).

Tanım 2.2.7. $\mathbb{R}^n$ de bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall\, s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

şartını sağlayan α eğrisi *birim hızlı eğri*, $s \in I$ parametresi ise eğrinin *yay-parametresi* olarak adlandırılır (Yüce, 2013: 99).

Tanım 2.2.8. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $a, b \in I$ için

$$\int_b^a \|\alpha'(s)\|\, ds\ ;\ \ s \in I$$

reel sayısına, α eğrisinin $s = a$ ile $s = b$ arasındaki *yay-uzunluğu* denir (Yüce, 2013: 102).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile tanımlı $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü* denir. T fonksiyonu, I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getirdiğinden T, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır ve bu vektör alanına, α eğrisinin *birim teğet vektör alanı* adı verilir (Sabuncuoğlu, 2016: 74).

Tanım 2.2.10. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin.

$$\kappa: I \to \mathbb{R}$$

$$s \to \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

dönüşümüne, α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir. $\kappa(s)$ reel sayısına, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* denir (Sabuncuoğlu, 2016: 74).

$\kappa(s)$ reel sayısının büyüklüğü, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinden ne kadar uzaklaştığının ölçüsüdür.

Tanım 2.2.11. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $1/\kappa$ fonksiyonuna α eğrisinin *eğrilik yarıçapı fonksiyonu* adı verilir ve ρ ile gösterilir. $s \in I$ için $\rho(s)$ reel sayısına ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğrilik yarıçapı* adı verilir (Sabuncuoğlu, 2016: 91).

Tanım 2.2.12. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliği ile tanımlı $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *asli normal vektörü* (*birinci dik vektörü*), N vektör alanına da eğrinin *asli normal vektör alanı* denir (Sabuncuoğlu, 2016: 75).

Tanım 2.2.13. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin.

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *binormal vektörü* (*ikinci dik vektörü*), B vektör alanına ise eğrinin *binormal vektör alanı* denir (Sabuncuoğlu, 2016: 75).

Tanım 2.2.14. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere;

$$\tau: I \to \mathbb{R}$$

$$s \to \tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle = \langle B(s), N'(s)\rangle$$

şeklinde tanımlı dönüşüme, eğrinin *burulma fonksiyonu* denir. $\tau(s)$ reel sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulması* (*torsiyonu*) denir (Sabuncuoğlu, 2016: 76).

$\tau(s)$ reel sayısı, eğrinin oskülatör düzleminden ne kadar uzaklaştığını ölçer.

Tanım 2.2.15. $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere;

i) $\kappa = 0$ ise α eğrisi bir doğrudur.

ii) $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$ ise α eğrisi düzlemseldir.

iii) $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = 0$ ise α eğrisi yarıçapı $1/\kappa$ olan çemberdir.

iv) $\tau/\kappa = sabit \Leftrightarrow \alpha$ eğrisi bir helistir. Eğer $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ ise α eğrisi dairesel bir helistir (Millman ve Parker, 1977: 25, 31, 32).

Tanım 2.2.16. $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Burada $k > r$ için $\forall\, \alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, lineer bağımsız $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sisteminden elde edilmiş olan $\{V_1, V_2, \dots, V_r\} = \{T, N_1, N_2, \dots, N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin *Serret-Frenet r-ayaklı alanı* denir. $s \in \alpha$ için $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} = \{T(s), N_1(s), N_2(s), \dots, N_{r-1}(s)\}$ ye ise $s \in \alpha$ noktasındaki *Serret-Frenet r-ayaklısı* denir. $V_i(t),\ 1 \le i \le r$ vektörlerinin her birine *Serret-Frenet vektörü* adı verilir (Yüce, 2013: 127).

Tanım 2.2.17. $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *oskülatör hiperdüzlemi* $\{T(s), N_1(s), N_2(s), \dots, N_{n-1}(s)\}$ tabanı ile gerilen hiperdüzlemdir. Burada $N_n(s)$ vektörü, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörüdür. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *normal hiperdüzlemi* ise $\{N_1(s), N_2(s), \dots, N_n(s)\}$ tabanı ile gerilen hiperdüzlemdir (Fuster ve Codesal 1999: 299).

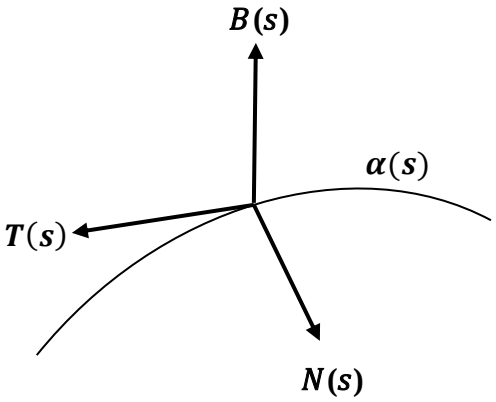
Teorem 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında keyfi hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere;

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$N(s) = B(s) \wedge T(s)$$

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}$$

dir. Burada $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörleri, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet vektörleri* olarak adlandırılır. T, N, B vektör alanlarına ise α eğrisi üzerinde *Frenet vektör alanları* denir. $\{T, N, B\}$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir ortonormal çatıdır ve bu çatıya *Frenet çatısı* denir (Sabuncuoğlu, 2016: 76).



Şekil 2.3. Frenet vektörleri

Teorem 2.2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörleri, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet vektörleri* olmak üzere;

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

dir (Tu, 2017: 15).

Teorem 2.2.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet vektör alanları T, N, B; eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla κ, τ olmak üzere

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir. Frenet formüllerinin matris formunda gösterimi ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve burada

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1, \qquad \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$$

dır (Shifrin, 2016: 11).

Tanım 2.2.18. $\mathbb{R}^n$ uzayında bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun.

$$k_i: I \to \mathbb{R}, \ 1 \le i \le r$$

$$s \to k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

biçiminde verilen k_i fonksiyonuna α eğrisinin *i-yinci eğrilik fonksiyonu*, $s \in I$ için $k_i(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *i-yinci eğriliği* denir (Hicks, 1965: 18).

Teorem 2.2.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ keyfi hızlı, regüler bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve i-yinci eğriliği $k_i(s)$ olmak üzere, *Frenet Formülleri*

i) $V_1'(s) = \vartheta(s)k_1(s)V_2(s)$

ii) $V_i'(s) = -\vartheta(s)k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + \vartheta(s)k_i(s)V_{i+1}(s),\ 1 < i < r$

iii) $V_r'(s) = -\vartheta(s)k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

şeklinde tanımlanır. Burada $\vartheta(s) = \|\alpha'(s)\|$, α eğrisinin hız fonksiyonudur (Hacısalihoğlu, 2000: 155).

Teorem 2.2.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı eğrisi verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ ve i-yinci eğriliği $k_i(s)$ olmak üzere Frenet formülleri

i) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

ii) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),\ 1 < i < r$

iii) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

olur. Bu formüllerin matris formunda gösterimi ise şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

(Hacısalihoğlu, 2000: 155).

Özel Hal $n = 3$ durumunda; $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada 1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değerine *eğrilik* adı verilir ve ‘‘$\kappa(s)$’’ şeklinde gösterilir. 2-inci eğrilik olan $k_2(s)$ değerine ise *burulma*(*torsiyon*) adı verilir ve ‘‘$\tau(s)$’’ şeklinde gösterilir (İlarslan, 2002: 22).

Teorem 2.2.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında keyfi hızlı, regüler bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin eğriliği ve burulması(torsiyonu) ise sırasıyla;

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

formülleri ile hesaplanır (Mccleary, 1997: 87).

Tanım 2.2.19. Bir eğrinin tüm noktaları bir düzlem içerisinde yer alıyorsa bu eğriye *düzlemsel eğri* adı verilir. Ayrıca düzlemsel $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^2$ eğrisinin parametrik gösterimi

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$$

şeklindedir (Millman ve Parker, 1977: 31).

Düzlemsel $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği ise

$$\kappa(s) = \frac{\alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_1''(s)\alpha_2'(s)}{((\alpha_1'(s))^2 + (\alpha_2'(s))^2)^{3/2}}$$

dir.

2.3. Öklid Uzayında Yüzeyler

Tanım 2.3.1. U, $\mathbb{R}^2$ uzayının açık bir alt cümlesi olmak üzere;

$$\mathcal{X}: U \to \mathbb{R}^3$$

$$(s,t) \to \mathcal{X}(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))$$

şeklinde tanımlanan diferansiyellenebilir dönüşüme $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *yama* denir (Gray, 1998: 288).

Tanım 2.3.2. $\forall\ (s,t) \in U$ için $J(x)(s,t)$ Jakobien matrisinin rankı 2 ise $\mathcal{X}: U \to \mathbb{R}^3$

yamasına *regüler yama* denir (Gray, 1998: 291).

Tanım 2.3.3. $\mathcal{X}: U \to \mathbb{R}^3$ regüler yaması için aşağıdakiler birbirine denktir:

i) $\mathcal{X}_s(s_0, t_0)$ ve $\mathcal{X}_t(s_0, t_0)$ lineer bağımsızdır.

ii) $\forall\ (s_0, t_0)$ noktası için $det \begin{pmatrix} \langle \mathcal{X}_s, \mathcal{X}_s \rangle & \langle \mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t \rangle \\ \langle \mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t \rangle & \langle \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_t \rangle \end{pmatrix} \neq 0$

iii) $\forall\ (s_0, t_0)$ noktası için $J(x)(s,t)$ Jakobien matrisinin rankı 2 dir.

(Gray, 1998: 295).

Tanım 2.3.4. U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı açık alt kümesi olmak üzere $\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{X}: U \to \mathcal{X}(U)$ fonksiyonu bir homeomorfizm ise $\mathcal{X}(U)$ kümesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *basit yüzey* denir (Sabuncuoğlu, 2016: 114).

Tanım 2.3.5. U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı açık alt cümlesi olarak verilsin. $S \subset \mathbb{R}^3$ alt cümlesinin regüler bir parametrizasyonu

$$\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3 \,,\ \mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t \neq 0$$

biçiminde tanımlı diferansiyellenebilir, birebir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{X}^{-1}: \mathcal{X}(U) \to U$ ters dönüşümü sürekli ve $S \subset \mathbb{R}^3$ bağlantılı alt cümlesinin her noktasında regüler parametrizasyonlu bir komşuluk varsa ya da diğer bir ifadeyle S nin her bir p noktası için $p \in \mathcal{X}(U)$ *ve* $\mathcal{X}(U) \subseteq S$ olacak şekilde bir $\mathcal{X}(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa S cümlesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *yüzey* denir (Shifrin, 2016: 35).

Tanım 2.3.6. S, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olmak üzere, S yüzeyi üzerinde $s = s_0$ sabit ve t değişken alınarak oluşturulan eğriye t*-parametre eğrisi*, $t = t_0$ sabit ve s değişken alınarak oluşturulan eğriye s*-parametre eğrisi* adı verilir (Shifrin, 2016: 35).

Tanım 2.3.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin bir λ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeylere *dönel yüzey* denir. λ doğrusuna *dönel yüzeyin ekseni* adı verilir. Dönme ekseninden geçen bir düzlemin, dönel yüzey ile arakesiti olan eğriye ise *dönel yüzeyin meridyeni* adı verilir.

Örneğin; bir $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ düzlemsel eğrisinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin parametrik gösterimi

$$x(s,t) \ = \ (\alpha_1(s), \alpha_2(s)cost, \alpha_2(s)sint)$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2016: 333).

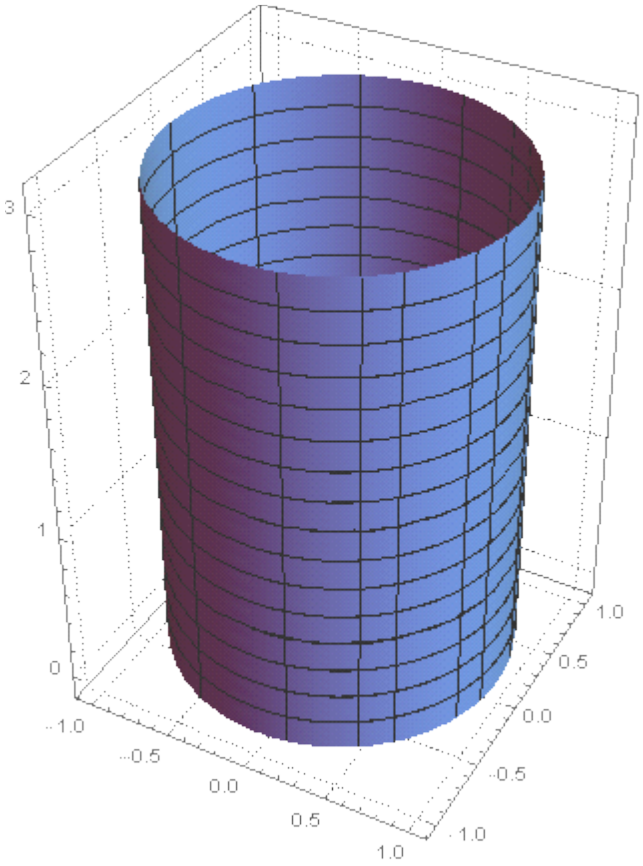
Tanım 2.3.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ve bu eğriye bağlı bir $x(s)$ doğrusu verilsin. $x(s)$ doğrusunun α eğrisine dayanarak hareket etmesiyle oluşan yüzeye *regle yüzey* denir. Burada α eğrisine regle yüzeyin *dayanak eğrisi,* $x(s)$ doğrusuna ise regle yüzeyin *anadoğrusu (doğrultmanı)* adı verilir. Bir regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\gamma : I \ x \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

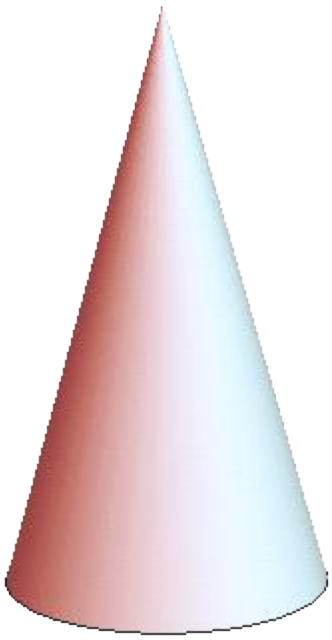
$$(s,v) \to \gamma(s,v) \ = \alpha(s) \ + vx(s)$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2016: 348).

Regle yüzeylerin en çok bilinen örnekleri; silindir ve koni yüzeyleridir.



Şekil 2.4. Silindir



Şekil 2.5. Koni

Tanım 2.3.9. S yüzeyi $\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yaması ile verilsin. S nin $p \in \mathcal{X}(s,t)$ noktasındaki $\mathcal{X}_s$ ve $\mathcal{X}_t$ teğet vektörlerinin oluşturduğu düzleme *teğet düzlemi* denir. Bu teğet vektörleri tarafından gerilen vektör uzayına ise *teğet(tanjant) uzayı* denir ve $T_p(S)$ ile gösterilir (Shifrin, 2016: 38).

Tanım 2.3.10. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise yüzeye *açılabilir regle yüzey* denir (Lipschultz, 1969: 256).

Tanım 2.3.11. $\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yaması ile verilen S yüzeyinin $p \in \mathcal{X}(s,t)$ noktasındaki teğet vektörleri $\mathcal{X}_s$ ve $\mathcal{X}_t$ olsun. $\mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t \neq 0$ olmak üzere S yüzeyinin normali,;

$$N = \mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektör, yüzeyin tüm noktalarında yüzeyin teğet düzlemine diktir. Yani yüzeyin normali, hem $\mathcal{X}_s$ vektörüne hem de $\mathcal{X}_t$ vektörüne diktir. Yüzeyin birim normali ise

$$N = \frac{\mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t}{\|\mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t\|}$$

şeklinde tanımlanır (Gray, 1998: 295).

Tanım 2.3.12. $\mathcal{X}(s,t)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. N birim normal vektör olmak üzere, $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyinin I. temel formu;

$$I = Eds^2 + 2Fdsdt + Gdt^2$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada I. temel formun katsayıları

$$E = \langle \mathcal{X}_s, \mathcal{X}_s \rangle$$

$$F = \langle \mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t \rangle$$

$$G = \langle \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_t \rangle$$

şeklindedir. $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyinin II. temel formu ise;

$$II = eds^2 + 2fdsdt + gdt^2$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada II. temel formun katsayıları

$$e = \langle \mathcal{X}_{ss}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} det(\mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{ss})$$

$$f = \langle \mathcal{X}_{st}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} det(\mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{st})$$

$$g = \langle \mathcal{X}_{tt}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} det(\mathcal{X}_s, \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{tt})$$

şeklindedir (Gray, 1998: 394).

Hesaplamada kolaylık sağlaması açısından

$$\overline{e} = \langle \mathcal{X}_{ss}, \mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t \rangle$$

$$\overline{f} = \langle \mathcal{X}_{st}, \mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t \rangle$$

$$\overline{g} = \langle \mathcal{X}_{tt}, \mathcal{X}_s \wedge \mathcal{X}_t \rangle$$

alınarak $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\overline{e}G - 2\overline{f}F + \overline{g}E}{2(EG - F^2)^{3/2}}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Tanım 2.3.13. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyi verilsin. Yüzey üzerinde alınan bir $p \in \mathcal{X}(s,t)$ noktası için

$II = eds^2 + 2fdsdt + gdt^2 = 0 \Longrightarrow ds = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - eg}}{e} dt$ olmak üzere;

i) $f^2 - eg < 0$ ise reel kök yoktur. Bu durumda teğet düzlemi, yüzeyi sadece p noktasında keser. Bu p noktasına *eliptik nokta* denir.

ii) $f^2 - eg = 0$ ise teğet düzlemi, yüzeyi doğru boyunca keser ve p noktasına *parabolik nokta* denir.

iii) $f^2 - eg > 0$ ise teğet düzlemi, yüzeyi iki doğru boyunca keser ve p noktasına *hiperbolik nokta* denir.

iv) $f = e = g$ ise teğet düzlemi, yüzeye birden fazla noktada teğet olur ve p noktasına *düzlemsel nokta* denir (Gray, 1998: 398).

Teorem 2.3.1. $\mathcal{X}(s,t)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olmak üzere, $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

ve

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

eşitlikleri ile hesaplanır (Gray, 1998: 400).

Tanım 2.3.14. $\mathcal{X}(s,t)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olmak üzere,

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{eds^2 + 2fdsdt + gdt^2}{Eds^2 + 2Fdsdt + Gdt^2}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe yüzeyin *normal eğriliği* denir. Yüzey üzerinde bulunan bir noktadaki asli eğrilikler (maksimum ve minimum normal eğrilikler) sırasıyla;

$$\kappa_{max} = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$\kappa_{min} = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dir. Asli eğrilikler kullanılarak Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik

$$K = \kappa_{max}\kappa_{min}$$

$$H = \frac{\kappa_{max} + \kappa_{min}}{2}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir (Gray, 1998: 402).

Tanım 2.3.15. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyi verilsin. Yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

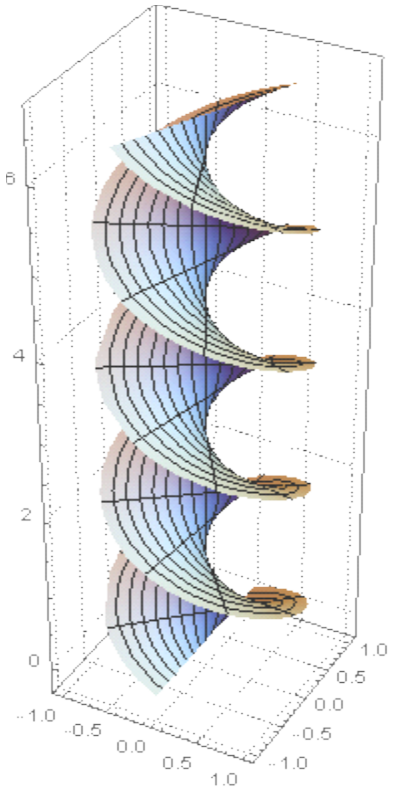
olmak üzere, $K = 0$ olması durumunda $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyi *düz yüzey* olarak adlandırılır (Gray, 1998: 398).

Tanım 2.3.16. $\mathcal{X}(s,t)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. Yüzeyin ortalama eğriliği

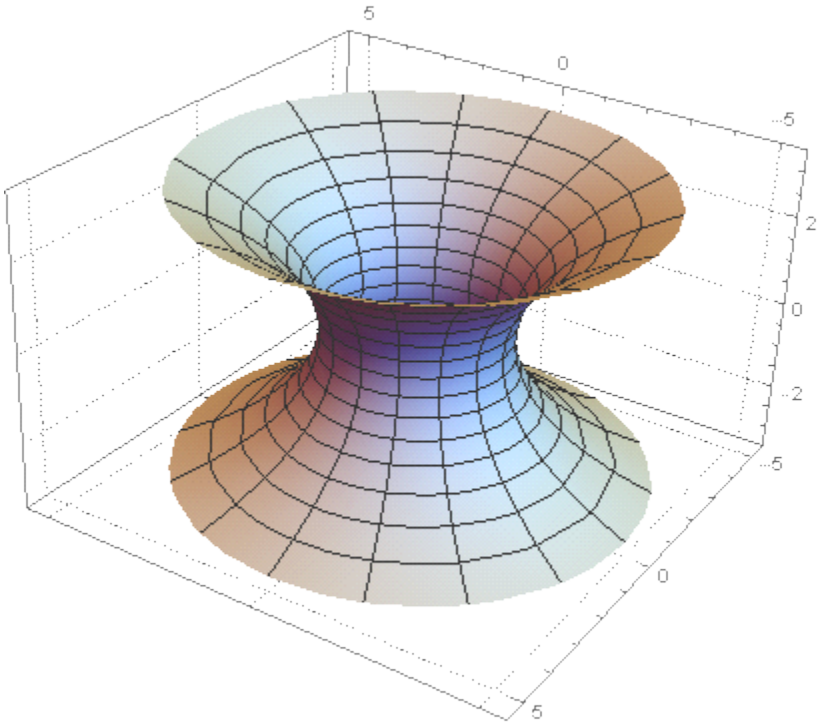
$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında $H = 0$ ise $\mathcal{X}(s,t)$ yüzeyi *minimal yüzey* olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle; aynı sınırlara sahip yüzeyler ailesi içinde en küçük alana sahip yüzeye *minimal yüzey* adı verilir (Gray, 1998: 398).

Bu yüzey sınıfının en meşhur örnekleri; helikoid ve katenoid yüzeyleridir.



Şekil 2.6. Helikoid



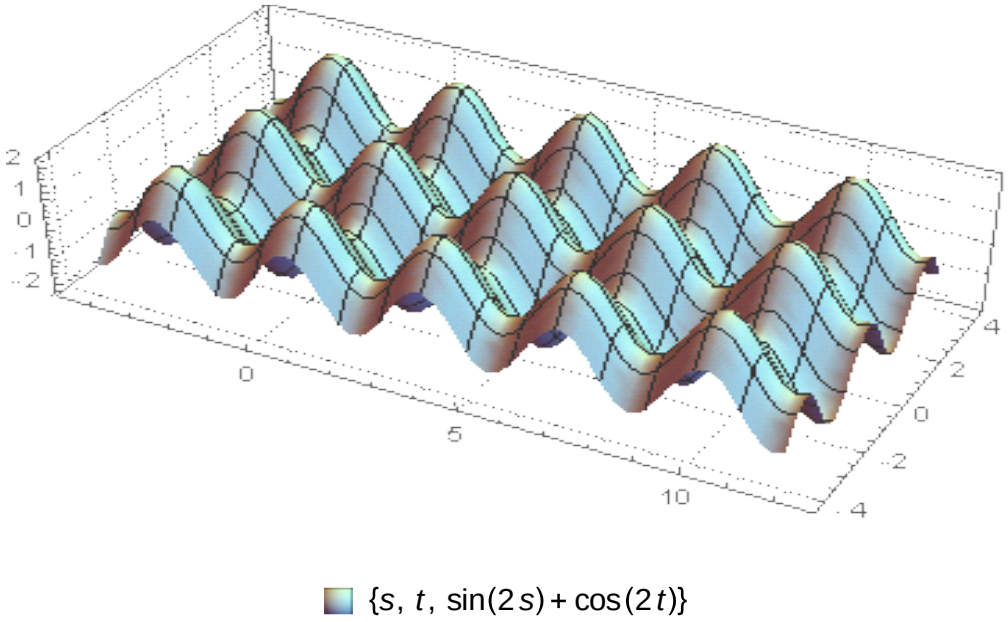
Şekil 2.7. Katenoid

Teorem 2.3.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal bir dönel yüzey; bir düzlem veya bir katenoiddir (Oprea, 2007: 155).

Tanım 2.3.17. $\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(s,t) \rightarrow \mathcal{X}(s,t) = (s,t,f(s,t))$$

biçiminde tanımlanan yüzeylere *Monge yüzeyi* adı verilir. Burada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli, diferansiyellenebilir bir fonksiyondur (Sabuncuoğlu, 2016: 128).



Şekil 2.8. Monge yüzeyi

Teorem 2.3.3. $\mathcal{X}(s,t) = (s,t,f(s,t))$ yaması ile verilen Monge yüzeyinin I. temel formunun katsayıları;

$$E = 1 + {f_s}^2$$

$$F = f_s f_t$$

$$G = 1 + {f_t}^2$$

ve II. temel formunun katsayıları;

$$e = \frac{f_{ss}}{\sqrt{1 + {f_s}^2 + {f_t}^2}}$$

$$f = \frac{f_{st}}{\sqrt{1 + {f_s}^2 + {f_t}^2}}$$

$$g = \frac{f_{tt}}{\sqrt{1 + {f_s}^2 + {f_t}^2}}$$

dir. Monge yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği ise sırasıyla;

$$K = \frac{f_{ss}f_{tt} - f_{st}}{(1 + {f_s}^2 + {f_t}^2)^2}$$

$$H = \frac{(1 + {f_s}^2)f_{tt} - 2f_s f_t f_{st} + (1 + {f_t}^2)f_{ss}}{(1 + {f_s}^2 + {f_t}^2)^{3/2}}$$

eşitlikleri ile hesaplanır (Gray, 1998: 409).

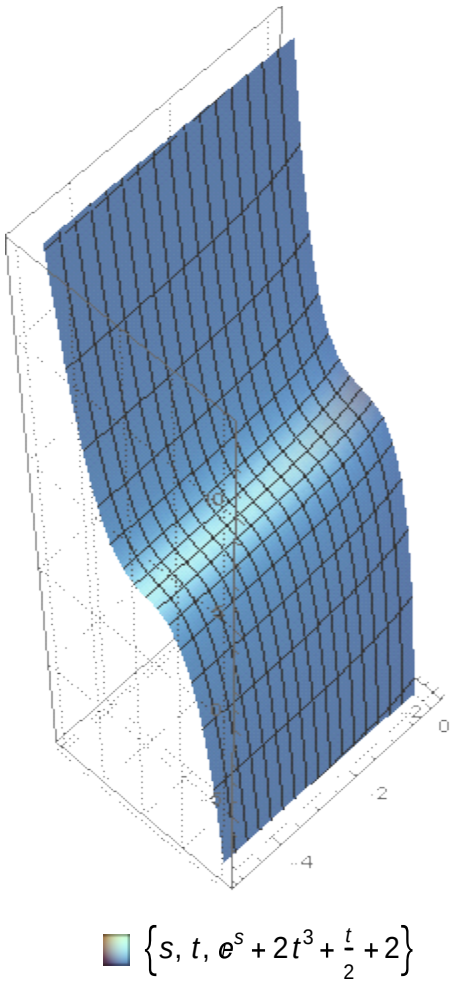
Tanım 2.3.18. Monge yüzeyinde $f(s,t) = h(s) + g(t)$ şeklinde bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{X}(s,t) = (s,t,h(s) + g(t))$$

$$\mathcal{X}(s,t) = (s,0,h(s)) + (0,t,g(t))$$

$$\mathcal{X}(s,t) = \gamma(s) + \beta(t)$$

Böylece yüzey, $\gamma(s)$ ve $\beta(t)$ uzay eğrilerinin toplamı biçiminde tanımlanır ve *öteleme yüzeyi* adını alır (Erwin, 2013: 45).



Şekil 2.9. Öteleme yüzeyi

3. YOĞUNLUKLU ÖKLİD UZAYI

3.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Hacmi ve yüzey alanını ağırlıklandıran pozitif bir e^{φ} fonksiyonuna sahip Riemann manifoldu *yoğunluklu manifold (ağırlıklı manifold)* olarak adlandırılır. Bir Riemann manifoldunun hacmi dV_0 ve alanı dA_0 olmak üzere; ağırlıklı hacmi ve ağırlıklı alanı sırasıyla;

$$dV = e^{\varphi} dV_0$$

$$dA = e^{\varphi} dA_0$$

şeklinde tanımlanır (Morgan, 2005: 853).

Tanım 3.1.2. Orijinden uzaklığı r yarıçapı kadar olan ve Gauss yoğunluğu $2\pi^{-m/2}e^{-r^2/2}$ olarak verilen $\mathbb{R}^m$ uzayına, *Gauss uzayı* denir ve $\mathbb{G}^m$ ile gösterilir. Özel olarak; *Gauss düzlemi*, $2\pi^{-1/2}e^{-r^2/2}$ yoğunluğu ile verilen Öklid düzlemidir (Corwin, Hoffman, Hurder, Sesum, Xu, 2006: 3).

Tanım 3.1.3. Yoğunluklu iki boyutlu bir Riemann manifoldunda, n birim normaline sahip bir eğrinin eğriliği, Gromov tarafından;

$$\kappa_{\varphi} = \kappa - \frac{d\varphi}{dn}$$

şeklinde tanımlanır. Burada κ, Riemann eğriliğidir (Gromov, 2003: 209).

Açıklama 3.1.4. e^{φ} yoğunluklu $\mathbb{R}^n$ uzayında, bir hiperyüzeyin asli eğrilikleri;

$$\kappa_{1\varphi} = \kappa_1 - \frac{d\varphi}{dn}$$

$$\vdots$$

$$\kappa_{(n-1)\varphi} = \kappa_{(n-1)} - \frac{d\varphi}{dn}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\kappa_1, \ldots, \kappa_{(n-1)}$ Riemann asli eğrilikleridir. n ise hiperyüzeyin normalidir. Böylece ortalama eğrilik;

$$H_{\varphi} = \frac{\kappa_1 + \ldots + \kappa_{(n-1)} - \frac{d\varphi}{dn}}{(n-1)} = \frac{\kappa_{1\varphi} + \ldots + \kappa_{(n-1)\varphi}}{(n-1)} + \frac{(n-2)}{(n-1)}\frac{d\varphi}{dn}$$

eşitliği ile ifade edilir (Corwin, Hoffman, Hurder, Sesum, Xu, 2006: 5).

Tanım 3.1.4. Yoğunluğu e^{φ} olan n boyutlu bir Riemann manifoldunda, n birim normal ile verilen bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği;

$$H_{\varphi} = H - \frac{1}{(n-1)}\frac{d\varphi}{dn}$$

şeklinde tanımlanır. Burada H, Riemannian ortalama eğriliğidir (Gromov, 2003: 213).

Tanım 3.1.5. e^{φ} yoğunluklu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzeyin ortalama eğriliği, ağırlıklı alanın birinci varyasyonu kullanılarak;

$$H_{\varphi} = H - \frac{1}{2}\langle N, \nabla_{\varphi}\rangle$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada H ve N sırasıyla; yüzeyin ortalama eğriliği ve birim normal vektörüdür. ∇_{φ} ise φ'nin gradyanıdır. H_{φ} , yüzeyin *ağırlıklı ortalama eğriliği* veya *φ-ortalama eğriliği* olarak adlandırılır (Gromov, 2003: 213). e^{φ} yoğunluklu $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir yüzey için

$$H_{\varphi} = 0$$

olması durumunda bu yüzey; *ağırlıklı minimal yüzey* veya *φ-minimal yüzey* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.6. e^{φ} yoğunluklu bir Riemann yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K_{\varphi} = K - \Delta_{\varphi}$$

şeklinde tanımlanır. Burada G, Riemann Gauss eğriliği ve Δ , laplace operatörüdür. G_{φ} yüzeyin *ağırlıklı Gauss eğriliği* veya *φ-Gauss eğriliği* olarak adlandırılır. e^{φ} yoğunluklu $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir yüzey için

$$K_{\varphi} = 0$$

olması durumunda bu yüzey; *ağırlıklı düz (flat) yüzey* veya *φ-düz (flat) yüzey* olarak adlandırılır (Corwin, Hoffman, Hurder, Sesum, Xu, 2006: 6).

Önerme 3.1.1. e^{φ} yoğunluklu bir Riemann yüzeyinde topolojik bir R diskini çevreleyen

$$\alpha: I \to S, \quad \partial R = \alpha(I)$$

parçalı düzgün eğrisi verilsin. Gauss-Bonnet formülü;

$$\int_R K_\varphi \, dA + \int_{\partial R} K_\varphi \, ds + \sum(\pi - \theta_i) = 2\pi$$

şeklinde tanımlanır. Burada θ_i ile iç açılar ifade edilmektedir. İntegraller Riemann alanı ve yay uzunluğuna göredir (Corwin, Hoffman, Hurder, Sesum, Xu, 2006:6).

Önerme 3.1.2. e^{φ} yoğunluklu 2-boyutlu, kompakt düzgün bir M Riemann manifoldu için Gauss-Bonnet formülü;

$$\int_M K_\varphi \, dA = 2\pi\chi$$

şeklindedir. Burada χ manifoldun Euler karakteristiğidir (Corwin, Hoffman, Hurder, Sesum, Xu, 2006: 6).

3.2. Bükümlü Yüzeyler

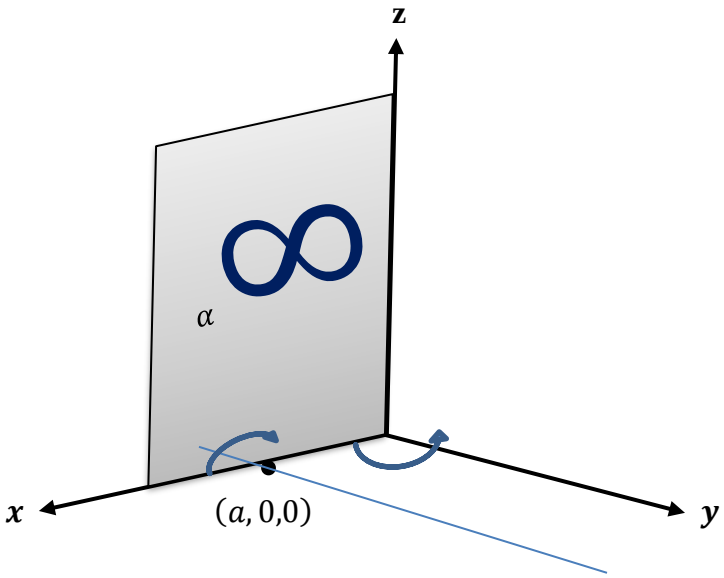
Tanım 3.2.1. $\alpha(-u) = -\alpha(u)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ düzlemsel eğrisi verilsin. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha(u)$ profil eğrisi ile verilen *bükümlü yüzey*;

$$\bar{x}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) = (a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs))(\cos s\,, \sin s\,, 0) + (0{,}0, f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs))$$

parametrizasyonu ile tanımlanır (Gray, 1998: 348).

Tanım 3.2.2. 3-boyutlu Öklid uzayında, bir α düzlemsel eğrisi verilsin. α eğrisi kendi destek düzleminde dönerken, bu destek düzleminin bir eksen etrafında eş zamanlı dönmesi ile oluşan yüzeylere *bükümlü yüzey* denir. Bükümlü yüzeyler, dönel yüzeylerin genelleştirilmiş halidir.

$\{x, y, z\}$ dik koordinat sistemi olmak üzere; $xz-$düzlemi, düzlemsel α eğrisinin destek düzlemi ve $z-$ekseni destek düzleminin dönme ekseni, $y-$eksenine paralel olan ve $(a, 0{,}0)$ noktasından geçen doğru düzlemsel α eğrisinin dönme ekseni olarak seçildiğinde elde edilen bükümlü yüzeyin parametrizasyonunun koordinat düzlemindeki gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Bükümlü bir yüzeyin parametrizasyonunun koordinat düzleminde gösterimi

f ve g reel değerli fonksiyonlar olmak üzere düzlemsel α eğrisi $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ şeklinde parametrelendirilsin. Bu eğriye, $y-$ekseni ile paralel $(a, 0, 0)$ noktasından geçen düz doğru etrafında dönme uygulanırsa:

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ardından, $z-$ekseni etrafında dönme uygulandığında ise;

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + f(t)\,cos(bs) - g(t)\,sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\,sin(bs) + g(t)\,cos(bs) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu iki dönme hareketi eş zamanlı olduğundan aynı parametre (s parametresi) ile ifade edilmiştir. $b \in \mathbb{R}$ reel sayısı, bu iki dönme hareketinin dönüş hızındaki farklılıkları sağlar. Dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ de $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ profil eğrisi ile verilen bir bükümlü yüzey;

$$\bar{x}(s, t) = (a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs))(\cos(s), \sin(s), 0) +$$
$$(0,0, f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs))$$

parametrizasyonu ile tanımlanır.

Özel Hal Eğer bu tanımda $b = 0$ alınırsa bükümlü yüzey için verilen bu parametrizasyon, dönel yüzeye indirgenir.

İlk olarak bu eğriye, $y-$ekseni ile paralel $(a, 0, 0)$ noktasından geçen düz doğru etrafında dönme uygulandığında;

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra, $z-$ekseni etrafında dönme uygulanırsa;

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(s) + f(t)\cos(s) \\ a\sin(s) + f(t)\sin(s) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) = \big(a + f(t)\big)(\cos(s), \sin(s), 0) + \big(0,0, g(t)\big)$$

sonucu elde edilir. Açıkça görülmektedir ki α eğrisi sadece z ekseni etrafında dönmektedir. Bu nedenle, bükümlü yüzeyler dönel yüzeylerin genellemeleri olarak düşünülebilir (Goemans ve Woestyne, 2013: 144).

3.3. Bükümlü Yüzey Örnekleri

Möbius şeridi ve bükümlü Klein şişesi, $\mathbb{R}^3$ uzayında bulunan iki özel bükümlü yüzey örneğidir.

Tanım 3.3.1. $\alpha(t) = (at, 0, 0)$ düzlemsel eğrisi verilsin. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere Möbius şeridi;

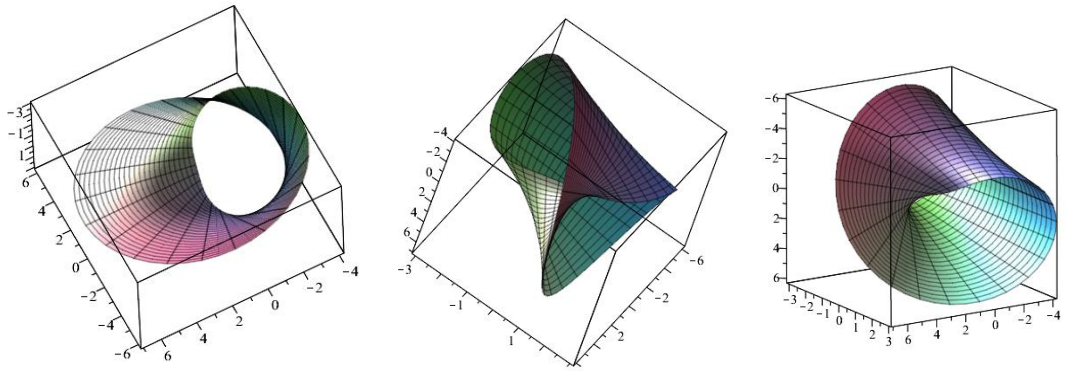
$$\bar{x}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) = a\left(\cos(s) + t\cos\left(\frac{s}{2}\right)\cos(s), \sin(s) + t\cos\left(\frac{s}{2}\right)\sin(s), t\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

parametrizasyonu ile tanımlanır (Gray, 1998: 349).

Örnek 3.3.1. $\alpha(t) = (t, 0, 0), b = 1/2$ ve $a = (4,0,0)$ alınırsa bükümlü yüzey için

$$\bar{x}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) = \left(4\cos(s) + t\cos\left(\frac{s}{2}\right)\cos(s), 4\sin(s) + t\cos\left(\frac{s}{2}\right)\sin(s), t\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

parametrizasyonu elde edilir. Elde edilen Möbius şeridinin görselleri aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.2. Möbius şeridi

Tanım 3.3.2. $\alpha(t) = (sin(t), 0, sin(2t))$ düzlemsel eğrisi verilsin. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere bükümlü Klein şişesi

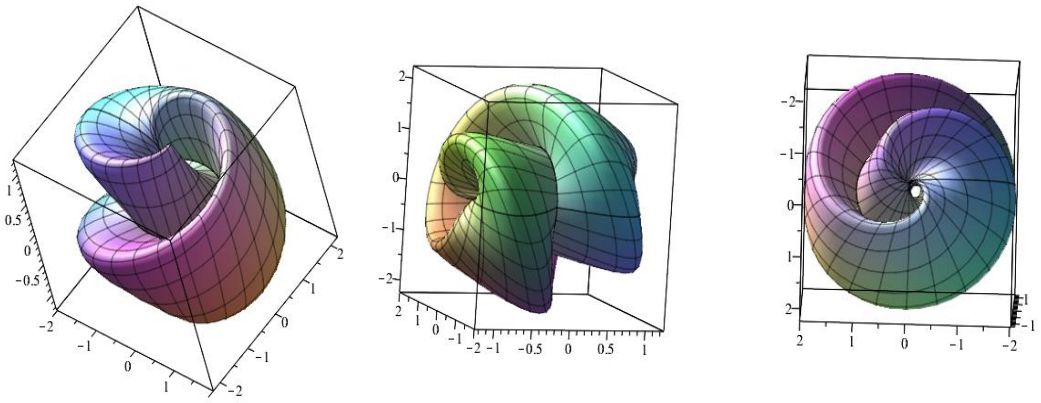
$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = \left(\left(a + \sin(\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) - \sin(2\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)\cos(\mathrm{s}), \left(a + \sin(\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) - \sin(2\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)\sin(\mathrm{s}), \sin(\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) + \sin(2\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)$$

parametrizasyonu ile tanımlanır (Gray, 1998: 349).

Örnek 3.3.2. $\alpha(t) = (sin(t), 0, sin(2t))$ $b = 1/2$ ve $a = (1,0,0)$ alınırsa bükümlü yüzey için

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = \left(\left(1 + \sin(\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) - \sin(2\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)\cos(\mathrm{s}), \left(1 + \sin(\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) - \sin(2\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)\sin(\mathrm{s}), \sin(\mathrm{t})\sin\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right) + \sin(2\mathrm{t})\cos\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)\right)$$

parametrizasyonu elde edilir. Elde edilen bükümlü Klein şişesinin görselleri aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.3. Bükümlü Klein şişesi

3.4. Düz Bükümlü Yüzeyler

Hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından, bükümlü yüzeyin profil eğrisi $\alpha(t) = (t, 0, g(t))$ şeklinde parametrelendirilmiştir. Bu parametrelendirmeye göre bükümlü yüzeyin denklemi

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = (a + t\cos(bs) - g(t)\sin(bs))(\cos s, \sin s, 0) + (0,0, t\sin(bs) + g(t)\cos(bs))$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.4.1. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir bükümlü yüzey olsun. Yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{ef - g^2}{EG - F^2}$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında $K = 0$ ise $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyi *düz bükümlü yüzey* olarak adlandırılır (Goemans ve Woestyne, 2013).

Teorem 3.4.1. Dönel yüzeyler hariç bırakıldığında, $\mathbb{R}^3$ uzayında bükümlü bir yüzey düz ise ancak ve ancak eğri üzerinde bir koni (parçası) dır ve denklemi aşağıdaki gibidir:

$$((\cos(bs) - c\,sin(bs))\cos s, (\cos(bs) - c\sin(bs))\sin s, \sin(bs) + c\cos(bs))$$

Burada; tepe noktası orijin, $c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha(t) = (t, 0, g(t)) = (1,0,c)$ dir (Goemans ve Woestyne, 2013: 147).

İspat Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=0}^{4} A_i(t)\, cos^i(bs) + \sum_{j=0}^{3} B_j(t) cos^j(bs)\sin(bs) = 0$$

olmasıdır. Burada $A_i(t)$ ve $B_j(t)$, g fonksiyonu ile g nin birinci ve ikinci mertebeden türevlerini içeren ifadelerdir.

$A_i(t) = B_j(t) = 0$ için $i \in \{0,1,2,3,4\}$ ve $j \in \{0,1,2,3\}$

olduğundan;

$$A_4(t) = -\,g''(t)\,(t\,(3g^2(t) - t^2)g'(t) + \,g(t)(g^2(t) - 3t^2))$$

ifadesi sıfıra eşit olmalıdır. Bu ifadenin sıfıra eşit olması için iki durum söz konusudur:

1.Durum: $g''(t) = 0$ olabilir. Bu durumda $c, d \in R$ olmak üzere $g(t) = ct + d$ şeklinde bir fonksiyondur. $g''(t) = 0$ değeri diğer $A_i(t) = 0$ ve $B_j(t) = 0$ katsayılarında yerine yazılırsa $a = d = 0$ elde edilir. Bu sonuçlar

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = (a + t\cos(bs) - g(t)\sin(bs))(\cos s\,, \sin s\,, 0) + (0,0,t\sin(bs) + g(t)\cos(bs))$$

yüzey denkleminde yerine yazılırsa;

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = (t\cos(bs) - ct\sin(bs))(\cos(s)\,, \sin(s)\,, 0) + (0,0,t\sin(bs) + ct\cos(bs))$$

$$= ((t\cos(bs) - ctsin(bs))\cos(s), (t\cos(bs) - ct\sin(bs))\sin(s), t\sin(bs) + ct\cos(bs))$$

koni yüzeyi elde edilir.

2.Durum: $g''(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda $3g^2(t) \neq t^2$ olmak üzere $A_4(t) = 0$ için;

$$g'(t) = \frac{-g(t)(g^2(t) - 3t^2)}{t(3g^2(t) - t^2)}$$

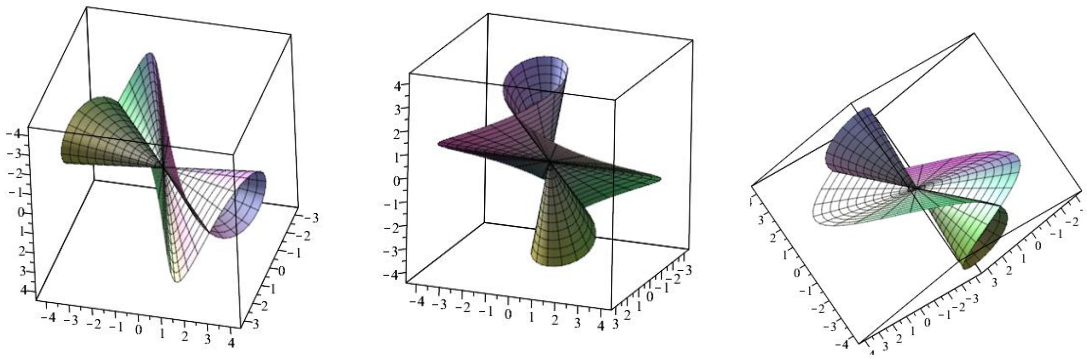
eşitliği elde edilir. Elde edilen $g'(t)$ değeri $A_i(t) = 0$ ve $B_j(t) = 0$ denklemlerinde yerine yazılır. Fakat $g'(t)$ ifadesi

$$B_3(t) = g''(t)\,(g^3(t)\,g'(t) - 3\,g(t)\,g'(t)\,t^2 - 3t\,g^2(t) + t^3) = 0$$

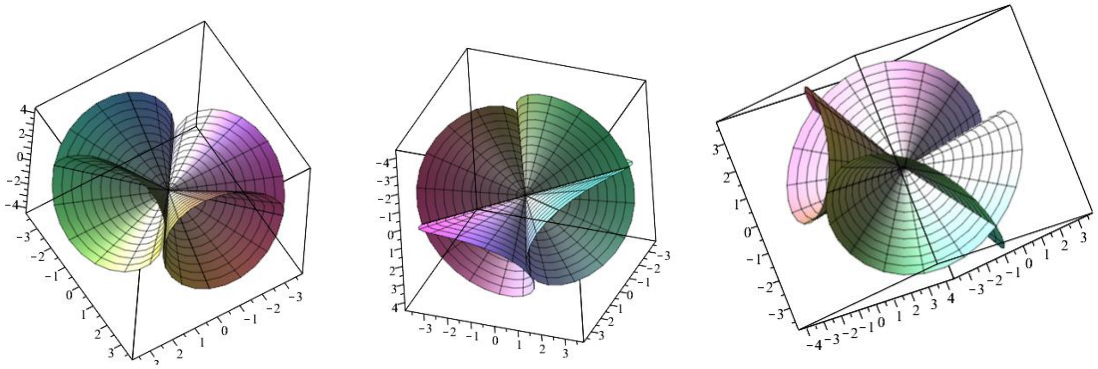
denkleminde yerine yazıldığında;

$$B_3(t) = -\frac{(t^2 + g^2(t))^3}{t\,(3g^2(t) - t^2)}\,g''(t)$$

olur. Bu sonuç $B_3(t) = 0$ olması durumu ile çelişir. Dolayısıyla düz bükümlü yüzey, birinci durumda elde edilen konidir.



Şekil 3.4. Teorem 3.4.1. de $b = 1/2$ ve $c = 1$ alındığında elde edilen koni yüzeyi



Şekil 3.5. Teorem 3.4.1. de $b = c = 1$ alındığında elde edilen koni yüzeyi

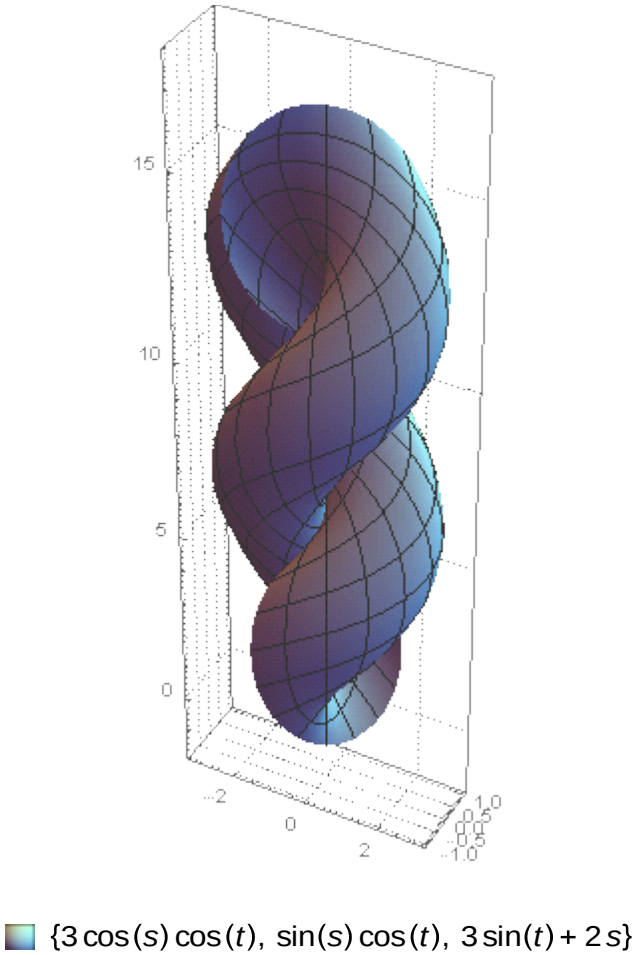
Teorem 3.4.2. Dönel yüzeyler hariç bırakıldığında, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir bükümlü yüzeyin sabit Gauss eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart yüzeyin bir küre veya küre parçası olmasıdır.

Bu durumda bükümlü yüzeyin profil eğrisi $\alpha(t) = \left(t, 0, \pm\sqrt{\left(\frac{1}{K} - t^2\right)}\right)$ şeklindedir. Burada kürenin profil eğrisi $\alpha(t) = \left(t, 0, \pm\sqrt{r^2 - t^2}\right)$ olmak üzere, $K = 1/r^2$ sabit Gauss eğriliğidir ve $a = 0$ dır. Yani küre orijin merkezlidir (Goemans ve Woestyne, 2013: 147).

Ayrıca bükümlü kürenin parametrizasyonu

$$\bar{x}(s,t) = (a\cos(s)\cos(t), \sin(s)\cos(t), a\sin(t) + bs)$$

şeklindedir (Gray, 1998: 473).



Şekil 3.6. Bükümlü küre

3.5. Minimal Bükümlü Yüzeyler

Tanım 3.5.1. $\bar{x}(s,t)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir bükümlü yüzey olsun. Yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında $H = 0$ ise $\bar{x}(s,t)$ yüzeyi *minimal bükümlü yüzey* olarak adlandırılır (Goemans ve Woestyne, 2013: 148).

Teorem 3.5.1. Eğer dönel yüzeyler hariç tutulursa, minimal bükümlü yüzey yoktur (Goemans ve Woestyne, 2013: 148).

İspat 3-boyutlu Öklid uzayında ortalama eğriliğin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=0}^{3} A_i(t)\, cos^i(bs) + \sum_{j=0}^{2} B_j(t)\, cos^j(bs) \sin(bs) = 0$$

olmasıdır. Burada $A_i(t)$ ve $B_j(t)$, g fonksiyonu ile g nin birinci ve ikinci mertebeden türevlerini içeren ifadelerdir.

$$A_i(t) = B_j(t) = 0 \text{ için } i \in \{0,1,2,3\} \text{ ve } j \in \{0,1,2\}$$

olduğundan;

$$A_3(t) = (3g^2(t) - t^2)\, tg''(t) + (g^2(t) - t^2)\, g'(t)^3 - 2tg(t)g'(t)^2 + (g^2(t) - t^2)\, g'(t) - 2tg(t)$$

ifadesi sıfıra eşit olmalıdır. Bu ifadenin sıfıra eşit olması için iki durum söz konusudur:

1.Durum: Kabul edelim ki; $g(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{3}}$ olsun. Bu değer $A_3(t) = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa $-\frac{32}{27}\sqrt{3}t^2 = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

2.Durum: Kabul edelim ki; $g(t) \neq \pm\frac{t}{\sqrt{3}}$ olsun. $A_3(t) = 0$ denkleminden elde edilen $g''(t)$ ifadesi diğer $A_i(t) = B_j(t) = 0$ denklemlerinde yerine yazılırsa $B_2(t) = 0$ eşitliği;

$$B_2(t) = \frac{(t^2 + g^2(t))^2\, (1 + g'(t)^2)\, (g(t)g'(t) + t)}{t\, (3g^2(t) - t^2)} = 0$$

eşitliğine indirgenir. Buradan $g(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$ elde edilir. Teorem 3.4.2. den; bükümlü yüzey, bir küredir. Dolayısıyla minimal değildir. Bu nedenle dönel yüzeyler hariç tutulduğunda minimal bükümlü yüzey yoktur.

4. YOĞUNLUKLU ÖKLİD UZAYINDA AĞIRLIKLI DÜZ VE AĞIRLIKLI MİNİMAL BÜKÜMLÜ YÜZEYLER

4.1. Yoğunluklu Öklid Uzayında Ağırlıklı Düz Bükümlü Yüzeyler

Tanım 4.1.1. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$; yoğunluklu Öklid uzayında, ağırlıklı bükümlü yüzey olsun. Ağırlıklı bükümlü yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_\varphi = \frac{ef - g^2}{EG - F^2} - \Delta_\varphi$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında $K_\varphi = 0$ ise $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyi *ağırlıklı düz bükümlü yüzey* olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.1. Dönel yüzeyler hariç bırakıldığında, yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı düz bükümlü yüzey yoktur.

İspat Yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i,j=0}^{4} A_{ij}(t)\, cos^i(bs)\sin^j(bs) = 0$$

olmasıdır. Burada $A_{ij}(t)$ ifadeleri, ağırlıklı Gauss eğriliğinin payındaki trigonometrik terimlerin katsayılarıdır ve

$A_{ij}(t) = 0$ için $i \in \{0,1,2,3,4\}$ ve $j \in \{0,1,2,3,4\}$

dir. Yüzeyin ağırlıklı Gauss eğriliğini hesaplamak için I. ve II. temel formun katsayıları kullanılmıştır. Yüzeyin birim normal vektörü, I. temel formun katsayıları ve II. temel formun katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$N = \{(-2bt\sin(s) + 2a\cos(s)\sin(bs) + t\cos(s)\sin(2bs) + 2\cos(s)\cos(bs)(a + t\cos(bs))g'(t) - g(t)(2\cos(s)\sin^2(bs) + (2b\sin(s) + \cos(s)\sin(2bs))g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2 + t^2 + 2b^2t^2 + 4at\cos(bs) + t^2\cos(2bs) + 2(a + t\cos(bs))^2 g'(t)^2 + g(t)^2(2\sin^2(bs) + (1 + 2b^2 - \cos(2bs))g'(t)^2) - 2g(t)(2(a + t\cos(bs))\sin(bs) - 2b^2 t g'(t) + 2(a + t\cos(bs))\sin(bs)g'(t)^2)}),(2bt\cos(s) + 2a\sin(s)\sin(bs) + t\sin(s)\sin(2bs) + 2\cos(bs)(a + t\cos(bs))\sin(s)g'(t) -$$

$g(t)(2\sin(s)\sin^2(bs)+(-2b\cos(s)+\sin(s)\sin(2bs))g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2(a+t\cos(bs))^2g'(t)^2+g(t)^2(2\sin^2(bs)+(1+2b^2-\cos(2bs))g'(t)^2)-2g(t)(2(a+t\cos(bs))\sin(bs)-2b^2tg'(t)+2(a+t\cos(bs))\sin(bs)g'(t)^2)))$,$(2(a+t\cos(bs)-g(t)\sin(bs))(-\cos(bs)+\sin(bs)g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2(a+t\cos(bs))^2g'(t)^2+g(t)^2(2\sin^2(bs)+(1+2b^2-\cos(2bs))g'(t)^2)-2g(t)(2(a+t\cos(bs))\sin(bs)-2b^2tg'(t)+2(a+t\cos(bs))\sin(bs)g'(t)^2)))\}$

$E=\langle\bar{x}_s,\bar{x}_s\rangle=\frac{1}{2}(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+(1+2b^2-\cos(2bs))g(t)^2-4(a+t\cos(bs))g(t)\sin(bs))$

$F=\langle\bar{x}_s,\bar{x}_t\rangle=-bg(t)+btg'(t)$

$G=\langle\bar{x}_t,\bar{x}_t\rangle=1+g'(t)^2$

$e=\langle\bar{x}_{ss},N\rangle=\Big(-2(2a^2+t^2+4b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs))\sin(bs)-\big((4a^2+(3+4b^2)t^2)\cos(bs)+t(4a(1+b^2+\cos(2bs))+t\cos(3bs))\big)g'(t)+2g(t)^2\big((-1-2b^2+\cos(2bs))\sin(bs)+\cos(bs)(-1-4b^2+\cos(2bs))g'(t)\big)+4g(t)\big(a(1+b^2-\cos(2bs))-t\cos(bs)(-1+b^2+\cos(2bs))+\big(t-b^2t+2\,a\cos(bs)+t\cos(2bs)\big)\sin(bs)g'(t)\big)\Big)/(2\sqrt{2}(\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2g(t)\sin(bs)(-2(a+t\cos(bs))+g(t)\sin(bs))+4b^2tg(t)g'(t)+(2(a+t\cos(bs))^2+(1+2b^2-\cos(2bs))g(t)^2-4(a+t\cos(bs))g(t)\sin(bs))g'(t)^2)))$

$f=\langle\bar{x}_{st},N\rangle=(-b\big(a+t\sin(bs)g'(t)+(a+t\cos(bs))g'(t)^2-g(t)(\sin(bs)+\cos(bs)g'(t))\big))/(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2g(t)\sin(bs)(-2(a+t\cos(bs))+g(t)\sin(bs))+4b^2tg(t)g'(t)+(2(a+t\cos(bs))^2+(1+2b^2-\cos(2bs))g(t)^2-4(a+t\cos(bs))g(t)\sin(bs))g'(t)^2)))$

$g=\langle\bar{x}_{tt},N\rangle=((-a-t\cos(bs)+g(t)\sin(bs))g''(t))/(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2g(t)\sin(bs)(-2(a+t\cos(bs))+g(t)\sin(bs))+4b^2tg(t)g'(t)+(2(a+t\cos(bs))^2+(1+2b^2-\cos(2bs))g(t)^2-4(a+t\cos(bs))g(t)\sin(bs))g'(t)^2)))$

Bu katsayılar yardımıyla yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = (-8a^2b^2 - 4b^2g(t)^2 + 4b^2cos^2(bs)g(t)^2 + 16ab^2g(t)\sin(bs) -$$
$$4b^2g(t)^2sin^2(bs) + 8b^2tg(t)g'(t) + 16ab^2\cos(bs)g(t)g'(t) -$$
$$8b^2tcos^2(bs)g(t)g'(t) - 16ab^2ts\mathrm{in}(bs)g'(t) - 16b^2cos(bs)g(t)^2\sin(bs)g'(t) +$$
$$8b^2tg(t)sin^2(bs)g'(t) - 16a^2b^2g'(t)^2 - 4b^2t^2g'(t)^2 - 16ab^2tcos(bs)g'(t)^2 +$$
$$4b^2t^2cos^2(bs)g'(t)^2 - 4b^2g(t)^2g'(t)^2 - 4b^2cos^2(bs)g(t)^2g'(t)^2 +$$
$$16ab^2g(t)\sin(bs)g'(t)^2 + 32b^2tcos(bs)g(t)\sin(bs)g'(t)^2 -$$
$$4b^2t^2sin^2(bs)g'(t)^2 + 4b^2g(t)^2sin^2(bs)g'(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t)^3 +$$
$$16ab^2cos(bs)g(t)g'(t)^3 + 8b^2tcos^2(bs)g(t)g'(t)^3 - 16ab^2ts\mathrm{in}(bs)g'(t)^3 -$$
$$16b^2t^2\cos(bs)\sin(bs)g'(t)^3 - 8b^2tg(t)sin^2(bs)g'(t)^3 - 8a^2b^2g'(t)^4 -$$
$$4b^2t^2g'(t)^4 - 16ab^2tcos(bs)g'(t)^4 - 4b^2t^2cos^2(bs)g'(t)^4 +$$
$$4b^2t^2sin^2(bs)g'(t)^4 - 12a^2g(t)g''(t) - 8a^2b^2g(t)g''(t) - 3t^2g(t)g''(t) -$$
$$4b^2t^2g(t)g''(t) - 12atcos(bs)g(t)g''(t) + 12a^2cos^2(bs)g(t)g''(t) +$$
$$12b^2t^2cos^2(bs)g(t)g''(t) + 12atcos^3(bs)g(t)g''(t) + 3t^2cos^4(bs)g(t)g''(t) -$$
$$3g(t)^3g''(t) - 4b^2g(t)^3g''(t) + 4cos^2(bs)g(t)^3g''(t) +$$
$$4b^2cos^2(bs)g(t)^3g''(t) - cos^4(bs)g(t)^3g''(t) + 8a^3\sin(bs)g''(t) +$$
$$6at^2\sin(bs)g''(t) + 16ab^2t^2\sin(bs)g''(t) + 24a^2tcos(bs)\sin(bs)g''(t) +$$
$$4t^3cos(bs)\sin(bs)g''(t) + 16b^2t^3cos(bs)\sin(bs)g''(t) +$$
$$18at^2cos^2(bs)\sin(bs)g''(t) + 4t^3cos^3(bs)\sin(bs)g''(t) +$$
$$18ag(t)^2\sin(bs)g''(t) + 16ab^2g(t)^2\sin(bs)g''(t) +$$
$$12tcos(bs)g(t)^2\sin(bs)g''(t) - 18acos^2(bs)g(t)^2\sin(bs)g''(t) -$$
$$12tcos^3(bs)g(t)^2\sin(bs)g''(t) - 12a^2g(t)sin^2(bs)g''(t) -$$
$$12b^2t^2g(t)sin^2(bs)g''(t) - 36atcos(bs)g(t)sin^2(bs)g''(t) -$$
$$18t^2cos^2(bs)g(t)sin^2(bs)g''(t) - 4g(t)^3sin^2(bs)g''(t) -$$
$$4b^2g(t)^3sin^2(bs)g''(t) + 6cos^2(bs)g(t)^3sin^2(bs)g''(t) - 6at^2sin^3(bs)g''(t) -$$
$$4t^3cos(bs)sin^3(bs)g''(t) + 6ag(t)^2sin^3(bs)g''(t) +$$
$$12tcos(bs)g(t)^2sin^3(bs)g''(t) + 3t^2g(t)\sin(bs)^4g''(t) - g(t)^3\sin(bs)^4g''(t) +$$
$$12a^2tg'(t)g''(t) + 8a^2b^2tg'(t)g''(t) + 3t^3g'(t)g''(t) + 4b^2t^3g'(t)g''(t) +$$
$$8a^3\cos(bs)g'(t)g''(t) + 18at^2\cos(bs)g'(t)g''(t) + 16ab^2t^2\cos(bs)g'(t)g''(t) +$$
$$12a^2tcos^2(bs)g'(t)g''(t) + 4t^3cos^2(bs)g'(t)g''(t) +$$
$$4b^2t^3cos^2(bs)g'(t)g''(t) + 6at^2cos^3(bs)g'(t)g''(t) + t^3cos^4(bs)g'(t)g''(t) +$$

$$3tg(t)^2g'(t)g''(t) + 4b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) + 6acos(bs)g(t)^2g'(t)g''(t) +$$
$$16ab^2cos(bs)g(t)^2g'(t)g''(t) + 12b^2tcos^2(bs)g(t)^2g'(t)g''(t) -$$
$$6acos^3(bs)g(t)^2g'(t)g''(t) - 3tcos^4(bs)g(t)^2g'(t)g''(t) -$$
$$12atg(t)sin(bs)g'(t)g''(t) - 24a^2cos(bs)g(t)sin(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$12t^2cos(bs)g(t)sin(bs)g'(t)g''(t) - 36atcos^2(bs)g(t)sin(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$12t^2cos^3(bs)g(t)sin(bs)g'(t)g''(t) - 4cos(bs)g(t)^3sin(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$16b^2cos(bs)g(t)^3sin(bs)g'(t)g''(t) + 4cos^3(bs)g(t)^3sin(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$12a^2tsin^2(bs)g'(t)g''(t) - 4t^3sin^2(bs)g'(t)g''(t) - 4b^2t^3sin^2(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$18at^2cos(bs)sin^2(bs)g'(t)g''(t) - 6t^3cos^2(bs)sin^2(bs)g'(t)g''(t) -$$
$$12b^2tg(t)^2sin^2(bs)g'(t)g''(t) + 18acos(bs)g(t)^2sin^2(bs)g'(t)g''(t) +$$
$$18tcos^2(bs)g(t)^2sin^2(bs)g'(t)g''(t) + 12atg(t)sin^3(bs)g'(t)g''(t) +$$
$$12t^2cos(bs)g(t)sin^3(bs)g'(t)g''(t) - 4cos(bs)g(t)^3sin^3(bs)g'(t)g''(t) +$$
$$t^3sin^4(bs)g'(t)g''(t) - 3tg(t)^2sin^4(bs)g'(t)g''(t))/(\ 8a^2 + 4t^2 + 8b^2t^2 +$$
$$16atcos(bs) + 4t^2cos^2(bs) + 4g(t)^2 - 4cos^2(bs)g(t)^2 - 16ag(t)sin(bs) -$$
$$16tcos(bs)g(t)sin(bs) - 4t^2sin^2(bs) + 4g(t)^2sin^2(bs) + 16b^2tg(t)g'(t) +$$
$$8a^2g'(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 + 16atcos(bs)g'(t)^2 + 4t^2cos^2(bs)g'(t)^2 +$$
$$4g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2g(t)^2g'(t)^2 - 4cos^2(bs)g(t)^2g'(t)^2 -$$
$$16ag(t)sin(bs)g'(t)^2 - 16tcos(bs)g(t)sin(bs)g'(t)^2 - 4t^2sin^2(bs)g'(t)^2 +$$
$$4g(t)^2sin^2(bs)g'(t)^2)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen K değeri, $K_\varphi = K - \Delta_\varphi$ denkleminde yerine yazıldığında;

$$K_\varphi = (-8a^2b^2 - 4b^2g(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t) - 16a^2b^2g'(t)^2 - 4b^2t^2g'(t)^2 -$$
$$4b^2g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t)^3 - 8a^2b^2g'(t)^4 - 4b^2t^2g'(t)^4 -$$
$$12a^2g(t)g''(t) - 8a^2b^2g(t)g''(t) - 3t^2g(t)g''(t) - 4b^2t^2g(t)g''(t) -$$
$$3g(t)^3g''(t) - 4b^2g(t)^3g''(t) + 12a^2tg'(t)g''(t) + 8a^2b^2tg'(t)g''(t) +$$
$$3t^3g'(t)g''(t) + 4b^2t^3g'(t)g''(t) + 3tg(t)^2g'(t)g''(t) + 4b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) -$$
$$\Delta_\varphi(8a^2 + 4t^2 + 8b^2t^2 + 4g(t)^2 + 16b^2tg(t)g'(t) + 8a^2g'(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 +$$
$$4g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2g(t)^2g'(t)^2) + (16ab^2g(t)g'(t) - 16ab^2tg'(t)^2 +$$
$$16ab^2g(t)g'(t)^3 - 16ab^2tg'(t)^4 - 12atg(t)g''(t) + 8a^3g'(t)g''(t) +$$
$$18at^2g'(t)g''(t) + 16ab^2t^2g'(t)g''(t) + 6ag(t)^2g'(t)g''(t) +$$
$$16ab^2g(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(16at + 16atg'(t)^2))cos(bs) + (4b^2g(t)^2 -$$
$$8b^2tg(t)g'(t) + 4b^2t^2g'(t)^2 - 4b^2g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t)^3 -$$

$$4b^2t^2g'(t)^4 + 12a^2g(t)g''(t) + 12b^2t^2g(t)g''(t) + 4g(t)^3g''(t) + 4b^2g(t)^3g''(t) + 12a^2tg'(t)g''(t) + 4t^3g'(t)g''(t) + 4b^2t^3g'(t)g''(t) + 12b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(4t^2 - 4g(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 - 4g(t)^2g'(t)^2))cos^2(bs) + (12atg(t)g''(t) + 6at^2g'(t)g''(t) - 6ag(t)^2g'(t)g''(t))cos^3(bs) + (3t^2g(t)g''(t) - g(t)^3g''(t) + t^3g'(t)g''(t) - 3tg(t)^2g'(t)g''(t))cos^4(bs) + (16ab^2g(t) - 16ab^2tg'(t) + 16ab^2g(t)g'(t)^2 - 16ab^2tg'(t)^3 + 8a^3g''(t) + 6at^2g''(t) + 16ab^2t^2g''(t) + 18ag(t)^2g''(t) + 16ab^2g(t)^2g''(t) - 12atg(t)g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(-16ag(t) - 16ag(t)g'(t)^2))sin(bs) + (-16b^2g(t)^2g'(t) + 32b^2tg(t)g'(t)^2 - 16b^2t^2g'(t)^3 + 24a^2tg''(t) + 4t^3g''(t) + 16b^2t^3g''(t) - 24a^2g(t)g'(t)g''(t) - 12t^2g(t)g'(t)g''(t) - 4g(t)^3g'(t)g''(t) - 16b^2g(t)^3g'(t)g''(t) + 12tg(t)^2g''(t) - \Delta_\varphi(-16tg(t) - 16tg(t)g'(t)^2))cos(bs)sin(bs) + (-4b^2g(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t) - 4b^2t^2g'(t)^2 + 4b^2g(t)^2g'(t)^2 - 8b^2tg(t)g'(t)^3 + 4b^2t^2g'(t)^4 - 12a^2g(t)g''(t) - 12b^2t^2g(t)g''(t) - 4g(t)^3g''(t) - 4b^2g(t)^3g''(t) - 12a^2tg'(t)g''(t) - 4t^3g'(t)g''(t) - 4b^2t^3g'(t)g''(t) - 12b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(-4t^2 + 4g(t)^2 - 4t^2g'(t)^2 + 4g(t)^2g'(t)^2))sin^2(bs) + (18at^2g''(t) - 18ag(t)^2g''(t) - 36atg(t)g'(t)g''(t))cos^2(bs)sin(bs) + (4t^3g''(t) - 12tg(t)^2g''(t) - 12t^2g(t)g'(t)g''(t) + 4g(t)^3g'(t)g''(t))cos^3(bs)sin(bs) + (-6at^2g''(t) + 6ag(t)^2g''(t) + 12atg(t)g'(t)g''(t))sin^3(bs) + (3t^2g(t)g''(t) - g(t)^3g''(t) + t^3g'(t)g''(t) - 3tg(t)^2g'(t)g''(t))sin^4(bs) + (-36atg(t)g''(t) + 18ag(t)^2g'(t)g''(t) - 18at^2g'(t)g''(t))cos(bs)sin^2(bs) + (-4t^3g''(t) + 12tg(t)^2g''(t) + 12t^2g(t)g'(t)g''(t) - 4g(t)^3g'(t)g''(t))cos(bs)sin^3(bs) + (-18t^2g(t)g''(t) + 6g(t)^3g''(t) - 6t^3g'(t)g''(t) + 18tg(t)^2g'(t)g''(t))cos^2(bs)sin^2(bs))/(8a^2 + 4t^2 + 8b^2t^2 + 16atcos(bs) + 4t^2cos^2(bs) + 4g(t)^2 - 4cos^2(bs)g(t)^2 - 16ag(t)sin(bs) - 16tcos(bs)g(t)sin(bs) - 4t^2sin^2(bs) + 4g(t)^2sin^2(bs) + 16b^2tg(t)g'(t) + 8a^2g'(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 + 16atcos(bs)g'(t)^2 + 4t^2cos^2(bs)g'(t)^2 + 4g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2g(t)^2g'(t)^2 - 4cos^2(bs)g(t)^2g'(t)^2 - 16ag(t)sin(bs)g'(t)^2 - 16tcos(bs)g(t)sin(bs)g'(t)^2 - 4t^2sin^2(bs)g'(t)^2 + 4g(t)^2sin^2(bs)g'(t)^2)$$

eşitliği elde edilir. K_φ ağırlıklı Gauss eğriliğinin payındaki katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$A_{00}(t) = -8a^2b^2 - 4b^2g(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t) - 16a^2b^2g'(t)^2 - 4b^2t^2g'(t)^2 - 4b^2g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t)^3 - 8a^2b^2g'(t)^4 - 4b^2t^2g'(t)^4 - 12a^2g(t)g''(t) - 8a^2b^2g(t)g''(t) - 3t^2g(t)g''(t) - 4b^2t^2g(t)g''(t) - 3g(t)^3g''(t) - 4b^2g(t)^3g''(t) + 12a^2tg'(t)g''(t) + 8a^2b^2tg'(t)g''(t) + 3t^3g'(t)g''(t) + 4b^2t^3g'(t)g''(t) + 3tg(t)^2g'(t)g''(t) + 4b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(8a^2 + 4t^2 + 8b^2t^2 + 4g(t)^2 + 16b^2tg(t)g'(t) + 8a^2g'(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 + 4g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2g(t)^2g'(t)^2)$$

$$A_{10}(t) = 16ab^2g(t)g'(t) - 16ab^2tg'(t)^2 + 16ab^2g(t)g'(t)^3 - 16ab^2tg'(t)^4 - 12atg(t)g''(t) + 8a^3g'(t)g''(t) + 18at^2g'(t)g''(t) + 16ab^2t^2g'(t)g''(t) + 6ag(t)^2g'(t)g''(t) + 16ab^2g(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(16at + 16atg'(t)^2)$$

$$A_{20}(t) = 4b^2g(t)^2 - 8b^2tg(t)g'(t) + 4b^2t^2g'(t)^2 - 4b^2g(t)^2g'(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t)^3 - 4b^2t^2g'(t)^4 + 12a^2g(t)g''(t) + 12b^2t^2g(t)g''(t) + 4g(t)^3g''(t) + 4b^2g(t)^3g''(t) + 12a^2tg'(t)g''(t) + 4t^3g'(t)g''(t) + 4b^2t^3g'(t)g''(t) + 12b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(4t^2 - 4g(t)^2 + 4t^2g'(t)^2 - 4g(t)^2g'(t)^2)$$

$$A_{30}(t) = 12atg(t)g''(t) + 6at^2g'(t)g''(t) - 6ag(t)^2g'(t)g''(t)$$

$$A_{40}(t) = 3t^2g(t)g''(t) - g(t)^3g''(t) + t^3g'(t)g''(t) - 3tg(t)^2g'(t)g''(t)$$

$$A_{01}(t) = 16ab^2g(t) - 16ab^2tg'(t) + 16ab^2g(t)g'(t)^2 - 16ab^2tg'(t)^3 + 8a^3g''(t) + 6at^2g''(t) + 16ab^2t^2g''(t) + 18ag(t)^2g''(t) + 16ab^2g(t)^2g''(t) - 12atg(t)g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(-16ag(t) - 16ag(t)g'(t)^2)$$

$$A_{02}(t) = -4b^2g(t)^2 + 8b^2tg(t)g'(t) - 4b^2t^2g'(t)^2 + 4b^2g(t)^2g'(t)^2 - 8b^2tg(t)g'(t)^3 + 4b^2t^2g'(t)^4 - 12a^2g(t)g''(t) - 12b^2t^2g(t)g''(t) - 4g(t)^3g''(t) - 4b^2g(t)^3g''(t) - 12a^2tg'(t)g''(t) - 4t^3g'(t)g''(t) - 4b^2t^3g'(t)g''(t) - 12b^2tg(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(-4t^2 + 4g(t)^2 - 4t^2g'(t)^2 + 4g(t)^2g'(t)^2)$$

$$A_{03}(t) = -6at^2g''(t) + 6ag(t)^2g''(t) + 12atg(t)g'(t)g''(t)$$

$$A_{04}(t) = 3t^2g(t)g''(t) - g(t)^3g''(t) + t^3g'(t)g''(t) - 3tg(t)^2g'(t)g''(t)$$

$$A_{11}(t) = -16b^2g(t)^2g'(t) + 32b^2tg(t)g'(t)^2 - 16b^2t^2g'(t)^3 + 24a^2tg''(t) + 4t^3g''(t) + 16b^2t^3g''(t) - 24a^2g(t)g'(t)g''(t) - 12t^2g(t)g'(t)g''(t) - 4g(t)^3g'(t)g''(t) - 16b^2g(t)^3g'(t)g''(t) + 12tg(t)^2g''(t) - \Delta_\varphi(-16tg(t) - 16tg(t)g'(t)^2)$$

$$A_{21}(t) = 18at^2g''(t) - 18ag(t)^2g''(t) - 36atg(t)g'(t)g''(t)$$

$$A_{31}(t) = 4t^3g''(t) - 12tg(t)^2g''(t) - 12t^2g(t)g'(t)g''(t) + 4g(t)^3g'(t)g''(t)$$

$$A_{12}(t) = -36atg(t)g''(t) + 18ag(t)^2g'(t)g''(t) - 18at^2g'(t)g''(t)$$

$$A_{13}(t) = -4t^3g''(t) + 12tg(t)^2g''(t) + 12t^2g(t)g'(t)g''(t) - 4g(t)^3g'(t)g''(t)$$

$$A_{22}(t) = -18t^2g(t)g''(t) + 6g(t)^3g''(t) - 6t^3g'(t)g''(t) + 18tg(t)^2g'(t)g''(t)$$

Bu katsayılar arasından;

$$A_{31}(t) = 4t^3g''(t) - 12tg(t)^2g''(t) - 12t^2g(t)g'(t)g''(t) + 4g(t)^3g'(t)g''(t)$$

ve

$$A_{10}(t) = 16ab^2g(t)g'(t) - 16ab^2tg'(t)^2 + 16ab^2g(t)g'(t)^3 - 16ab^2tg'(t)^4 - 12atg(t)g''(t) + 8a^3g'(t)g''(t) + 18at^2g'(t)g''(t) + 16ab^2t^2g'(t)g''(t) + 6ag(t)^2g'(t)g''(t) + 16ab^2g(t)^2g'(t)g''(t) - \Delta_\varphi(16at + 16atg'(t)^2)$$

katsayıları seçilsin. $A_{31}(t) = 0$ denkleminden $g(t)$ fonksiyonu çekilip $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazıldığında, elde edilen reel değerli $g(t)$ fonksiyonları aşağıdaki verilmiştir:

$$g_1(t) = -\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$

$$g_2(t) = -\sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$

$$g_3(t) = \sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$

$$g_4(t) = \sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$

$$g_5(t) = c_1 + tc_2$$

Bu fonksiyonlar sırasıyla $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazıldığında;

$g_1(t) = -\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$ için;

$$g_1'(t) = -\frac{6t - \frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}{2\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}$$

$$g_1''(t) = \frac{3e^{4c_1}(e^{4c_1} + 24t^4 - 8t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})}{(e^{4c_1} + 8t^4)^{3/2}(3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})^{3/2}}$$

elde edilir. $g_1(t)$, $g_1'(t)$ ve $g_1''(t)$ fonksiyonları $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{10}(t) = \frac{1}{(e^{4c_1}+8t^4)^2(-3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^2} 2at(e^{12c_1}(9 + 96b^2 - 8\Delta_\varphi) +$$
$$512\Delta_\varphi t^{10}(-116t^2 + 41\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}) + 32e^{4c_1}t^4((738 + 2624b^2 - 432\Delta_\varphi)t^4 +$$
$$(-261 - 928b^2 + 112\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + a^2(144t^2 - 51\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})) -$$
$$4e^{8c_1}(-36(15 + 64b^2 - 6\Delta_\varphi)t^4 + (63 + 352b^2 - 30\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} +$$
$$a^2(-96t^2 + 9\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})))$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{10}(t) \neq 0$ dır.

$g_2(t) = -\sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$ için;

$$g_2'(t) = -\frac{6t + \frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}{2\sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}$$

$$g_2''(t) = -\frac{3e^{4c_1}(e^{4c_1} + 8t^2(3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}))}{(e^{4c_1} + 8t^4)^{3/2}(3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})^{3/2}}$$

elde edilir. $g_2(t)$, $g_2'(t)$ ve $g_2''(t)$ fonksiyonları $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{10}(t) = \frac{1}{(e^{4c_1}+8t^4)^2(3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^2} 2at(e^{12c_1}(9 + 96b^2 - 8\Delta_\varphi) -$$
$$512\Delta_\varphi t^{10}(116t^2 + 41\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}) + 4e^{8c_1}(36(15 + 64b^2 - 6\Delta_\varphi)t^4 + (63 +$$
$$352b^2 - 30\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + a^2(96t^2 + 9\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})) + 32e^{4c_1}t^4((738 +$$
$$2624b^2 - 432\Delta_\varphi)t^4 + (261 + 928b^2 - 112\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + 3a^2(48t^2 +$$
$$17\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})))$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{10}(t) \neq 0$ dır.

$g_3(t) = \sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$ için;

$$g_3'(t) = \frac{6t - \frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}{2\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}$$

$$g_3''(t) = -\frac{3e^{4c_1}(e^{4c_1} + 24t^4 - 8t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})}{(e^{4c_1} + 8t^4)^{3/2}(3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})^{3/2}}$$

elde edilir. $g_3(t)$, $g_3'(t)$ ve $g_3''(t)$ fonksiyonları $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{10}(t) = \frac{1}{(e^{4c_1}+8t^4)^2(-3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^2} 2at(e^{12c_1}(9 + 96b^2 - 8\Delta_\varphi) +$$
$$512\Delta_\varphi t^{10}(-116t^2 + 41\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}) + 32e^{4c_1}t^4((738 + 2624b^2 - 432\Delta_\varphi)t^4 +$$
$$(-261 - 928b^2 + 112\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + a^2(144t^2 - 51\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})) -$$
$$4e^{8c_1}(-36(15 + 64b^2 - 6\Delta_\varphi)t^4 + (63 + 352b^2 - 30\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} +$$
$$a^2(-96t^2 + 9\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})))$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{10}(t) \neq 0$ dır.

$g_4(t) = \sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$ için;

$$g_4'(t) = \frac{6t + \frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}{2\sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}$$

$$g_4''(t) = \frac{3e^{4c_1}(e^{4c_1} + 8t^2(3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}))}{(e^{4c_1} + 8t^4)^{3/2}(3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})^{3/2}}$$

elde edilir. $g_4(t)$, $g_4'(t)$ ve $g_4''(t)$ fonksiyonları $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{10}(t) = \frac{1}{(e^{4c_1}+8t^4)^2(3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^2} 2at(e^{12c_1}(9 + 96b^2 - 8\Delta_\varphi) -$$
$$512\Delta_\varphi t^{10}(116t^2 + 41\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}) + 4e^{8c_1}(36(15 + 64b^2 - 6\Delta_\varphi)t^4 + (63 +$$
$$352b^2 - 30\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + a^2(96t^2 + 9\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})) + 32e^{4c_1}t^4((738 +$$
$$2624b^2 - 432\Delta_\varphi)t^4 + (261 + 928b^2 - 112\Delta_\varphi)t^2\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4} + 3a^2(48t^2 +$$
$$17\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4})))$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{10}(t) \neq 0$ dır.

$g_5(t) = c_1 + tc_2$ için;

$g_5'(t) = c_2$

$$g_5''[t] = 0$$

elde edilir. $g_5(t)$, $g_5'(t)$ ve $g_5''(t)$ fonksiyonları $A_{10}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{10}(t) = -16a(\Delta_\varphi t - b^2 c_1 c_2)(1 + {c_2}^2)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{10}(t) \neq 0$ dır.

Dolayısıyla bu katsayıların hepsini aynı anda ''0'' yapan bir fonksiyon yoktur.

Özel olarak; $a = 0, b = 0$ ve $\Delta_\varphi = 1$ olarak seçildiğinde, bu katsayıları ''0'' yapan bir $g(t)$ fonksiyonu elde edilir:

$$g(t) \to c_2 + \frac{1}{2}(t\sqrt{-1 + e^{2c_1 t^2}} - e^{-c_1}\mathrm{Log}(e^{c_1}(e^{c_1 t} + \sqrt{-1 + e^{2c_1 t^2}})))$$

$$g(t) \to c_2 + \frac{1}{2}(-t\sqrt{-1 + e^{2c_1 t^2}} + e^{-c_1}\mathrm{Log}(e^{c_1}(e^{c_1 t} + \sqrt{-1 + e^{2c_1 t^2}})))$$

Sadece $b = 0$ durumunda ağırlıklı düz bükümlü yüzeyler elde edilebildiğinden; dönel yüzeyler hariç bırakıldığında, yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı düz bükümlü yüzey yoktur.

4.2. Yoğunluklu Öklid Uzayında Ağırlıklı Minimal Bükümlü Yüzeyler

Tanım 4.2.1. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$; yoğunluklu Öklid uzayında, ağırlıklı bükümlü yüzey olsun. Ağırlıklı bükümlü yüzeyin ortalama eğriliği

$$H_\varphi = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} - \frac{1}{2}\langle N, \nabla_\varphi \rangle$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında $H_\varphi = 0$ ise $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyi *ağırlıklı minimal bükümlü yüzey* olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.1. e^z yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı minimal bükümlü yüzey yoktur.

İspat e^z yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı ortalama eğriliğin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i,j=0}^{4} A_{ij}(t)\, cos^i(bs)\, \sin^j(bs) = 0$$

olmasıdır. Burada $A_{ij}(t)$ ifadeleri, ağırlıklı ortalama eğriliğin payındaki trigonometrik terimlerin katsayılarıdır ve

$A_{ij}(t) = 0$ için $i \in \{0,1,2,3,4\}$ ve $j \in \{0,1,2,3,4\}$

dir. Yüzeyin ortalama eğriliği, birim normal vektörü ve ∇_{φ} değeri aşağıda verilmiştir:

$$H = (-2(2a^2 + t^2 + 4b^2t^2 + 4atcos(bs) + t^2cos(2bs))sin(bs) + g'(t)(-(4a^2 + (3 + 4b^2)t^2)cos(bs) - t(4a - 4ab^2 + 4acos(2bs) + tcos(3bs)) - 2(a + tcos(bs))g'(t)(2(a + tcos(bs))sin(bs) + (t - 2b^2t + 2acos(bs) + tcos(2bs))g'(t))) - 2(a + tcos(bs))(2a^2 + t^2 + 2b^2t^2 + 4atcos(bs) + t^2cos(2bs))g''(t) - 2(-1 - 2b^2 + cos(2bs))g(t)^3sin(bs)g''(t) + 2g(t)^2((-1 + 2b^2 + cos(2bs))sin(bs) - sin(bs)sin(2bs)g'(t) + (-1 - 2b^2 + cos(2bs))sin(bs)g'(t)^2 + cos(bs)(-1 - 4b^2 + cos(2bs))g'(t)^3 + (a + tcos(bs))(-3 - 2b^2 + 3cos(2bs))g''(t)) + g(t)(-4(a + tcos(bs))(-1 + b^2 + cos(2bs)) + 4(t - 5b^2t + 2acos(bs) + tcos(2bs))sin(bs)g'(t) - 2(2a(-1 + b^2 + cos(2bs)) + 2tcos(bs)(-1 + 5b^2 + cos(2bs)))g'(t)^2 + 4(t - b^2t + 2acos(bs) + tcos(2bs))sin(bs)g'(t)^3 + 2(6a^2 + (3 + 2b^2)t^2 + 3t(4acos(bs) + tcos(2bs)))sin(bs)g''(t)))/(2\sqrt{2}(2a^2 + t^2 + 2b^2t^2 + 4atcos(bs) + t^2cos(2bs) + 2g(t)sin(bs)(-2(a + tcos(bs)) + g(t)sin(bs)) + 4b^2tg(t)g'(t) + (2(a + tcos(bs))^2 + (1 + 2b^2 - cos(2bs))g(t)^2 - 4(a + tcos(bs))g(t)sin(bs))g'(t)^2)^{3/2})$$

$$N = \{(-2btsin(s) + 2acos(s)sin(bs) + tcos(s)sin(2bs) + 2cos(s)cos(bs)(a + tcos(bs))g'(t) - g(t)(2cos(s)sin^2(bs) + (2bsin(s) + cos(s)sin(2bs))g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2 + t^2 + 2b^2t^2 + 4atcos(bs) + t^2cos(2bs) + 2(a + tcos(bs))^2g'(t)^2 + g(t)^2(2sin^2(bs) + (1 + 2b^2 - cos(2bs))g'(t)^2) - 2g(t)(2(a + tcos(bs))sin(bs) - 2b^2tg'(t) + 2(a + tcos(bs))sin(bs)g'(t)^2)}),(2btcos(s) + 2asin(s)sin(bs) + tsin(s)sin(2bs) + 2cos(bs)(a + tcos(bs))sin(s)g'(t) - g(t)(2sin(s)sin^2(bs) + (-2bcos(s) + sin(s)sin(2bs))g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2 + t^2 + 2b^2t^2 + 4atcos(bs) + t^2cos(2bs) + 2(a + tcos(bs))^2g'(t)^2 + g(t)^2(2sin^2(bs) + (1 + 2b^2 - cos(2bs))g'(t)^2) - 2g(t)(2(a + tcos(bs))sin(bs) - 2b^2tg'(t) + 2(a + tcos(bs))sin(bs)g'(t)^2)}),(2(a + tcos(bs) -$$

$g(t)\sin(bs))(-\cos(bs)+\sin(bs)g'(t)))/(\sqrt{2}\sqrt{(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2(a+t\cos(bs))^2g'(t)^2+g(t)^2(2\sin^2(bs)+(1+2b^2-\cos(2bs))g'(t)^2)-2g(t)(2(a+t\cos(bs))\sin(bs)-2b^2tg'(t)+2(a+t\cos(bs))\sin(bs)g'(t)^2)))\}$

$\varphi = z$ olduğundan; $\nabla\varphi = (0,0,1)$ dir.

H, N ve ∇_φ değerleri $H_\varphi = H - \frac{1}{2}\langle N, \nabla_\varphi\rangle$ denkleminde yerine yazıldığında; H_φ ağırlıklı ortalama eğriliği:

$H_\varphi = (-2(2a^2+t^2+4b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs))\sin(bs)+g'(t)((-4a^2-(3+4b^2)t^2)\cos(bs)-t(4a-4ab^2+4a\cos(2bs)+t\cos(3bs))-2(a+t\cos(bs))g'(t)(2(a+t\cos(bs))\sin(bs)+(t-2b^2t+2a\cos(bs)+t\cos(2bs))g'(t)))-2(a+t\cos(bs)-g(t)\sin(bs))(-\cos(bs)+\sin(bs)g'(t))(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs)+2(a+t\cos(bs))^2g'(t)^2+g(t)^2(2\sin^2(bs)+(1+2b^2-\cos(2bs))g'(t)^2)-2g(t)(2(a+t\cos(bs))\sin(bs)-2b^2tg'(t)+2(a+t\cos(bs))\sin(bs)g'(t)^2))-2(a+t\cos(bs))(2a^2+t^2+2b^2t^2+4at\cos(bs)+t^2\cos(2bs))g''(t)-2(-1-2b^2+\cos(2bs))g(t)^3\sin(bs)g''(t)+2g(t)^2((-1+2b^2+\cos(2bs))\sin(bs)-\sin(bs)\sin(2bs)g'(t)+(-1-2b^2+\cos(2bs))\sin(bs)g'(t)^2+\cos(bs)(-1-4b^2+\cos(2bs))g'(t)^3+(a+t\cos(bs))(-3-2b^2+3\cos(2bs))g''(t))+g(t)(-4(a+t\cos(bs))(-1+b^2+\cos(2bs))+4(t-5b^2t+2a\cos(bs)+t\cos(2bs))\sin(bs)g'(t)-2(2a(-1+b^2+\cos(2bs))+2t\cos(bs)(-1+5b^2+\cos(2bs)))g'(t)^2+4(t-b^2t+2a\cos(bs)+t\cos(2bs))\sin(bs)g'(t)^3+2(6a^2+(3+2b^2)t^2+3t(4a\cos(bs)+t\cos(2bs)))\sin(bs)g''(t)))/(2\sqrt{2}(2a^2+t^2+2b^2t^2+4a\text{tcos(bs)}+t^2\cos(2bs)+2g(t)\text{sin(bs)}(-2(a+t\text{cos(bs)})+g(t)\text{sin(bs)})+4b^2tg(t)g'(t)+(2(a+t\text{cos(bs)})^2+(1+2b^2-\cos(2bs))g(t)^2-4(a+\text{tcos(bs)})g(t)\text{sin(bs)})g'(t)^2)^{3/2})$

şeklinde elde edilir. H_φ ağırlıklı ortalama eğriliğinin payındaki katsayılar ise aşağıdaki gibidir:

$A_{00}(t) = 6a^2t + \frac{3t^3}{2} + 2b^2t^3 + \frac{3}{2}tg(t)^2 + 6a^2g(t)g'(t) + \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t) + 6b^2t^2g(t)g'(t) + \frac{3}{2}g(t)^3g'(t) + 6a^2tg'(t)^2 + \frac{3}{2}t^3g'(t)^2 + \frac{3}{2}tg(t)^2g'(t)^2 +$

$$6b^2tg(t)^2g'(t)^2 + 6a^2g(t)g'(t)^3 + \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t)^3 + \frac{3}{2}g(t)^3g'(t)^3 + 2b^2g(t)^3g'(t)^3$$

$$A_{10}(t) = 4a^3 + 9at^2 + 4ab^2t^2 + 3ag(t)^2 + 6atg(t)g'(t) + 8ab^2tg(t)g'(t) + 4a^3g'(t)^2 + 9at^2g'(t)^2 + 3ag(t)^2g'(t)^2 + 4ab^2g(t)^2g'(t)^2 + 6atg(t)g'(t)^3$$

$$A_{20}(t) = 6a^2t + 2t^3 + 2b^2t^3 - 6a^2g(t)g'(t) + 2b^2t^2g(t)g'(t) - 2g(t)^3g'(t) + 6a^2tg'(t)^2 + 2t^3g'(t)^2 - 2b^2tg(t)^2g'(t)^2 - 6a^2g(t)g'(t)^3 - 2g(t)^3g'(t)^3 - 2b^2g(t)^3g'(t)^3$$

$$A_{30}(t) = 3at^2 - 3ag(t)^2 - 6atg(t)g'(t) + 3at^2g'(t)^2 - 3ag(t)^2g'(t)^2 - 6atg(t)g'(t)^3$$

$$A_{40}(t) = \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}tg(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t) + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t) + \frac{1}{2}t^3g'(t)^2 - \frac{3}{2}tg(t)^2g'(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t)^3 + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t)^3$$

$$A_{01}(t) = -6atg(t) - 4a^3g'(t) - 3at^2g'(t) - 4ab^2t^2g'(t) - 9ag(t)^2g'(t) - 6atg(t)g'(t)^2 - 8ab^2tg(t)g'(t)^2 - 4a^3g'(t)^3 - 3at^2g'(t)^3 - 9ag(t)^2g'(t)^3 - 4ab^2g(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{02}(t) = -6a^2t - 2t^3 - 2b^2t^3 + 6a^2g(t)g'(t) - 2b^2t^2g(t)g'(t) + 2g(t)^3g'(t) - 6a^2tg'(t)^2 - 2t^3g'(t)^2 + 2b^2tg(t)^2g'(t)^2 + 6a^2g(t)g'(t)^3 + 2g(t)^3g'(t)^3 + 2b^2g(t)^3g'(t)^3$$

$$A_{03}(t) = 6atg(t) + 3at^2g'(t) - 3ag(t)^2g'(t) + 6atg(t)g'(t)^2 + 3at^2g'(t)^3 - 3ag(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{04}(t) = \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}tg(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t) + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t) + \frac{1}{2}t^3g'(t)^2 - \frac{3}{2}tg(t)^2g'(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t)^3 + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t)^3$$

$$A_{11}(t) = -12a^2g(t) - 6t^2g(t) - 4b^2t^2g(t) - 2g(t)^3 - 12a^2tg'(t) - 2t^3g'(t) - 4b^2t^3g'(t) - 6tg(t)^2g'(t) - 8b^2tg(t)^2g'(t) - 12a^2g(t)g'(t)^2 - 6t^2g(t)g'(t)^2 - 8b^2t^2g(t)g'(t)^2 - 2g(t)^3g'(t)^2 - 4b^2g(t)^3g'(t)^2 - 12a^2tg'(t)^3 - 2t^3g'(t)^3 - 6tg(t)^2g'(t)^3 - 4b^2tg(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{12}(t) = -9at^2 + 9ag(t)^2 + 18atg(t)g'(t) - 9at^2g'(t)^2 + 9ag(t)^2g'(t)^2 + 18atg(t)g'(t)^3$$

$$A_{21}(t) = -18atg(t) - 9at^2g'(t) + 9ag(t)^2g'(t) - 18atg(t)g'(t)^2 - 9at^2g'(t)^3 + 9ag(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{13}(t) = 6t^2g(t) - 2g(t)^3 + 2t^3g'(t) - 6tg(t)^2g'(t) + 6t^2g(t)g'(t)^2 - 2g(t)^3g'(t)^2 + 2t^3g'(t)^3 - 6tg(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{31}(t) = -6t^2g(t) + 2g(t)^3 - 2t^3g'(t) + 6tg(t)^2g'(t) - 6t^2g(t)g'(t)^2 + 2g(t)^3g'(t)^2 - 2t^3g'(t)^3 + 6tg(t)^2g'(t)^3$$

$$A_{22}(t) = -18atg(t) - 9at^2g'(t) + 9ag(t)^2g'(t) - 18atg(t)g'(t)^2 - 9at^2g'(t)^3 + 9ag(t)^2g'(t)^3$$

Bu katsayılar arasından;

$$A_{40}(t) = \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}tg(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t) + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t) + \frac{1}{2}t^3g'(t)^2 - \frac{3}{2}tg(t)^2g'(t)^2 - \frac{3}{2}t^2g(t)g'(t)^3 + \frac{1}{2}g(t)^3g'(t)^3$$

ve

$$A_{31}(t) = -6t^2g(t) + 2g(t)^3 - 2t^3g'(t) + 6tg(t)^2g'(t) - 6t^2g(t)g'(t)^2 + 2g(t)^3g'(t)^2 - 2t^3g'(t)^3 + 6tg(t)^2g'(t)^3$$

katsayıları seçilsin. $A_{40}(t) = 0$ denkleminden $g(t)$ fonksiyonu çekilip $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazıldığında; elde edilen reel değerli $g(t)$ fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$g_1(t) = -\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$
$$g_2(t) = \sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$
$$g_3(t) = -\sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$
$$g_4(t) = \sqrt{3t^2 + \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$$

Bu fonksiyonlar sırasıyla $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazıldığında;

$g_1(t) = -\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}$ için;

$$g_1{}'(t) = -\frac{6t - \frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}{2\sqrt{3t^2 - \sqrt{e^{4c_1} + 8t^4}}}$$

elde edilir. $g_1(t)$ ve $g_1{}'(t)$ fonksiyonları $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{31}(t) = \frac{2(e^{12c_1}+512\,t^{10}(99t^2-35\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+64e^{4c_1}t^6(123t^2-26\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})-24e^{8c_1}t^2(-11t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}))}{(e^{4c_1}+8t^4)^{3/2}(3t^2-\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^{3/2}}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{31}(t) \neq 0$ dır.

$g_2(t) = \sqrt{3t^2-\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}$ için;

$$g_2{}'(t) = \frac{6t-\frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}{2\sqrt{3t^2-\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}$$

elde edilir. $g_2(t)$ ve $g_2{}'(t)$ fonksiyonları $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{31}(t) = -\frac{2(e^{12c_1}+512t^{10}(99t^2-35\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+64e^{4c_1}t^6(123t^2-26\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})-24e^{8c_1}t^2(-11t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}))}{(e^{4c_1}+8t^4)^{3/2}(3t^2-\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^{3/2}}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{31}(t) \neq 0$ dır.

$g_3(t) = -\sqrt{3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}$ için;

$$g_3{}'(t) = -\frac{6t+\frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}{2\sqrt{3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}$$

elde edilir. $g_3(t)$ ve $g_3{}'(t)$ fonksiyonları $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{31}(t) = -\frac{2(e^{12c_1}+24e^{8c_1}t^2(11t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+64e^{4c_1}t^6(123t^2+26\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+512t^{10}(99t^2+35\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}))}{(e^{4c_1}+8t^4)^{3/2}(3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^{3/2}}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{31}(t) \neq 0$ dır.

$g_4(t) = \sqrt{3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}$ için;

$$g_4{}'(t) = \frac{6t+\frac{16t^3}{\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}{2\sqrt{3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}}}$$

elde edilir. $g_4(t)$ ve $g_4{}'(t)$ fonksiyonları $A_{31}(t)$ katsayısında yerine yazılırsa;

$$A_{31}(t) = \frac{2(e^{12c_1}+24e^{8c_1}t^2(11t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+64e^{4c_1}t^6(123t^2+26\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})+512\,t^{10}(99t^2+35\sqrt{e^{4c_1}+8t^4}))}{(e^{4c_1}+8t^4)^{3/2}(3t^2+\sqrt{e^{4c_1}+8t^4})^{3/2}}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre; $A_{31}(t) \neq 0$ dır.

Her bir $A_{31}(t)$ katsayısı için sıfırdan farklı sonuçlar elde edilir. Dolayısıyla ortalama eğriliğin payındaki katsayıların hepsini aynı anda "0" yapan bir fonksiyon yoktur. Bu nedenle e^z yoğunluklu 3-boyutlu Öklid uzayında ağırlıklı minimal bükümlü yüzey yoktur.

Örnek 4.1. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$, yoğunluklu Öklid uzayında ağırlıklı bükümlü yüzey olsun. $a = b = 1$ ve $\alpha(t) = (t^3, 0, t)$ profil eğrisi için**,** bu yüzeyin parametrizasyonu

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}) = (\cos(s)\,(1 + t^3\cos(s) - t\sin(s)), \sin(s)(1 + t^3\cos(s) - t\sin(s)), t\cos(s) + t^3\sin(s))$$

şeklindedir. Eğer yoğunluk fonksiyonu $\Delta_\varphi = 1$ olacak şekilde seçilirse; $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyinin ağırlıklı Gauss eğriliği

$$K_\varphi = (-8 - 20t^2 - \frac{67t^4}{2} - 314t^6 - 790t^8 - 1722t^{10} - 705t^{12} - 1620t^{14} - 1278t^{16} - \frac{1539t^{20}}{2} + (-24t - 66t^3 - 28t^5 - 138t^7 - 468t^9 - 1296t^{11} - 2196t^{13} - 2268t^{17})\cos(s) + (12t^2 - 138t^4 + 88t^6 + 92t^8 + 696t^{10} + 352t^{12} - 972t^{14} + 36t^{16} - 486t^{20})\cos(s)^2 + (18t^3 + 12t^5 - 126t^7 + 212t^9 + 900t^{13} - 324t^{17})\cos(s)^3 + \left(-\frac{t^4}{2} + 18t^6 - 6t^8 - 30t^{10} + 13t^{12} + 234t^{16} - \frac{81t^{20}}{2}\right)\cos(s)^4 + (16t - 44t^3 + 66t^5 + 468t^7 + 1530t^9 + 2196t^{11} + 2268t^{15})\sin(s) + (72t^2 + 108t^4 - 192t^6 + 696t^8 + 392t^{10} + 3708t^{12} + 1800t^{14} + 1944t^{18})\cos(s)\sin(s) + (-12t^3 + 270t^5 - 180t^7 - 162t^9 - 324t^{11} + 2916t^{15})\cos(s)^2\sin(s) + (-12t^4 - 8t^6 + 144t^8 - 136t^{10} - 36t^{12} - 504t^{14} + 648t^{18})\cos(s)^3\sin(s) + (-12t^2 + 138t^4 - 88t^6 - 92t^8 - 696t^{10} - 352t^{12} + 972t^{14} - 36t^{16} + 486t^{20})\sin(s)^2 + (-54t^3 - 36t^5 + 378t^7 - 636t^9 - 2700t^{13} + 972t^{17})\cos(s)\sin(s)^2 + (3t^4 - 108t^6 + 36t^8 + 180t^{10} - 78t^{12} - 1404t^{16} + 243t^{20})\cos(s)^2\sin(s)^2 + (4t^3 - 90t^5 + 60t^7 + 54t^9 + 108t^{11} - 972t^{15})\sin(s)^3 + (12t^4 + 8t^6 - 144t^8 + 136t^{10} + 36t^{12} + 504t^{14} - 648t^{18})\cos(s)\sin(s)^3 + (-\frac{t^4}{2} + 18t^6 - 6t^8 - 30t^{10} + 13t^{12} + 234t^{16} -$$

$$\frac{81t^{20}}{2})\sin(s)^4)/(4+20t^2+\frac{163t^4}{2}+348t^6+466t^8+1692t^{10}+705t^{12}+$$
$$1620t^{14}+1278t^{16}+\frac{1539t^{20}}{2}+(16t^3+28t^5+288t^7+468t^9+1296t^{11}+$$
$$2196t^{13}+2268t^{17})\cos(s)+(-12t^2-6t^4-204t^6-92t^8-756t^{10}-352t^{12}+$$
$$972t^{14}-36t^{16}+486t^{20})\cos(s)^2+(-12t^5-212t^9-900t^{13}+$$
$$324t^{17})\cos(s)^3+\left(\frac{t^4}{2}+6t^8-13t^{12}-234t^{16}+\frac{81t^{20}}{2}\right)\cos(s)^4+(-16t-28t^3-$$
$$288t^5-468t^7-1296t^9-2196t^{11}-2268t^{15})\sin(s)+(-48t^4-24t^6-$$
$$864t^8-392t^{10}-3888t^{12}-1800t^{14}-1944t^{18})\cos(s)\sin(s)+(12t^3+$$
$$180t^7+324t^{11}-2916t^{15})\cos(s)^2\sin(s)+(8t^6+136t^{10}+504t^{14}-$$
$$648t^{18})\cos(s)^3\sin(s)+(12t^2+6t^4+204t^6+92t^8+756t^{10}+352t^{12}-$$
$$972t^{14}+36t^{16}-486t^{20})\sin(s)^2+(36t^5+636t^9+2700t^{13}-$$
$$972t^{17})\cos(s)\sin(s)^2+(-3t^4-36t^8+78t^{12}+1404t^{16}-$$
$$243t^{20})\cos(s)^2\sin(s)^2+(-4t^3-60t^7-108t^{11}+972t^{15})\sin(s)^3+(-8t^6-$$
$$136t^{10}-504t^{14}+648t^{18})\cos(s)\sin(s)^3+(\frac{t^4}{2}+6t^8-13t^{12}-234t^{16}+$$
$$\frac{81t^{20}}{2})\sin(s)^4)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak $K_\varphi \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu yüzey, ağırlıklı düz yüzey değildir.

Örnek 4.2. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$, yoğunluklu Öklid uzayında ağırlıklı bükümlü yüzey olsun. $a=b=1$ ve $\alpha(t)=(t^3,0,t)$ profil eğrisi için**,** bu yüzeyin parametrizasyonu

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})=(\cos(s)\,(1+t^3\cos(s)-t\sin(s)),\sin(s)(1+t^3\cos(s)-$$
$$t\sin(s)),t\cos(s)+t^3\sin(s))$$

şeklindedir. Eğer yoğunluk fonksiyonu e^z olarak seçilirse; $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyinin ağırlıklı ortalama eğriliği;

$$H_\varphi=(30t+\frac{127t^3}{2}+72t^5+\frac{195t^7}{2}+162t^9+\frac{225t^{11}}{2}+\frac{189t^{15}}{2}+(-4+3t^2+63t^4+$$
$$88t^6+234t^8-75t^{10}+351t^{12})\cos(s)+(-6t-56t^3-36t^5-132t^7+$$
$$162t^9+24t^{11}+108t^{15})\cos(s)^2+(t^2-15t^4-16t^6-126t^8-57t^{10}+$$
$$81t^{12})\cos(s)^3+\left(\frac{t^3}{2}-\frac{3t^7}{2}-\frac{105t^{11}}{2}+\frac{27t^{15}}{2}\right)\cos(s)^4+(-4-97t^2-101t^4-$$
$$234t^6-180t^8-225t^{10}-243t^{12})\sin(s)+(8t-48t^3-124t^5-432t^7-$$
$$440t^9-324t^{13})\cos(s)\sin(s)+(9t^2+33t^4+18t^6+72t^8-567t^{10}-$$

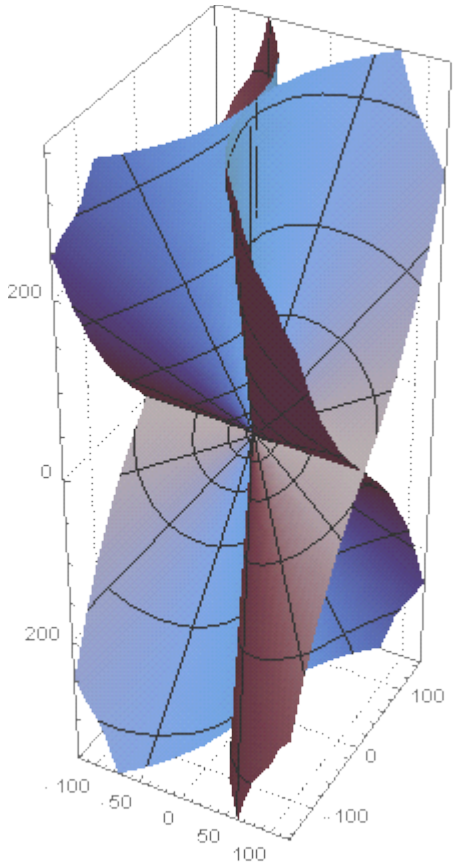
$$81t^{12})\cos(s)^2\sin(s) + (12t^5 + 88t^9 - 180t^{13})\cos(s)^3\sin(s) + (-3t^3 + 9t^7 + 315t^{11} - 81t^{15})\cos(s)^2\sin(s)^2 + (-3t^2 + 45t^4 + 48t^6 + 378t^8 + 171t^{10} - 243t^{12})\cos(s)\sin(s)^2 + (6t + 56t^3 + 36t^5 + 132t^7 - 162t^9 - 24t^{11} - 108t^{15})\sin(s)^2 + (-12t^5 - 88t^9 + 180t^{13})\cos(s)\sin(s)^3 + (-3t^2 - 11t^4 - 6t^6 - 24t^8 + 189t^{10} + 27t^{12})\sin(s)^3 + \left(\frac{t^3}{2} - \frac{3t^7}{2} - \frac{105\,t^{11}}{2} + \frac{27t^{15}}{2}\right)\sin(s)^4)/(2\sqrt{2}(2 + 3t^2 + 18t^4 + 22t^6 + 27t^{10} + t(1 + 9t^4)(t(-1 + t^4)\cos(2s) - 4\sin(s) - 4t^2\cos(s)\,(-1 + t\sin(s))))^{3/2})$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuca göre $H_\varphi \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu yüzey, ağırlıklı minimal yüzey değildir.

$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ ağırlıklı bükümlü yüzeyinin

$$D:\begin{cases}0 \le s \le 2\pi \\ -8 \le t \le 8\end{cases}$$

tanım aralığındaki grafiği aşağıdaki gibidir:



$\{\cos(s)(1+t^3\cos(s)-t\sin(s)),\ \sin(s)(1+t^3\cos(s)-t\sin(s)),\ \cos(s)t+t^3\sin(s)\}$

Şekil 4.1. Ağırlıklı bükümlü yüzey

Örnek 4.3. $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$, yoğunluklu Öklid uzayında ağırlıklı bükümlü yüzey olsun. $a=1, b=0$ ve $\alpha(t)=(t^3,0,t)$ profil eğrisi için**,** bu yüzeyin parametrizasyonu

$$\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})=(\cos(s)\,(1+t^3\,),\sin(s)(1+t^3),t)$$

şeklindedir. Eğer yoğunluk fonksiyonu e^z olarak seçilirse; $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ yüzeyinin ağırlıklı ortalama eğriliği;

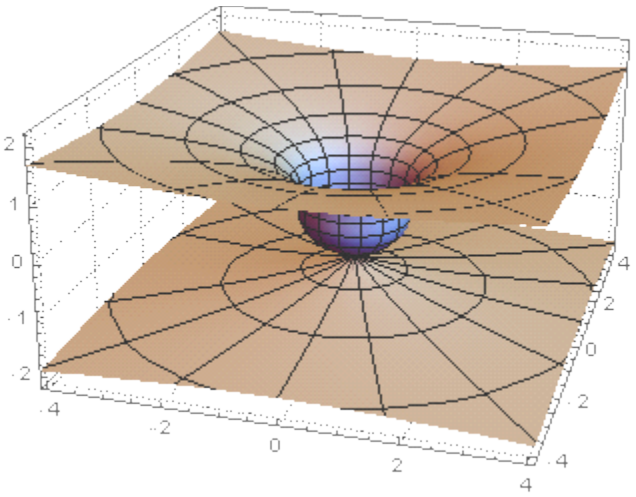
$$H_\varphi=\frac{(1+t^3)^2(-1+3t(2+t-t^3+t^4+9t^5+9t^8))}{2((1+t^3)^2(1+9t^4))^{3/2}}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre $H_\varphi\neq 0$ dır. Dolayısıyla $\bar{x}(\mathrm{s},\mathrm{t})$ dönel yüzeyi, ağırlıklı minimal yüzey değildir.

$\bar{x}(s,t)$ ağırlıklı bükümlü yüzeyinin

$$D: \begin{cases} 0 \le s \le 2\pi \\ -2 \le t \le 2 \end{cases}$$

tanım aralığındaki grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.2. Dönel yüzey

KAYNAKÇA

Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right.* 3rd Edition, Springer International Publishing, 163-202.

Belarbi, L., & Belkhelfa, M. (2012). Surfaces in $\mathbb{R}^3$ with Density. *i-manager's Journal on Mathematics, 1*(1), 34-48.

Belarbi, L., & Belkhelfa, M. (2015). Some Results in Riemannian Manifolds with Density. *Analele Universitatii din Oradea. Fascicola Matematica Tom XXII, 2*, 81-86.

Erwin, K. (2013). *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Springer-Verlag. 1-191.

Fuster, M. C., & Codesal, E. S. (1999). Generalized evolutes, vertices and Conformal Invariants of Curves in $\mathbb{R}^{n+1}$, *Indoy. Mathem., N. S.,10*(2), 297-305.

Germain, S. (1831). Memoire sur la theories des surfaces. *J. Reine Angrew. Math.,* 7, 1-29.

Goemans, W., & Woestyne, I. Van de (2013). Twisted surfaces in Euclidean and Minkowski 3-space. *Pure and Applied Differential Geometry,* J. Van der Veken, I. Van de Woestyne, L. Verstraelen and L. Vrancken (Editors), Shaker Verlag Aachen, Germany, 143–151.

Goemans, W., & Woestyne, I. Van de (2014). Constant curvature twisted surfaces in 3-dimensional Euclidean and Minkowski space. *Proceedings of the conference ''Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics-RIGA",* Bucharest, Romania, 117-130.

Gray, A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Florida, 1-962.

Gromov, M. (2003). Isoperimetry of waists and concentration of maps. *Geometric & Functional Analysis GAFA,* 13(1), 178-215.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri I.* Ankara Üniversitesi, Ankara 1-270.

Hicks, N. J. (1965). *Notes on Differential Geometry*. (Vol. 3). Princeton: van Nostrand. 18-46.

İlarslan, K. (2002). *Öklid Olmayan Manifoldlar Üzerindeki Bazı Özel Eğriler.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Lipschutz, M. M. (1969). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Geometry*. McGraw Hill Professional, 1-269.

Mccleary, J. (1997). *Geometry from a Differentiable Viewpoint.* Cambridge University Press, United States of America, 1-308.

Millman, R.S., & Parker, G.D. (1977). *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, New Jersey, 1-265.

Morgan, F. (2005). Manifolds with Density. *Not. Amer. Math. Soc., 52*(8), 853-858.

Oprea, J. (2007). *Differential Geometry and its Applications.* Mathematical Association of America, Washington, 1-495.

Osserman, R. (1990). Curvature in the Eighties, *Amer. Math. Monthly, 97*, 731-756.

Sabuncuoğlu, A. (2016). *Diferansiyel Geometri.* Nobel Yayınları, Ankara, 1-522.

Shifrin, T. (2016). *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces.* Preminary Version, University of Georgia, 1-128.

Stanilov, G., & Slavova, S. (2006). Classification of some twisted surfaces and power series of such surfaces, *Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences 59*(6), 593-600.

Tu, L. W. (2017). *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes.* Springer, (Vol. 275), 1-345.

Yıldız, Ö.G., Hızal, S., & Akyiğit, M. (2018). Type I+ Helicoidal Surfaces with Prescribed Weighted Mean or Gaussian Curvature in Minkowski Space with Density, *An. S.t. Univ. Ovidius Constanta, 26*(3), 99-108.

Yoon, D.W., Kim, D.S., Kim, Y.H., & Lee, J.W. (2017). Constructions of Helicoidal Surfaces in Euclidean Space with Density. *Symmetry,* 173, 1-9.

Yüce, S. (2013). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*. Sürat Üniversitesi Yayınları, 1-296.

Yüce, S. (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri.* Pegem Atıf İndeksi, 1-557.