

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

ORTOTOMİĞİN *STUDY* RESMİ

**Önder Gökmen YILDIZ
Doktora Tezi**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2015

Ref.No: 10063241



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

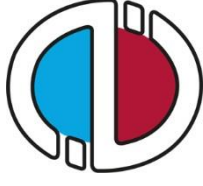
ORTOTOMİĞİN *STUDY* RESMİ

**Önder Gökmen YILDIZ
Doktora Tezi**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BİLECİK, 2015



ANADOLU UNIVERSITY



**BILECIK SEYH EDEBALI
UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

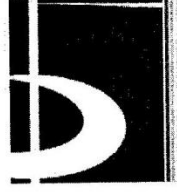
STUDY MAP OF THE ORTHOTOMIC

**Önder Gökmen YILDIZ
Ph.D. Thesis**

**Thesis Advisor
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**Co-Advisor
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**

BILECIK, 2015



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOKTORA
JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 25/12/2014 tarih ve 54 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 15.01.2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Önder Gökmen YILDIZ'ın, "Ortotomiğin *Study Resmi* " başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Murat TOSUN

ÜYE : Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI:

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun / / tarih ve / sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aőamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hasan Hilmi HACISALİHOğLU'na minnet ve őükranlarımı sunarım.

Çalıőmam süresince bana vakit ayıran ve yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a teőekkürü bir borç bilirim.

Doktora aőamasında engin bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen ve değerli katkılar sağlayan Bilecik şeyh Edebalı Üniöersitesi, Fen Edebiyat Faköltesi, Matematik Bölümü Öğretim Elemanlarına ve baőta Prof. Dr. Murat TOSUN olmak üzere Sakarya Üniöersitesi Fen Edebiyat Faköltesi Matematik Bölümü Geometri Grubundaki hocalarıma teőekkürlerimi sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli eőim Ahu Funda YILDIZ'a ve aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

Bursiyeri (BİDEB-2211) olduğum Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna teőekkürü bir borç bilirim.

Önder Gökmen YILDIZ

Ocak 2015

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına olup, literatür hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca açılabilir regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine yeni bir metottan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde birim dual küre üzerindeki küresel ortotomik hesaplanmıştır. Küresel ortotomiğe \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise dual vektörel hesaplamalar kullanılarak \mathbb{E}^3 ve \mathbb{L}_1^3 te açılabilir küresel ortotomik regle yüzeyler için bir metot verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Küresel ortotomik, kongruans, açılabilir regle yüzey, dual sayı, dual vektör, dual Lorentz uzayı, 3-boyutlu Minkowski uzayı, *E. Study* dönüşümü.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is an introduction devoted to the literature. Second chapter deals with the concepts, necessary definitions and necessary theorems. Moreover, a new method of determination of a developable ruled surface is mentioned.

In chapter third, spherical orthotomic of circle on unit dual sphere is calculated and spherical orthotomic ruled surface is obtained which corresponds to spherical orthotomic of circle.

In fourth chapter of this thesis, using dual vector calculus, a method of determination of a developable spherical orthotomic ruled surface in \mathbb{E}^3 and \mathbb{L}_1^3 is presented.

Key Words: Spherical orthotomic, congruence, developable ruled surface, dual numbers, dual vectors, dual Lorentzian space, Minkowski 3-space, *E. Study* mapping

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

JÜRİ ONAY SAYFASI

TEŞEKKÜR

ÖZET i

ABSTRACT ii

İÇİNDEKİLER iii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ iv

ŞEKİLLER DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR..... 3

2.1. Öklid Uzayı 3

2.2. Dual Öklid Uzayı 9

2.3. Lorentz Uzayı 24

2.4. \mathbb{D}_1^3 Dual Lorentz Uzayı 27

2.5. Açılabilir Regle Yüzeylerin Belirlenmesi Üzerine Yeni Bir Metot 30

3. ÇEMBERİN KÜRESEL ORTOTOMİĞİ VE KÜRESEL ORTOTOMİĞİN

STUDY RESMİ..... 37

3.1. Çemberin *Study Resmi* 37

3.2. Çemberin Küresel Ortotomiği ve Küresel Ortotomğin *Study Resmi* 40

3.2.1. Özel durumlar 43

4. AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER 46

4.1. Açılabilir Küresel Ortotomik Regle Yüzeyler..... 46

4.2. Açılabilir Küresel Ortotomik Timelike Regle Yüzeyler 57

4.3. Açılabilir Küresel Ortotomik Spacelike veya Timelike Regle Yüzeyler 63

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

k_1	: 1. Eğrilik Fonksiyonu
k_2	: 2. Eğrilik Fonksiyonu
\mathbb{L}_1^3	: 3-boyutlu Minkowski uzayı
\mathbb{E}^3	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
\mathbb{E}^n	: n-boyutlu Öklid Uzayı
\mathbb{R}^3	: 3-boyutlu Reel Vektör Uzayı
S	: Birim Çember
S^2	: Birim Küre
P_x	: Dağılma Parametresi
ε	: Dual Birim
\mathbb{D}	: Dual Sayılar Cümlesi
\mathbb{D}^3	: Dual Vektörler Cümlesi
S^2	: Dual Birim Küre
\mathbb{H}_0^2	: Dual Hiperbolik Birim Küre
$\langle\langle,\rangle\rangle$: Dual İç Çarpım
S_1^2	: Dual Lorentz Birim Küre
$\langle\langle,\rangle\rangle_L$: Dual Lorentzian İç Çarpım
\mathbb{D}_1^3	: Dual Lorentz Uzayı
Λ_L	: Dual Lorentzian Vektörel Çarpım
Λ	: Dual Vektörel Çarpım
H_0^2	: Hiperbolik Birim Küre
\langle,\rangle	: İç Çarpım
S_1^2	: Lorentz Birim Küre
\langle,\rangle_L	: Lorentzian İç Çarpımı
\wedge_L	: Lorentzian Vektörel Çarpımı
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Cümlesi

- $\| \cdot \|$: Norm Fonksiyonu
 Γ : Null (Lightlike) Koni
 \wedge : Vektörel Çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 2.1: Küresel Ortotomik	7
Şekil 2.2: Dağılma parametresi	8
Şekil 2.3: Striksiyon noktası.....	9
Şekil 2.4: <i>E. Study</i> dönüşümü.....	14
Şekil 2.5: Dual açısı.....	17
Şekil 2.6: Dual eğri	21
Şekil 2.7: Regle yüzey	22
Şekil 2.8: \mathbb{L}_1^3 uzayında birim küreler	26
Şekil 2.9: \mathbb{L}_1^3 uzayında vektörler.....	26
Şekil 2.10: Regle yüzeyi	36
Şekil 3.1: Birim dual küre.....	38
Şekil 4.1: Küresel ortotomik regle yüzeyi	51
Şekil 4.2: Timelike regle yüzey	63
Şekil 4.3: Spacelike regle yüzey	69
Şekil 4.4: Timelike regle yüzey	71

1. GİRİŞ

Regle yüzeyler diferensiyel geometri ve kinematik teorisinin ilgi çekici bir araştırma konusudur. Bu yüzden, literatürde bu konu ile ilgili çok sayıda kaynak bulmak mümkündür. Regle yüzeylerin sınıflandırılması, dayanak eğrisiyle ilgili özelliklere göre, regle yüzey ve yüzeyin üzerindeki eğrilik çizgileri, geodezikleri, striksiyon çizgileri ve yüzeyin şekil operatörü ve bunun cebirsel invariantlarının incelenmesi, regle yüzeylerin açılabilirliği, açılım uzunlukları, kapalı regle yüzeylerin incelenmesi gibi konular regle yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların başında gelmektedir.

Dual sayılar ilk defa W. K. Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarında bir araç olarak kullanılmıştır. Daha sonra E. Study çizgi geometrisi ve kinematik araştırmalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanmıştır. E. Study \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir yönlü doğru ile \mathbb{D}^3 3-boyutlu dual uzaydaki birim dual küre üzerindeki bir nokta arasında bire bir eşlemenin var olduğunu göstermiştir. Hasan Hüseyin Uğurlu \mathbb{E}^3 yerine \mathbb{L}_1^3 Lorentz uzayını göz önüne alarak bu uzaydaki yönlü spacelike (sırasıyla timelike) doğruların, \mathbb{D}_1^3 dual Lorentz uzayının dual Lorentz (sırasıyla hiperbolik) birim küresinin noktaları ile bire bir eşlenebildiğini göstermiştir. *E. Study* dönüşümü yardımıyla regle yüzeyler teorisi çalışılma alanı daha da genişlemiştir.

A. Sabuncuoğlu ve M. Ergüt doktora tezlerinde genelleştirilmiş regle yüzeyleri çalışmışlardır. Daha sonra regle yüzeyler n-boyutlu Lorentz uzayına genelleştirilmiştir. A. Turgut “3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler” adlı doktora tezini yapmıştır. M. Tosun ve İ. Aydemir doktora çalışmalarında n-boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş regle yüzeyleri incelemiştir.

Diferensiyel geometride önemli bir konu olan küresel eğriler ile ilgili pek çok çalışma yapılmaktadır ve küresel eğrilerin geniş bir uygulama alanı mevcuttur. Küre üzerindeki herhangi bir eğriye göre ortotomik tanımı Jianfei Xiong tarafından verilmiştir. Bu çalışmada küresel ortotomik kavramıyla kongruans ve regle yüzeyler teorisini birleştirerek, J. Xiong’un küre üzerinde tanımladığı ortotomiği dual uzaya oradan da 3-boyutlu çizgiler uzayına taşınmıştır ve bunlara karşılık gelen geometrik yerler küresel koordinatlar yardımıyla tespit edilmiştir.

Bu tezde ilk olarak H.H. Hacısalihoğlu tarafından çalışılan “Study map of circle” adlı makale incelenmiştir. Çemberin ortotomiği hesaplanılarak, onun *E. Study* resmi olan kongruanslar tarafımızdan çalışılmıştır. Daha sonra kongruansın doğruları ile kongruans zarfının reteci arasındaki özel durumlar incelenmiştir. Çalışmanın devamında . Köse’nin açılabilir regle yüzeylerin tespiti için geliştirdiği yeni metot, ortotomik kavramı ele alınarak küresel ortotomik regle yüzeyler için hem \mathbb{E}^3 hem de \mathbb{L}_1^3 de ortaya konmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 A boştan farklı bir cümle ve K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun.

Eğer

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa A 'ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir;

- i. $\forall P, Q \in A$ için $f(P, Q) = \alpha$ vardır.
- ii. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ dir.
- iii. Bir $P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.2 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır.

\mathbb{R}^3 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş \mathbb{E}^3 afin uzayını ele alalım. Bu \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece \mathbb{R}^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.3

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 2000a).

Teorem 2.1.1 \mathbb{E}^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoglu, 2000a).

Tanım 2.1.4 \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

fonksiyonu diferensiyellenebilir ise \mathbb{E}^n de bir (I, α) koordinat komşuluklu eğri adını alır ve M ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir (Hacısalihoglu, 2000a).

Tanım 2.1.6 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoglu, 2000a).

Tanım 2.1.7 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin yay uzunluğu, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in I$$

reel sayısına denir (Hacısalihoglu, 2000a).

Tanım 2.1.8 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$, için; $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye $m \in M$ noktasındaki Serret Frenet r -ayaklısı, her bir V_i , $1 \leq i \leq r$, vektörüne de Serret Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoglu, 2000a).

Tanım 2.1.9 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için, $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu, 2000a).

$n = 3$ için \mathbb{E}^3 de Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ şeklinde alınabilir.

Tanım 2.1.10 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi ve $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ küresi verilsin. Eğer $M \subset S^2$ ise M ye \mathbb{E}^3 ün bir küresel eğrisi denir (Hacısalihoglu, 2000a).

Teorem 2.1.2 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ ise, M bir küresel eğridir

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \end{pmatrix}' \frac{1}{k_2} \right]' + \frac{k_2}{k_1} = 0 \text{ (Hacısalihoglu, 2000a).}$$

Tanım 2.1.11 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrisine $\alpha(s)$ noktasında normal olan büyük çembere α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki küresel normali denir ve

$$\begin{cases} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1, \\ \langle \vec{x}, \vec{T} \rangle = 0 \end{cases}$$

ile verilir (Xiong, 2004).

Tanım 2.1.12 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrisine $\alpha(s)$ noktasında teğet olan büyük çembere α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki küresel teğeti denir ve

$$\begin{cases} \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 1, \\ \langle \vec{y}, \vec{\alpha} \wedge \vec{T} \rangle = 0 \end{cases}$$

ile verilir (Xiong, 2004).

Tanım 2.1.13 $u \in S^2$ ve $M \subset S^2$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. α nun küresel teğetlerinin yattığı düzleme göre u nun yansımalarının cümlesine u nun α ile bağlantılı küresel ortotomiği denir ve

$$\vec{u} = 2\langle (\vec{\alpha} - \vec{v}), \vec{v} \rangle \vec{v} + \vec{u} \quad (2.1)$$

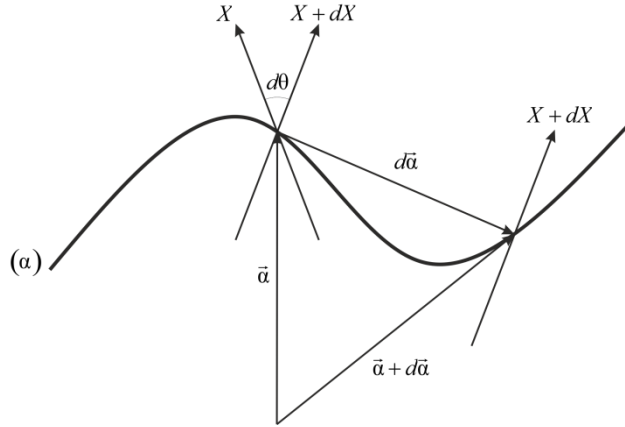
burada $\vec{v} = \frac{\vec{B} - \langle \vec{B}, \vec{\alpha} \rangle \vec{\alpha}}{\|\vec{B} - \langle \vec{B}, \vec{\alpha} \rangle \vec{\alpha}\|}$ küresel teğetlerin yattığı düzlemin normalidir (Xiong, 2004).

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

ile verilir.

Tanım 2.1.15 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).



Şekil 2.2 Dağılma parametresi.

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin drali P_x ise

$$P_x = \frac{\det \left[\frac{d\alpha}{ds}, X, X' \right]}{\|X'\|^2} \quad (2.2)$$

dir, burada X' , X 'in türevini göstermektedir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.16 Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Teorem 2.1.3 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.17 Eğer

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

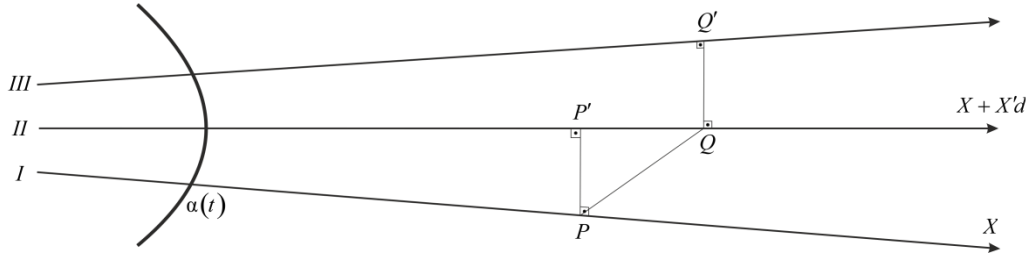
regle yüzeyi $\forall s \in I$ için

$$\varphi(s + 2\pi, v) = \varphi(s, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir (Hacısalihoglu, 2000b).

Tanım 2.1.18 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoglu, 2000b).

Tanım 2.1.19 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihoglu, 2000b).



Şekil 2.3 Striksiyon noktası.

Tanım 2.1.20 Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir (Hacısalihoglu, 2000b).

2.2 Dual Öklid Uzayı

Tanım 2.2.1 Her $a, a^* \in \mathbb{R}$ için $\tilde{a} = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı reel sayı ikilisi adı verilir.

Böylece

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem (toplama ve çarpma) ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983) :

Toplama : $\tilde{a} = (a, a^*), \tilde{b} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklindeki işlem \mathbb{D} de toplama olarak isimlendirilir.

Çarpma :

$$\otimes : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = (a, a^*) \otimes (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklindeki işlem \mathbb{D} de çarpma olarak isimlendirilir.

Eşitlik : $\tilde{a} = (a, a^*), \tilde{b} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için

$$a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

ise \tilde{a} ile \tilde{b} eşittir denir ve $\tilde{a} = \tilde{b}$ şeklinde gösterilir, tersi de doğrudur.

Tanım 2.2.2 \mathbb{R} reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise, \mathbb{D} cümlesine dual sayılar sistemi ve $(a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.1 $(\mathbb{D}, \oplus, \otimes)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.2 $(\mathbb{D}, \oplus, \otimes)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.3 \mathbb{D} dual sayılar halkası, \mathbb{R} reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.4 Bir $\tilde{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında "a" reel sayısına \tilde{a} nın reel kısmı, " a^* " reel sayısına da \tilde{a} nın dual kısmı denir ve sırasıyla $\text{Re } \tilde{a} = a, \text{Du } \tilde{a} = a^*$ şeklinde yazılır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.3 $(1, 0) = 1$ dual sayısına \mathbb{D} halkasındaki çarpma işleminin birim elemanı veya \mathbb{D} halkasındaki reel birim denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.4 $(0, 1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilir ve dual birim olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1983).

$$\varepsilon^2 = (0, 1) \otimes (0, 1) = (0, 0)$$

dır.

Teorem 2.2.5 $\tilde{x} = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklinde yazılabilir. Yani

$$(x, x^*) = x + \varepsilon x^*$$

eşitliğini yazabiliriz (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.6 $\tilde{x} = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile \tilde{x} nin çarpımı $\lambda\tilde{x} = (\lambda x, \lambda x^*)$ dir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.5 Birimi 1 olan değişmeli bir halka H ve $(M, +)$ bir Abel grup olmak üzere

$$H \times M \rightarrow M$$

$$(a, \alpha) \rightarrow a\alpha$$

dış işlemi, $\forall a, b \in H$ ve $\forall \alpha, \beta \in M$ için

- i. $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$
- ii. $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$
- iii. $(ab)\alpha = a(b\alpha)$
- iv. $1\alpha = \alpha$

özelliklerini sağlıyor ise M ye H üzerinde bir modül adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.6 \mathbb{D} dual sayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \{(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) : \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \in \mathbb{D}\}$$

cümlesi üzerinde $\vec{a} = (\tilde{a}_i), \vec{b} = (\tilde{b}_i) \in \mathbb{D}^3, i = (1, 2, 3)$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için, sırasıyla, toplama, skalarla çarpma ve eşitlik işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983):

Toplama :

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (\tilde{a}_i + \tilde{b}_i)$$

Skalar ile Çarpma :

$$\cdot: \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(\lambda, \vec{a}) \rightarrow \lambda \vec{a} = (\lambda \vec{a}_i)$$

Eşitlik : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}_i = \vec{b}_i$

dir.

Tanım 2.2.7 $(\mathbb{D}^3, +)$ bir Abel grubudur (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.8 $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ sistemi \mathbb{D} dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. Bu modüle \mathbb{D} -Modül denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.9 \mathbb{D} -Modül 'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine dual vektörler denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.7 $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere \mathbb{D} -Modül 'de her bir \vec{a} dual vektörü

$$\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \quad [\varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}]$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.8 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.9 $\vec{a} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{b} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathbb{D}$ -Modül için

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.10 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle\langle, \rangle\rangle: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\langle\langle, \rangle\rangle(\vec{a}, \vec{b}) = \langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \langle\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle\rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir vektör uzayı üzerinde olduğu gibi \mathbb{D} -Modüldeki iç çarpım aksiyomları da aynen \mathbb{R}^3 deki gibi kabul edilebilir. O halde \mathbb{D} -Modül 'de iç çarpım \mathbb{R}^3 deki iç çarpım sayesinde aşağıdaki şekilde

$$\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon[\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle]$$

yazılabilir burada sağ taraftaki \langle, \rangle işlemleri \mathbb{R}^3 , reel sayılar uzayındaki Öklid iç çarpımını göstermektedir, ayrıca $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = 0$ dır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.11 Bir $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu diye, \mathbb{R}^3 deki normun sayesinde

$$\|\vec{a}\| = \left(\langle\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\rangle \right)^{1/2} = \left(\|\vec{a}\|^2 + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq \vec{0},$$

biçiminde tanımlanan $\|\vec{a}\|$ dual sayısına denir. Burada

$$a = \|\vec{a}\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere $\|\vec{a}\|$ normu

$$\|\vec{a}\| = a + \varepsilon a^*$$

biçimindeki dual sayıdır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.2.12 Normu $(1,0)$ dual sayısı olan dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.10 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ bir birim dual vektör ise,

$$\|\vec{a}\| = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

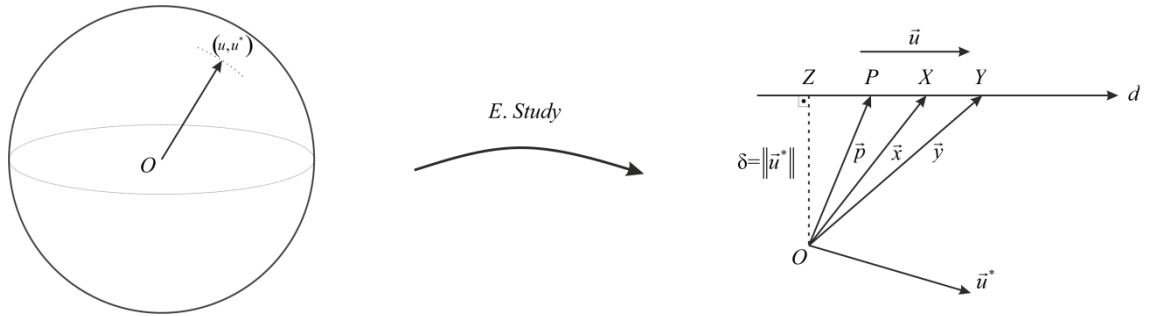
dır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.13 $\left\{ \vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*; \|\vec{x}\| = (1,0), \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine \mathbb{D} -Modüldeki birim dual küre denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.11 (E. Study Dönüşümü) Birim dual kürenin dual noktaları 3-boyutlu \mathbb{E}^3 Öklid uzayındaki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoglu, 1983).

İspat: \mathbb{E}^3 de bir d doğrusu alıp bu doğruya karşılık gelen bir birim dual vektör bulunacaktır. Sonra da bir birim dual vektörün \mathbb{E}^3 de bir yönlü doğru gösterdiği ispatlanacaktır.

\mathbb{E}^3 de bir doğru; bir O başlangıç noktasına göre doğru üzerindeki bir P noktası ve doğrunun yönünü belirten bir $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ vektörü tarafından tamamen belirlidir.



Şekil 2.4 E. Study dönüşümü.

Böyle bir doğrunun vektörel denklemi:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad (2.3)$$

dır.

(2.3) denkleminde \vec{u} yerine $\lambda \vec{u}$ alınırsa gene aynı doğru belirtilmiş olacağından \vec{u} birim vektör olarak alınabilir.

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{p} \wedge \vec{u} = \vec{u}_o^*$$

denirse, \vec{u}_o^* vektörüne \vec{u} birim vektörünün O noktasına göre vektörel momenti olarak bakılabilir.

\vec{u} , vektörü X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır. Eğer doğru üzerinde X den başka bir Y noktası alınırsa

$$(\vec{y} - \vec{p}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

dır. Buradan

$$\vec{y} \wedge \vec{u} = \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{p} \wedge \vec{u} = \vec{u}_o^* \quad (2.4)$$

olduğu görülür.

\vec{u}_o^* vektörünün boyu olan $\|\vec{u}_o^*\| = \delta$ sayısı O noktasının doğruya olan dik uzaklığına eşittir. Bu, şöyle gösterilebilir: O noktasından doğruya inilen dikmenin ayak

noktası Z olsun. \vec{u}_o^* vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsız olduğundan

$$\vec{u}_o^* = \vec{z} \wedge \vec{u}$$

dur. \vec{u}_o^* vektörünün boyu

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_o^*\| &= \|\vec{z} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{z}\| \|\vec{u}\| \sin 90^\circ, \quad \|\vec{u}\| = 1 \\ &= \|\vec{z}\| \\ &= \delta \end{aligned} \tag{2.5}$$

dır.

Bu son ifadeden de görüldüğü gibi \vec{u}_o^* vektörü, O başlangıç noktasının seçilişine bağlıdır.

Eğer (\vec{u}, \vec{u}_o^*) vektör çifti verilmiş ise \mathbb{E}^3 deki yönlü doğru tek olarak tamamen belirlidir.

$$\vec{u}_o^* = \vec{x} \wedge \vec{u}$$

olduğundan $\vec{u}_o^* \perp \vec{x}$ ve $\vec{u}_o^* \perp \vec{u}$ dur. O halde \vec{u} da birim vektör seçildiğinden (\vec{u}, \vec{u}_o^*) vektör çifti için

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \text{ ve } \langle \vec{u}, \vec{u}_o^* \rangle = 0$$

dir. Seçilen herhangi $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörü için de

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır. O halde her birim dual vektöre \mathbb{E}^3 de bir yönlü doğru karşılık gelir. Şöyle ki; \vec{u} ve \vec{u}_o^* verildiğinde, normali \vec{u}_o^* olan düzlem de, merkezi O ve yarıçap uzunluğu \vec{u}_o^* ın boyu olan bir çember çizilir. Bu çemberin \vec{u} ile aynı yönlü olan bir tek teğeti vardır. Bu teğet doğrusu, (\vec{u}, \vec{u}_o^*) birim vektörünün belirttiği doğrudur.

Tanım 2.2.14 \mathbb{E}^3 deki bir doğru (\vec{a}, \vec{a}^*) vektör çifti ile belirlenebilir. \vec{a} ve \vec{a}^* vektörlerinin bileşenlerine söz konusu doğrunun normlanmış Plücker doğru koordinatları denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.15 $\tilde{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere

$$u = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$$

birim dual vektörüne \tilde{x} vektörünün eksenini denir.

Tanım 2.2.16 Bir $\tilde{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ dual vektörü verilsin.

$$k = \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|^2}$$

reel sayısına o dual vektörün adımı veya yükselişi denir.

$$\tilde{x} = \vec{x}(1 + \varepsilon k)u$$

dual vektörü için, k sonlu bir sayı ise $\vec{x} \neq 0$ ve $\vec{x}^* \neq 0$ dır. Bu \tilde{x} dual vektörüne has dual vektör denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.17 $\tilde{z} = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$f(\tilde{z}) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

serisine f dual fonksiyonunun $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasındaki Taylor açılımı denir.

Bu tanım gereğince, f dual fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı (Maclaurin açılımı)

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

şeklini alır. Özel olarak, $f(x + \varepsilon x^*) = \cos(x + \varepsilon x^*)$, $f(x + \varepsilon x^*) = \sin(x + \varepsilon x^*)$, $f(x + \varepsilon x^*) = \cosh(x + \varepsilon x^*)$ ve $f(x + \varepsilon x^*) = \sinh(x + \varepsilon x^*)$ dual fonksiyonları alınırsa bu fonksiyonların $0 = (0, 0)$ dual noktasındaki Taylor açılımları:

$$\cos(x + \varepsilon x^*) = \cos x - \varepsilon x^* \sin x$$

$$\sin(x + \varepsilon x^*) = \sin x + \varepsilon x^* \cos x$$

$$\cosh(x + \varepsilon x^*) = \cosh x + \varepsilon x^* \sinh x$$

$$\sinh(x + \varepsilon x^*) = \sinh x + \varepsilon x^* \cosh x$$

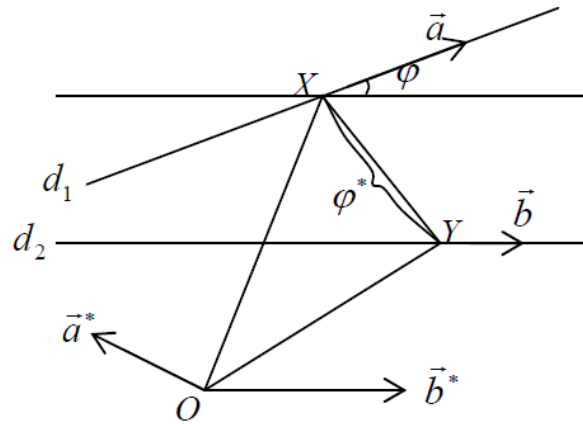
(2.6)

olarak elde edilirler (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.18 \vec{a} ve \vec{b} iki birim dual vektör ve bu birim dual vektörlere \mathbb{E}^3 de karşılık gelen yönlü doğrular, sırasıyla, d_1 ve d_2 olsunlar. d_1 doğrusunun yönü \vec{a} , yeri \vec{a}^* , d_2 doğrusunun yönü \vec{b} , yeri de \vec{b}^* ile belirlidir. \vec{a} ile \vec{b} arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle &= \cos \Phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) \\ &= \cos \varphi - \varepsilon\varphi^* \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir, burada $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına \vec{a} ile \vec{b} arasındaki dual açı denir. \vec{a} ve \vec{b} birim dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı, bunların \mathbb{E}^3 te temsil ettikleri d_1 ve d_2 yönlü doğrularının arasındaki φ açısı ve (en kısa) uzaklığı gösteren φ^* reel çiftinden oluşur (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.5 Dual açı.

$\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \Phi$ formülünden yararlanarak \mathbb{E}^3 deki yönlü doğruların birbirine göre durumları incelenebilir.

- i. $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \text{sırf dual} \Leftrightarrow \cos \varphi = 0$ ise $\varphi = \frac{\pi}{2}$, yani \vec{a} ve \vec{b} birim vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdır.

- ii. $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \text{sırf reel ise } \varphi^* = 0 \text{ olsun. Bu halde yönlü iki doğru kesişir ve}$
 $\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = 0$ ifadesi bu iki doğrunun kesişme koşuludur.
- iii. $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$ ve $\varphi^* = 0$ ise yönlü
doğrular birbirlerini dik olarak keserler.
- iv. $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = (1, 0) \Rightarrow \varphi = 0$ ise yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler.
Eğer $\varphi^* = 0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.
- v. $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = -(1, 0) \Rightarrow \varphi = \pi$ ise yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler.
Eğer $\varphi^* = 0$ ise doğrular çakışıktır.

Tanım 2.2.19 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\Lambda: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$\vec{a} \Lambda \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon(\vec{a}^* \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}^*)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.20 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}$ -Modül için

$$\vec{a} \Lambda \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \Phi$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.21 \mathbb{D} -Modül 'deki birim dual $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ vektörü \mathbb{E}^3 te bir yönlü doğrunun yönünü $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim reel vektörü ve başlangıç noktasına göre vektörel momentini $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ vektörü ifade etmektedir. $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ birim dual vektör olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{2.7}$$

$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

koşulunu sağlar.

Eğer (2.7) koşulundan başka bu altı Plücker doğru koordinatları arasında bir ikinci

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntısı varsa bu halde \vec{x} doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur. \mathbb{E}^3 te üç bağımsız parametreye bağlı (∞^3) sayıdaki \vec{x} doğrularının cümlesine ışın kompleksi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.22 \vec{a} bir has dual vektör olmak üzere

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

denklemini sağlayan $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir.

X doğrusunun bağımsız üç parametresi u, v, w ile gösterilirse \vec{x} birim dual vektörü

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v, w) + \varepsilon \vec{x}^*(u, v, w)$$

şeklinde u, v, w nin bir fonksiyonu olarak yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.23 $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

ve

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntılarından başka bir

$$G(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntısı daha varsa \vec{x} doğrusunun bağımsız parametre sayısı iki olur. İki bağımsız parametreye bağlı (∞^2) sayıdaki \vec{x} doğrularının cümlesine ışın kongruansı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.24 \vec{a}, \vec{b} has dual vektörleri için

$$F... \langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$$G... \langle \vec{b}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

denklemlerini sağlayan \vec{x} doğrularının cümlesine lineer ışın kongruansı denir.

Bağımsız parametrelere u ve v denirse \vec{x} birim dual vektörü u ve v reel parametrelerinin

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{x}^*(u, v)$$

şeklinde bir fonksiyonu olarak yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.25 $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ birim dual vektörünün $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ normlanmış homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

bağıntılarından başka

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

$$G(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

$$H(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntıları da varsa \vec{x} doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir. *E.Study* tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki \vec{x} doğrularının cümlesine regle yüzey (ışın yüzeyi) denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ has dual vektörler olmak üzere

$$F... \langle a, x^* \rangle + \langle a^*, x \rangle = 0$$

$$G... \langle b, x^* \rangle + \langle b^*, x \rangle = 0$$

$$H... \langle c, x^* \rangle + \langle c^*, x \rangle = 0$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey $F=0, G=0$ ve $H=0$ ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan (∞^1) doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, $\vec{x} = \vec{x}(t)$ bir t parametresine bağlı dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\vec{\tilde{x}}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

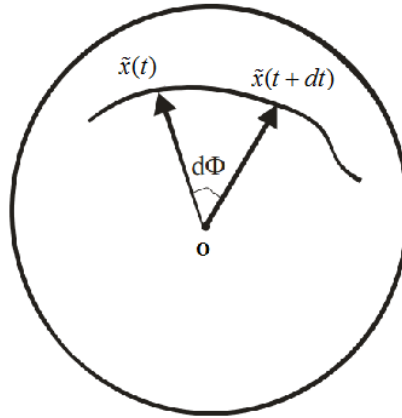
şeklinde yazılabilir. Bu birim dual vektöre

$$\|\vec{\tilde{x}}\| = (1, 0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual nokta karşılık gelir. Biliniyor ki bu noktaya da \mathbb{E}^3 de bir doğru karşılık gelir. t parametresi değıştikçe

$$\vec{\tilde{x}}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

birim dual vektörü, birim dual küre üzerinde bir (\tilde{x}) dual eğrisi çizer. Bu eğriye de \mathbb{E}^3 de bir regle yüzey karşılık gelir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.6 Dual eğri.

(X) dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir. Birim dual küre üzerinde $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ dual eğrisinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$$

dual yay elementi için $d\varphi$ reel ve $d\varphi^*$ dual kısımlarına, $\tilde{x}(t)$ ve $\tilde{x}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.26

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle dx, dx^* \rangle}{\langle dx, dx \rangle} = \frac{d\varphi \cdot d\varphi^*}{d\varphi \cdot d\varphi} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan \tilde{x} anadoğrusu

boyunca dağılma parametresi veya drali denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

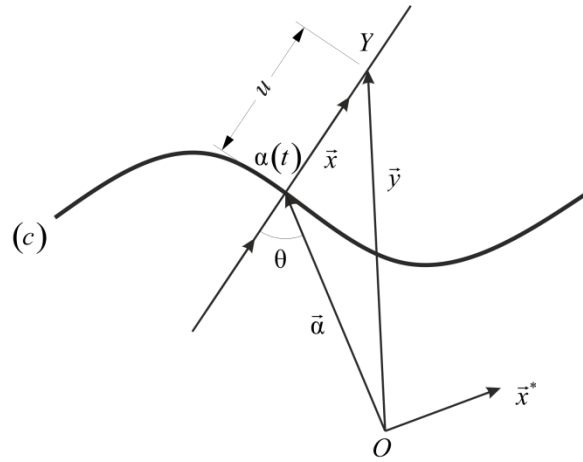
Tanım 2.2.27 Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir regle yüzeyler denir.

Dralin sıfır olması açılabilir regle yüzeyler için karakteristiktir. Çünkü dral sıfır ise $d\varphi^* = 0$ dır.

Dayanak eğrisi $\vec{a} = \vec{a}(t)$ denklemi ile belli olan (c) eğrisi ve ana doğruları $\vec{x} = \vec{x}(t)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$\vec{y}(t, u) = \vec{a}(t) + u\vec{x}(t)$$

dir.



Şekil 2.7 Regle yüzey.

Şekil 2.7 de görüldüğü gibi

$$\vec{x}^* = \vec{a} \wedge \vec{x} \text{ ve } \vec{x} \wedge \vec{x}^* = \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{x}$$

olduğundan regle yüzeyin denklemi

$$v = u + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

olmak üzere

$$\vec{y}(t, v) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + v\vec{x}(t)$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1983).

Yani *E. Study* dönüşümüne göre \mathbb{E}^3 teki yönlü bir doğru L , O başlangıç noktasına göre üzerindeki bir p noktası ve doğrunun yönünü belirten bir x doğrultman vektörü ile tamamen belirlidir. *E. Study* dönüşümü ile elde edilen karşılık gelme $\vec{x}(t) = x(t) + \varepsilon p(t) \wedge x(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$ olmak üzere

$$m(t, u) = p(t) + ux(t)$$

şeklinde verilebilir burada $p \wedge x = x^*$ dir (Köse, 1999).

\mathbb{S}^2 , O ve $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, sırasıyla, birim küre, \mathbb{S}^2 nin merkezi ve O noktasındaki $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dual ortonormal sistemdir. Burada

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i + \varepsilon \vec{e}_i^*; \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (2.8)$$

$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de çizgiler uzayı \mathbb{E}^3 ün bir ortonormal sistemidir. \vec{e}_i^* vektörel momentleri

$$\vec{e}_i^* = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (2.9)$$

şeklindedir. Moment vektörleri de \mathbb{E}^3 ün birer vektörü olduklarından

$$\vec{e}_i^* = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \vec{e}_j, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (2.10)$$

şeklinde yazılır. (2.9) ve (2.10) den

$$\lambda_{ii} = 0, \quad \lambda_{ij} = -\lambda_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

elde edilir. λ_{ij} yerine λ_i alırsak (2.8) denklemini matris formunda

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \\ \vec{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. *E. Study* dönüşümü \mathbb{S}^2 daki ortonormal sistemi \mathbb{E}^3 deki ortonormal sisteme dönüştürür. (2.4) ve (2.5) eşitlikleri kullanılarak *E. Study* dönüşümünün matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \varepsilon & -\lambda_3 \varepsilon \\ -\lambda_1 \varepsilon & 1 & \lambda_2 \varepsilon \\ \lambda_3 \varepsilon & -\lambda_2 \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

şeklindedir (Hacısalihoglu, 1977).

2.3. Lorentz Uzayı (\mathbb{L}_1^3 3-Boyutlu Minkowski Uzayı)

Tanım 2.3.1 V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

biliner fonksiyonu $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ özeliğini sağlıyor ise, \langle , \rangle fonksiyonuna V üzerinde simetrik biliner form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2 V vektör uzayı üzerinde bir simetrik biliner form \langle , \rangle olsun. Bu takdirde,

- i.** $\forall x \in V, x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle > 0$ ise simetrik biliner forma pozitif tanımlı,
- ii.** $\forall x \in V, x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle < 0$ ise simetrik biliner forma negatif tanımlı,
- iii.** $\forall x \in V, x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ise simetrik biliner forma yarı-pozitif tanımlı,
- iv.** $\forall x \in V, x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle \leq 0$ ise simetrik biliner forma yarı-negatif tanımlı,
- v.** $\forall x \in V, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0$ ise simetrik biliner forma non-dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.3 \langle , \rangle, V üzerinde simetrik biliner form ve W da V nin bir altuzayı olsun. \langle , \rangle nin W üzerinde kısıtlanmış $\langle , \rangle|_W$ olmak üzere

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna \langle , \rangle simetrik biliner formunun indeksi denir. ν, \langle , \rangle nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.4 \mathbb{R}^3 üzerinde $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilinear, non-dejenere metrik tensörüne \mathbb{R}^3 üzerinde Lorentz metriği denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.5 \mathbb{R}^3 üzerinde Lorentz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\{\mathbb{R}^3, \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L\}$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve \mathbb{L}_1^3 ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6 $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}_1^3$ olmak üzere

- i. $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L > 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise \vec{X} vektörüne spacelike,
- ii. $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L < 0$ ise \vec{X} vektörüne timelike,
- iii. $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L = 0$, $\vec{X} \neq 0$ ise \vec{X} vektörüne null (lightlike)

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.7 $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{L}_1^3$ için $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L = 0$ ise $\vec{X} \neq 0$, $\vec{Y} \neq 0$ vektörleri birbirine diktir denir ve $\vec{X} \perp \vec{Y}$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.8 $\vec{X} \in \mathbb{L}_1^3$ için \vec{X} in normu

$$\|\vec{X}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\|\vec{X}\|_L = 1$ ise \vec{X} vektörüne birim vektör denir. Ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir (O'Neill, 1983).

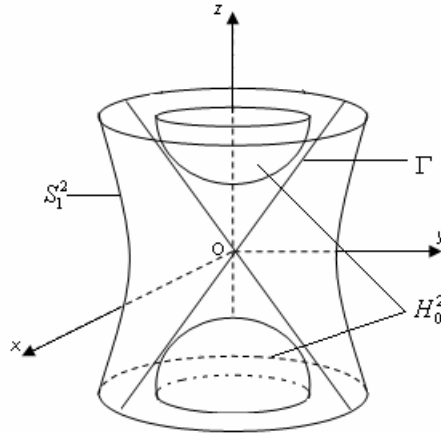
Tanım 2.3.9 \mathbb{L}_1^3 uzayında

$$S_1^2 = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{L}_1^3 \mid \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{L}_1^3 \mid \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_L = -1 \right\}$$

cümlelerine, sırasıyla, Lorentz birim küresi ve hiperbolik birim küre denir (Şekil 2.8).

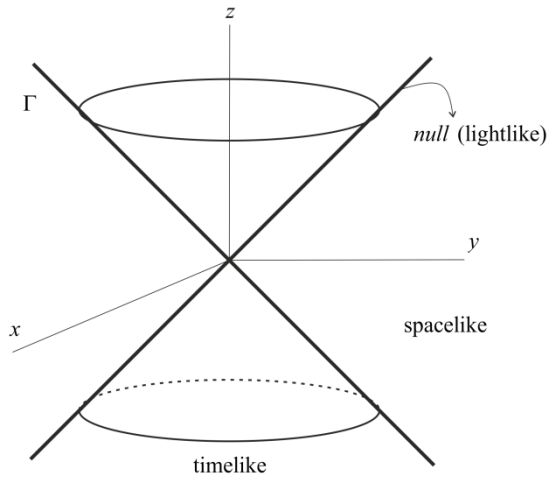


Şekil 2.8 \mathbb{L}_1^3 uzayında birim küreler

Tanım 2.3.10 \mathbb{L}_1^3 de bütün lightlike vektörleri içeren cümleye light koni denir ve Γ ile gösterilir.

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

dır (Lopez, 2008).



Şekil 2.9 \mathbb{L}_1^3 uzayında vektörler.

Tanım 2.3.11 $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{L}_1^3$ timelike birim vektörler olsun. Bu durumda

$$ch\rho = -\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L$$

olacak şekildeki ρ sayısına \vec{X} ve \vec{Y} timelike vektörleri arasındaki timelike açı denir (Birman ve Nomizu, 1984).

Tanım 2.3.12 $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{L}_1^3$ olmak üzere

$$\vec{X} \wedge_L \vec{Y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne \vec{X} ve \vec{Y} vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı denir.

Burada $e_1 \wedge_L e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge_L e_3 = e_1$, $e_3 \wedge_L e_1 = e_2$ dir.

Tanım 2.3.13 $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{L}_1^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna \mathbb{L}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında eğri adı verilir.

Eğer $\alpha'(s)$ hız vektör alanı için

- i. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = 1$ ise α 'ya birim hızlı spacelike eğri,
- ii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = -1$ ise α 'ya birim hızlı timelike eğri,
- iii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = 0$ ise α 'ya null (lightlike) eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

2.4. \mathbb{D}_1^3 Dual Lorentz Uzayı

Tanım 2.4.1 $\vec{\tilde{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$, $\vec{\tilde{y}} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* \in \mathbb{D}^3$ olsun. \mathbb{D}^3 uzayı üzerinde iç çarpım

$$\langle \langle \vec{\tilde{x}}, \vec{\tilde{y}} \rangle \rangle_L = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L + \varepsilon \left(\langle \vec{x}, \vec{y}^* \rangle_L + \langle \vec{x}^*, \vec{y} \rangle_L \right)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, bu Lorentz iç çarpımıyla birlikte \mathbb{D}^3 dual uzayına dual Lorentz uzayı denir ve \mathbb{D}_1^3 ile gösterilir.

Dual Lorentz vektörlerinin cümlesi

$$\mathbb{D}_1^3 = \{ \vec{\tilde{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{L}_1^3 \}$$

ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.2 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

- i. \vec{a} spacelike vektör ise \vec{a} vektörüne dual spacelike vektör,
- ii. \vec{a} timelike vektör ise \vec{a} vektörüne dual timelike vektör,
- iii. \vec{a} lightlike (null) vektör ise \vec{a} vektörüne dual lightlike (null) vektör

denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.3 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}_1^3$ vektörünün normu

$$\|\vec{a}\|_L = \|\vec{a}\|_L + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L}{\|\vec{a}\|_L}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|\vec{a}\|_L \neq 0$ dır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.4 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere \vec{a} ve \vec{b} nin dual Lorentz anlamında vektörel çarpımı

$$\Lambda_L : \mathbb{D}_1^3 \times \mathbb{D}_1^3 \rightarrow \mathbb{D}_1^3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} \Lambda_L \vec{b} = \vec{a} \wedge_L \vec{b} + \varepsilon (\vec{a}^* \wedge_L \vec{b} + \vec{a} \wedge_L \vec{b}^*)$$

olarak tanımlanır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.5 $\vec{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere, sırasıyla

$$\mathbb{S}_1^2 = \{ \vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3 : \|\vec{x}\|_L = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{L}_1^3 \text{ ve } \vec{x} \text{ timelike} \}$$

ve

$$\mathbb{H}_0^2 = \{ \vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3 : \|\vec{x}\|_L = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{L}_1^3 \text{ ve } \vec{x} \text{ spacelike} \}$$

cümlelerine, dual Lorentz birim küre ve dual hiperbolik birim küre denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Teorem 2.4.1 $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = 1$ (sırasıyla $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -1$) ve $\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_L = 0$ olmak üzere, \mathbb{L}_1^3 in yönlü spacelike (sırasıyla timelike) doğruları ile (\vec{x}, \vec{x}^*) sıralı çifti arasında birebir bir karşılık vardır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

\mathbb{S}_1^2 dual birim küresi üzerindeki diferansiyellenebilir bir eğri, herhangi bir regle yüzeye karşılık gelir. Benzer olarak, \mathbb{H}_0^2 dual hiperbolik birim küresi üzerindeki diferansiyellenebilir bir eğri de bir timelike regle yüzeye karşılık gelir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.6 \vec{a} ve \vec{b} spacelike dual birim vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = \cos \tilde{\Phi}$$

eşitliğini sağlayan $\tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına \vec{a} ve \vec{b} spacelike birim dual vektörleri arasındaki dual merkezi açı denir.

\vec{a} ve \vec{b} dual spacelike vektörlerinin uç noktaları Lorentz birim küresi üzerinde A ve B noktalarını gösterebilirler. \vec{a} ve \vec{b} dual spacelike birim vektörleri arasındaki $\tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı \mathbb{S}_1^2 üzerinde \vec{a} ve \vec{b} noktalarını birleştiren AB yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Burada $\tilde{\Phi}$ açısının reel kısmı olan φ , iki doğru arasındaki açıyı ve φ^* ise bu iki doğru arasındaki (en kısa) uzaklığı verir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.7 \vec{a} ve \vec{b} timelike dual birim vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = -\cosh \tilde{\Theta}$$

eşitliğini sağlayan $\tilde{\Theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına \vec{a} ve \vec{b} timelike birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir.

\vec{a} ve \vec{b} dual timelike vektörlerinin uç noktaları hiperbolik birim küre üzerinde A ve B noktalarını gösterebilirler. \vec{a} ve \vec{b} dual timelike birim vektörleri arasındaki $\tilde{\Theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açısı \mathbb{H}_0^2 üzerinde A ve B noktalarının birleştirilmesiyle oluşan AB yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Burada $\tilde{\Theta}$ açısının reel kısmı olan θ , iki doğru arasındaki açıyı ve θ^* ise bu iki doğru arasındaki (en kısa) uzaklığı verir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.4.8 $M \subset \mathbb{L}_1^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında \mathbb{L}_1^3 uzayının M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.4.9 \mathbb{L}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.4.10 \mathbb{L}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.4.11 \mathbb{L}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Turgut, 1995).

2.5. Açılabilir Regle Yüzeylerin Belirlenmesi Üzerine Yeni Bir Metot

Bu bölüm (Köse, 1999) çalışmasından yararlanılarak hazırlanmıştır.

Orijin merkezli, dual birim küre üzerindeki herhangi bir nokta $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ olmak üzere \tilde{x} noktası kutupsal koordinatlar cinsinden (2.6) göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} = \cos \theta \cos \varphi + \varepsilon(-\varphi^* \sin \varphi \cos \theta - \theta^* \cos \varphi \sin \theta)$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon(-\varphi^* \sin \theta \cos \varphi + \theta^* \cos \theta \sin \varphi)$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \sin \tilde{\varphi} = \sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual açıları $-\pi < \theta < \pi$ ve

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ olan açılardır. O halde küre üzerindeki bir dual eğri

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{x}}(t) &= \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t) \\
&= (x_1, x_2, x_3) + \varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \\
&= ((\cos \theta(t) \cos \varphi(t), \sin \theta(t) \cos \varphi(t), \sin \varphi(t)) \\
&\quad + \varepsilon(-\theta^*(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t) - \varphi^*(t) \cos \theta(t) \sin \varphi(t), \\
&\quad \theta^*(t) \cos \theta(t) \sin \varphi(t) - \varphi^*(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t), \\
&\quad \varphi^*(t) \cos \varphi(t))
\end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{x}(t)$ ye \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey $\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{x}(t)$ yardımıyla hesaplanır, burada $p(t)$ regle yüzeyin taban eğrisidir. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\sigma^* = p \wedge \sigma$ yardımıyla

$$\begin{aligned}
\vec{x}^* &= \vec{p} \wedge \vec{x} \\
&= (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \\
&= (p_2 \sin \varphi - p_3 \sin \theta \cos \varphi, -p_1 \sin \varphi + p_3 \cos \theta \cos \varphi, \\
&\quad p_1 \sin \theta \cos \varphi - p_2 \cos \theta \cos \varphi)
\end{aligned}$$

ve (2.13) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
p_2 \sin \varphi - p_3 \sin \theta \cos \varphi &= -(\theta^* \sin \theta \cos \varphi + \varphi^* \cos \theta \sin \varphi) \\
-p_1 \sin \varphi + p_3 \cos \theta \cos \varphi &= \theta^* \cos \theta \sin \varphi - \varphi^* \sin \theta \cos \varphi \\
p_1 \sin \theta \cos \varphi - p_2 \cos \theta \cos \varphi &= \varphi^* \cos \varphi
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix}
0 & \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\
-\sin \varphi & 0 & \cos \theta \cos \varphi \\
\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & 0
\end{bmatrix}$$

anti simetrik matristir ve bu matrisin rankı 2 dir, $\varphi(t) \neq 2k\pi$ (k tamsayı). Ayrıca,

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & -\theta^* \sin \theta \cos \varphi - \varphi^* \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \theta \cos \varphi & \theta^* \cos \theta \sin \varphi - \varphi^* \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & 0 & \varphi^* \cos \varphi \end{bmatrix}$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= (p_3 - \theta^*) \cos \theta \cot \varphi + \varphi^* \sin \theta, \\ p_2 &= (p_3 - \theta^*) \sin \theta \cot \varphi - \varphi^* \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$p_3 = p_3$$

şeklinde elde edilir. $p_3(t)$ isteğe bağlı seçilebildiğinden $p_3(t) = \theta^*(t)$ alınabilir. Bu durumda (2.14) nin özel bir çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi^* \sin \theta, \\ p_2 &= -\varphi^* \cos \theta, \\ p_3 &= \theta^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde elde edilir.

(2.13) denklem sisteminde verilen eğriye karşılık gelen regle yüzeyin dağılma parametresi (2.2) kullanılarak

$$P_x = \frac{\frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \tan \varphi + \frac{d\varphi^*}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{\cos^2 \varphi}}{\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi}} \quad (2.16)$$

dir. Eğer regle yüzey açılabilir ise $P_x = 0$ olmalıdır. Yani (2.16) denkleminde

$$\frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \tan \varphi + \frac{d\varphi^*}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17) denkleminde $\frac{d(\tan \varphi)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt}$ eşitliği yerine yazılırsa ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{d\varphi^*}{dt} \frac{d(\tan \varphi)}{dt} - \varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \tan \varphi + \frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.18) denkleminde

$$y(t) = \tan \varphi, \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = \frac{\frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

yazılırsa

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0 \quad (2.19)$$

1. dereceden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

Özel olarak, $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ her ikisi de sabit olduğunda regle yüzey bir silindirdir.

Herhangi bir eğri verildiğinde bu eğriyi taban eğrisi kabul eden açılabilir regle yüzey bulunabilir ve eğrinin bileşenleri kullanılarak, (2.15) den

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\varphi^* \sin \theta}{-\varphi^* \cos \theta} = -\tan \theta,$$

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(\varphi^* \sin \theta)^2 + (-\varphi^* \cos \theta)^2} = |\varphi^*|,$$

$$p_3 = \theta^*$$

elde edilir. Bu son sistem düzenlenirse

$$\tan \theta = -\frac{p_1}{p_2},$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad (2.20)$$

$$\theta^* = p_3$$

elde edilir.

(2.20) den elde edilen değerler (2.19) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa $\varphi(t)$ için çözüm bulunur. Bu çözüm integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir regle yüzey elde edilebilir. (2.20) denkleminde

elde edilen $\varphi^*(t)$ biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki değer sahiptir. Herhangi bir tanesi seçilerek elde edilen regle yüzey değerinin tersidir. Burada dikkat edilmelidir ki $\varphi^*(t)$ iki değere sahiptir. Verilen integral sabiti için negatif işareti kullandığımız zaman pozitif işareti kullanılarak elde edilen regle yüzeyin karşıtını elde ederiz.

2.5.1. Örnek

$p(t) = \left(2t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$ silindirik helis eğrisi göz önüne alınsın. Eğrinin bileşenleri

kullanılarak

$$\tan \theta = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{4}{t} \Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{4}{t}\right),$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2} = \pm \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 16},$$

$$\theta^* = p_3 = \frac{t^3}{3}$$

değerleri elde edilir. φ yi hesaplamak için

$$y(t) = \tan \varphi, \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = \frac{\frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

terimleri elde edilmelidir.

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d\left(\frac{t^3}{3}\right)}{dt} = \frac{3t^2}{3} = t^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\arctan\left(-\frac{4}{t}\right)\right)}{dt} = \frac{4}{t^2 + 16},$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d\left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 16}\right)}{dt} = \frac{t^2 + 8}{\sqrt{t^2 + 16}}$$

değerleri şeklinde elde edilir. Bu değerler (2.19) denkleminde yerlerine yazılırsa bir 1.

mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dt} - \frac{8t}{(t^2+8)(t^2+16)}y + \frac{4t^2\sqrt{t^2+16}}{(t^2+8)(t^2+16)} = 0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümünden

$$y(t) = \tan \varphi = -4\sqrt{\frac{t^2+8}{t^2+16}} \left[\ln(t + \sqrt{t^2+8}) + \frac{8}{8+t^2+t\sqrt{t^2+8}} + c \right]$$

ve buradan da

$$\varphi = \arctan \left(-4\sqrt{\frac{t^2+8}{t^2+16}} \left[\ln(t + \sqrt{t^2+8}) + \frac{8}{8+t^2+t\sqrt{t^2+8}} + c \right] \right)$$

değeri de bulunmuş olur. (2.15) den

$$p_1 = \varphi^* \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = -\varphi^* \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = \theta^*$$

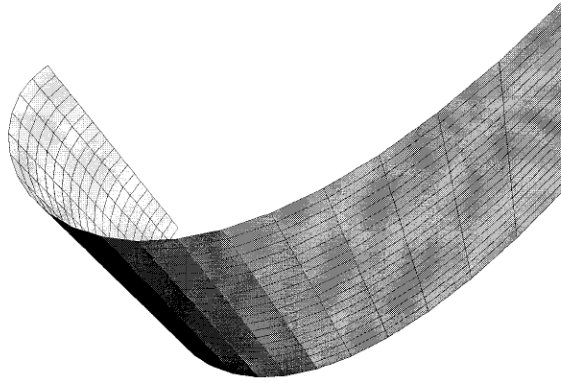
yazılabilir. Taban eğrisi $p(t)$ olan açılabilir regle yüzeylerin ailesi

$$m(t, u) = p(t) + ux(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$x(t) = \left(-\frac{p_2}{\varphi^*} \cos \varphi, \frac{p_1}{\varphi^*} \cos \varphi, \sin \varphi \right)$$

dir.



Şekil 2.10 Regle yüzey.

$c=0$ ve

$$D: \begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ -4 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir regle yüzey Şekil 2.10 daki gibidir.

3. ÇEMBERİN KÜRESEL ORTOTOMİĞİ VE KÜRESEL ORTOTOMİĞİN

E. STUDY RESMİ

3.1 Çemberin *E. Study Resmi*

Bu bölümde dual çember ve onun *E. Study resmi* incelenecektir.

\vec{e}_3 dual vektörüne \mathbb{E}^3 te karşılık gelen doğru g olmak üzere, p noktası g üzerinde seçilir ise (2.6) den

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

olarak hesaplanır ve (2.8)

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \varepsilon & 0 \\ -\lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

matrisine indirgenir. Bu dönüşüm için (3.1) den

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1 \varepsilon & 0 \\ \lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

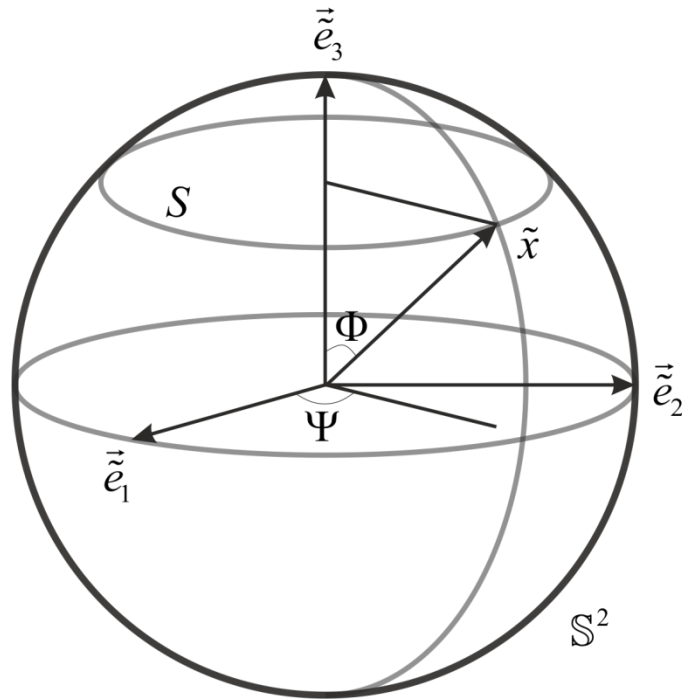
dir.

\mathbb{S}^2 birim dual küre ve üzerindeki bir S çemberinin bir noktası \vec{x} olmak üzere S nin denklemi

$$S = \{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle = \cos \Phi = \text{sabit}, \vec{x} \in \mathbb{S}^2\}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ dual vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Şekil 3.1) :

$$\vec{x} = \sin \Phi \cos \Psi \vec{e}_1 + \sin \Phi \sin \Psi \vec{e}_2 + \cos \Phi \vec{e}_3 \quad (3.3)$$



Şekil 3.1 Birim dual küre.

burada $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\Psi = \psi + \varepsilon\psi^*$ dual açılardır.

(2.6), (3.1) ve (3.3) eşitlikleri kullanılırsa \vec{x} ve \vec{x}^* vektörleri matris formunda aşağıdaki biçimde

$$\vec{x} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{x}^* = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \varphi^* \cos \varphi \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \sin \psi \\ \varphi^* \cos \varphi \sin \psi + (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \psi \\ -\varphi^* \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ifade edilir.

Diğer taraftan \vec{x} çember üzerinde bir nokta ve çemberin merkezi de \vec{e}_3 üzerinde olduğundan

$$\langle\langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle\rangle = \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon\varphi^* \sin \varphi = \text{sabit} \quad (3.5)$$

eşitliği mevcuttur. Burada $\varphi = c_1$ (sabit) ve $\varphi^* = c_2$ (sabit) dir. (3.4) ve (3.5) denklemleri birleştirilir ise

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 1 \\ \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle &= 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle - \cos \varphi &= 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle + \varphi^* \sin \varphi &= 0 = 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) eşitliği sadece ψ ve ψ^* parametrelerine sahiptir. Bu yüzden (3.6) denklemi bir doğru kongruansı temsil eder. Kongruansın denklemi $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\vec{y} = \vec{x}(\psi, \psi^*) \wedge \vec{x}^*(\psi, \psi^*) + v\vec{x}(\psi, \psi^*)\tag{3.7}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanırsa,

$$\begin{cases} y_1 = -\varphi^* \sin \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi + v \sin \varphi \cos \psi \\ y_2 = \varphi^* \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + v \sin \varphi \sin \psi \\ y_3 = (\psi^* + \lambda_1) \sin^2 \varphi + v \cos \varphi \end{cases}\tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere (3.8) denklemi

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{[y_3 - (\psi^* + \lambda_1)]^2}{[c_2 \cot c_1]^2} = 1\tag{3.9}$$

şeklinde iki (ψ^* ve λ) parametreye bağlı doğru kongruansına karşılık gelir. Bu kongruansın doğruları arasında aşağıdaki durumlar mevcuttur:

- i-** Bu doğrular ile g arasındaki en kısa uzaklık $\varphi^* = c_2$ dir.
- ii-** Bu doğrularla g arasındaki açı $\varphi = c_1$ dir.

Bundan dolayı kongruansın doğruları ile yarıçapı φ^* ve eksenini g olan silindirin üreteçleri φ lik açı altında kesişirler.

Tanım 3.1.1 Kongruansın doğruları sabit bir doğru ile sabit açı yapıyorsa eğilim kongruansı olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1977).

Teorem 3.1.1 \mathbb{S}^2 dual küresi üzerinde iki parametrelili bir çember S olsun. S nin E . *Study* resmi 2. dereceden eğilim kongruansıdır (Hacısalihoglu, 1977).

Teorem 3.1.2 \mathbb{S}^2 birim dual küre ve

$$S = \{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{g} \rangle = \cos \Phi = \text{sabit}, \vec{x}, \vec{g} \in \mathbb{S}^2\}$$

\mathbb{S}^2 üzerindeki çember olsun. ξ ve g sırasıyla, S ve \vec{g} nin *Study* dönüşümü olsun. ξ nin doğrularının zarfı, eksenini g ve yarıçapı φ^* olan dairesel silindirdir (Hacısalihoglu, 1977).

$\psi^* = -\lambda_1$, $\varphi \neq 0$ ve $\varphi^* \neq 0$ durumunda (3.9) denkleminde

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{y_3^2}{k^2} = 1, k = c_2 \cot c_1 = \text{sabit}, c_1 = \varphi, c_2 = \varphi^* \quad (3.10)$$

elde edilir. (3. 10) denklemi tek kanatlı hiperboloid belirtir.

Genel olarak S nin E . *Study* dönüşümü ψ^* ve λ_1 gibi iki bağımsız parametre olmak üzere tek kanatlı hiperboloiddir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3 Birim dual küre üzerinde bir çember S olsun. S nin E . *Study* dönüşümü iki parametreye bağlı bir tek kanatlı hiperboloid ailesidir (Hacısalihoglu, 1977).

3.2 Çemberin Küresel Ortotomiği ve Küresel Ortotomiğin E . *Study* Resmi

Bu bölümde, dual çemberin $\vec{e}_1\vec{e}_2$ düzleminde yatan geodeziğe göre küresel ortotomiğinin E . *Study* resmi incelenecektir.

\mathbb{S}^2 birim dual küre olmak üzere $S = \{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle = \cos \Phi = \text{sabit}, \vec{x} \in \mathbb{S}^2\}$ dual çemberinin $Sp\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de yatan büyük çembere göre küresel ortotomiği (2.1) kullanılarak $\vec{\sigma} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, -\tilde{x}_3)$ şeklinde elde edilir.

\vec{e}_3 e karşılık gelen doğru g olsun. p noktası g üzerinde seçilir ise

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

elde edilir ve (2.8)

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \varepsilon & 0 \\ -\lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

matrisine indirgenir. Bu dönüşüm için (3.11) den

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1 \varepsilon & 0 \\ \lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

dir.

$\vec{\sigma}$ küresel ortotomiği, $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ ve $\Psi = \psi + \varepsilon \psi^*$ olmak üzere

$$\vec{\sigma} = \sin \Phi \cos \Psi \vec{e}_1 + \sin \Phi \sin \Psi \vec{e}_2 - \cos \Phi \vec{e}_3 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.11) ve (3.13) eşitlikleri kullanılırsa küresel ortotomiğin reel ve dual kısımları olan $\vec{\sigma}$ ve $\vec{\sigma}^*$ vektörleri matris formunda aşağıdaki biçimde

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\vec{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^* \cos \varphi \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \sin \psi \\ \varphi^* \cos \varphi \sin \psi + (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \psi \\ \varphi^* \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ifade edilir.

Diğer taraftan \tilde{x} çember üzerinde bir dual nokta olduğundan küresel ortotomiği olan $\vec{\sigma}$ de diğer yarı kürede, simetriği olan çember üzerindedir ve bu çemberin merkezi de \vec{e}_3 üzerinde olduğundan

$$\langle \langle \vec{\sigma}, \vec{e}_3 \rangle \rangle = \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \text{sabit} \quad (3.15)$$

eşitliği mevcuttur. Burada $\varphi = c_1$ (sabit) ve $\varphi^* = c_2$ (sabit) dir. (3.14) ve (3.15)

denklemleri birleştirilir ise

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle &= 1 \\
\langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma}^* \rangle &= 0 \\
\langle \vec{\sigma}, \vec{e}_3 \rangle - \cos \varphi &= 0 \\
\langle \vec{\sigma}, \vec{e}_3^* \rangle + \langle \vec{\sigma}^*, \vec{e}_3 \rangle + \varphi^* \sin \varphi &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) eşitlikleri sadece ψ ve ψ^* parametrelerine sahiptir. Bu yüzden (3.16) denklemi bir doğru kongruansı temsil eder. Küresel ortotomik kongruansın denklemi $\vec{Y}_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13})$ olmak üzere

$$\vec{Y}_1 = \vec{\sigma}(\psi, \psi^*) \wedge \vec{\sigma}^*(\psi, \psi^*) + v \vec{\sigma}(\psi, \psi^*) \tag{3.17}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanırsa,

$$\begin{cases}
y_{11} = \varphi^* \sin \psi + (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi + v \sin \varphi \cos \psi \\
y_{12} = -\varphi^* \cos \psi + (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + v \sin \varphi \sin \psi \\
y_{13} = (\psi^* + \lambda_1) \sin^2 \varphi - v \cos \varphi
\end{cases} \tag{3.18}$$

elde edilir.

Bu durumda $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere (3.18) denklemi

$$\frac{y_{11}^2}{c_2^2} + \frac{y_{12}^2}{c_2^2} - \frac{[y_{13} - (\psi^* - \lambda_1)]^2}{[c_2 \cot c_1]^2} = 1 \tag{3.19}$$

şeklinde iki parametreye (ψ^* ve λ) bağlı küresel ortotomik doğru kongruansına karşılık gelir. Bu kongruansın doğruları arasında aşağıdaki durumlar mevcuttur:

- i- Bu doğrular ile g arasındaki en kısa uzaklık $\varphi^* = c_2$ dir.
- ii- Bu doğrularla g arasındaki açı $\varphi = c_1$ dir.

Bundan dolayı küresel ortotomik kongruansın doğruları ile yarıçapı φ^* ve eksenini g olan silindirin üreteçleri φ lik açı altında kesişirler.

Teorem 3.2.1 \mathbb{S}^2 birim dual küresi üzerinde iki parametrelili bir çember S olsun. S nin küresel ortotomiğinin E . Study resmi 2. dereceden bir eğilim kongruansıdır.

Teorem 3.2.2 \mathbb{S}^2 birim dual küre ve \mathbb{S}^2 üzerinde bir çember

$$S = \{\vec{\sigma} \mid \langle \vec{\sigma}, \vec{g} \rangle = \cos \Phi = \text{sabit}, \vec{\sigma}, \vec{g} \in \mathbb{S}^2\}$$

olsun. ξ ve g de, sırasıyla, S ye karşılık gelen küresel ortotomiğin ve \vec{g} nin E . Study dönüşümü olsun. ξ nin doğrularının zarfı, eksenini g ve yarıçapı φ^* olan dairesel silindirdir.

$\psi^* = -\lambda_1$, $\varphi \neq 0$ ve $\varphi^* \neq 0$ durumunda (3.19) denkleminde

$$\frac{y_{11}^2}{c_2^2} + \frac{y_{12}^2}{c_2^2} - \frac{y_{13}^2}{k^2} = 1, k = c_2 \cot c_1 = \text{sabit}, c_1 = \varphi, c_2 = \varphi^* \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) denklemi tek kanatlı bir hiperboloid gösterir.

Genel olarak S nin küresel ortotomiğinin E . Study dönüşümü ψ^* ve λ_1 gibi iki bağımsız parametre olmak üzere tek kanatlı bir hiperboloid ailesidir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3 S birim dual küre üzerinde bir çember olsun. S nin küresel ortotomiğinin E . Study dönüşümü iki parametreye bağlı tek kanatlı hiperboloid ailesidir.

3.2.1. Özel durumlar

i- $\varphi^* \neq 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması hali

Bu durumda (3.19) eşitliğindeki küresel ortotomik kongruansın doğruları ile g eksenli ve φ^* yarıçaplı silindirin üretici dik kesişirler. Bundan dolayı (3.18) denkleminde

$$\begin{cases} y_{11} = \varphi^* \sin \psi + v \cos \psi \\ y_{12} = -\varphi^* \cos \psi + v \sin \psi \\ y_{13} = \psi^* + \lambda_1 \end{cases}$$

ve (3.19) denkleminde de

$$\begin{cases} y_{11}^2 + y_{12}^2 = c_2^2 + v^2 \\ y_{13} = \psi^* + \lambda_1 \end{cases}$$

elde edilir.

ii- $\varphi^* \neq 0$ ve $\varphi = 0$ (veya $\varphi = \pi$) olması hali

Bu durumda ξ küresel ortotomik kongruansının doğruları silindirin üretici ile denk gelir (Buradaki silindir, ξ kongruansının doğrularının zarfıdır). Bunun anlamı küresel ortotomiğin *Study* dönüşümü, denklemini aşağıdaki gibi olan bir silindire dönüştür.

$$\begin{cases} y_{11}^2 + y_{12}^2 = c_2^2 \\ y_{13} = -v \end{cases} .$$

iii- $\varphi^* = 0$ ve $\varphi = 0$ (veya $\varphi = \pi$) olması hali

Bu durumda ξ küresel ortotomik kongruansının bütün doğruları g doğrusu ile çakışır. Bu durumda (3.18) denkleminde

$$\begin{cases} y_{11}^2 + y_{12}^2 = 0 \\ y_{13} = -v \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklem aynı zamanda g doğrusunu da temsil eder.

iv- $\varphi^* = 0$ ve $\varphi \neq 0$ olması hali

Bu durumda ξ kongruansının tüm doğruları ile g eksenini sabit bir açı ile kesişir. Bu durumda ξ kongruansının doğruları, iki lineer doğru kompleksinin ortak doğrularıdır (Müller, 1963). (3.18) denklemlerinden ξ yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$y_{11}^2 + y_{12}^2 - \frac{[y_{13} - (\psi^* + \lambda_1)]^2}{[\cot c_1]^2} = 0.$$

Aynı zamanda ξ küresel ortotomik kongruansının doğruları, iki lineer doğru kompleksindeki doğrulardır.

v- $\varphi^* = 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması hali

Bu durumda küresel ortotomik, \mathbb{S}^2 üzerinde bir büyük çemberdir. ξ nin bütün doğruları g eksenini ile dik kesişir. Bu ise, küresel ortotomik eğilim kongruansının, lineer doğru (ekseni g olan) kompleksine indirgenmesi anlamına gelir. (3.18) den ξ nin bu durum için denklemleri

$$\begin{cases} y_{11} = v \cos \psi \\ y_{12} = v \sin \psi \\ y_{13} = \lambda_1 + \psi^* \end{cases} \quad (3.21)$$

veya

$$\begin{cases} y_{11}^2 + y_{12}^2 = v^2 \\ y_{13} = \lambda_1 + \psi^* \end{cases}$$

denklemlerine indirgenir.

Tanım 3.2.1.1 Eğer doğru kongruansının bütün doğruları sabit bir doğru ile dik kesişiyor ise kongruans, recti kongruans olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1977).

Teorem 3.2.1.1 \mathbb{S}^2 üzerinde büyük çember S olsun öyleki

$$S = \{ \vec{\sigma} \mid \langle \vec{\sigma}, \vec{g} \rangle = 0, \vec{\sigma}, \vec{g} \in \mathbb{S}^2 \}$$

ise S nin ortotomiğinin E . Study dönüşümü bir recti kongruanstır.

Bu durumda $\lambda_1 = c_3 \psi$ dir. (3.21) denklemlerinden

$$\begin{cases} y_1 = v \cos \psi \\ y_2 = v \sin \psi \\ y_3 = c_3 \psi \end{cases}$$

veya

$$y_3 = c_3 \arctan \frac{y_2}{y_1}$$

elde edilir. Bu denklem bir sağ helikoide karşılık gelir.

4. AÇILABİLİR KÜRESEL ORTOTOMİK REGLE YÜZEYLER

4.1. \mathbb{E}^3 te Açılabilir Küresel Ortotomik Regle Yüzeyler

Bu bölümde \mathbb{S}^2 küresinde yatan herhangi bir eğriye karşılık gelen açılabilir küresel ortotomik regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot verilecektir.

Orijin merkezli, dual birim küre üzerindeki herhangi bir nokta $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ olmak üzere \tilde{x} noktası kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \cos \tilde{\theta}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açıları $-\pi < \varphi < \pi$ ve

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ olan açılardır. (2.6) den

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \cos \varphi \sin \theta + \varepsilon (\theta^* \cos \varphi \cos \theta - \varphi^* \sin \varphi \sin \theta),$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \sin \varphi \sin \theta + \varepsilon (\theta^* \sin \varphi \cos \theta + \varphi^* \cos \varphi \sin \theta),$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \cos \theta - \varepsilon \theta^* \sin \theta$$

elde edilir.

(2.1) denklemi kullanılırsa $\vec{e}_2 \vec{e}_3$ düzleminde yatan büyük çemberin

$\vec{x}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ ile bağlantılı küresel ortotomiği, $\vec{\sigma}(t) = (-\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ olarak elde edilir

ve küresel koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t) = & (-\cos \varphi(t) \sin \theta(t), \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \cos \theta(t)) \\ & + \varepsilon (-\theta^*(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t) + \varphi^*(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \\ & \theta^*(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t) + \varphi^*(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t), \\ & -\theta^*(t) \sin \theta(t)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

dir. $\vec{\sigma}(t)$ ye \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey $\vec{m}(t,u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$ yardımıyla hesaplanır, burada $p(t)$ regle yüzeyin taban eğrisidir. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\vec{\sigma}^* = \vec{p} \wedge \vec{\sigma}$ yardımıyla

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* &= \vec{p} \wedge \vec{\sigma} \\ &= (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \\ &= (p_2 \cos \theta - p_3 \sin \varphi \sin \theta, -p_1 \cos \theta - p_3 \cos \varphi \sin \theta, \\ &\quad p_1 \sin \varphi \sin \theta + p_2 \cos \varphi \sin \theta)\end{aligned}$$

ve (4.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}p_2 \cos \theta - p_3 \sin \varphi \sin \theta &= -\theta^* \cos \varphi \cos \theta + \varphi^* \sin \varphi \sin \theta, \\ -p_1 \cos \theta - p_3 \cos \varphi \sin \theta &= \theta^* \sin \varphi \cos \theta + \varphi^* \cos \varphi \sin \theta, \\ p_1 \sin \varphi \sin \theta + p_2 \cos \varphi \sin \theta &= -\theta^* \sin \theta\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

anti simetrik matristir ve bu matrisin rankı 2 dir, $\theta(t) \neq 2k\pi$ (k tamsayı). Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & -\theta^* \cos \varphi \cos \theta + \varphi^* \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta & \theta^* \sin \varphi \cos \theta + \varphi^* \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & 0 & -\theta^* \sin \theta \end{bmatrix}$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Elemanter işlemler uygulanılarak denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{aligned}
p_1 &= -(p_3 + \varphi^*) \cos \varphi \tan \theta - \theta^* \sin \varphi, \\
p_2 &= (p_3 + \varphi^*) \sin \varphi \tan \theta - \theta^* \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$p_3 = p_3$$

şeklinde elde edilir. n -rank = 1 olduğundan bir tane bilinmeyene keyfi değer verilebilir. $p_3(t) = -\varphi^*(t)$ şeklinde seçilir ise (4.2) denklem sisteminin özel bir çözümü

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\theta^* \sin \varphi, \\
p_2 &= -\theta^* \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$p_3 = -\varphi^*$$

şeklinde elde edilir.

(4.1) denkleminde verilen eğriye karşılık gelen küresel ortotomik regle yüzeyin dağılıma parametresi (2.2) yardımıyla

$$P_x = \frac{\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} + \theta^* \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta} \tag{4.4}$$

dır.

Eğer küresel ortotomik regle yüzey açılabilir ise $P_x = 0$ olmalıdır. Yani regle yüzey açılabilir ise (4.4) denkleminde

$$\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} + \theta^* \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) denklemini düzenlenirse

$$\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} + \theta^* \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cot \theta - \frac{d\theta^*}{dt} \frac{d}{dt} (\cot \theta) = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denkleminde

$$y(t) = \cot \theta, \quad A(t) = -\frac{\theta^* \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\frac{d\theta^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{\frac{d\theta^*}{dt}}$$

yazılırsa

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0 \quad (4.7)$$

1. dereceden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

Herhangi bir eğri verildiğinde bu eğriyi taban eğrisi kabul eden açılabilir küresel ortotomik regle yüzey bulunabilir ve eğrinin bileşenleri kullanılarak, (4.3) den

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-\theta^* \sin \varphi}{-\theta^* \cos \varphi} = \tan \varphi,$$

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(-\theta^* \sin \varphi)^2 + (-\theta^* \cos \varphi)^2} = |\theta^*|,$$

$$p_3 = -\varphi^*$$

elde edilir. Bu son sistem düzenlenirse

$$\tan \varphi = \frac{p_1}{p_2},$$

$$\theta^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad (4.8)$$

$$\varphi^* = -p_3$$

bulunur.

(4.8) den elde edilen değerler (4.7) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa $\cot \theta(t)$ için çözüm bulunur. Bu çözüm integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir küresel ortotomik regle yüzey elde edilebilir. (4.8) denkleminde elde edilen $\theta^*(t)$ biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki değere sahiptir. Herhangi bir tanesi seçilerek elde edilen regle yüzey diğerrinin tersidir.

4.1.1. Örnek $p(t) = (t^2, t^2, 2t + 1)$ eğrisini göz önüne alındığında eğrinin bileşenleri kullanılarak

$$\tan \varphi = \frac{p_1}{p_2} = \frac{t^2}{t^2} = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\theta^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm \sqrt{(t^2)^2 + (t^2)^2} = \pm \sqrt{2t^2} = \pm \sqrt{2}t^2,$$

$$\varphi^* = -p_3 = -2t - 1$$

değerleri elde edilir. θ yi hesaplamak için

$$y(t) = \cot \theta, \quad A(t) = -\frac{\theta^* \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\frac{d\theta^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{\frac{d\theta^*}{dt}},$$

terimleri elde edilmelidir.

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d(\sqrt{2}t^2)}{dt} = \sqrt{2}t,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d(-2t-1)}{dt} = -2$$

değerleri (4.7) yerine yazılırsa bir 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{(\sqrt{2}t^2)(0)^2}{-2} y - \frac{(-2)(0)}{-2} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Diferansiyel denklemin genel çözümünden

$$y(t) = \cot \theta(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ve buradan da

$$\theta = \arccot(c)$$

bulunmuş olur. (4.3) den

$$p_1 = -\theta^* \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{p_1}{\theta^*},$$

$$p_2 = -\theta^* \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{p_2}{\theta^*},$$

$$p_3 = -\varphi^*$$

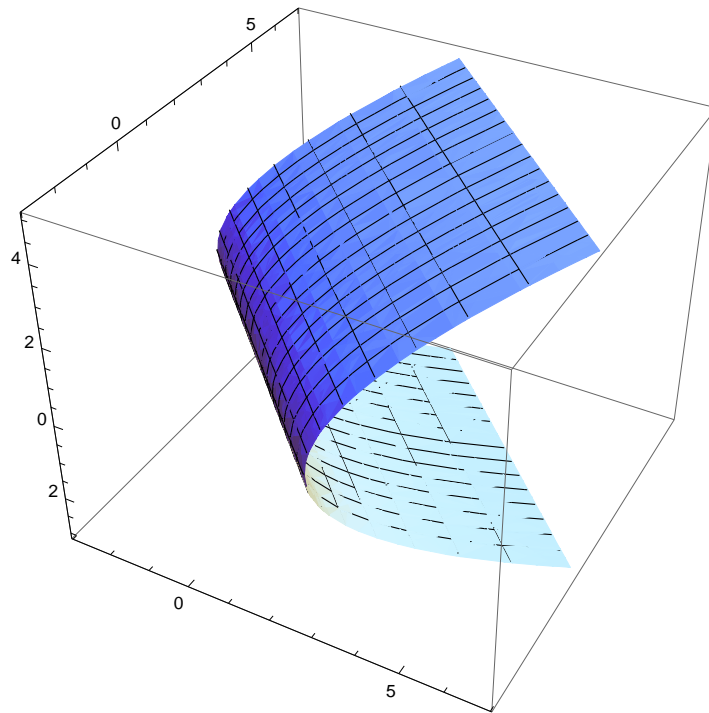
elde edilir. Dayanak eğrisi $p(t)$ olan açılabilir küresel ortotomik regle yüzey ailesi

$$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{p_2}{\theta^*} \sin \theta, -\frac{p_1}{\theta^*} \sin \theta, \cos \theta \right)$$

dır.



Şekil 4.1 Küresel ortotomik regle yüzey.

$c=0$ ve

$$D: \begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ -4 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir küresel ortotomik regle yüzeyin grafiği Şekil 4.1 deki gibidir.

Eğer küresel ortotomik $\vec{e}_1\vec{e}_3$ düzleminde yatan büyük çember dikkate alınarak hesaplanır ise $\vec{\sigma}(t) = (\tilde{x}_1, -\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ şeklinde elde edilir

$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$ küresel ortotomik regle yüzeyine karşılık gelen dual birim küre üzerindeki dual küresel ortotomik eğri

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t) &= (\cos \varphi(t) \sin \theta(t), -\sin \varphi(t) \sin \theta(t), \cos \theta(t)) \\ &+ \varepsilon (\theta^*(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t) - \varphi^*(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \\ &- \theta^*(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t) - \varphi^*(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t), \\ &- \theta^*(t) \sin \theta(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir. $\vec{\sigma}(t)$ ye \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey $m(t, u) = p(t) + u\sigma(t)$ yardımıyla hesaplanır, burada $p(t)$ regle yüzeyin taban eğrisidir. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\vec{\sigma}^* = \vec{p} \wedge \vec{\sigma}$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^* &= \vec{p} \wedge \vec{\sigma} \\ &= (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \\ &= (p_2 \cos \theta + p_3 \sin \varphi \sin \theta, -p_1 \cos \theta + p_3 \cos \varphi \sin \theta, \\ &- p_1 \sin \varphi \sin \theta - p_2 \cos \varphi \sin \theta) \end{aligned}$$

ve (4.9) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_2 \cos \theta + p_3 \sin \varphi \sin \theta &= \theta^* \cos \varphi \cos \theta - \varphi^* \sin \varphi \sin \theta, \\ -p_1 \cos \theta + p_3 \cos \varphi \sin \theta &= -\theta^* \sin \varphi \cos \theta - \varphi^* \cos \varphi \sin \theta, \\ -p_1 \sin \varphi \sin \theta - p_2 \cos \varphi \sin \theta &= -\theta^* \cos \theta \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin özel bir çözümü

$$p_1 = \theta^* \sin \varphi,$$

$$p_2 = \theta^* \cos \varphi,$$

$$p_3 = -\varphi^*$$

dır.

(4.9) denkleminde verilen eğriye karşılık gelen küresel ortotomik regle yüzeyin dağılıma parametresi (2.2) yardımıyla

$$P_x = \frac{\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} + \theta^* \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta} \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. Eğer küresel ortotomik regle yüzey açılabilir ise $P_x = 0$ dır. Yani regle yüzey açılabilir ise (4.10) denkleminde

$$y(t) = \cot \theta, \quad A(t) = -\frac{\theta^* \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\frac{d\theta^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{\frac{d\theta^*}{dt}}$$

olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0$$

şeklinde 1. dereceden bir lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden $\theta(t)$ açısı elde edilir. Bu çözüm integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir küresel ortotomik regle yüzey mevcuttur.

4.1.2. Örnek Bir önceki örnekte kullanılan $p(t) = (t^2, t^2, 2t + 1)$ eğrisi göz önüne alınır

ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi^* = -2t - 1, \quad \theta = \arccot(c), \quad \theta^* = \pm\sqrt{2}t^2$$

ve

$$\sigma(t) = \left(\frac{p_2}{\theta^*} \sin \theta(t), -\frac{p_1}{\theta^*} \sin \theta(t), \cos \theta(t) \right)$$

elde edilir. Açılabilir küresel ortotomik regle yüzey

$$\begin{aligned} \vec{m}(t, u) &= \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t) \\ &= \left(t^2 + u \frac{t}{\sqrt{2}}, t^2 - u \frac{t}{\sqrt{2}}, 2t + 1 \right) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve $c = 0$ ve

$$D: \begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ -4 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir regle yüzeyin grafiği Şekil 4.1 deki gibidir.

Aynı işlemler \vec{e}_1, \vec{e}_2 düzleminde yatan büyük çember dikkate alınarak hesaplanırsa $\vec{\sigma}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, -\tilde{x}_3)$ şeklinde elde edilir

$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$ küresel ortotomik regle yüzeyine karşılık gelen dual birim küre üzerindeki dual küresel ortotomik eğri

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t) &= (\cos \varphi(t) \sin \theta(t), \sin \varphi(t) \sin \theta(t), -\cos \theta(t)) \\ &+ \varepsilon (\theta^*(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t) - \varphi^*(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \\ &\quad \theta^*(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t) + \varphi^*(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t), \\ &\quad \theta^*(t) \sin \theta(t)) \end{aligned} \tag{4.11}$$

dır. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\vec{\sigma}^* = \vec{p} \wedge \vec{\sigma}$ yardımıyla

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}^* &= \vec{p} \wedge \vec{\sigma} \\
&= (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \\
&= (-p_2 \cos \theta - p_3 \sin \varphi \sin \theta, p_1 \cos \theta + p_3 \cos \varphi \sin \theta, \\
&\quad p_1 \sin \varphi \sin \theta - p_2 \cos \varphi \sin \theta)
\end{aligned}$$

ve (4.11) denklemi kullanılırsa

$$-p_2 \cos \theta - p_3 \sin \varphi \sin \theta = \theta^* \cos \varphi \cos \theta - \varphi^* \sin \varphi \sin \theta,$$

$$p_1 \cos \theta + p_3 \cos \varphi \sin \theta = \theta^* \sin \varphi \cos \theta + \varphi^* \cos \varphi \sin \theta,$$

$$p_1 \sin \varphi \sin \theta - p_2 \cos \varphi \sin \theta = \theta^* \cos \theta$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin bir özel çözümü

$$p_1 = \theta^* \sin \varphi,$$

$$p_2 = -\theta^* \cos \varphi,$$

$$p_3 = \varphi^*$$

şeklinde elde edilir.

(4.11) denkleminde verilen küresel ortotomik regle yüzeyin dağılma parametresi önceki iki durumdaki gibi hesaplanırsa

$$P_x = \frac{\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} + \theta^* \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta} \quad (4.12)$$

dır. Eğer küresel ortotomik regle yüzey açılabilir ise $P_x = 0$ olmalıdır. Yani regle yüzey

açılabilir ise (4.12) denkleminde

$$y(t) = \cot \theta, \quad A(t) = -\frac{\theta^* \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\frac{d\theta^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{\frac{d\theta^*}{dt}}$$

olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0$$

şeklinde 1. dereceden bir lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden $\theta(t)$ açısı elde edilir. Bu çözüm integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir küresel ortotomik regle yüzey elde edilebilir.

4.1.3. Örnek Diğer iki örnekte olduğu gibi $\vec{p}(t) = (t^2, t^2, 2t+1)$ eğrisi göz önüne alınsın. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi^* = 2t+1, \quad \theta = \arccot(c), \quad \theta^* = \pm\sqrt{2}t^2$$

ve

$$\sigma(t) = \left(-\frac{P_2}{\theta^*} \sin \theta(t), \frac{P_1}{\theta^*} \sin \theta(t), -\cos \theta(t) \right)$$

elde edilir. Açılabilir küresel ortotomik regle yüzey

$$m(t, u) = p(t) + u\sigma(t)$$

$$= \left(t^2 - u \frac{t}{\sqrt{2}}, t^2 + u \frac{t}{\sqrt{2}}, 2t+1 \right)$$

şeklinde hesaplanır ve diğer iki durumda alınan tanım aralığı için aynı grafik elde edilir (Şekil 4.1).

4.2. Açılabilir Küresel Ortotomik Timelike Regle Yüzeyler

Bu bölümde \mathbb{H}_0^2 küresinde yatan herhangi bir eğriye karşılık gelen açılabilir küresel ortotomik timelike regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine yeni bir metot verilecektir.

Orijin merkezli, dual hiperbolik birim küre üzerindeki herhangi bir nokta $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ olmak üzere \tilde{x} noktası kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \sinh \tilde{\varphi} \cos \tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \sinh \tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \cosh \tilde{\varphi}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$, sırasıyla, dual hiperbolik ve dual açılarıdır. (2.6) den

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \sinh \varphi \cos \theta + \varepsilon (\varphi^* \cosh \varphi \cos \theta - \theta^* \sinh \varphi \sin \theta),$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \sinh \varphi \sin \theta + \varepsilon (\varphi^* \cosh \varphi \sin \theta + \theta^* \sinh \varphi \cos \theta),$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \cosh \varphi + \varepsilon (\varphi^* \sinh \varphi)$$

şeklinde elde edilir.

(2.1) kullanılarak $\vec{e}_2 \vec{e}_3$ düzleminde yatan büyük çemberin $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ ile bağlantılı küresel ortotomiği $\tilde{\sigma}(t) = (-\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ şeklinde elde edilir ve küresel koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) = & (-\sinh \varphi(t) \cos \theta(t), \sinh \varphi(t) \sin \theta(t), \cosh \varphi(t)) \\ & + \varepsilon (-\varphi^*(t) \cosh \varphi(t) \cos \theta(t) + \theta^*(t) \sinh \varphi(t) \sin \theta(t), \\ & \varphi^*(t) \cosh \varphi(t) \sin \theta(t) + \theta^*(t) \sinh \varphi(t) \cos \theta(t), \\ & \varphi^*(t) \sinh \varphi(t)) \end{aligned} \tag{4.13}$$

dir. $\vec{\sigma}(t)$ ye \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey $m(t,u) = p(t) + u\sigma(t)$ yardımıyla hesaplanır, burada $p(t)$ regle yüzeyin taban eğrisidir. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\vec{\sigma}^* = \vec{p} \wedge_L \vec{\sigma}$ yardımıyla

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* &= \vec{p} \wedge_L \vec{\sigma} \\ &= (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \\ &= (p_2 \cosh \varphi - p_3 \sinh \varphi \sin \theta, -p_3 \sinh \varphi \cos \theta - p_1 \cosh \varphi, \\ &\quad -p_2 \sinh \varphi \cos \theta - p_1 \sinh \varphi \sin \theta)\end{aligned}$$

ve (4.13) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned}p_2 \cosh \varphi - p_3 \sinh \varphi \sin \theta &= -\varphi^* \cosh \varphi \cos \theta + \theta^* \sinh \varphi \sin \theta, \\ -p_1 \cosh \varphi - p_3 \sinh \varphi \cos \theta &= \varphi^* \cosh \varphi \sin \theta + \theta^* \sinh \varphi \cos \theta, \\ -p_1 \sinh \varphi \sin \theta - p_2 \sinh \varphi \cos \theta &= \varphi^* \sinh \varphi\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisinin rankı 2 dir

$$\begin{bmatrix} 0 & \cosh \varphi & -\sinh \varphi \sin \theta \\ -\cosh \varphi & 0 & -\sinh \varphi \cos \theta \\ -\sinh \varphi \sin \theta & -\sinh \varphi \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & \cosh \varphi & -\sinh \varphi \sin \theta & -\varphi^* \cosh \varphi \cos \theta + \theta^* \sinh \varphi \sin \theta \\ -\cosh \varphi & 0 & -\sinh \varphi \cos \theta & \varphi^* \cosh \varphi \sin \theta + \theta^* \sinh \varphi \cos \theta \\ -\sinh \varphi \sin \theta & -\sinh \varphi \cos \theta & 0 & \varphi^* \sinh \varphi \end{bmatrix}$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Elemanter işlemler uygulanırsa

$$p_1 + \tanh \varphi \cos \theta p_3 = -\varphi^* \sin \theta - \theta^* \tanh \varphi \cos \theta,$$

$$p_2 - \tanh \varphi \sin \theta p_3 = -\varphi^* \cos \theta + \theta^* \tanh \varphi \sin \theta$$

elde edilir ve bu denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= -(p_3 + \theta^*) \tanh \varphi \cos \theta - \varphi^* \sin \theta, \\ p_2 &= (p_3 + \theta^*) \tanh \varphi \sin \theta - \varphi^* \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$p_3 = p_3$$

şeklinde elde edilir. $n - \text{rank} = 1$ olduğundan bir tane bilinmeyene keyfi değer verilebilir. $p_3(t) = -\theta^*(t)$ şeklinde seçilir ise (4.14) nin özel bir çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= -\varphi^* \sin \theta \\ p_2 &= -\varphi^* \cos \theta \\ p_3 &= -\theta^* \end{aligned} \quad (4.15)$$

olur.

(4.13) denklemine verilen eğriye karşılık gelen küresel ortotomik timelike regle yüzeyin dağılma parametresi (2.2) yardımıyla

$$P_x = \frac{\sinh^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \cosh \varphi \sinh \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sinh^2 \varphi} \quad (4.16)$$

dir.

Eğer küresel ortotomik timelike regle yüzeyi açılabilir ise $P_x = 0$ olmalıdır. Yani regle yüzey açılabilir ise (4.16) denkleminde

$$\sinh^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \cosh \varphi \sinh \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) den

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \coth \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} = 0$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \coth \varphi - \frac{d\varphi^*}{dt} \frac{d}{dt} (\coth \varphi) = 0 \quad (4.18)$$

bulunur. (4.18) denkleminde

$$y(t) = \coth \varphi, \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

şeklinde bir düzenleme yapılırsa bir 1. dereceden lineer denklem sistemi

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir

\mathbb{L}_1^3 de iki timelike vektör ortogonal olamayacağından, dayanak (taban) eğrisi spacelike bir eğri olmalıdır. O halde herhangi bir spacelike eğri verildiğinde bu eğriyi taban eğrisi kabul eden açılabilir timelike ortotomik regle yüzey bulanabilir ve eğrinin bileşenleri kullanılarak, (4.15) den

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-\varphi^* \sin \theta}{-\varphi^* \cos \theta} = \tan \theta,$$

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(-\varphi^* \sin \theta)^2 + (-\varphi^* \cos \theta)^2} = |\varphi^*|,$$

$$p_3 = -\theta^*$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler düzenlenirse

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2},$$

$$\varphi^* = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad (4.20)$$

$$\theta^* = -p_3$$

elde edilir.

(4.20) den elde edilen değerler (4.19) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa $\coth \varphi(t)$ için çözüm bulunur. Bu çözüm bir integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir küresel ortotomik timelike regle yüzey elde edilebilir. (4.20) denkleminde elde edilen $\varphi^*(t)$ biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki değere sahiptir. Herhangi bir tanesi seçilerek elde edilen regle yüzey diğerrinin tersidir.

4.2.1. Örnek $p(t) = (t, t, 2t^3 + 1)$ eğrisini göz önüne alınsın. $p(t)$ eğrisinin hız vektörü

$p'(t) = (1, 1, 6t^2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle p'(t), p'(t) \rangle_L &= \langle (p'_1, p'_2, p'_3), (p'_1, p'_2, p'_3) \rangle_L \\ &= \langle (1, 1, 6t^2), (1, 1, 6t^2) \rangle_L, \\ &= 1 + 1 + 36t^4 \end{aligned}$$

$-\frac{1}{\sqrt[4]{18}} < t < \frac{1}{\sqrt[4]{18}}$ için $p(t)$ eğrisi spacelike eğridir. Eğrinin bileşenleri kullanılarak

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{t}{t} = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm \sqrt{t^2 + t^2} = \pm \sqrt{2}t,$$

$$\theta^* = -p_3 = -2t^3 - 1$$

elde edilir. φ yi hesaplamak için

$$y(t) = \coth \varphi(t), \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

terimleri elde edilmelidir.

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d(-2t^3 - 1)}{dt} = -6t^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\arctan(1))}{dt} = \left(\frac{\pi}{4} \right)' = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d(\sqrt{2}t)}{dt} = \sqrt{2}.$$

Bu değerler (4.19) de yerlerine yazılırsa 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}} y - \frac{\frac{d\theta^*}{dt} \frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{(\sqrt{2}t) \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)' \right)^2}{\sqrt{2}} y - \frac{(-6t^2) \left(\frac{\pi}{4} \right)'}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(t) = \coth \varphi(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

dir ve buradan da

$$\varphi = \operatorname{arc} \coth(c)$$

elde edilmiş olur. (4.15) den

$$p_1 = -\varphi^* \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = -\frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = -\varphi^* \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = -\theta^*$$

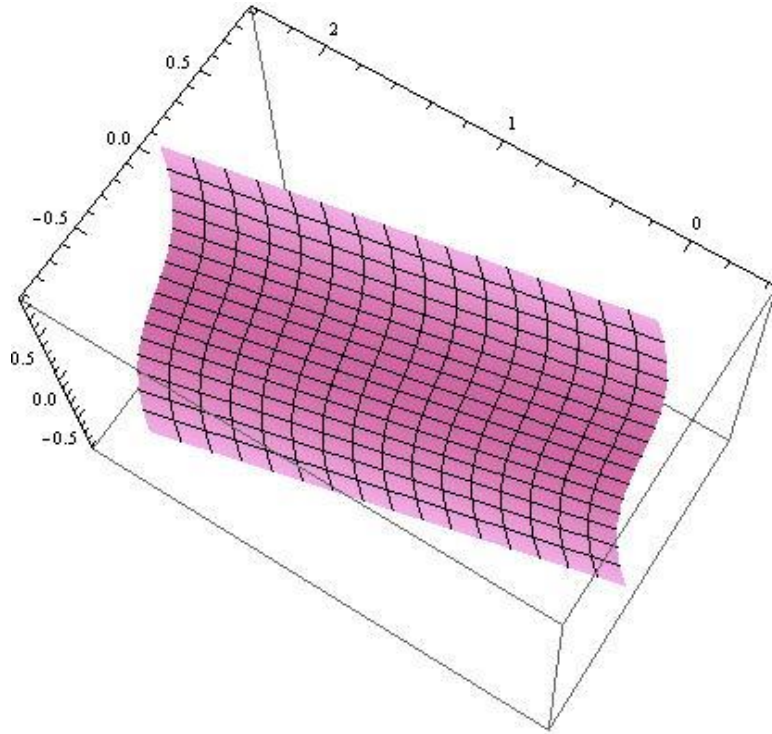
elde edilir. Dayanak eğrisi $p(t)$ olan açılabilir küresel ortotomik timelike regle yüzey ailesi

$$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{p_2}{\varphi^*} \sinh \varphi, -\frac{p_1}{\varphi^*} \sinh \varphi, \cosh \varphi \right)$$

dir.



Şekil 4.2 Timelike regle yüzey.

$c = 2$ ve

$$D: \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[4]{18}} < t < \frac{1}{\sqrt[4]{18}} \\ -1 < u < 1 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir küresel ortotomik timelike regle yüzey Şekil 4.2 deki gibidir.

4.3. Açılabilir Küresel Ortotomik Spacelike veya Timelike Regle Yüzeyler

Bu kısımda \mathbb{S}_1^2 de yatan eğriye karşılık gelen açılabilir küresel ortotomik regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot verilecektir. Eğer $p(t)$ taban eğrisi spacelike (timelike) ise regle yüzey spacelike (timelike) olacaktır (Turgut, 1995).

Orijin merkezli, dual hiperbolik birim küre üzerindeki herhangi bir nokta $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ olmak üzere (2.6) kullanılarak \tilde{x} noktası kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = \cosh \tilde{\varphi} \cos \tilde{\theta} = \cosh \varphi \cos \theta + \varepsilon (\varphi^* \sinh \varphi \cos \theta - \theta^* \cosh \varphi \sin \theta),$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* = \cosh \tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta} = \cosh \varphi \sin \theta + \varepsilon (\varphi^* \sinh \varphi \sin \theta + \theta^* \cosh \varphi \cos \theta),$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* = \sinh \tilde{\varphi} = \sinh \varphi + \varepsilon (\varphi^* \cosh \varphi)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$, sırasıyla, dual hiperbolik açı ve dual açıdır.

(2.1) kullanılarak $\vec{e}_2 \vec{e}_3$ düzleminde yatan büyük çemberin $\vec{x}(t) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ ile bağlantılı küresel ortotomiği $\vec{\sigma}(t) = (-\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ şeklinde elde edilir ve küresel koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t) = & (-\cosh \varphi(t) \cos \theta(t), \cosh \varphi(t) \sin \theta(t), \sinh \varphi(t)) \\ & + \varepsilon (-\varphi^*(t) \sinh \varphi(t) \cos \theta(t) + \theta^*(t) \cosh \varphi(t) \sin \theta(t), \\ & \varphi^*(t) \sinh \varphi(t) \sin \theta(t) + \theta^*(t) \cosh \varphi(t) \cos \theta(t), \\ & \varphi^*(t) \cosh \varphi(t)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

dir. $\vec{\sigma}(t)$ ye \mathbb{E}^3 de karşılık gelen regle yüzey $\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$ yardımıyla hesaplanır, burada $p(t)$ regle yüzeyin taban eğrisidir. $p(t)$ taban eğrisinin koordinatları p_1, p_2, p_3 olmak üzere $\vec{\sigma}^* = \vec{p} \wedge_L \vec{\sigma}$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^* = & \vec{p} \wedge_L \vec{\sigma} \\ = & (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \\ = & (p_2 \sinh \varphi - p_3 \cosh \varphi \sin \theta, -p_3 \cosh \varphi \cos \theta - p_1 \sinh \varphi, \\ & -p_2 \cosh \varphi \cos \theta - p_1 \cosh \varphi \sin \theta) \end{aligned}$$

ve (4.21) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} p_2 \sinh \varphi - p_3 \cosh \varphi \sin \theta &= -\varphi^* \sinh \varphi \cos \theta + \theta^* \cosh \varphi \sin \theta, \\ -p_1 \sinh \varphi - p_3 \cosh \varphi \cos \theta &= \varphi^* \sinh \varphi \sin \theta + \theta^* \cosh \varphi \cos \theta, \\ -p_1 \cosh \varphi \sin \theta - p_2 \cosh \varphi \cos \theta &= \varphi^* \cosh \varphi \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi sonsuz çözüme sahiptir ve genel çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= -(p_3 + \theta^*) \coth \varphi \cos \theta - \varphi^* \sin \theta, \\ p_2 &= (p_3 + \theta^*) \coth \varphi \sin \theta - \varphi^* \cos \theta, \\ p_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

dır. $n - \text{rank} = 1$ den bir tane bilinmeyene keyfi değer verilebilir. $p_3(t) = -\theta^*(t)$ şeklinde seçilecek olursa (4.22) denklem sisteminin özel bir çözümü

$$\begin{aligned} p_1 &= -\varphi^* \sin \theta, \\ p_2 &= -\varphi^* \cos \theta, \\ p_3 &= -\theta^* \end{aligned} \quad (4.23)$$

olarak bulunur.

(4.21) denkleminde verilen eğriye karşılık gelen küresel ortotomik regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_x = \frac{\cosh^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \cosh \varphi \sinh \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt}}{-\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cosh^2 \varphi} \quad (4.24)$$

dir.

Eğer küresel ortotomik regle yüzey açılabilir ise $P_x = 0$ olmalıdır. Yani regle yüzey açılabilir ise (4.24) denkleminde

$$\cosh^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \cosh \varphi \sinh \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi^*}{dt} = 0 \quad (4.25)$$

olur. (4.25) denklemini düzenlenirse

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \tanh \varphi - \frac{d\varphi^*}{dt} \frac{d}{dt} (\tanh \varphi) = 0 \quad (4.26)$$

bulunur. (4.26) denkleminde

$$y(t) = \tanh \varphi, \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

yazılırsa

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0 \quad (4.27)$$

1. dereceden lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

Herhangi bir eğri verildiğinde bu eğriyi taban eğrisi kabul eden açılabilir küresel ortotomik regle yüzey bulunabilir ve eğrinin bileşenleri kullanılarak, (4.23) den

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-\varphi^* \sin \theta}{-\varphi^* \cos \theta} = \tan \theta,$$

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(-\varphi^* \sin \theta)^2 + (-\varphi^* \cos \theta)^2} = |\varphi^*|,$$

$$p_3 = -\theta^*$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikler düzenlenirse

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (4.28)$$

$$\theta^* = -p_3$$

elde edilir.

(4.28) den elde edilen değerler (4.27) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa $\tanh \varphi(t)$ için çözüm bulunur. Bu çözüm bir integral sabiti içerdiğinden dolayı taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir küresel ortotomik regle yüzey elde edilebilir. (4.28) denkleminde elde edilen $\varphi^*(t)$ biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki değere sahiptir. Herhangi bir tanesi seçilerek elde edilen regle yüzey diğerrinin tersidir.

4.3.1. Örnek $p(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^6}{6} + 3 \right)$ eğrisinin hız vektörü $p'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, t^5 \right)$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle p'(t), p'(t) \rangle_L &= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, t^5 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, t^5 \right) \right\rangle_L \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t^{10}, \end{aligned}$$

$t \in (-1, 1)$ için $p(t)$ spacelike eğridir ve regle yüzey de spacelike regle yüzeydir.

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{t/\sqrt{2}}{t/\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2} = \pm t,$$

$$\theta^* = -p_3 = -\frac{t^6}{6} - 3,$$

elde edilir. φ yi hesaplamak için

$$y(t) = \tanh \varphi(t), \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

terimleri elde edilmelidir.

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d \left(-\frac{t^6}{6} - 3 \right)}{dt} = -t^5,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\arctan(1))}{dt} = \left(\frac{\pi}{4} \right)' = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d(t)}{dt} = 1.$$

bu değerler, (4.27) denkleminde yerlerine yazılırsa 1. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{(t) \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)' \right)^2}{1} y - \frac{(-t^5) \left(\frac{\pi}{4} \right)'}{1} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(t) = \tanh \varphi(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

dir ve buradan da

$$\varphi = \operatorname{arctanh}(c)$$

elde edilmiş olur. (4.23) den

$$p_1 = -\varphi^* \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = -\frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = -\varphi^* \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = -\theta^*$$

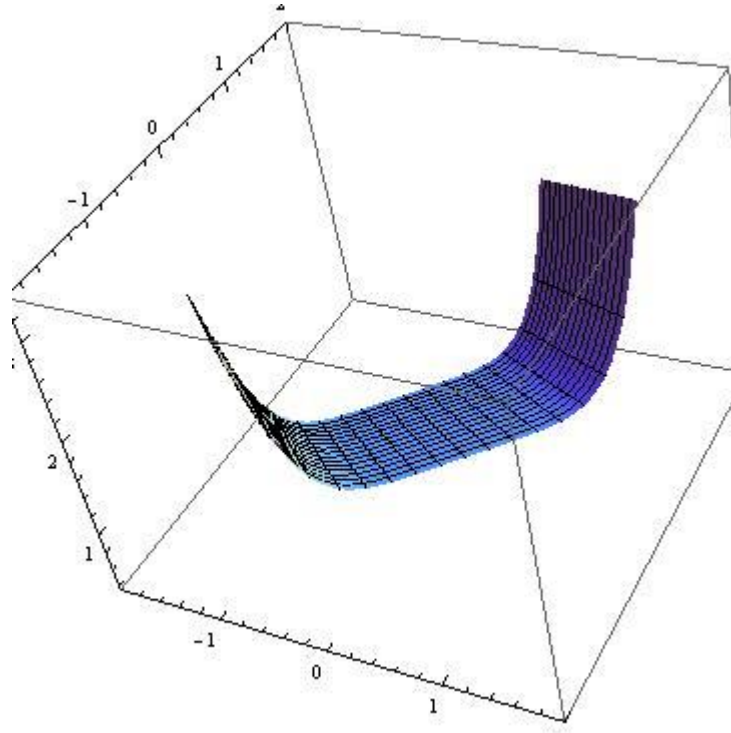
bulunur. Dayanak eğrisi olan açılabilir spacelike regle yüzeylerin ailesi

$$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{p_1}{\varphi^*} \cosh \varphi, -\frac{p_2}{\varphi^*} \cosh \varphi, \sinh \varphi \right)$$

dir.



Şekil 4.3 Spacelike regle yüzey.

$c=0$ ve

$$D: \begin{cases} -1 < t < 1 \\ -1 < u < 1 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir spacelike regle yüzey Şekil 4.3 deki gibidir.

4.3.2. Örnek $p(t) = (t, t, 2t^3 + 1)$ alınsın. $p(t)$ eğrisinin hız vektörü $p'(t) = (1, 1, 6t^2)$

olmak üzere

$$\langle \vec{p}'(t), \vec{p}'(t) \rangle_L = 1 + 1 - 36t^4,$$

$t \notin \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{18}}, \frac{1}{\sqrt[4]{18}} \right)$ için $p(t)$ timelike eğridir ve regle yüzey de timelike regle yüzeydir.

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{t}{t} = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi^* = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm \sqrt{t^2 + t^2} = \pm \sqrt{2}t,$$

$$\theta^* = -p_3 = -2t^3 - 1,$$

elde edilir. φ yi hesaplamak için

$$y(t) = \tanh \varphi(t), \quad A(t) = -\frac{\varphi^* \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}, \quad B(t) = -\frac{\frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

ifadeleri

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d(-2t^3 - 1)}{dt} = -6t^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\arctan(1))}{dt} = \left(\frac{\pi}{4} \right)' = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d(\sqrt{2}t)}{dt} = \sqrt{2}.$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler, (4.27) denkleminde yerlerine yazılırsa 1. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem bulunur.

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümünden

$$y(t) = \tanh \varphi(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ve buradan da

$$\varphi = \operatorname{arctanh}(c)$$

elde edilmiş olur. (4.23) den

$$p_1 = -\varphi^* \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = -\frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = -\varphi^* \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = -\theta^*$$

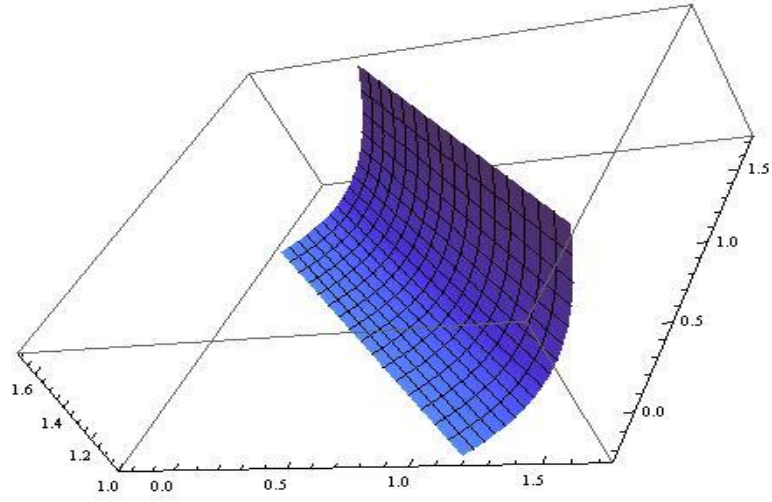
olur. Dayanak eğrisi $\vec{p}(t)$ olan regle yüzey ailesi

$$\vec{m}(t, u) = \vec{p}(t) + u\vec{\sigma}(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{p_1}{\varphi^*} \cosh \varphi, -\frac{p_1}{\varphi^*} \cosh \varphi, \sinh \varphi \right)$$

dir.



Şekil 4.4 Timelike regle yüzey.

$c=0$ ve

$$D: \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{18}} < t < 1 \\ -1 < u < 1 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir küresel ortotomik timelike regle yüzeyin grafiği Şekil 4.4 deki gibidir.

KAYNAKLAR

- Birman, G.S. and Nomizu, K., “Trigonometry in Lorentzian Geometry”, *American Mathematical Monthly*, 91(9): 543-549 (1984).
- Blaschke, W., “Diferensiyel Geometri Dersleri”, İstanbul (1949).
- Carmo, M., “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, *Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs*, New Jersey (1976).
- Edge, W.L., “The theory of ruled surfaces”, *Cambridge University Press.*, London (1931).
- Ekici, C., “Bir Kapalı Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları Arasındaki Bağlıntılar”, *Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir (1992).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri Cilt I”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara (2000).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri Cilt II”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara (2000).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, *Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları*, No:2, Ankara (1983).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “On closed spherical motions”, *Quarterly of Applied Math.*, July, 269-276, (1971).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “On the pitch of a closed ruled surface”, *Mechanism and Machine Theory*, 7, 291-305, (1972).
- Hacısalıhoğlu, H.H., “Study Map of a circle”, *Journal of the Fac. Sci. of K.T.Ü.*, I, 69-80, (1977).
- Köse, Ö., “A Method of the Determination of a Developable Ruled Surface”, *Mechanism and Machine Theory*, 34: 1187-1193 (1999).
- Lopez, R., “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space”, *Departamento de Geometria y Topologia Universidad de Granada 18071*, Espana 1-2 (2008).
- O’Neill, B., “Semi Riemannian Geometry”, *Academic Press*, New York (1983).
- Sabuncuoğlu, A., “Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler”, Doçentlik Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara (1982).
- Turgut, A., “3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler”, Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara (1995).

- Uğurlu, H.H. and Çalışkan A., “The Study Mapping For Directed Spacelike ve Timelike Lines in Minkowsky 3-Space \mathbb{R}_1^3 ”, *Mathematical and Computational Applications*, 1(2): 142-148 (1996).
- Xiong, J., “Geometry and Singularities of Spatial and Spherical Curves”, The degree of Doctor of Philosophy, *University of Hawaii*, Hawaii (2004).
- Xiong, J., “Spherical Orthotomic and Spherical Antiothotomic”, *Acta Mathematica Sinica*, September 2007, Volume 23, Issue 9, pp 1673-1682, (2007).
- Yaylı, Y., Çalışkan, A. and Uğurlu H. H., “The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres \mathbb{H}_0^2 and \mathbb{S}_1^2 ”, *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 102A (1): 37-47 (2002).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Önder Gökmen YILDIZ
Doğum Yeri ve Tarihi : Bakırköy / 20.02.1987



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar :
Projeler :
Çalıştığı Kurumlar : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Araştırma Görevlisi

İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Matematik Bölümü
Tel : 0228 212 18 25
E-Posta Adresi : ogokmen.yildiz@bilecik.edu.tr

Akademik Çalışmaları

- **Ö.Gökmen Yıldız**, S.Ö. Karakuş, H.H. Hacısalihoğlu “On the determination of a developable spherical orthotomic ruled surface” *Bull. Math. Sci.*, Accepted in 2014 DOI: 10.1007/s13373-014-0063-5. (SCI-Exp.)
- **Ö.Gökmen Yıldız**, H.H. Hacısalihoğlu “Study Map of Spherical Orthotomic of a Circle” *International J. Math. Combin.*, Accepted in 2014.

Yabancı Dil Bilgisi

İngilizce : İleri Seviyede

Tarih:...../...../.....