ESKİŞEHİR ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARLA HOMOTETİK HAREKETLER

Gülşah ÖZAYDIN
Yüksek Lisans Tez

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2019
Ref. No:10291557

ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK
ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARLA HOMOTETİK HAREKETLER

Gülşah ÖZAYDIN
Yüksek Lisans Tez

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2019

ESKİŞEHİR
ANADOLU UNIVERSITY

BİLECİK
SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Department Mathematics

HOMOTHETIC MOTIONS WITH GENERALIZED BICOMPLEX NUMBERS

Gülşah ÖZAYDIN
Master's Thesis

Thesis Advisor
Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2019

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 24/07/2019 tarih ve 40/09 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 09/08/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan GÜLŞAH ÖZAYDIN'ın "Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarla Homotetik Hareketler" başlıklı tez çalışması MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE : Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ÜYE : Prof. Dr. Soley ERSOY

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../........ tarih ve ..../............ sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güleryüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve meslek hayatımda bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a, çalışmam boyunca benden bir an olsun desteğini esirgemeyen eşim Gökhan ÖZAYDIN'a ve her daim varlığı ile bana güç veren, beni hiç yalnız bırakmayan annem Öznur DİNÇ'e ve babam M. Alaattin DİNÇ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

…../…./ 2019

Gülşah ÖZAYDIN

(GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARLA HOMOTETİK HAREKETLER)

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayılar ve homotetik hareket ile ilgili gerekli tanım ve Teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde bazı hiperyüzeylerde homotetik hareketler çalışılmıştır. M_1, M_2 ve M_3 hiperyüzeylerinde homotetik harekete ait Teoremler ve örnekler verilmiştir. Son bölümde $E_{\alpha\beta\gamma}^{8}$ genelleştirilmiş trikompleks sayılar tanımlanarak, genelleştirilmiş trikompleks sayılar yardımıyla homotetik hareket ve 1- parametreli homotetik hareketin tanımı, hızları, ani pol noktası, ivmesi ve ivme merkezleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar; Homotetik Hareket; Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılar; $E_{\alpha\beta\gamma}^{8}$ Uzayında Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılarla Homotetik Hareket

(HOMOTHETIC MOTION WITH GENERALIZED BICOMPLEX NUMBERS)

ABSTRACT

This thesis consists of four chapter. In the first chapter “Introduction” part has been presented. In the second chapter, terms definitions and theorems which are necessary for generalized bicomplex numbers and homothetic motion have been given. In the third part, homothetic motions have studied in some hypersurfaces. Theorems of homothetic motions and examples in M_1, M_2 and M_3 hypersurfaces have been given. In the final chapter, we have defined generalized tricomplex numbers. Homothetic motion with generalized tricomplex numbers at $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ and definition of 1-parameter homothetic motion, velocity, pole points, acceleration and acceleration centers of homothetic motion with 1- parameter have given.

Key Words: Generalized Bicomplex Numbers; Homothetic Motion; Generalized Tricomplex Numbers; Homothetic Motions at $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ with Generalized Tricomplex Numbers.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

E^n	: n-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu reel vektör uzayı
R	: Sabit uzay
R_0	: Hareketli uzay
det A	: A matrisinin determinantı
$\lVert , \rVert$	: Norm
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_2$	: Bikompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_{\alpha\beta}$	: Genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesi
$T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$	: Genelleştirilmiş trikompleks sayılar cümlesi
Hom(,)	: Homeomorfizm

1. GİRİŞ

1843 yılında Sir William Rowan Hamilton dört boyutlu alanda kuaterniyon adı verilen bir sayı sistemi geliştirdi. Kuaterniyon ve karmaşık sayılar benzer özelliklere sahip olsalar da kuaterniyonların çarpma üzerinde değişme özelliği yoktur. Bu yüzden 1892'de Corrado Segre tarafından bikompleks sayılar adı verilen yeni bir sayı sistemi keşfedildi. Bikompleks sayılar kuaterniyonlar cebirinin alt cebirlerinden birinin elemanları olup, Serge, bikompleks sayıları hatta trikompleks, …, n-kompleks sayıları tanımladı. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Öklid uzayına gömülebilir olduğunu gösterdi. Bikompleks idempotent elemanlarını ve bikompleks sayıların idempotent gösterimini elde etti. Kuaterniyonların aksine bikompleks sayılar değişmeli dört boyutlu reel cebirdir.

$\mathbb{C}_2$ simgesi ile gösterilen bikompleks sayılar

$\mathbb{C}_2 = \{ x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \,;\; i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji, x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq 4 \}$ şeklinde tanımlanır. Her x bikompleks sayısı $x = z_1 + z_2 j$ şeklinde yazılabilir. Burada $z_1 = x_1 1 + x_2 i$ ve $z_2 = x_3 + x_4 i$ karmaşık sayılardır. j ise i birimden farklı bir imajinerdir ve $j^2 = -1$, $ij = ji$ özellikleri sağlanır. Burada, bikompleks sayı bileşenleri karmaşık sayılardan oluşan bir karmaşık sayı olarak düşünülebilir. Bikompleks sayıların cebir, geometri ve analizde uygulama alanları vardır. $\mathbb{C}_2$ de ilk diferansiyallenebilirlik teoresi Price tarafından geliştirildi.

Kabadayı ve Yaylı $\mathbb{R}^4$ te bikompleks sayıların yardımıyla homotetik hareketleri tanımladı (Yaylı, 1992).

Özkaldı Karakuş ve Kahraman Aksoyak genelleştirilmiş bikompleks sayıları tanımladı ve bazı cebirsel özelliklerini verdi. Ayrıca, bikompleks sayılarda çarpma işlemini kullanarak dört boyutlu genelleştirilmiş lineer uzayda bazı hiperyüzeylerin Lie grubu olduğunu gösterdiler. Bu Lie gruplarının Lie cebiri olduğunu ispatladılar (Özkaldı Karakuş ve Kahraman Aksoyak 2015).

Bu tez çalışmasında, bazı hiperyüzeylerde genelleştirilmiş bikompleks sayılarla homotetik hareketler verildi. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında genelleştirilmiş bikompleks sayılar yardımıyla genelleştirilmiş trikompleks sayıların tanımı verildi. Ayrıca $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında genelleştirilmiş trikompleks sayılarla homotetik hareket ve bir parametreli homotetik hareketin özellikleri tanımlandı.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1. Öklid ve Yarı Öklid Uzayında Bazı Temel Kavramlar

Bu bölümde E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında ve yarı Öklid uzayında bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1.1. V reel vektör uzayı üzerinde, $g: V \times V \to \mathbb{R}$ iki lineer fonksiyonuna iki lineer form; eğer bu iki lineer form simetrik ise g fonksiyonuna simetrik iki lineer form denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2. g, V üzerinde iki lineer form olsun.

i) $\forall\, u \in V,\ u \neq 0$ için $g(u,u) > 0$ önermesi doğru ise g fonksiyonuna pozitif tanımlı

ii) $\forall\, u \in V,\ u \neq 0$ için $g(u,u) < 0$ önermesi doğru ise g fonksiyonuna negatif tanımlı

iii) $\forall\, u \in V,\ u \neq 0$ için $g(u,u) \geq 0$ önermesi doğru ise g fonksiyonuna yarı pozitif tanımlı

iv) $\forall\, u \in V,\ u \neq 0$ için $g(u,u) \leq 0$ önermesi doğru ise g fonksiyonuna yarı negatif tanımlı

v) $[\forall\, \omega \in V, g(\omega,u) = 0] \Rightarrow u = 0$ ise g fonksiyonuna non-dejenere (yoz olmayan) bir form denir (O'Neill, 1983).

g fonksiyonu, V reel vektör uzayının bir alt uzayına indirgenebilir. Bu indirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejenere olabilir.

Tanım 2.1.3. g fonksiyonu, V reel vektör uzayında iki lineer form olsun. g fonksiyonun W alt uzayına kısıtlanması $g|_W$ negatif olacak biçimdeki W alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne g fonksiyonun indeksi denir ve v ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. g fonksiyonunun, simetrik iki lineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart V reel vektör uzayının bir bazına karşılık gelen $[g_{ij}]$ matrisi için

$$\det(g_{ij}) \neq 0$$

olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik iki lineer formuna V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. g fonksiyonu, V reel vektör uzayı üzerinde pozitif tanımlı bir skalar çarpım ise g fonksiyonuna V reel vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.6. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde bir skalar çarpım varsa V vektör uzayına skalar çarpımlı vektör uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.7. V skalar çarpım uzayı üzerindeki bir $u \in V$ vektörünün normu

$$\|u\| = \sqrt{|g(u,u)|}$$

şeklinde tanımlanır. $\|u\|$=1 ise u vektörü birim vektör olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.1. V skalar çarpımlı bir uzay ve $V \neq \{0\}$ ise V uzayının bir ortonormal bazı vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. $u, v \in V$ vektörleri için $g(u,v) = 0$ ise u ve v vektörleri diktir (ortogonaldir) denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.10. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldu üzerindeki non-dejenere, (0,2) tipindeki ve sabit indeksli g tensör alanına bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11. M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir g metrik tensörü varsa M manifolduna bir yarı-Riemannian manifoldu denir ve g metrik tensörünün v indeksine (M, g) yarı-Riemannian manifoldunun indeksi denir. M manifoldunun boyutu n olmak üzere yarı-Riemannian manifoldu M_v^n ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$g = \sum_{i=1}^{n-v} u_i\,\omega_i - \sum_{j=n-v+1}^{n} u_j\omega_j$$

şeklinde tanımlı metrik tensör verilsin. Bu durumda $(\mathbb{R}^n, g)$ uzayına yarı-Öklidiyen uzay denir ve R_v^n ile gösterilir. $v = 0$ için $R_0^n = R^n$ Öklid uzayı olarak adlandırılır.

R_v^n uzayı üzerindeki g skalar çarpımı, εu ile ω nın R^n uzayı üzerindeki standart iç çarpımına eşit olur. Yani

$$g(u,\omega) = (\varepsilon u).\omega$$

$$= \sum_{i=1}^{n-v} u_i\,\omega_i - \sum_{j=n-v+1}^{n} u_j\omega_j$$

eşitlikleri sağlanır. Burada ε,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} I_{n-v} & 0 \\ 0 & -I_v \end{pmatrix}$$

ile verilen işaret matrisidir ve $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$ ve $\varepsilon^T = \varepsilon$ özellikleri sağlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13. V vektör uzayı üzerinde, g non-dejenere bir metrik ise g metriğe skaler çarpım (yarı-Öklid) metriği ve V vektör uzayına da skaler çarpım (yarı-Öklid) uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. n −boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n −boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.1.15. V vektör uzayı üzerinde, g pozitif tanımlı bir metrik ise bu g metriğine Öklid metriği; V vektör uzayına da Öklid uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.16. E^n, n −boyutlu Öklid uzayı ve $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere;

$$\alpha: I \to E^n$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir ise α ya E^n, n −boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri denir ve M ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.17. $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.18. E^n, n −boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ −boyutlu bir yüzey veya

$(n-1)$-yüzey diye E^n uzayındaki boş olmayan bir M cümlesine hiperyüzey denir. Öyle ki bu M cümlesi

$M = \{x \in U \subset E^n |\, f: U \to \mathbb{R}, f$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve U açık cümle $\}$

olmak üzere

$$x \to f(x) = C$$

$$\nabla f|_p \neq 0, \forall\, p \in M$$

biçiminde tanımlanır. E^2 uzayında bir $1-$yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 uzayında bir $2-$yüzeye sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)-$yüzey, $n > 3$ olması halinde genellikle bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1994).

Teorem 2.1.2. $\mathbb{R}_v^n$ uzayının bütün lineer izometrilerinin $\mathbb{R}_v^n$ uzayının doğal bazına karşılık gelen matrislerin cümlesi $O_v(n)$ ile gösterilsin. $n \times n$ biçiminde bir A matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

i) $A \in O_v(n)$

ii) $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$

iii) A matris sütunlarının cümlesi (satırlarının cümlesi) $\mathbb{R}_v^n$ için ortonormal bir bazdır.

iv) A matrisi $\mathbb{R}_v^n$ uzayının ortonormal bir bazını $\mathbb{R}_v^n$ uzayının ortonormal bir bazına dönüştürür (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.19. $O_v(n)$ cümlesinin $det\ (A) = 1$ şartını sağlayan bir alt grubu $SO_v(n)$ olsun. $SO_v(n)$ grubuna, special-ortogonal grup denir.

$SO_v(n)$ cümlesi,

$$SO_v(n) = \{A \in O_v(n);\ det\ (A) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.20. $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^n$ için $AS = S$ eşitliğini sağlayan $A \in O_v(n)$ matrisine, şemsiye matrisi denir (Yaylı, 1988).

2.2. Öklid ve Yarı Öklid Uzayında Homotetik Hareket

Bu bölümde homotetik harekete ait genel tanım ve kavramları verilecektir.

Tanım 2.2.1. E^n, n boyutlu bir Öklid uzayı olsun. E^n uzayında uzaklık fonksiyonu d olmak üzere,

$$f : E^n \to E^n$$

fonksiyonu için eğer,

$$d(\, f(x), f(y)\,) = d(x, y);\ \forall\, x, y \in E^n$$

ise f'ye E^n'de bir izometri denir (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.2. E^n uzayının bir f izometrisi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için,

$$f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n);\ t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

ise f fonksiyonuna E^n uzayında bir öteleme denir.

E^n uzayındaki öteleme hareketinde, hareketli uzaydaki X noktasına sabit uzayda karşılık gelen nokta Y ise

$$Y = f(X) = X + C$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada X, Y ve C ler $nx1$ tipindeki matrislerdir (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.3. E^n uzayında tanımlanan bir f izometrisi için, $f(O) = O; O \in E^n$ olacak şekilde bir O noktası varsa f fonksiyonuna O etrafında bir dönme denir.

E^n uzayındaki bir dönme hareketinde hareketli uzaydaki X noktasına sabit uzayda karşılık gelen nokta Y ise

$$Y = f(X) = AX;\ A \in O(n)$$

şeklinde tanımlanabilir (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.4. E^n uzayında A nxn tipinde ve $\det(A) = 1$ olan bir ortogonal matris, C matrisi ise $nx1$ tipinde bir matris ve A ile C t(zaman) parametresine bağlı fonksiyonlar olsun.

$$Y = AX + C;\ X, Y \ \in\ E^n$$

izometrisine E^n uzayında bir genel hareket denir.

$Y = AX + C$ izometrisinde hareketli uzaydaki $X \in R_0$ noktasına sabit uzayda karşılık gelen nokta $Y \in R$ olur. Burada $A.X$ hareketin dönme ve C de öteleme hareketlerine karşılık gelen kısmıdır.

Tanım 2.2.5. A nxn tipinde bir şemsiye matrisi ve X, Y ve C ler $nx1$ tipindeki matrisler olsun. E^n uzayındaki şemsiye hareketi

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Yaylı, 1988). Buradan da,

$$Y = AX + C$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.2.6. E^n uzayında $A \in O(n)$ bir ortogonal matris, $h = hI_n$ bir skaler matris ve a $nx1$ tipinde bir matris olsun. O halde,

$$F = \begin{bmatrix} hA & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümüne, E^n uzayında bir homotetik hareket denir (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.7. E^n uzayında $J \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $O \in J$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A \in O(n)$ bir ortogonal matris ve a $nx1$ tipindeki matris, t(zaman) parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O halde,

$$F(t) = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $F(t)$ cümlesine, E^n uzayında $1-$parametreli homotetik hareket denir. Burada $h(t)$ hareketin homoteti skalası olarak tanımlanır. $B = h.A$ alınırsa,

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

şemsiye hareketinden

$$Y = BX + a$$

elde edilir.

Tanım 2.2.8. $Y = BX + a$ homotetik hareketinin t'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt}$$

homotetik hareketin hız denklemi elde edilir.

Burada, B noktasının sabit düzleme göre vektörel hızına mutlak hız vektörü denir ve $\vec{v}_m$ ile gösterilir. B noktası hareketli düzlemin bir noktası olarak alınırsa, sürüklenme hız vektörü olur ve $\vec{v}_s$ ile gösterilir. B noktasının hareketli düzleme göre hız vektörüne, yani B noktasının hareketli düzlemde yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza B noktasının rölatif (izafi) hız vektörü denir ve $\vec{v}_r$ ile gösterilir.

$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt}$ ile verilen hız denkleminde rölatif, mutlak ve sürüklenme hızı sırasıyla,

$\vec{v}_m = \frac{dY}{dt}$ hareketin mutlak hızı,

$\vec{v}_s = \frac{dB}{dt}X + \frac{da}{dt}$ hareketin sürüklenme hızı,

$\vec{v}_r = B\frac{dX}{dt}$ hareketin rölatif (dönme) hızı olarak tanımlanır (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.9. Sürüklenme hızının sıfır ($\frac{dB}{dt}X + \frac{da}{dt} = 0$) olduğu an, hareketli ve sabit uzayların her ikisinde de bir t anında sabit olan noktadır. Bu ortak sabit noktaya hareketin t anındaki ani pol noktası denir. Bu noktanın sabit uzaydaki adı sabit pol noktası; hareketli uzaydaki adı da hareketli pol noktasıdır ve $Y = BX + a$ homotetik hareketinin her t anında bir tek ani pol noktası vardır (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.10. $BX + a$ homotetik hareketinin t parametresine göre türevinden $\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt}$ eşitliği elde edilmişti. Şimdi tekrar t'ye göre türev alınırsa

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt}\ ,\ \ \dot{X} = \frac{dX}{dt},\ \ \dot{B} = \frac{dB}{dt},\ \ \dot{a} = \frac{da}{dt}\ \text{ve}\ \ddot{Y} = \frac{d^2Y}{dt^2},\ \ddot{B} = \frac{d^2B}{dt^2},\ \ddot{X} = \frac{d^2X}{dt^2},\ \ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}$$

için,

$$\ddot{Y} = \ddot{B}X + \ddot{a} + 2\dot{B}\dot{X} + B\ddot{X}$$

elde edilir. Burada

$\ddot{Y}$ hareketin mutlak ivmesi;

$\ddot{B}X + \ddot{a}$ hareketin sürüklenme ivmesi;

$2\dot{B}\dot{X}$ hareketin coriolis ivmesi;

$B\ddot{X}$ hareketin rölatif (dönme) ivmesi olarak tanımlanır (Yaylı, 1988).

Tanım 2.2.11. Pol Noktaları ve Pol Yörüngeleri

Bir parametreli harekette her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalar hareketli ve sabit düzlemde, sabit olmak zorundadır. Bu noktalara hareketin t anındaki pol noktaları, dönme polü veya ani dönme merkezi denir.

Böylece $\vec{v}_s = 0$ denkleminin çözümü hareketli düzlemdeki pol noktalarını verir. Bu noktaların geometrik yeri hareketli pol eğrisidir. Bunun sabit düzlemdeki karşılığı sabit pol noktasıdır ve sabit pol noktasının geometrik yeri sabit pol eğrisi olarak tanımlanır.

4-boyutlu Öklid uzayında genel dönme hareketinin tanımı, bir noktayı sabit bırakan ve uzaklığı koruyan pozitif determinantlı lineer dönüşümler olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır (Moore, 1919).

Birbirine dik olan iki düzlemi, düzlem anlamında değişmez bırakan dönmeye genel dönme adı verilir. Bir genel dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos m_1 t & -\sin m_1 t & 0 & 0 \\ \sin m_1 t & \cos m_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos m_2 t & -\sin m_2 t \\ 0 & 0 & \sin m_2 t & \cos m_2 t \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır. Burada m_1 ve m_2 sırasıyla X_1X_2 ve X_3X_4 değişmez düzlemlerindeki dönme oranlarıdır.

E_2^4 yarı Öklid uzayında ise E^4 Öklid uzayı üzerinde tanımlanana benzer olacak şekilde dönme ve basit dönme tanımlanabilir. Örnek olarak E_2^4 yarı Öklid uzayında farklı iki tipte genel dönme matrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{pmatrix} \cos m_1 t & -\sin m_1 t & 0 & 0 \\ \sin m_1 t & \cos m_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos m_2 t & -\sin m_2 t \\ 0 & 0 & \sin m_2 t & \cos m_2 t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh m_1 t & 0 & 0 & \sinh m_1 t \\ 0 & \cosh m_2 t & \sinh m_2 t & 0 \\ 0 & \sinh m_2 t & \cosh m_2 t & 0 \\ \sinh m_1 t & 0 & 0 & \cosh m_1 t \end{pmatrix}$$

2.3. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar

Bu bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayılar ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.3.1.

$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \{ x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \mid 1 \leq k \leq 4 \; için \; x_k \in \mathbb{R}, \; i^2 = -\alpha, \; j^2 = -\beta, ij = ji\}$ şeklinde tanımlanan cümleye genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesi denir. Burada $\alpha = \beta =1$ alınırsa bikompleks sayılar elde edilir. Burada x_k,

$1 \leq k \leq 4$ için reel sayılar ve bazları $\{1, i, j, ij\}$ şeklindedir.

Tanım 2.3.2. Toplama ve Çarpma

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesinin iki elemanı $x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$ ve $y = y_1 1 + yi + y_3 j + y_4 ij$ olsun.

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda toplama ve çarpma işlemi sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x + y = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij + y_1 1 + y_2 i + y_3 j + y_4 ij$$

$$= (x_1 + y_1)1 + (x_2 + y_2)i + (x_3 + y_3)j + (x_4 + y_4)ij$$

$$xy = (x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)(y_1 1 + y_2 i + y_3 j + y_4 ij)$$

$$= (x_1 y_1 - \alpha x_2 y_2 - \beta x_3 y_3 + \alpha\beta x_4 y_4) + (x_1 y_2 + x_2 y_1 - \beta x_3 y_4 - \beta x_4 y_3)i + (x_1 y_3 + x_3 y_1 - \alpha x_2 y_4 - \alpha x_4 y_2)j + (x_1 y_4 + x_4 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2)ij$$

Tanım 2.3.3. Skaler ile Çarpım

$\forall x \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için $x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$ şeklinde tanımlanan x genelleştirilmiş bikompleks sayısı ile $c \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$cx = cx_1 1 + cx_2 i + cx_3 j + cx_4 ij \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, yukarıdaki aritmetik işlemlere dayanarak iki önemli sonuç elde edilir. $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$, toplama ve skalerle çarpma işlemine göre dört boyutlu bir reel vektör uzayı belirtir ve genelleştirilmiş bikompleks sayılar çarpma işlemine göre değişmeli reel cebirdir. Bu cebire genelleştirilmiş bikompleks sayılar cebiri denir (Karakuş ve Aksoyak, 2015).

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar cebiri birleşmeli olduğundan matris gösterimi elde edilebilir.

$$T: \mathbb{C}_{\alpha\beta} \longrightarrow Hom\,(\mathbb{C}_{\alpha\beta}, \mathbb{C}_{\alpha\beta})$$

$$x \rightarrow T(x) = T_x : \mathbb{C}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

$$y \rightarrow T_x(y) = xy$$

i) $\mathrm{T}_x(y + z) = x\,(y + z)$

$=xy + x\,z$

$=\mathrm{T}_x(y) + \mathrm{T}_x(z)$

ii) $\mathrm{T}_x(\lambda y) = x(\lambda y)$

$= \lambda(xy)$

$= \lambda\,\mathrm{T}_x(y)$

olduğundan T_x dönüşümü lineerdir. Şimdi, bu lineer dönüşümden yararlanarak, reel sayılar cümlesi üzerinde $\{1, i, j, ij\}$ bazına bağlı olarak tanımlanan x genelleştirilmiş bikompleks sayısının matris gösterimini bulalım.

$y = 1$ için $T_x(1) = x.1 = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$

$y = i$ için $T_x(i) = x.i = x_1 i - \alpha x_2 + x_3 ij - \alpha x_4 j$

$= -\alpha x_2 + x_1 i - \alpha x_4 j + x_3 ij$

$y = j$ için $T_x(j) = x.j = x_1 j + x_2 ij - \beta x_3 - \beta x_4 i$

$= -\beta x_3 - \beta x_4 i + x_1 j + x_2 ij$

$y = ij$ için $T_x(ij) = x.ij = x_1 ij - \alpha x_2 j - \beta x_3 i + \alpha\beta x_4$

$= \alpha\beta x_4 - \beta x_3 i - \alpha x_2 j + x_1 ij$

olur. Elde edilen sonuçlar sütun olarak matriste yerine yazılırsa, $x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$ genelleştirilmiş bikompleks sayısına karşılık gelen matris $x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4$ olmak üzere,

$$T_x = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Matrisler cümlesi ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_{\alpha\beta} = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix};\ x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

$Q_{\alpha\beta}$ cümlesi matrislerde toplama ve skaler ile çarpım işlemine göre reel vektör uzayıdır. Ayrıca bu vektör uzayı matrislerde çarpma işlemine göre bir cebirdir (Karakuş ve Aksoyak, 2015).

Teorem 2.3.1. $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve $Q_{\alpha\beta}$ cebirleri izomorfturlar. Bu iki cebir arasındaki izomorfizm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f: \mathbb{C}_{\alpha\beta} \to Q_{\alpha\beta}\ ,$$

$$f(x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij) = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

İspat: $\forall\, x, y \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

özellikleri sağlanır. Bu nedenle $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve $Q_{\alpha\beta}$ cebirleri izomorfturlar.

Not 2.3.1. Teorem 2.3.1 den $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ daki herhangi bir genelleştirilmiş bikompleks sayı, $Q_{\alpha\beta}$ da bir matris ile temsil edilebilir. Ayrıca Tanım 2.3.2 ile verilen iki genelleştirilmiş bikompleks sayının çarpımı matris çarpımı yardımıyla aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$x.y = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Ayrıca genelleştirilmiş bikompleks sayı $x = (x_1 1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i)j$ şeklinde yeniden yazılabilir.

Tanım 2.3.3. Eşlenik (Konjuge)

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda i birime göre eşlenik, j birimine göre eşlenik ve hem i hem j birimine göre eşlenik olmak üzere üç farklı eşlenik tanımlanır. Bu eşlenikler sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$x^{t_1} = [\,(x_1 + x_2 i) + x_3 + x_4 i)j\,]^{t_1} = (x_1 - x_2 i) + (x_3 - x_4 i)\,j,$$

$$x^{t_2} = [\,(x_1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i)j\,]^{t_2} = (x_1 + x_2 i) - (x_3 + x_4 i)\,j,$$

$$x^{t_3} = [\,(x_1 + x_2 i) + (x_3 + x_4 i)j\,]^{t_3} = (x_1 - x_2 i) - (x_3 - x_4 i)\,j.$$

Ayrıca

$$x.x^{t_1} = (x_1^2 + \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2) + 2(x_1 x_3 + \alpha x_2 x_4)j,$$

$$x.x^{t_2} = (x_1^2 - \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2) + 2(x_1 x_2 + \beta x_3 x_4)i,$$

$$x.x^{t_3} = (x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2) + 2(x_1 x_4 - \alpha x_2 x_3)ij,$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

Önerme 2.3.1. Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda i birimine, j birimine ve hem i hem de j birimine göre sırasıyla, $1 \leq k \leq 3$ olmak üzere tüm t_k eşlenikleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $(\lambda p + \delta q)^{t_k} = \lambda p^{t_k} + \delta q^{t_k}$

ii) $(p^{t_k})^{t_k} = p$

iii) $(p.q)^{t_k} = p^{t_k}.q^{t_k}$,

Burada $p, q \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$, $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$'dir.

İspat: Bu özelliklerin ispatı rutin işlemler yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

3.BAZI HİPERYÜZEYLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARLA HOMOTETİK HAREKETLER

Bu bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak bazı hiperyüzeylerde homotetik hareketleri inceleyeceğiz.

3.1. M_1 Hiperyüzeyinde Homotetik Hareket

M_1 hiperyüzeyi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$M_1 = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4_{\alpha\beta} : x_1 x_3 + \alpha x_2 x_4 = 0, \ x \neq 0\}.$$

Genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak M_1 hiperyüzeyini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$M_1 = \{ x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \in \mathbb{R}^4_{\alpha\beta} : x_1 x_3 + \alpha x_2 x_4 = 0, x \neq 0\}.$$

M_1 hiperyüzeyinin matris gösterimini ise genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak

$$\widetilde{M_1} = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}; \ x_1 x_3 + \alpha x_2 x_4 = 0, x \neq 0 \right\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada M_x, x genelleştirilmiş bikompleks sayısının matris gösterimidir. M_1 hiperyüzeyi üzerindeki metrik,

$$g_1(x,x) = x.x^{t_1} = {x_1}^2 + \alpha {x_2}^2 - \beta {x_3}^2 - \alpha\beta {x_4}^2$$

ile tanımlıdır. M_1 hiperyüzeyi üzerindeki herhangi bir x elemanının normu,

$$\|x\| = \sqrt{|g_1(x,x)|} = \sqrt{|x.x^{t_1}|}$$

ile tanımlıdır. Bu metrik, dört boyutlu $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında Riemann veya yarı Riemann metriğidir. Bazı özel durumlarda dört boyutlu Öklid veya Yarı-Öklid Uzayı belirtir.

Teorem 3.1.1. M_1 hiperyüzeyinde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i)$\forall\ x, y\ \in\ M_1$ için $\|x.y\| =\ \|x\|.\|y\|$
ii)$\forall\ x \in\ M_1$ için $\|x\|^4 = \det\ (\ M_x\ )$.

İspat:

i) $\|x.y\| = \sqrt{\left|g_1(x,x).\ g_1(y,y)\right|}$

$$= \sqrt{|g_1(x,x)|.|g_1(y,y)|}$$

$$= \sqrt{|g_1(x,x)|}\ .\ \sqrt{|g_1(y,y)|}$$

$$= \|x\|.\|y\|$$

ii) Basit hesaplamalar yardımıyla ispat kolayca görülebilir.

Önerme 3.1.1. M_1 hiperyüzeyindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayısı bir dönme matrisi belirtir.

İspat: Teorem 3.1.1 den ispat açıktır.

Teorem 3.1.2. M_1, bir değişmeli Lie grubudur.

İspat: M_1 diferansiyellenebilir bir manifold ve matrislerde çarpma işlemine göre bir grup belirtir (Karakuş ve Aksoyak, 2015).
Grup işlemi ;

$$.:\ M_1\ \rightarrow\ M_1$$
$$(x, y) \rightarrow x.y^{\ -1}$$

şeklindedir. Burada,

$$y^{-1} = \frac{y^{t_1}}{N_y} = \frac{1}{{y_1}^2 + \alpha {y_2}^2 - \beta {y_3}^2 - \alpha\beta {y_4}^2}(y_1, -y_2, y_3, -y_4)$$

dir. Teorem 2.3.1 de tanımlanan f dönüşümü bir lineer izomorfizm olduğundan (M_1 , .) bir Lie grubudur.

M_1 hiperyüzeyi üzerindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesini ${M_1}^*$ ile gösterirsek:

$$\begin{aligned} {M_1}^* &= \{x \in M_1 : g_1(x,x) = 1\} \\ &= \{x \in M_1 : {x_1}^2 + \alpha {x_2}^2 - \beta {x_3}^2 - \alpha\beta {x_4}^2 = 1\} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.1.3. ${M_1}^*$, M_1 hiperyüzeyinin $2-$boyutlu bir Lie altgrubudur (Karakuş ve Aksoyak, 2015).

γ , M_1 hiperyüzeyinde bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M_1$$

$$t \to \gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)i + \gamma_3(t)j + \gamma_4(t)ij,\ \gamma_1(t)\gamma_3(t) + \alpha\,\gamma_2(t)\gamma_4(t) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda γ eğrisine karşılık gelen B matrisi

$$B = M_\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) & -\beta\gamma_3(t) & \alpha\beta\gamma_4(t) \\ \gamma_2(t) & \gamma_1(t) & -\beta\gamma_4(t) & -\beta\gamma_3(t) \\ \gamma_3(t) & -\alpha\gamma_4(t) & \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) \\ \gamma_4(t) & \gamma_3(t) & \gamma_2(t) & \gamma_1(t) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir.

Şimdi B matrisini kullanarak, $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında M_1 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareketi tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.1. R_0 ve R, sırasıyla $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında sabit ve hareketli iki uzay olsun. Bu durumda R_0'ın R'ye göre bir- parametreli hareketi R_0/R ile gösterilmektedir. M_1 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareket,

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde veya

$$X = BX_0 + C \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada B, M_1 hiperyüzeyinde $\gamma(t)$ eğrisine ait matris, C, t parametresine bağlı 4×1 bir reel matris , X ve X_0 sırasıyla $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayındaki herhangi bir noktanın R ve R_0'daki konum vektörleridir.

Teorem 3.1.4. Eşitlik (3.3) te verilen ifade bir homotetik hareket belirtir.

İspat: γ eğrisi M_1 hiperyüzeyi üzerinde bulunduğu için orijinden geçmez. Bu nedenle (3.1) eşitliğinde verilen matris

$$B = M_\gamma(t) = h\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} & \frac{\alpha\beta\gamma_4(t)}{h} \\ \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_4(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} \\ \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} \\ \frac{\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} \end{bmatrix} = h\mathrm{A}, \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h: I \subset \mathbb{R}, t \to h(t) = \|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 - \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

$$\gamma(\mathrm{t}) \in M_1,\ \gamma_1(t)\gamma_3(t) + \alpha\gamma_2(t)\gamma_4(t) = 0$$

olur. Bu eşitliği kullanarak eşitlik (3.4) deki reel yarı-ortogonal A matrisini elde edebiliriz. Bu nedenle $A^t\varepsilon\, A = \varepsilon$ ve $detA = 1$'dir. Burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

olup A, h ve C sırasıyla yarı-ortogonal matris, hareketin homotetik skalası ve öteleme vektörüdür. Böylece eşitlik (3.3) homotetik hareket belirtir.

Açıklama 3.1.1. $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$'daki γ'nın normu,

$$\|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 - \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

olarak hesaplanmıştı. Bundan sonra $\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 - \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2 > 0$ olarak kabul edeceğiz.

Sonuç 3.1.5. $\gamma(t), M_1{}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde M_1 hiperyüzeyi üzerinde (3.3) eşitliği ile verilen bir parametreli hareket, bir dönme ve bir öteleme sonucu oluşan genel bir harekettir.

İspat: $\gamma(t)$, $M_1{}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde

$$\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 - \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2 = 1$$

olur. Bu nedenle (3.3) nolu eşitlikte verilen B matrisi, reel-yarı ortogonal matris haline gelir. Bu da

$B^T\varepsilon\, B = \varepsilon$ ve $detB = 1$ demektir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6. $\gamma(t)$, teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_1 hiperyüzeyinde olan bir birim hızlı eğri olsun. B matrisinin türevi de reel yarı-ortogonal matristir.

İspat: $\gamma(t)$ birim hız eğrisi olduğu için

$$\dot{\gamma}_1{}^2 + \alpha\dot{\gamma}_2{}^2 - \beta\dot{\gamma}_3{}^2 - \alpha\beta\dot{\gamma}_4{}^2 = 1$$

olur. Ayrıca, γ eğrisinin teğet vektörü M_1 hiperyüzeyinde bulunduğundan

$$\dot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_3(t) + \alpha\, \dot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_4(t) = 0$$

dır. Böylece

$$\dot{B}^T\varepsilon\, \dot{B} = \varepsilon \text{ ve } det\dot{B} = 1$$

olur.

Teorem 3.1.7. $\gamma(t)$, teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_1 hiperyüzeyinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda hareket bir regüler harekettir ve h skalerinden bağımsızdır.

İspat: Teorem 3.1.6 dan dolayı $det\dot{B} = 1$ olup $\dot{B}$ matrisinin determinantı h den bağımsızdır.

Teorem 3.1.8. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_1 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Eşitlik (3.3) ile verilen hareketin pol noktaları

$$X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$$

olur.

İspat: γ eğrisinin konum vektörü M_1 hiperyüzeyi üzerinde olduğundan ve Teorem 3.1.4 ten dolayı eşitlik (3.3) bir homotetik hareket olur. Ayrıca $\gamma(t)$ birim hızlı eğri ve $\dot{\gamma}(t) \in M_1$ olduğundan ve Teorem 3.1.6. dan dolayı $det\dot{B} = 1$'dir. Bu nedenle

$$\dot{B}X_0 + \dot{C} = 0$$

eşitliğinin yalnız bir çözümü vardır. Buradan eşitlik (3.3) te verilen hareketin pol noktası

$$X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.9. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_1 hiperyüzeyin üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. R_0 da her t anına karşılık gelen pol noktası, öteleme vektörünün hız vektörü olan $\dot{C}$ nin $\dot{B}^{-1}$ etrafında zıt yönde döndürülmesiyle elde edilir.

İspat: Teorem 3.1.6. dan $\dot{B}$ matrisi reel yarı-ortogonal matristir. Ayrıca $\dot{B}^{-1}$ matrisi de bir reel yarı-ortogonal matristir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi α ve β reel sayılarının bazı değerlerine göre M_1 hiperyüzeyi üzerinde homotetik hareketlerle ilgili çeşitli örnekler vereceğiz.

Örnek 3.1.1. $\alpha = \beta = 1$ için M_1, $\mathbb{R}_2^4$ üzerinde bir hiperyüzey olur.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_1 \subset \mathbb{R}_2^4$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cosh(at)\cos(bt) + \cosh(at)\sin(bt)\,i \\ -\sinh(at)\sin(bt)\,j + \sinh(at)\cos(bt)\,ij \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.1) ve (3.5) nolu eşitlikler kullanılırsa, B matrisi γ eğrisi ile birlikte bir homotetik matris olur. Burada $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir homotetik skaladır. Ayrıca (3.5) eşitliğinde, $h(t) = 1$ alınırsa, γ eğrisi ${M_1}^*$ yüzeyinde olur. B matrisi de $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi tanımlar. Eğer (3.5) eşitliğinde $h(t) = 1,\ a = 0$ ve $b = 1$ seçersek,

$$\gamma(t) = cost + sint\ i \tag{3.6}$$

elde ederiz. Eşitlik (3.1) ve (3.6) yı kullanarak;

$$B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_2^4$ uzayında B dönme matrisini elde ederiz. Böylece (3.6) denklemi ile verilen eğri, teğet vektörü M_1 hiperyüzeyinde olan bir birim hızlı eğri olur. Yukarıdaki matrisin türevi ile elde edilen $\dot{B}$ matrisi de reel yarı-ortogonal matristir. Ayrıca $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisidir. Benzer şekilde, (3.5) eşitliğinde $h(t) = 1,\ a = 1$ ve $b = 0$ alınırsa,

$$\gamma(t) = cosht + sinht\ ij \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.1) ve (3.7) kullanılarak B matrisi;

$$B = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & -\sinh t & 0 \\ 0 & -\sinh t & \cosh t & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.7) eşitliği ile verilen eğri, bir birim hızlı eğridir ve teğet vektörü M_1 hiperyüzeyi üzerindedir. Ayrıca yukarıdaki matrisin türevi olan $\dot{B}$ matrisi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisidir.

Örnek 3.1.2. $\alpha = 1,\ \beta = -1$ için M_1, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir hiperyüzey olur.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_1 \subset \mathbb{R}^4$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cos(at)\cos(bt) + \cos(at)\sin(bt)\, i \\ -\sin(at)\sin(bt)\, j + \sin(at)\cos(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.1) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak, γ eğrisinin matris gösterimi, homotetik ölçeği $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olarak elde edilir. Ayrıca, $h(t) = 1$ için γ eğrisi M_1 hiperyüzeyi üzerinde küresel bir eğri olur. Yani

$$\gamma(t) \in {M_1}^* = M_1 \cap S^3$$

olur. Bu eğrinin matris gösterimi $\mathbb{R}^4$ uzayında bir dönme matrisi belirtir. Üstelik $h(t) = 1,\ a = 0$ ve $b = 1$ alırsak;

$$\gamma(t) = cost + sint\ i \tag{3.9}$$

elde ederiz. Eşitlik (3.1) ve (3.9) kullanılarak, yukarıdaki eğrinin matris gösterimini

$$B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

şeklinde elde ederiz. Bu matris $\mathbb{R}^4_2$ üzerinde genel dönüşüm matrisidir (Moore, 1919). Ayrıca Teorem 3.1.6. dan, $\dot{B}$ matrisi de reel ortogonal matristir.

Örnek 3.1.3. $\alpha = \beta = -1$ için M_1, $\mathbb{R}^4_2$ uzayında bir hiperyüzey olur.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_1 \subset \mathbb{R}^4_2$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cosh(at)\cosh(bt) + \cos h(at)\sinh(bt)\, i \\ +\sinh(at)\sin h(bt)\, j + \sin h(at)\cos h(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.1) ve (3.10) nolu eşitliklerden, B matrisi γ eğrisine göre homotetik ölçeği $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olur. Ayrıca,

$h(t) = 1$ alırsak, γ eğrisi $M_1{}^*$yüzeyinde bir eğri ve B matrisi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi olur.

3.2. M_2 Hiperyüzeyinde Homotetik Hareket

M_2 hiperyüzeyi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$M_2 = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_{\alpha\beta}^4 : x_1 x_2 + \beta x_3 x_4 = 0,\ x \neq 0\}.$$

Genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak M_2 hiperyüzeyini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$M_2 = \{ x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \in \mathbb{R}_{\alpha\beta}^4 : x_1 x_2 + \beta x_3 x_4 = 0,\ x \neq 0\},$$

M_2 hiperyüzeyinin matris gösterimi ise genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak

$$\widetilde{M_2} = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},\ x_1 x_2 + \beta x_3 x_4 = 0,\ x \neq 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada M_x, $x \in M_2$ genelleştirilmiş bikompleks sayısının matris gösterimidir. M_2 hiperyüzeyindeki metrik,

$$g_2(x, x) = x.x^{t_2} = x_1{}^2 - \alpha x_2{}^2 + \beta x_3{}^2 - \alpha\beta x_4{}^2$$

ile tanımlıdır. M_2 uzayındaki herhangi bir x elemanının normu,

$$\|x\| = \sqrt{|g_2(x, x)|} = \sqrt{|x.x^{t_2}|}$$

ile tanımlıdır. Bu metrik, dört boyutlu $\mathbb{R}_{\alpha\beta}^4$ uzayında Riemann veya yarı Riemann metriğidir. Bazı özel durumlarda dört boyutlu Öklid veya Yarı-Öklid uzayı belirtir.

Teorem 3.2.1. M_2 hiperyüzeyinde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\forall\, x, y \in M_2$ için $\|x.y\| = \|x\|.\|y\|$,

ii) $\|x\|^4 = \det\ (M_x)$.

İspat:

i) $\|x.y\| = \sqrt{|g_2(x,x).\ g_2(y,y)|}$

$= \sqrt{|g_2(x,x)|.|g_2(y,y)|}$

$= \sqrt{|g_2(x,x)|}.\sqrt{|g_2(y,y)|}$

$= \|x\|.\|y\|$

ii) Basit hesaplamalar yardımıyla ispat kolayca görülebilir.

Önerme 3.2.1. M_2 hiperyüzeyindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayısı bir dönme matrisi belirtir.

İspat: Teorem 3.2.1 den ispat açıktır.

Teorem 3.2.2. M_2 hiperyüzeyi, bir değişmeli Lie grubudur.

İspat: M_2 hiperyüzeyi diferansiyellenebilir bir manifold ve matrislerde çarpma işlemine göre bir grup belirtir (Özkaldı Karakuş S. And Kahraman Aksoyak F., 2015). Grup işlemi ;

$$.: M_2 \to M_2$$
$$(x,y) \to x.y^{-1}$$

şeklindedir. Burada,

$$y^{-1} = \frac{y^{t_2}}{N_y} = \frac{1}{{y_1}^2 - \alpha {y_2}^2 + \beta {y_3}^2 - \alpha\beta {y_4}^2}(y_1, -y_2, y_3, -y_4)$$

Teorem 2.3.1 de tanımlanan f dönüşümü bir lineer izomorfizm olduğundan $(M_2,.)$ bir Lie grubudur.

M_2 hiperyüzeyi üzerindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesini ${M_2}^*$ ile gösterirsek:

$${M_2}^* = \{x \in M_2 : g_2(x,x) = 1\}$$

$$= \{x \in M_2 : {x_1}^2 - \alpha {x_2}^2 + \beta {x_3}^2 - \alpha\beta {x_4}^2 = 1\}$$

olur.

Teorem 3.2.3. $M_2{}^*$, M_2 hiperyüzeyinin Lie altgrubudur (Karakuş ve Aksoyak, 2015).

γ , M_2 hiperyüzeyinde bir eğri olsun. Bu durumda;

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)i + \gamma_3(t)j + \gamma_4(t)ij,$$

$$\gamma_1(t)\gamma_2(t) + \beta\,\gamma_3(t)\gamma_4(t) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Daha sonra γ eğrisine karşılık gelen B matrisi

$$B = M_\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) & -\beta\gamma_3(t) & \alpha\beta\gamma_4(t) \\ \gamma_2(t) & \gamma_1(t) & -\beta\gamma_4(t) & -\beta\gamma_3(t) \\ \gamma_3(t) & -\alpha\gamma_4(t) & \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) \\ \gamma_4(t) & \gamma_3(t) & \gamma_2(t) & \gamma_1(t) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

Şimdi B matrisini kullanarak, $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında M_2 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareketi tanımlayabiliriz.

Tanım 3.2.1. R_0 ve R, sırasıyla $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında sabit ve hareketli iki uzay olsun. Bu durumda, R_0'ın R'ye göre bir- parametreli hareketi R_0/R ile gösterilmektedir. M_2 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareket,

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

şeklinde veya

$$X = BX_0 + C \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada B, M_2 hiperyüzeyinde $\gamma(t)$ eğrisine ait matris, C, t parametresine bağlı *4×1* bir reel matris , X ve X_0 $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında herhangi bir noktanın sırasıyla R ve R_0'daki konum vektörleridir.

Teorem 3.2.4. (3.13) de verilen eşitlik bir homotetik hareket belirtir.

İspat: γ eğrisi M_2 hiperyüzeyi üzerinde bulunduğu için orijinden geçmez. Bu nedenle (3.11) eşitliğinde verilen matris

$$B = M_\gamma(t) = h\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} & \frac{\alpha\beta\gamma_4(t)}{h} \\ \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_4(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} \\ \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} \\ \frac{\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} \end{bmatrix} = hA, \qquad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h: I \subset \mathbb{R}, t \to h(t) = \|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 - \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

dır. $\gamma(\mathrm{t}) \in M_2$ olduğundan $\gamma_1(t)\gamma_2(t) + \beta\gamma_3(t)\gamma_4(t) = 0$ dır.

Bu eşitliği kullanarak eşitlik (3.14) deki reel yarı-ortogonal A matrisini elde edebiliriz. Bu durumda $A^t\varepsilon\, A = \varepsilon$ ve $detA = 1$ sağlanır. Burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

olup, A, h ve C sırasıyla yarı-ortogonal dönme matrisi, hareketin homotetik skalası ve öteleme vektörüdür. Böylece eşitlik (3.13) bir homotetik hareket belirtir.

Açıklama 3.2.1. $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$uzayındaki γ eğrisinin normu,

$$\|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 - \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

ile bulunur. Bundan sonra $\gamma_1{}^2 - \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 - \alpha\beta\gamma_4{}^2 > 0$ olarak kabul edeceğiz.

Sonuç 3.2.5. $\gamma(t),\ {M_2}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde M_2 hiperyüzeyi üzerinde (3.13) eşitliği ile verilen bir parametreli hareket, bir dönme ve bir öteleme sonucu oluşan bir genel harekettir.

İspat: $\gamma(t)$, ${M_2}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde

$$ {\gamma_1}^2 - \alpha{\gamma_2}^2 + \beta{\gamma_3}^2 - \alpha\beta{\gamma_4}^2 = 1 $$

olur. Bu nedenle (3.13) nolu eşitlikte verilen B matrisi, reel-yarı ortogonal matris haline gelir. Bu da

$B^T \varepsilon\, B = \varepsilon$ ve $detB = 1$ demektir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.6. $\gamma(t),$ teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_2 hiperyüzeyinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda B matrisinin türevi de reel yarı-ortogonal matristir.

İspat: $\gamma(t)$ birim hızlı eğri olduğundan

$$ {\dot{\gamma}_1}^2 - \alpha{\dot{\gamma}_2}^2 + \beta{\dot{\gamma}_3}^2 - \alpha\beta{\dot{\gamma}_4}^2 = 1 $$

dir. Ayrıca, γ eğrisinin teğet vektörü M_2 hiperyüzeyi üzerinde bulunduğu için

$$ \dot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) + \beta\, \dot{\gamma}_3(t)\dot{\gamma}_4(t) = 0 $$

dır. Böylece

$$ \dot{B}^T \varepsilon\, \dot{B} = \varepsilon \text{ ve } det\dot{B} = 1 $$

dir.

Teorem 3.2.7. $\gamma(t),$ teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_2 hiperyüzeyinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda hareket bir regüler harekettir ve h skalerinden bağımsızdır.

İspat: Teorem 3.2.6 dan $det\dot{B} = 1$ ve bu nedenle $\dot{B}$ matrisinin determinantı h skalerinden bağımsızdır.

Teorem 3.2.8. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_2 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Eşitlik (3.13) ile verilen hareketin pol noktaları

$$ X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C} $$

dır.

İspat: γ eğrisinin konum vektörü M_2 hiperyüzeyi üzerinde olduğundan, Teorem 3.2.4 ten

$$X = BX_0 + C$$

denklemi bir homotetik hareket olur. Ayrıca $\gamma(t)$ birim hızlı eğri, $\dot{\gamma}(t) \in M_2$ olduğundan ve Teorem 3.2.6 dan $det\dot{B} = 1$'dir. Bu nedenle

$$\dot{B}X_0 + \dot{C} = 0$$

denkleminin yalnız bir çözümü vardır. Buradan eşitlik (3.13.) denklemi ile verilen hareketin pol noktaları

$$X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.9. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_2 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. R_0'da her t anına karşılık gelen pol noktası, öteleme vektörünün hız vektörü olan $\dot{C}$ nin $\dot{B}^{-1}$ etrafında zıt yönde döndürülmesiyle elde edilir.

İspat: Teorem 3.2.6 dan $\dot{B}$ matrisi reel yarı-ortogonal matristir. Ayrıca $\dot{B}^{-1}$ matrisi de bir reel yarı-ortogonal matristir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi α ve β reel sayılarının bazı değerlerine göre M_2 hiperyüzeyi üzerinde homotetik hareketlerle ilgili çeşitli örnekler vereceğiz.

Örnek 3.4. $\alpha = \beta = 1$ için M_2, $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir hiperyüzey olur.

M_2 hiperyüzeyi üzerinde

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_2 \subset \mathbb{R}_2^4$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cosh(at)\cos(bt) - \sinh(at)\sin(bt)\,i \\ + \cosh(at)\sin(bt)\,j + \sinh(at)\cos(bt)\,ij \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \qquad (3.15)$$

bir γ eğrisi verilsin. (3.11) ve (3.15) nolu eşitlikleri kullanılırsa, B matrisi bir homotetik matris olur ve

$h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

bir homotetik skaladır.

Ayrıca $h(t) = 1$ için B matrisi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi olur.

Örnek 3.5. $\alpha = -1,\ \beta = 1$ için M_2, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir hiperyüzey olur.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow\ M_2 \subset \mathbb{R}^4$

$$\gamma(t) = h(t) \begin{pmatrix} \cos(at)\cos(bt) - \sin(at)\sin(bt)\, i \\ + \cos(at)\sin(bt)\, j + \sin(at)\cos(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b\ \in\ \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.11) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak, γ eğrisinin matris gösterimi, homotetik ölçeği $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olur. Ayrıca, $h(t) = 1$ için, γ eğrisi ${M_2}^*$ yüzeyi üzerinde küresel bir eğri olur. Yani

$$\gamma(t) \in {M_2}^* = M_2 \cap S^3$$

olur. Bu eğrinin matris gösterimi $\mathbb{R}^4$ uzayında bir dönme matrisi belirtir.

Örnek 3.6. $\alpha = \beta = -1$ için M_2, $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir hiperyüzey olur.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow\ M_2 \subset \mathbb{R}_2^4$

$$\gamma(t) = h(t) \begin{pmatrix} \cosh(at)\cos(bt) + \sinh(at)\sinh(bt)\, i \\ + \cosh(at)\sinh(bt)\, j + \sinh(at)\cosh(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b\ \in\ \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.11) ve (3.17) eşitliklerinden, γ eğrisine göre B matrisi homotetik ölçeği $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olur. Ayrıca, $h(t) = 1$ alırsak, γ eğrisi ${M_2}^*$ yüzeyinde bir eğri ve B matrisi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi olur.

3.3 M_3 Hiperyüzeyinde Homotetik Hareket

M_3 hiperyüzeyi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$M_3 = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_{\alpha\beta}^4 : x_1 x_4 - x_2\, x_3 = 0,\ x \neq 0 \}.$$

Genelleştirilmiş bikompleks sayıları kullanarak M_3 hiperyüzeyini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$M_3 = \{ x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \in \mathbb{R}^4_{\alpha\beta} : x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0, x \neq 0\}.$

M_3 hiperyüzeyinin matris gösterimini ise genelleştirilmiş bikompleks sayıların matris gösterimini kullanarak

$$\widetilde{M_3} = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} ; x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,\ x \neq 0 \right\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada M_x , $x \in M_3$ genelleştirilmiş bikompleks sayısının matris gösterimidir. M_3 hiperyüzeyindeki metrik,

$$g_3(x,x) = x.x^{t_3} = {x_1}^2 + \alpha {x_2}^2 + \beta {x_3}^2 + \alpha\beta {x_4}^2$$

ile tanımlıdır. M_3 hiperyüzeyi üzerindeki herhangi bir x elemanının normu,

$$\|x\| = \sqrt{|g_3(x,x)|} = \sqrt{|x.x^{t_3}|}$$

ile tanımlıdır. Bu metrik, dört boyutlu $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında Riemann veya yarı Riemann metriğidir. Bazı özel durumlarda dört boyutlu Öklid veya Yarı-Öklid Uzayı belirtir.

Teorem 3.3.1. M_3 hiperyüzeyinde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\forall\, x, y \in M_3$ için $\|x.y\| = \|x\|.\|y\|$,

ii) $\|x\|^4 = \det\ (M_x)$.

İspat:

i) $\|x.y\| = \sqrt{|g_3(x,x).\ g_3(y,y)|}$

$= \sqrt{|g_3(x,x)|.|g_3(y,y)|}$

$= \sqrt{|g_3(x,x)|} . \sqrt{|g_3(y,y)|}$

$= \|x\|.\|y\|$

ii) Basit hesaplamalar yardımıyla ispat kolayca görülebilir.

Sonuç 3.3.2. M_3 hiperyüzeyindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayısı bir dönme matrisi belirtir.

İspat: Teorem 3.3.1 den açıkça görülebilir.

Teorem 3.3.3. M_3, bir değişmeli Lie grubudur.

İspat: M_3 diferansiyellenebilir bir manifold ve matrislerde çarpma işlemine göre bir grup belirtir. Grup fonksiyonu ;

$$\begin{aligned} . : M_3 &\rightarrow M_3 \\ (x, y) &\rightarrow x.y^{-1} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$y^{-1} = \frac{y^{t_3}}{N_y} = \frac{1}{{y_1}^2 + \alpha {y_2}^2 + \beta {y_3}^2 + \alpha\beta {y_4}^2}(y_1, -y_2, y_3, -y_4)$$

dır. Teorem 2.3.1 de tanımlanan f dönüşümü bir lineer izomorfizm olduğundan $(M_3, .)$ bir Lie grubudur.

M_3 hiperyüzeyi üzerindeki birim genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesini ${M_3}^*$ ile gösterirsek:

$$\begin{aligned} {M_3}^* &= \{x \in M_3 : g_3(x, x) = 1\} \\ &= \{x \in M_3 : {x_1}^2 + \alpha {x_2}^2 + \beta {x_3}^2 + \alpha\beta {x_4}^2 = 1\} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Teorem 3.3.4. ${M_3}^*$, M_3 hiperyüzeyinin Lie altgrubudur. (Karakuş ve Aksoyak, 2015).

γ , M_3 hiperyüzeyinde bir eğri olsun. Bu durumda;

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_3$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)i + \gamma_3(t)j + \gamma_4(t)ij,$$
$$\gamma_1(t)\gamma_4(t) - \gamma_2(t)\gamma_3(t) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Daha sonra γ eğrisine karşılık gelen B matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B = M_\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) & -\beta\gamma_3(t) & \alpha\beta\gamma_4(t) \\ \gamma_2(t) & \gamma_1(t) & -\beta\gamma_4(t) & -\beta\gamma_3(t) \\ \gamma_3(t) & -\alpha\gamma_4(t) & \gamma_1(t) & -\alpha\gamma_2(t) \\ \gamma_4(t) & \gamma_3(t) & \gamma_2(t) & \gamma_1(t) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Şimdi B matrisini kullanarak, $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında M_3 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareketi tanımlayabiliriz.

Tanım 3.3.1. R_0 ve R, $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında sabit ve hareketli iki uzay olsun. Bu durumda R_0'ın R'ye göre bir- parametreli hareketi R_0/R ile gösterilmektedir. M_3 hiperyüzeyi üzerinde bir parametreli hareket,

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

şeklinde veya

$$X = BX_0 + C \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır. Burada B, M_3 hiperyüzeyinde $\gamma(t)$ eğrisine ait matris, C, t parametresine bağlı 4×1 bir reel matris, X ve X_0, $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayında herhangi bir noktanın sırasıyla R ve R_0'daki konum vektörleridir.

Teorem 3.3.5. Eşitlik (3.20) de verilen ifade bir homotetik hareket belirtir.

İspat: γ eğrisi M_3 hiperyüzeyi üzerinde bulunduğu için orijinden geçmez. Bu nedenle (3.18) eşitliğinde verilen matris

$$B = M_\gamma(t) = h\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} & \frac{\alpha\beta\gamma_4(t)}{h} \\ \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_4(t)}{h} & \frac{-\beta\gamma_3(t)}{h} \\ \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} & \frac{-\alpha\gamma_2(t)}{h} \\ \frac{\gamma_4(t)}{h} & \frac{\gamma_3(t)}{h} & \frac{\gamma_2(t)}{h} & \frac{\gamma_1(t)}{h} \end{bmatrix} = hA, \qquad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h: I \subset \mathbb{R}, t \to h(t) = \|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 + \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

dır. $\gamma(\mathrm{t}) \in M_3$ olduğundan

$$\gamma_1(t)\gamma_4(t) - \gamma_2(t)\gamma_3(t) = 0$$

dır.

Bu eşitliği kullanarak, eşitlik (3.21) deki reel yarı-ortogonal A matrisini elde ederiz. Bu durumda $A^t\varepsilon\, A = \varepsilon$ ve $detA = 1$'dir. Burada ε,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

ile verilen g_3 metriğine karşılık gelen işaret matrisidir. Böylece A, h ve C sırasıyla reel yarı-ortogonal matris, hareketin homotetik skalası ve öteleme vektörüdür. Böylece eşitlik (3.20) bir homotetik hareket belirtir.

Açıklama 3.3.1. $\mathbb{R}^4_{\alpha\beta}$ uzayındaki γ eğrisinin normu,

$$\|\gamma(\mathrm{t})\| = \sqrt{|\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 + \alpha\beta\gamma_4{}^2|}$$

ile bulunur. Bundan sonra $\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 + \alpha\beta\gamma_4{}^2 > 0$ olarak kabul edeceğiz.

Sonuç 3.3.6. $\gamma(t),\ M_3{}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde M_3 hiperyüzeyi üzerinde (3.20) eşitliği ile verilen hareket, bir dönme ve bir öteleme ile oluşan bir genel harekettir.

İspat: $\gamma(t)$, $M_3{}^*$ yüzeyinde bir eğri olsun. O halde

$$\gamma_1{}^2 + \alpha\gamma_2{}^2 + \beta\gamma_3{}^2 + \alpha\beta\gamma_4{}^2 = 1$$

dir. Bu nedenle (3.18) eşitliği ile verilen B matrisi, reel-yarı ortogonal matris haline gelir. Bu da

$B^T\varepsilon\, B = \varepsilon$ ve $detB = 1$ demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.7. $\gamma(t)$, teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_3 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda B matrisinin türevi de reel yarı-ortogonal matristir.

İspat: $\gamma(t)$ birim hızlı bir eğri olduğu için

$$\dot{\gamma}_1{}^2 + \alpha\dot{\gamma}_2{}^2 + \beta\dot{\gamma}_3{}^2 + \alpha\beta\dot{\gamma}_4{}^2 = 1$$

olur. Ayrıca, γ'nın teğet vektörü M_3 hiperyüzeyi üzerinde bulunduğundan

$$\dot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_4(t) - \alpha\,\dot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_3(t) = 0$$

dır. Böylece

$\dot{B}^T\varepsilon\,\dot{B} = \varepsilon$ ve $det\dot{B} = 1$

olur.

Teorem 3.3.8. $\gamma(t)$, teğet vektörü $\dot{\gamma}(t)$ M_3 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Bu durumda hareket bir regüler harekettir ve h skalerinden bağımsızdır.

İspat: Teorem 3.3.7 den $det\dot{B} = 1$ olup $\dot{B}$ matrisinin determinantı h skalerinden bağımsızdır.

Teorem 3.3.9. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_3 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. Eşitlik (3.20) ile verilen hareketin pol noktaları

$$X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$$

olur.

İspat: γ eğrisinin konum vektörü M_3 hiperyüzeyi üzerinde olduğundan, Teorem 3.3.5 ten eşitlik (3.20) bir homotetik hareket olur. Ayrıca $\gamma(t)$ birim hızlı eğri, $\dot{\gamma}(t) \in M_3$ olduğundan ve Teorem 3.3.7 den $det\dot{B} = 1$'dir. Bu nedenle

$$\dot{B}X_0 + \dot{C} = 0$$

denkleminin yalnız bir çözümü vardır. Buradan eşitlik (3.20) de verilen hareketin pol noktası

$$X_0 = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.3.10. $\gamma(t)$, konum ve teğet vektörü M_3 hiperyüzeyi üzerinde olan bir birim hızlı eğri olsun. R_0'da her t anına karşılık gelen pol noktası, öteleme vektörünün hız vektörü olan $\dot{C}$ nin $\dot{B}^{-1}$ etrafında zıt yönünde döndürülmesiyle elde edilir.

İspat: Teorem 3.3.7 den $\dot{B}$ matrisi reel yarı-ortogonal matristir. Ayrıca $\dot{B}^{-1}$ matrisi de bir reel yarı-ortogonal matristir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi α ve β reel sayılarının bazı değerlerine göre M_3 hiperyüzeyi üzerinde homotetik hareketlerle ilgili çeşitli örnekler vereceğiz.

Örnek 3.7. $\alpha = \beta = 1$ için M_3, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir hiperyüzey olur.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_3 \subset \mathbb{R}^4$$

$$\gamma(t) = h(t) \begin{pmatrix} \cos(at)\cos(bt) + \cos(at)\sin(bt)\, i \\ + \sin(at)\cos(bt)\, j + \sin(at)\sin(bt)\, ij \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}, \qquad (3.22)$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.18) ve (3.22) nolu eşitlikler kullanılırsa, γ eğrisinin matris gösterimi B matrisi, bir homotetik matris olur. Burada $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir homotetik skaladır. Üstelik (3.22) eşitliğinde, $h(t) = 1$ alınırsa, γ eğrisi $M_3{}^*$ yüzeyinde bir eğri ve B matrisi de $\mathbb{R}^4$ uzayında dönme matrisi olur

Örnek 3.8. $\alpha = 1,\ \beta = -1$ için M_3, $\mathbb{R}^4_2$ uzayında bir hiperyüzey olur. M_3 hiperyüzeyi üzerinde

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \ M_3 \subset \mathbb{R}_2^4$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cosh(at)\cos(bt) + \cos h(at)\sin(bt)\, i \\ + \sinh(at)\cos(bt)\, j + \sinh(at)\sin(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b \ \in \ \mathbb{R}, \qquad (3.23)$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.18) ve (3.23) eşitlikleri kullanılarak, γ eğrisinin matris gösterimi, homotetik ölçeği $h : I \subset \ \mathbb{R} \ \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olur. Ayrıca, $h(t) = 1$ için, γ eğrisi M_3 hiperyüzeyi üzerinde küresel bir eğri olur. Yani

$$\gamma(t) \in {M_3}^* = \ M_3 \cap S^3$$

olur. Bu eğrinin matris gösterimi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi belirtir.

Örnek 3.9. $\alpha = \beta = -1$ için M_3, $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir hiperyüzey olur. M_3 hiperyüzeyi üzerinde

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \ M_3 \subset \mathbb{R}_2^4$$

$$\gamma(t) = h(t)\begin{pmatrix} \cosh(at)\cosh(bt) + \cosh(at)\sinh(bt)\, i \\ + \sinh(at)\cosh(bt)\, j + \sinh(at)\sinh(bt)\, ij \end{pmatrix}, a, b \ \in \ \mathbb{R}, \qquad (3.24)$$

şeklinde bir γ eğrisi verilsin. (3.18) ve (3.24) nolu eşitliklerden, γ eğrisinin matris gösterimi B, homotetik ölçeği $h : I \subset \ \mathbb{R} \ \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir homotetik matris olur. Ayrıca, $h(t) = 1$ alınırsa, γ eğrisi ${M_3}^*$ yüzeyinde bir eğri ve B matrisi $\mathbb{R}_2^4$ uzayında bir dönme matrisi olur.

4.$E^8_{\alpha\beta\gamma}$ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TRİKOMPLEKS SAYILARLA HOMOTETİK HAREKET

4.1. Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılar

Tanım 4.1.1.

$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \{ z = z_1 1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij \mid 1 \leq m \leq 4 \; için \; z_m \in \mathbb{R}, i^2 - \alpha, j^2 = -\beta,$ $ij = ji, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesi için $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ olsun.

$$T\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \{ x = z + kw \mid z, w \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}, k^2 = -\gamma, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

şeklinde tanımlanan cümleye genelleştirilmiş trikompleks sayılar cümlesi denir.

$z = z_1 1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij$ ve $w = z_5 1 + z_6 i + z_7 j + z_8 ij$ alınırsa x genelleştirilmiş trikompleks sayısı;

$$x = z_1 1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij + k(z_5 1 + z_6 i + z_7 j + z_8 ij)$$

$$x = z_1 1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij + z_5 k + z_6 ik + z_7 jk + z_8 ijk$$

şeklinde elde edilir. Burada özel olarak $\alpha = \beta = \gamma = 1$ alınırsa trikompleks sayılar elde edilir (Price, 1991).

Tanım 4.1.2. İki Genelleştirilmiş Trikompleks Sayının Toplamı

$x_1 = z_1 + kw_1$ ve $x_2 = z_2 + kw_2$ iki genelleştirilmiş trikompleks sayı olmak üzere, x_1 ve x_2 sayılarının toplamları,

$$x_1 + x_2 = z_1 + kw_1 + z_2 + kw_2$$

$$= (z_1 + z_2) + k(w_1 + w_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş trikompleks sayılar cümlesi toplama işlemine göre kapalıdır. Yani iki genelleştirilmiş trikompleks sayının toplamı yine bir genelleştirilmiş trikompleks sayıdır. $(T\mathbb{C}_{\alpha\beta}, +)$ ikilisi bir Abel gruptur ve etkisiz elemanı (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) genelleştirilmiş trikompleks sayısıdır.

Tanım 4.1.3. Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılarda Skaler ile Çarpım

$x = z + kw \in T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bir genelleştirilmiş trikompleks sayının skalerle çarpımı,

$$\lambda x = \lambda z + \lambda kw \in T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.4. İki Genelleştirilmiş Trikompleks Sayının Çarpımı

$k^2 = -\gamma$ ve $z, u, w, v \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için, $x = z + kw$ ve $y = u + kv \in T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ olsun. Bu iki genelleştirilmiş trikompleks sayının çarpımı,

$$\begin{aligned} xy &= (z + kw)(u + kv) \\ &= zu + kwu + kzv + k^2wv \\ &= (zu - \gamma wv) + k(zv + wu) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ cümlesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde 8-boyutlu bir vektör uzayı belirtir. $T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ uzayının bir bazı $\{1, i, j, ij, k, ik, jk, ijk\}$ olur.

Daha önce genelleştirilmiş bikompleks sayılarda gösterildiği gibi genelleştirilmiş trikompleks sayılarda da çarpma işlemi ile Hamilton operatörü izomorfturlar. Bunu göstermek için,

$$T : T\mathbb{C}_{\alpha\beta} \to T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

$$x \to T(x) = T_x : T\mathbb{C}_{\alpha\beta} \to T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

$$y \to T_x(y) = xy$$

şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlayalım. Bu lineer dönüşümden yararlanarak, reel sayılar cümlesi üzerinde $\{1, i, j, ij, k, ik, jk, ijk\}$ bazına bağlı olarak x genelleştirilmiş trikompleks sayısının matris gösterimini bulalım.

$y = 1$ için $T_x(1) = z_1 1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij + z_5 k + z_6 ik + z_7 jk + z_8 ijk$

$y = i$ için $T_x(i) = z_1 i - \alpha z_2 + z_3 ij - \alpha z_4 j + z_5 ik - \alpha z_6 k + z_7 ijk - \alpha z_8 jk$

$= -\alpha z_2 + z_1 i - \alpha z_4 j + z_3 ij - \alpha z_6 k + z_5 ik - \alpha z_8 jk + z_7 ijk$

$y = j$ için $T_x(j) = z_1 j + z_2 ij - \beta z_3 - \beta z_4 i + z_5 jk + z_6 ijk - \beta z_7 k + -\beta z_8$ik

$= -\beta z_3 - \beta z_4 i + z_1 j + z_2 ij - \beta z_7 k - \beta z_8 ik + z_5 jk + z_6 ijk$

$y = ij$ için $T_x(ij) = z_1 ij - \alpha z_2 j - \beta z_3 i + \alpha\beta z_4 + z_5 ijk - \alpha z_6 jk - \beta z_7 ik + \alpha\beta z_8 k$

$= \alpha\beta z_4 - \beta z_3 i - \alpha z_2 j + z_1 ij + \alpha\beta z_8 k - \beta z_7 ik - \alpha z_6 jk + z_5 ijk$

$y = k$ için $T_x(k) = z_1 k + z_2 ik + z_3 jk + z_4 ijk - \gamma z_5 - \gamma z_6 i - \gamma z_7 j - \gamma z_8 ij$

$= -\gamma z_5 - \gamma z_6 i - \gamma z_7 j - \gamma z_8 ij + z_1 k + z_2 ik + z_3 jk + z_4 ijk$

$y = ik$ için $T_x(ik) = z_1 ik - \alpha z_2 k + z_3 ijk - \alpha z_4 jk - \gamma z_5 i + \alpha\gamma z_6 - \gamma z_7 ij + \alpha\gamma z_8 j$

$= \alpha\gamma z_6 - \gamma z_5 i + \alpha\gamma z_8 j - \gamma z_7 ij - \alpha z_2 k + z_1 ik - \alpha z_4 jk + z_3 ijk$

$y = jk$ için $T_x(jk) = z_1 jk + z_2 ijk - \beta z_3 k - \beta z_4 ik - \gamma z_5 j - \gamma z_6 ij + \beta\gamma z_7 + \beta\gamma z_8 i$

$= \beta\gamma z_7 + \beta\gamma z_8 i - \gamma z_5 j - \gamma z_6 ij - \beta z_3 k - \beta z_4 ik + z_1 jk + z_2 ijk$

$y = ijk$ için $T_x(ijk) = z_1 ijk - \alpha z_2 jk - \beta z_3 ik + \alpha\beta z_4 k - \gamma z_5 ij + \alpha\gamma z_6 j + \beta\gamma z_7 i - \alpha\beta\gamma z_8$

$= -\alpha\beta\gamma z_8 + \beta\gamma z_7 i + \alpha\gamma z_6 j - \gamma z_5 ij + \alpha\beta z_4 k - \beta z_3 ik - \alpha z_2 jk + z_1 ijk$

olup

$$T_x = \begin{bmatrix} z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 & -\gamma z_5 & \alpha\gamma z_6 & \beta\gamma z_7 & -\alpha\beta\gamma z_8 \\ z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 & -\gamma z_6 & -\gamma z_5 & \beta\gamma z_8 & \beta\gamma z_7 \\ z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 & -\gamma z_7 & \alpha\gamma z_8 & -\gamma z_5 & \alpha\gamma z_6 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & -\gamma z_8 & -\gamma z_7 & -\gamma z_6 & -\gamma z_5 \\ z_5 & -\alpha z_6 & -\beta z_7 & \alpha\beta z_8 & z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 \\ z_6 & z_5 & -\beta z_8 & -\beta z_7 & z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 \\ z_7 & -\alpha z_8 & z_5 & -\alpha z_6 & z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 \\ z_8 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. x genelleştirilmiş trikompleks sayısı $\{1, k\}$ bazına bağlı olarak $x = z + kw$ şeklinde yazılırsa x in 2x2 tipinde matris gösterimi,

$y = 1$ için $T_x = z + kw$;

$y = k$ için $T_x = -w + kz$;

$$T_x = \begin{bmatrix} z & -w \\ w & z \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

4.2. Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılarda Eşlenik ve Modül

$x = z + kw$ genelleştirilmiş trikompleks sayısının eşleniği

$z^{t_3} = (z_1 + z_2 j)^{t_3} = \overline{z_1} - \overline{z_2} j = (z_1 - z_1 i) - (z_3 - z_4 i)j$

ve

$w^{t_3} = (w_1 + w_2 j)^{t_3} = \overline{w_1} - \overline{w_2} j = (z_5 - z_6 i) - (z_7 - z_8 i)j$

için

$x^{t_3} = (z + kw)^{t_3} = z^{t_3} - kw^{t_3}$

$$=[(z_1 - z_1 i) - (z_3 - z_4 i)j] - [(z_5 - z_6 i) - (z_7 - z_8 i)j]k$$

$$=z_1 - z_2 i - z_3 j + z_4 ij - z_5 k + z_6 ik + z_7 jk - z_8 ijk$$

olarak tanımlayacağız. Buradan hareketle $x \in T\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ elemanının normu da

$$\|x\|^2 = x.x^{t_3} = {z_1}^2 + \alpha {z_2}^2 + \beta {z_3}^2 + \alpha\beta {z_4}^2 + \gamma {z_5}^2 + \alpha\gamma {z_6}^2 + \beta\gamma {z_7}^2 + \alpha\beta\gamma {z_8}^2 + 2ij(z_1 z_4 - z_2 z_3 + \gamma z_5 z_8 - \gamma z_6 z_7) + 2ik(z_1 z_6 + \beta z_3 z_8 - z_2 z_5 - \beta z_4 z_7) + 2jk(z_1 z_7 + \alpha z_2 z_8 - z_3 z_5 - \alpha z_4 z_6)$$

şeklinde hesaplanır. Özel olarak $\alpha = \beta = \gamma = 1$ alınırsa,

$$\|x\|^2 = x.x^{t_3} = {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 + {z_4}^2 + {z_5}^2 + {z_6}^2 + {z_7}^2 + {z_8}^2$$

$$+2ij(z_1 z_4 + z_5 z_8 - z_2 z_3 - z_6 z_7)$$

$$+2ik(z_1 z_6 + z_3 z_8 - z_2 z_5 - z_4 z_7)$$

$$+2jk(z_1 z_7 + z_2 z_8 - z_3 z_5 - z_4 z_6)$$

eşitliği elde edilir (Babadağ, 2009).

4.3. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ Uzayında Genelleştirilmiş Trikompleks Sayılarla Homotetik Hareket

$x = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$ olsun. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında

$M_1 = \{x = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \in \mathbb{R}^8 \mid z_1 z_7 + \alpha z_2 z_8 - z_3 z_5 - \alpha z_4 z_6 = 0,\ x \neq 0\} \subset E^8_{\alpha\beta\gamma}$

$M_2 = \{x = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \in \mathbb{R}^8 \mid z_1 z_4 + \gamma z_5 z_8 - z_2 z_3 - \gamma z_6 z_7 = 0,\ x \neq 0\} \subset E^8_{\alpha\beta\gamma}$

$M_3 = \{x = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \in \mathbb{R}^8 \mid z_1 z_6 + \beta z_3 z_8 - z_2 z_5 - \beta z_4 z_7 = 0,\ x \neq 0\} \subset E^8_{\alpha\beta\gamma}$ için

$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$, $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında bir hiperyüzey ve

$S^7_{\alpha\beta\gamma}$={$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \in E^8_{\alpha\beta\gamma}$ $|\mathrm{z}_1{}^2 + \alpha\mathrm{z}_2{}^2 + \beta\mathrm{z}_3{}^2 + \alpha\beta\mathrm{z}_4{}^2 + \gamma\mathrm{z}_5{}^2 +$

$+\alpha\beta\mathrm{z}_6{}^2 + \beta\gamma\mathrm{z}_7{}^2 + \alpha\beta\gamma\mathrm{z}_8{}^2 = 1$ } ise $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında bir yarı elipsoid olur.

Sonuç 4.3.1. Yukarıdaki işlemlerden x genelleştirilmiş trikompleks sayısının, $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında bir $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ hiperyüzeyinde tanımlanabileceği sonucu ortaya çıkar. Şimdi de $\forall\ t \in I$ için bir eğri tanımlayalım.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M \subset E^8_{\alpha\beta\gamma}$ için

$t \to \alpha(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t), z_6(t), z_7(t), z_8(t))$

ve $\alpha(t)$ r. mertebeden diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin matris gösterimi olan B, aşağıdaki gibi olur.

$$B = T_x(\alpha) = \begin{bmatrix} z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 & -\gamma z_5 & \alpha\gamma z_6 & \beta\gamma z_7 & -\alpha\beta\gamma z_8 \\ z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 & -\gamma z_6 & -\gamma z_5 & \beta\gamma z_8 & \beta\gamma z_7 \\ z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 & -\gamma z_7 & \alpha\gamma z_8 & -\gamma z_5 & \alpha\gamma z_6 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & -\gamma z_8 & -\gamma z_7 & -\gamma z_6 & -\gamma z_5 \\ z_5 & -\alpha z_6 & -\beta z_7 & \alpha\beta z_8 & z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 \\ z_6 & z_5 & -\beta z_8 & -\beta z_7 & z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 \\ z_7 & -\alpha z_8 & z_5 & -\alpha z_6 & z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 \\ z_8 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$\forall\ t \in I$ için α orijinden geçmeyen bir birim hızlı eğri olsun. O halde,

$h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathrm{t} \to h(t) = \|\alpha(t)\|$

$$= \sqrt{|\mathrm{z}_1{}^2 + \alpha\mathrm{z}_2{}^2 + \beta\mathrm{z}_3{}^2 + \alpha\beta\mathrm{z}_4{}^2 + \gamma\mathrm{z}_5{}^2 + \alpha\beta\mathrm{z}_6{}^2 + \beta\gamma\mathrm{z}_7{}^2 + \alpha\beta\gamma\mathrm{z}_8{}^2|} \neq 0$$

için B matrisi aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$B = h\begin{bmatrix} \frac{z_1}{h} & \frac{-\alpha z_2}{h} & \frac{-\beta z_3}{h} & \frac{\alpha\beta z_4}{h} & \frac{-\gamma z_5}{h} & \frac{\alpha\gamma z_6}{h} & \frac{\beta\gamma z_7}{h} & \frac{-\alpha\beta\gamma z_8}{h} \\ \frac{z_2}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\beta z_4}{h} & \frac{-\beta z_3}{h} & \frac{-\gamma z_6}{h} & \frac{-\gamma z_5}{h} & \frac{\beta\gamma z_8}{h} & \frac{\beta\gamma z_7}{h} \\ \frac{z_3}{h} & \frac{-\alpha z_4}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\alpha z_2}{h} & \frac{-\gamma z_7}{h} & \frac{\alpha\gamma z_8}{h} & \frac{-\gamma z_5}{h} & \frac{\alpha\gamma z_6}{h} \\ \frac{z_4}{h} & \frac{z_3}{h} & \frac{z_2}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\gamma z_8}{h} & \frac{-\gamma z_7}{h} & \frac{-\gamma z_6}{h} & \frac{-\gamma z_5}{h} \\ \frac{z_5}{h} & \frac{-\alpha z_6}{h} & \frac{-\beta z_7}{h} & \frac{\alpha\beta z_8}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\alpha z_2}{h} & \frac{-\beta z_3}{h} & \frac{\alpha\beta z_4}{h} \\ \frac{z_6}{h} & \frac{z_5}{h} & \frac{-\beta z_8}{h} & \frac{-\beta z_7}{h} & \frac{z_2}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\beta z_4}{h} & \frac{-\beta z_3}{h} \\ \frac{z_7}{h} & \frac{-\alpha z_8}{h} & \frac{z_5}{h} & \frac{-\alpha z_6}{h} & \frac{z_3}{h} & \frac{-\alpha z_4}{h} & \frac{z_1}{h} & \frac{-\alpha z_2}{h} \\ \frac{z_8}{h} & \frac{z_7}{h} & \frac{z_6}{h} & \frac{z_5}{h} & \frac{z_4}{h} & \frac{z_3}{h} & \frac{z_2}{h} & \frac{z_1}{h} \end{bmatrix} = hA$$

$\alpha(t) \in M$ için $A^T \varepsilon\, A = \varepsilon$ ve $\det(A) = 1$ olur. Burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma \end{bmatrix}$$

dır. $B = h.A$ eşitliğindeki A matrisi bir reel yarı ortogonal matris, X, Y ve C matrisleri $8{\times}1$ tipinde matrisler, h bir homotetik skala ve A ile C, t(zaman) parametresine bağlı fonksiyonlar olsun. Bu durumda hareketli uzaydaki $X \in R_0$ noktasına sabit uzayda karşılık gelen nokta $Y \in \mathbb{R}$ olur. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayındaki şemsiye hareketinden elde edilen

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliği $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında bir homotetik harekettir.

4.4. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ Uzayında Bir parametreli Homotetik Hareket

$B=hA$ eşitliğindeki A matrisi bir reel yarı ortogonal matris olduğu için,

$h(t) = \|\alpha(t)\|=$

$$= \sqrt{|z_1{}^2 + \alpha z_2{}^2 + \beta z_3{}^2 + \alpha\beta z_4{}^2 + \gamma z_5{}^2 + \alpha\beta z_6{}^2 + \beta\gamma z_7{}^2 + \alpha\beta\gamma z_8{}^2|} = 1$$

alınırsa,

$B\varepsilon B^T = \varepsilon$ ve $\det(B(t)) = 1$ olur. Burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma \end{bmatrix}$$

dır. Bu nedenle B matrisi de bir reel yarı ortogonal matris olur. Yani B matrisi de $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında dönme hareketine karşılık gelen matristir.

B=$h.A$ için,

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

t parametresine bağlı,

$$Y = BX + C$$

denklemi 1-parametreli homotetik hareket belirtir.

4.5. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ Uzayında Bir Parametreli Homotetik Hareketin Hızları

$Y = BX + C$ homotetik hareketin t ye göre türevi alınırsa, homotetik hareketin hız denklemi,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt}$$

olarak elde edilir.

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt}\,, \dot{X} = \frac{dX}{dt}, \dot{B} = \frac{dB}{dt}, \dot{C} = \frac{dC}{dt}$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\dot{Y} = \dot{B}X + B\dot{X} + \dot{C}$$

olur. Burada α, birim hızlı bir eğri ve $\forall t \in I$ için $\dot{\alpha(t)} \in M$ olduğundan, $\dot{B}(t)$ matrisi de bir reel yarı ortogonal matristir. Buradan $\dot{B}^T \varepsilon \dot{B} = \varepsilon$ ve det($\dot{B}(t)$)=1 olur. $\dot{B}(t)$ matrisi de dönme hareketine karşılık gelen matristir. Yani

$\dot{Y}$ hareketin mutlak hızı,

$B\dot{X}$ hareketin dönme hızı,

$\dot{B}X + \dot{C}$ hareketin sürüklenme hızıdır.

4.6. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ Uzayında Bir Parametreli Homotetik Hareketin Ani Pol Noktası

$\dot{Y} = \dot{B}X + B\dot{X} + \dot{C}$ eşitliğinde sürüklenme hızının sıfır olduğu an,

$$\dot{B}X + \dot{C} = 0$$

şeklindedir. Yani hareketli ve sabit uzayların her ikisinde de bir t anında sabit olduğu noktadır. Bu ortak sabit nokta hareketin t anındaki pol noktasıdır. Bu noktanın sabit uzaydaki adı sabit pol noktasıdır.

det$\left(\dot{B}(t)\right) = 1$ olduğu için ve $\dot{B}X + \dot{C} = 0$ eşitliğinden yararlanılarak $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayındaki homotetik hareketin ani pol noktası

$$X = -\dot{B}^{-1}\,\dot{C}$$

olarak yazılabilir.

Sonuç 4.6.1. $Y = BX + C$ homotetik hareketi için $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında her t anında tek bir ($X = -\dot{B}^{-1}\,\dot{C}$**)** ani pol noktası vardır.

4.7. $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ Uzayında Bir Parametreli Homotetik Hareketin (*r-1*). Mertebeden İvme Merkezleri

$Y = BX + C$ homotetik hareketinde türev alınırsa;

$\dot{Y} = \dot{B}X + B\dot{X} + \dot{C}$ hız denklemi, tekrar türev alınırsa;

$\ddot{Y} = \ddot{B}X + \ddot{C} + 2\dot{B}\dot{X} + B\ddot{X}$ şeklinde ivme denklemi elde edilir. Burada $\ddot{B}.X + \ddot{C}$ hareketin sürüklenme ivmesidir. Sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktalara ivme merkezi ve *r*. mertebeden sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktalara da (*r-1*). mertebeden ivme merkezleri denir.

Şimdi, $B^{(r)} = \frac{d^r(B)}{dt^r}$ ve $C^{(r)} = \frac{d^r(C)}{dt^r}$ için,

$B^{(r)}X + C^{(r)} = 0$ denkleminin çözümünü araştıralım.

$\forall t \in I$ için α *r*. mertebeden regüler bir eğri ve $\alpha^r(t) \in M$ olsun. α nın *r*. mertebeden regüler olması,

$\sum_{i=1}^{8}(\alpha_i^{(r)})^2 \neq 0$ olmasını; $\alpha^r(t) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \in M$ olması da

$$z_1 z_7 + \alpha z_2 z_8 - z_3 z_5 - \alpha z_4 z_6 = 0,$$

$$z_1 z_4 + \gamma z_5 z_8 - z_2 z_3 - \gamma z_6 z_7 = 0,$$

$$z_1 z_6 + \beta z_3 z_8 - z_2 z_5 - \beta z_4 z_7 = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan,

$\det(T_{\alpha^r(t)}) = [x.x^{t_3} = z_1{}^2 + \alpha z_2{}^2 + \beta z_3{}^2 + \alpha\beta z_4{}^2 + \gamma z_5{}^2 + \alpha\beta z_6{}^2 + \beta\gamma z_7{}^2 + \alpha\beta\gamma z_8{}^2]^2$ denklemi elde edilir. Böylece, $\det(B^{(r)}) = \left[\sum_{i=1}^{8}(\alpha_i^{(r)})^2\right]^2$ olur. Yani $\det(B^{(r)}) \neq 0$ elde edilir. Buradan $B^{(r)}$'nin tersinin yazılabileceği sonucu çıkar. O halde $E^8_{\alpha\beta\gamma}$ uzayında bir homotetik hareketin (*r-1*). mertebeden ivme merkezi,

X=$\left[B^{(r)}\right]^{-1}.(-C)^{(r)}$ şeklinde elde edilmiş olur.

Örnek 4.1: Özel olarak $\alpha = \beta = \gamma = 1$ alalım. $\alpha(t) \in S^7$ ve $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ için α eğrisini

$\alpha: I \subset IR \rightarrow M \subset E^8$, t $\in I$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = \left(\frac{cost}{2}, \frac{sint}{2}, \frac{cost}{2}, \frac{sint}{2}, \frac{cost}{2}, \frac{sint}{2}, \frac{cost}{2}, \frac{sint}{2}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. α eğrisi boyunca bir homotetik hareket tanımlanabildiğini göstermek için öncelikle α eğrisinin matris gösteriminin ortogonal matris olduğunu göstermeliyiz. α eğrisinin matris gösterimi

$$B = h\begin{bmatrix}
\frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} \\
\frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} \\
\frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} \\
\frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} \\
\frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} \\
\frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{-cost}{2} \\
\frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{-sint}{2} \\
\frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2} & \frac{sint}{2} & \frac{cost}{2}
\end{bmatrix} = hA$$

şeklinde elde edilir. $B^T B = I_8$ olduğundan ve α, E^8 uzayında daha önce verilen özellikleri sağladığından E^8 uzayında α eğrisi boyunca bir homotetik hareket tanımlanır.

KAYNAKLAR

Alkaya, D. (2013). *Bikompleks Sayılarla Homotetik Hareketler*. Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

Babadağ, F. (1998). *Bikompleks Sayılar*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Babadağ F., Yaylı Y. ve Ekmekçi N.(2009). *Homothetic Motion and Bicomplex Numbers*. Commun Fac. Sci. Univ. Ank. Series, 58, 23-28.

Hacisalihoğlu, H.H. (1980). *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*. İnönü Üniversitesi, Malatya, 252.

Hacisalihoğlu, H.H. (2006). *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi, Fen Fak. Yayınları

Jafari M. (2010). *Homothetic Motion at* $E^4_{\alpha\beta}$. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, 47, 2319-2326.

Jafari M. ve Yaylı Y. (2010). *Homothetic Motion at* E^4 . Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, 47, 2319-2326.

Kabadayı H., Yaylı Y. (2011*). Homothetic Motion at* E^4 *with Bicomplex numbers*. Adv. Apple. Clifford Algebr., 21, 541-546.

Kahraman Aksoyak F. (2014). *Öklidiyen ve Yarı Öklidiyen Uzaylarda Homotetik Hareketler ve Yüzeyler*. Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Kahraman Aksoyak F. ve Özkaldı Karakuş S. (2019) *Homotetic Motions via Generalized Bicomplex Numbers.* (Submitted).

Karacan M.M. (2004). *İki Parametreli Hareketlerin Kinematik Uygulamaları*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Moore C. L. E. (1919). *Surfaces of Rotation in A Space of Four Dimensions*. Ann. Of Math. 21, 81-93.

O'Neill A. (1983). Semi Riemannian Geometry with Applications to Relavitiy. Academic Press, New York.

Özkaldı Karakuş S. ve Yaylı Y. (2012). *Bicomplex Number and Tensor Product Surfaces in* $\mathbb{R}^4_2$. Ukrainian Mathematical Journal, 64(3): 344-355.

Özkaldı Karakuş S. ve Kahraman Aksoyak F. (2015). *Generalized Bicomplex Numbers and Lie Groups*, Adv. App. Clifford Algebra, 25, 943-963.

Price G. B. (1990). An *Introduction to Multicomplex Spaces and Functions.* Marcel Deccer, Inc., New York.

Sabuncuoğlu A. (2004). *Diferansiyel Geometri*. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

Yaylı Y. (1988). *Hamilton Operatörleri ve Lie Grupları.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara

Yaylı Y. (1992). *Homothetic Motion at* E^4. Mech. Mach. Theory, 27, 303-305.

Yaylı Y. ve Bükcü B. (1995). *Homothetic Motion at* E^8 *with Cayley Numbers.* Mech. Mach. Theory, 30, 417-420

.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Gülşah Özaydın

Doğum Yeri ve Tarihi : Gölcük/ Kocaeli, 1988

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar : Anadolu Lisesi

Çalıştığı Kurumlar : Fen Bilimleri Dershanesi, Doğa Koleji

İletişim

Adres : Cuma Mah. Hastane Cad. No:20 Kat:2 İnegöl/Bursa

E-Posta Adresi : gulsahd4@yahoo.com

Akademik Çalışmaları

- Homothetic Motıons At E^8 Wıth Generalızed Bıcomplex Numbers

International Conference on Mathematical Studies and Applications, 4-6 October 2018, Karaman, TURKEY

ÖZAYDIN G., ÖZKALDI KARAKUŞ S.

Tarih: 09/08/2019