T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EİSENSTEİN SERİLERİNİN ÇARPANLARINA AYRILMASI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN SAİT DÜNDAR

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2026
10787173

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EİSENSTEİN SERİLERİNİN ÇARPANLARINA AYRILMASI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN SAİT DÜNDAR

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2026
10787173

BEYAN

Eisenstein Serilerinin Çarpanlarına Ayrılması Üzerine adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum; TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2- TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;……………………………………………………
………………</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">…………………………………/………
………………..</td></tr>
</table>

Süleyman Sait DÜNDAR

../../2026

İmza

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, bu tez konusunu çalışmamı sağlayan; çalışmanın her aşamasında bilgi, tecrübe ve değerli önerileriyle beni yönlendiren, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli hocam Prof.Dr. İlker İnam'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yoğun çalışma sürecinde motivasyon desteği, ümit verici konuşmaları ve olağanüstü sabrı ile her zaman yanımda olan kıymetli eşim Şevval Dündar'a; akademik hayatın zorluklarını benden önce yaşamış, bilgi ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan ve bu süreçte manevi desteğini her zaman hissettiren Fatmanur Dündar'a gönülden teşekkür ederim. Hayatım boyunca her koşulda yanımda olan, beni bugünlere getiren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli annem Sevim Dündar'a ve babam Arif Dündar'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Son olarak, meslek hayatımın en kıymetli parçası olan sevgili öğrencilerime. Derse ilk girdikleri andaki çekingen bakışlarından, bir konuyu anladıklarında yüzlerinde beliren o içten gülümsemeye kadar geçen her an, bu yolculuğun benim için ne kadar anlamlı olduğunu bana defalarca hatırlattı. Zorlandıklarında vazgeçmemeyi, başaramadıklarını düşündükleri anlarda yeniden denemeyi seçmeleri; küçük ilerlemelerin büyük özgüvenlere dönüşmesine tanıklık etmem, bu sürecin en değerli kazanımı olmuştur.

Bir sorunun başında uzun süre düşünen, cevabı bulduğunda sevinçle gözleri parlayan; hata yapmaktan korkmadan soru soran, öğrenme cesaretini her daim canlı tutan öğrencilerimle birlikte olmak bana yalnızca öğretmenliği değil, sabrı, anlayışı ve umudu da yeniden öğretmiştir. Onların hayallerine eşlik edebilmek, yollarına küçücük de olsa bir ışık tutabilmek benim için tarif edilemez bir mutluluktur. Bu çalışmanın ardında, bana her gün "neden bu mesleği seçtiğimi" hatırlatan öğrencilerimin emeği ve varlığı vardır. Tüm öğrencilerime yürekten teşekkür ederim.

Süleyman Sait DÜNDAR

2026

ÖZET

EİSENSTEİN SERİLERİNİN ÇARPANLARINA AYRILMASI ÜZERİNE

Üç bölümden oluşan bu çalışmada modüler formların temel örneklerinden birisi olan Eisenstein serilerinin bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Birinci bölüm modüler form tanımı gibi çalışmanın devamında kullanılacak temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde ise Eisenstein serilerinin ilk dört seviye için çarpanlarına ayrılması problemi incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise güncel bir çalışmadan faydalanılarak çarpımsal kuvvet serileri yardımıyla Eisenstein serilerinin çarpımları çalışılmıştır. Çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Modüler formlar, Eisenstein serileri, Eisenstein serilerinin çarpanları, Dedekind-eta fonksiyonu

ABSTRACT

ON FACTORIZATION OF EISENSTEIN SERIES

This three-part study examines some algebraic properties of Eisenstein series, a fundamental example of modular forms. The first part introduces basic concepts used in the rest of the study, such as the definition of modular forms. The second part examines the problem of factoring Eisenstein series for the first four levels. The third part, drawing on a recent study, examines the multiplication of Eisenstein series using multiplicative power series. This study is a compilation.

Keywords: Modular forms, Eisenstein series, Factorization of Eisenstein series, Dedekind-eta function

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

1. MODÜLER FORMLAR VE EİSENSTEİN SERİLERİ

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan modüler formlar tanımlanıp bu fonksiyonlara önemli bir örnek teşkil eden Eisenstein serileri tanıtılacaktır. Modüler formlar üst yarı düzlemde oldukça önemli simetrilere sahip karmaşık fonksiyonlardır.

Tanım 1.1. (Cohen ve Strömberg, 2017) $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu eğer

(i) $\forall\, z \in \mathbb{H}$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için,

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

(ii) f fonksiyonu $\mathbb{H}$ üzerinde analitik

(iii) f fonksiyonu $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ kümesinin her noktasında analitik

koşullarını sağlıyorsa ise f'ye $\Gamma_0(N)$ için k ağırlıklı N seviyeli modüler form denir.

İlk şart özel olarak fonksiyonel eşitliği olarak isimlendirilir ve sadece bu ilk şart sağlanıyor ise bu durumda f'ye zayıf modüler form denir.

k ağırlıklı 1 seviyeli cusp formlar uzayı $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir ve cusp formlar f fonksiyonunun ∞'da sıfır olması durumuna denir. Ayrıca $\Gamma_0(N)$ denklik alt grubu için modüler form tanımlanırsa modüler formlar uzayı $M_k\big(\Gamma_0(N)\big)$ ile gösterilirken cusp formlar uzayı ise $S_k(N)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2. Modüler formlara temel örneklerden biri olan k ağırlıklı Eisenstein Serileri $z \in \mathbb{H}$, $k > 2$ tamsayı ve $(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ olmak üzere

$$G_k(z) \coloneqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^k}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.3. (Cohen ve Strömberg, 2017) $k \geq 2$ için $G_{2k}(z) \in M_{2k}(\Gamma)$ dir.

Tanım 1.4. (Cohen ve Strömberg, 2017) $k > 2$ bir çift tamsayı olmak üzere k ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serisi

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

olarak tanımlanır. Burada B_k, k-ıncı Bernoulli sayısını ve σ bölen fonksiyonu $\sigma_{k-1}(n) \coloneqq \sum_{d|n} d^{k-1}$ olarak tanımlıdır.

Teorem 1.5. (Stein, 2007) $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ ve $g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ ifadeleri $M_k(\Gamma_0(N))$ uzayının elemanları olmak üzere

$$S \coloneqq \frac{kd_N}{12}$$

sayısı tanımlanır ve burada d_N sayısı $\Gamma_0(N)$'in $PSL_2(\mathbb{Z})$'deki görüntüsünün indeksini ifade eder. Burada eğer $0 \leq i \leq S$ için $a_i = b_i$ ise o zaman $f = g$ olur ve S sayısına da Sturm sınırı adı verilir.

2. EİSENSTEİN SERİLERİNİN ÇARPANLARINA AYRILMASI

Bu bölümde (Cohen, 2021)'de yer alan seviyeleri 1, 2, 3 ve 4 olan Eisenstein serilerinin çarpanlarına nasıl ayrıldığı görülecektir. Her bir seviyeye bir alt bölüm ayrılmıştır.

2.1. Seviye 1 durumu

Bu bölümde mümkün olan en küçük seviye olan seviye 1'deki sonuçlar ele alınacaktır. Buradaki en temel formül

$$E_4^3 - E_6^2 = 1728\eta^{24}$$

olup, dikkat edilirse bu özdeşliğin her iki tarafı da 12 ağırlıklı ve 1 seviyeli modüler formlardır. Bu seriler iki farklı şekilde çarpanlara ayrılabilir.

İlk olarak aşağıdaki durumlarla başlayalım.

Tanım 2.1.1. $p = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ olmak üzere aşağıdaki serileri tanımlayalım:

$$F_{1,j}(\tau) = E_6(\tau) - (-1)^j\sqrt{-1728}\eta^{12}(\tau)$$

ve

$$G_{1,j}(\tau) = E_4(\tau) - 12\rho^j\eta^8(\tau).$$

Teorem 2.1.2. (Cohen, 2021) Aşağıda özdeşlikler doğrudur:

$$F_{1,j}(\tau+1) = F_{1,j+1}(\tau),$$

$$F_{1,j}(-1/\tau) = \tau^6 F_{1,j+1}(\tau),$$

$$F_{1,j}(\tau)F_{1,j+1}(\tau) = E_4^3(\tau),$$

$$G_{1,j}(\tau+1) = G_{1,j+1}(\tau),$$

$$G_{1,j}(-1/\tau) = \tau^4 G_{1,j}(\tau),$$

$$G_{1,j}(\tau)G_{1,j+1}(\tau)G_{1,j+2}(\tau) = E_6^2(\tau).$$

İspat. Doğrudan hesaplama yapılarak

$$F_{1j}(\tau+1) = E_6(\tau) - (-1)^J\sqrt{-1728}\eta^{12}(\tau) = F_{1,j+1}(\tau)$$

Benzer şekilde görülebilir ki

$$F_{1,j}(-1)\, E_6(\tau) - (-1)^j\sqrt{-1728}\eta^{12}(\tau)$$

$$= \tau^6 E_6(\tau) - (-1)^j\sqrt{-1728}\eta^{12}(\tau)$$

$$= \tau^6 F_{1,j+1}(\tau)$$

olur. Diğer özdeşlikler de modüler formların özellikleri kullanılarak benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.1.3. (Cohen, 2021)

(i) $f_{1,j}(\tau) = 2E_2(\tau) - \left(\frac{3+(-1)^j\sqrt{-3}}{6}\right) E_2\left({}^{\tau}/_{2}\right) - ((3 - \frac{(-1)^j\sqrt{-3}}{6}) E_2((\tau+1)/2)$

fonksiyonu tanımlansın bu takdirde, bu fonksiyon;

$$f_{1,j}^3(\tau) = f_{1,j}(\tau),$$

$$f_{1,j}(\tau) f_{1,j+1}(\tau) = E_4(\tau), \qquad f_{1,j}\left(\frac{(-1)^j + \sqrt{-3}}{2}\right) = 0$$

$$f_{1,j}(\tau+1) = f_{1,j+1}(\tau), \qquad f_{1,j}\left({}^{-1}/_{\tau}\right) = \left(\left(-1-(-1)^j\sqrt{-3}\right)/2\right)\tau^2 f_{1,j+1}(\tau)$$

özdeşliklerini sağlar.

(ii)

$$g_{1,j}(\tau) = (3/2)E_2(\tau) - (1/4) \sum_{\substack{0\le m\le 2 \\ m\not\equiv j\ (mod3)}} E_2((\tau+m)/3)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda bu fonksiyon $3|1_j\ ise\ E_j = 1\ ve\ 3 \nmid j\ ise\ E_j = -1$ olmak üzere;

$$g_{1,j}^2(\tau) = G_{1,j}(\tau),$$

$$g_{1,j}(\tau)g_{1,j+1}(\tau)g_{1,j+2}(\tau) = E_6(\tau), \qquad g_{1,j}\left(-j+\sqrt{-1}\right) = 0,$$

$$g_{1,j}(\tau+1) = g_{1,j+1}(\tau), \qquad g_{1,j}(-1/\tau) = \varepsilon_j \tau^2 g_{1,j}(\tau)$$

özdeşliklerini sağlar.

İspat. Yukarıda tanımlanan *f* ve *g* fonksiyonları $\Gamma(2)$ ve $\Gamma(3)$ üzerinde modüler olduğundan ait oldukları uzaylarda Sturm sınırı kullanılarak sağladıkları özdeşlikler kolayca görülebilir. Benzer sonuçlar seviye 2, 3, 4 için de geçerlidir.

Uyarı 2.1.4. Bu son sonuç bize gösteriyor ki E_4 Eisenstein serisi ağırlığı 2 ve seviyesi 2 olan iki tane eşlenik Eisenstein serisinin çarpımı olarak yazılabilir, diğer yandan E_6 Eisenstein serisi ise ağırlığı 2 ve seviyesi 3, üç tane eşlenik Einstein serisinin çarpımı olarak yazılabilir.

2.2. Seviye 2 Durumu

Bu bölümde 2 seviyeli Eisenstein serilerini çarpanlara ayrılması durumu incelenecektir.

Notasyon basitliği açısından 1 ağırlıklı aşağıdaki Dedekind-eta çarpımı şu şekilde gösterilecektir;

$$\eta_2(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)$$

Bu seviye için aşağıdaki Dedekind-eta çarpımı özdeşliklerini kullanacağız:

$$E_{2,2}^2(\tau) - E_{2,4}(\tau) = 128\eta^{16}(2\tau)/\eta^8(\tau)\,, E_{2,2}^2(\tau) + E_{2,4}(\tau) = 2\eta^{16}(\tau)/\eta^8(2\tau)$$

Seviye 2 durumundaki temel formül;

$$E_{2,2}^2(\tau) - E_{2,4}(\tau) = 256\eta_2^8$$

şeklindedir.

Bu Eisenstein serileri iki farklı şekilde çarpanlara ayrılabilir, ilk olarak aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. η_2 fonksiyonu yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere $F_{2,j}(\tau)$ ve $G_{2,j}(\tau)$ fonksiyonları

$$F_{,j}(\tau) = E_{2,4}(\tau) - (-1)^j\sqrt{-256}\eta_2^4(\tau)\ ve\ G_{2,j}(\tau) = E_{2,2}(\tau) - 4i^j\eta_2^2(\tau)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.2. (Cohen, 2021) Aşağıdakiler özdeşlikler doğrudur.

$$F_{2,j}(\tau+1) = F_{2,j+1}(\tau), F_{2,j}(-1/(2\tau)) = -4\tau^4F_{2,j+1}(\tau)$$
$$F_{2,j}(\tau)F_{2,j+1}(\tau) = E_{2,2}^4(\tau),$$

$$G_{2,j}(\tau+1)\ =\ G_{2,j+1}(\tau), G_{2,j}(-1/(2\tau)) = -2\tau^2G_{2,j}(\tau),$$

$$G_{2,j}(\tau)G_{2,j+1}(\tau)G_{2,j+2}(\tau)G_{2,j+3}(\tau) = E_{2,4}^2(\tau).$$

İspat. Teorem 2.1.2'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.3. i. $E_{1,-4} = \theta^2/4$ olmak üzere

$$f_{2,j}(\tau) = 4E_{1,-4}(\tau) + (-1)^j2\sqrt{-1}(E_{1,-4}(\tau/2) - E_{1,-4}\left(\frac{\tau+1}{2}\right))$$

şeklinde tanımlanan $f_{2,j}(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$f_{2,j}^4(\tau) = F_{2,j}(\tau)\ ,$$

$$f_{2,j}(\tau)f_{2,j+1}(\tau) = E_{2,2}(\tau),\quad f_{2,j}\left(\frac{(-1)^j+\sqrt{-1}}{2}\right) = 0$$

$$f_{2,j}(\tau+1) = f_{2,j+1}(\tau),\quad f_{2,j}(-1/(2\tau)) = ((-1)^j - 1)\tau f_{2,j+1}(\tau)$$

ii.

$$g_{2,j}(\tau) = \sum_{0\le i\le 3} (1 - 2\delta_{i,j}) E_{1,-8}(\tau + i/4)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde eğer $4|j$ ise $\varepsilon_j = 1$ ve $4 \nmid j$ ise $\varepsilon_j = -1$ olmak üzere

$$g_{2,j}^2(\tau) = G_{2,j}(\tau),$$

$$\prod_{0\le j\le 3} g_{2,j}(\tau) = E_{2,4}(\tau),\ \ g_{2,j}((4-j) + \frac{\sqrt{-2}}{2} = 0,$$

$$g_{2,j}(\tau + 1) = g_{2,j+1}(\tau), g_{2,j}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) = \epsilon_j \sqrt{-2}\tau g_{2,j}(\tau).$$

özdeşliklerini sağlar. Seviye 1 durumundaki gibi bu kez $\Gamma(8)$ üzerimdeki modüler form uzaylarının özellikleri kullanılarak ispat yapılır.

Uyarı 2.2.4. Yukarıdaki teorem bize gösteriyor ki $E_{2,4}(\tau) - 1j\sqrt{-256}n_2^4(\tau)$ fonksiyonu klasik modüler formların 4. kuvveti şeklindedir. Diğer yandan

$$E_{2,2}(\tau) = 2E_2(2\tau) - E_2(\tau)$$

ise 1 ağırlıklı iki tane eşlenik Eisenstein serisinin çarpımı olarak yazılabilir.

2.3. Seviye 3 Durumu

Bir önceki alt bölüme benzer şekilde 1 ağırlıklı $\eta_3(\tau) = \eta(\tau)\eta(3\tau)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Dikkat edilirse bu seviye için elde edilen ilk özdeşlik $E_{3,2} = \left(6E_{1,-3}\right)^2$ şeklindedir. Buna ilave olarak $E_{3,4}^2/E_{3,2}$ fonksiyonu analitik fonksiyon olup bir modüler form belirtir. Gerçekten de kolayca görülebilir ki

$$E_{3,4}^2/E_{3,2} = E_{3,2}^3 - 108\eta_3^6$$

özdeşliği doğrudur.

Buna ilave olarak

$$E_{3,-3,1} = -1/9 + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n} d^2\left(\frac{-3}{d}\right)\right)q^n$$

ve

$$E_{3,1,-3} = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n} d^2\left(\frac{-3}{n/d}\right)\right)q^n$$

olmak üzere

$$E_{3,4}/E_{3,2}^{1/2} = -9\left(E_{3,-3,1} + 3E_{3,1,-1}\right)$$

olduğundan $E_{3,4}/E_{3,2}^{1/2} \in M_3(\Gamma_0(3), \chi_{-3})$ modüler formlar uzayındaki iki normalleştirilmiş Eisenstein serisidir. O halde seviye 3 de kullanılarak olan iki temel formül

$$E_{3,2}^3 - E_{3,4}^2/E_{3,2} = 108\eta_3^6 \text{ ve } E_{3,2}^4 - E_{3,4}^2 = 3888\eta_3^6 E_{1,-3}^2$$

olur.

Her ikisi de iki şekilde çarpanlara ayrılır. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.3.1. $F_{3,j}(\tau),\ G_{3,j}(\tau),\ F'_{3,j}(\tau),\ G'_{3,j}(\tau)$ fonksiyonları

$$F_{3,j}(\tau) = \left(E_{3,4}/E_{3,2}^{1/2}\right)(\tau) - (-1)^j 6\sqrt{-3}\eta_3^3(\tau)\ ,$$

$$G_{3,j}(\tau) = E_{3,2}(\tau) - 3\sqrt[3]{4}\rho^j\eta_3^2(\tau)\ ,$$

$$F'_{3,j}(\tau) = E_{3,4}(\tau) - (-1)^j 36\sqrt{-3}\left(\eta_3^3 E_{1,-3}\right)(\tau)\ ,$$

$$G'_{3,j}(\tau) = E_{3,2}^2(\tau) - (-1)^j 36\sqrt{3}\left(\eta_3^3 E_{1,-3}\right)(\tau)\ ,$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edilirse Tanım 2.3.1'den $F'_{3,j} = 6E_{1,3}F_{3,j}$ olduğu görülür.

Teorem 2.3.2. (Cohen, 2021) Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

$$F_{3,j}(\tau+1) = F_{3,j+1}(\tau),\ F_{3,j}(-1/(3\tau)) = -3\sqrt{-3}\tau^3 F_{3,j+1}(\tau),$$

$$F_{3,j}(\tau)F_{3,j+1}(\tau) = E_{3,2}^3(\tau),$$

$$G_{3,j}(\tau+1) = G_{3,j+1}(\tau),\ G_{3,j}(-1/(3\tau)) = -3\tau^2 G_{3,j}(\tau),$$

$$G_{3,j}(\tau)G_{3,j+1}(\tau)G_{3,j+2}(\tau) = \left(E_{3,4}^2/E_{3,2}\right)(\tau),$$

$$F'_{3,j}(\tau+1) = F'_{3,j+1}(\tau),\ F'_{3,j}(-1/(3\tau)) = -9\tau^4 F'_{3,j+1}(\tau),$$

$$F'_{3,j}(\tau)F'_{3,j+1}(\tau) = E_{3,2}^4(\tau)\ ,$$

$$G'_{3,j}(\tau+1) = G'_{3,j+1}(\tau),\ G'_{3,j}(-1/(3\tau)) = 9\tau^4 G'_{3,j}(\tau)\ ,$$

$$G'_{3,j}(\tau)G'_{3,j+1}(\tau) = E_{3,4}^2(\tau).$$

İspat önceki bölümlerdeki ilgili teoremlere benzerdir.

Teorem 2.3.3. (Cohen, 2021)

$$f_{3,j}(\tau) = 6E_{1,-3}(2\tau) + (-1)^j\sqrt{3}\left(E_{1,-3}(\tau/2)\right) - E_{1,-3}\big((\tau+1/2)\big)$$

fonksiyonu aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

$$f_{3,j}^3(\tau) = F_{3,j}(\tau),$$

$$f_{3,j}(\tau)f_{3,j+1}(\tau) = E_{3,2}(\tau),\ \ f_{3,j}\big(((-1)^j 3 + \sqrt{-3})/6\big) = 0\ ,$$

$$f_{3,j}(\tau+1) = f_{3,j+1}(\tau), \qquad f_{3,j}(-1/(3\tau)) = \big(((-1)^j 3 - \sqrt{-3})/2\big)\tau f_{3,j+1}(\tau).$$

İspat bu kez $\Gamma(6)$ üzerinde tanımlı modüler form özellikleri kullanılarak yapılır.

Uyarı 2.3.4. Yukarıdaki teoreme dikkat edilirse $f_{3,j}$ bir modüler formun küpüdür. Diğer yandan $\big(3E_2(3\tau) - E_2(\tau)\big)/2$ fonksiyonu 1 ağırlıklı iki tane eşlenik Eisenstein serisi çarpımıdır.

2.4. Seviye 4 Durumu

Basitlik için $\frac{1}{2}$ ağırlıklı olan ancak $\eta(4\tau)$ ile karşılaştırılması gereken $\eta_4(\tau)$ fonksiyonunu

$$\eta_4(\tau) = \eta(\tau)\eta(4\tau)/\eta(2\tau)$$

olarak tanımlayalım.

Diğer durumlardan farklı olarak 2 ağırlıklı 4 seviyeli Eisenstein serilerinin uzayı boyutu seviye 2 ve 3 durumlarından farklı olarak 2 olup $E_{4,2}$ Eisenstein serisine ilave olarak yeni bir Eisenstein serisi tanımlanmalıdır. Bu Eisenstein serisini $E'_{4,2}(\tau)$ ile göstereceğiz, türev notasyonuyla karıştırılmaması gereken bu fonksiyonu

$$E'_{4,2}(\tau) = 4E_2(4\tau) - 4E_2(2\tau) + E_2(\tau)$$

olarak tanımlansın.

Bu seviyede çok fazla sayıda Dedekind-eta çarpım özdeşliği vardır.

$$E_{4,2}(\tau) = \theta^4(\tau) = \eta(2\tau)^{20}/\big(\eta(\tau)\eta(4\tau)\big)^8,$$

$$E_{4,2}(\tau) - E'_{4,2}(\tau) = 32\eta(4\tau)^8/\eta(2\tau)^4,$$

$$E_{4,2}(\tau) - E'_{4,2}(\tau) = 2\eta(\tau)^8/\eta(2\tau)^4,$$

$$E_{4,2}^2(\tau) - E'^2_{4,2}(\tau) = 64(\eta(\tau)\eta(4\tau)/\eta(2\tau))^8 = 64\eta_4^8(\tau),$$

$$\eta(2\tau)^{24} = \big(\eta(\tau)\eta(4\tau)\big)^8 (\eta(\tau))^8 + 16\eta(4\tau)^8).$$

Buradaki en temel özdeşlik

$$E_{4,2}^2(\tau) - E'^2_{4,2}(\tau) = 64\eta_4^8(\tau)$$

olup. İki farklı şekilde çarpanlara ayrılabilir.

Tanım 2.4.1. $f_{4,j}(\tau)$ ve $G_{4,j}(\tau)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{4,j}(\tau) = E'_{4,2}(\tau) - (-1)^j\sqrt{-64}\eta_4^4(\tau) \text{ ve } G_{4,j}(\tau) = E_{4,2}(\tau) - (-1)^j 8\eta_4^4(\tau).$$

Teorem 2.4.2. (Cohen, 2021) Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

$$F_{4,j}(\tau+1) = F_{4,j+1}(\tau), \qquad F_{4,j}(-1/(4\tau)) = 4\tau^2 F_{4,j+1}(\tau),$$

$$F_{4,j}(\tau)F_{4,j+1}(\tau) = E_{4,2}^2(\tau)$$

$$G_{4,j}(\tau+1) = G_{4,j+1}(\tau)\,, \qquad G_{4,j}(-1/4\tau) = -4\tau^2 G_{4j}(\tau),$$

$$G_{4,j}(\tau)G_{4,j}(\tau) = E'_{4,2}(\tau)$$

İspat diğer seviyelere benzer yapılır.

Teorem 2.4.3. (Cohen, 2021)

i) $f_{4,j}(\tau) = \theta(\tau/2 - (-1)^j/4)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$f_{4,j}^4(\tau) = F_{4,j}(\tau),$$

$$f_{4,j}(\tau)f_{4,j+1}(\tau) = E_{4,2}^{1/2}(\tau) = \theta^2(\tau),$$

$$f_{4,j}(\tau+1) = f_{4,j+1}(\tau), \quad f_{4,j}(-1/(4\tau)) = (1+(-1)^j\sqrt{-1})(\tau/i)^{1/2} f_{4,j+1}(\tau).$$

ii) $g_{4,j}(\tau) = 2\theta^2(2\tau) - \theta^2((\tau+j)/2)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$g_{4,j}^2(\tau) = G_{4,j}(\tau)$$
$$g_{4,j}(\tau)g_{4,j+1}(\tau) = E'_{4,2}(\tau)$$
$$g_{4,j}(\tau+1) = g_{4,j+1}(\tau), \quad g_{4,j}(-1/(4\tau)) = (-1)^j 2\sqrt{-1}\tau g_{4,j}(\tau)$$

İspat. $\Gamma(8)$ üzerinde tanımlı modüler formlar özelliği kullanılarak görülür.

Uyarı 2.4.4. Yukarıdaki özdeşliğe dikkat edilirse $f_{4,j}$ bir doğal fonksiyonunun 4. kuvveti ve

$$\left((4E_2(4\tau) - E_2(\tau))/3\right)^{1/2}$$

$1/2$ ağırlıklı iki eşlenik tekli teta serisi çarpımında öte yandan $f_{4,j}f_{4,j+1} = \theta^2$ özdeşliği doğru olup bu fonksiyon $1/2$ ağırlıklı 2 modüler formun 2 farklı şekilde yazılmış halidir. Bu son özdeşliğin ispatı için teta fonksiyonunun

$$\theta(\tau) = \prod_{n\geq 1} (1 - q^{2n})\,(1 + q^{2n-1})^2$$

özdeşliği yardımıyla ispatlanabilir.

3. ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİ İLE EİSENSTEİN SERİLERİNİN ÇARPIMLARI

Bu bölümde (Xiong, 2025) da yer alan güncel sonuçlar ele alınacaktır. Öncelikle aşağıdaki tanımdan başlayalım.

Tanım 3.1. n bir pozitif tam sayı olsun. Eğer $n \mapsto {}^{a_n}/_{a_1}$ fonksiyonu bir çarpımsal fonksiyon ise $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots$ kuvvet serisine çarpımsaldır denir. $E_{2k}(q)$ Eisenstein serisi verildiğinde $E_{2k}(q)g(q)$ çarpımıda çarpımsal olacak şekilde $g(q)$ formal çarpımsal kuvvet serisi göz önüne alınacaktır.

Kolayca görülebilir ki f ve g gibi Hecke eigenformun çarpımı yine Hecke eigenformu olmak zorunda değildir. Bununla beraber $f(q).g(q)$ çapımın bazı katsayıları çarpımsal olabilir.

(Xiong, 2025)'de aşağıdaki soruya yanıt aranmıştır. $f(q)$ (1.1) formunda bir Eisentein serisi ve b_n çarpımsal ve $f(q)g(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, q^n$ ifadesindeki c_n de çarpımsal olmak üzere $g(q)$,

$$f(q)g(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} b_n\, q^n$$

olsun. Burada bu özellikteki $f(q).g(q)$ çarpımları incelenmiştir. Doğal olarak buradaki temel soru bu özellikteki tüm $g(q)$ çarpımları için q −açılımları bir modüler formun q açılımı olup olmadığı sorusudur.

4 ağırlıklı modüler formların uzayı ve 12 ağırlıklı cusp formlarının ve de 16 ağırlıklı cusp formlarının uzayının boyutu 1 olduğundan

$$E_{2k}(q) \coloneqq 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

ve $\Delta_m(q)$ 1 seviyeli ve$m \in \{12, 16\}$ ağırlıklı normalleştirilmiş cusp formu olmak üzere

$$E_4(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{16}(q)$$

özdeşliği doğru olur. Bu problem ile ilgili (Johnson, 2013) 2016 da $\Gamma_1(N)$ üzerinde tanımlı $(f.g)$ Hecke eigenform çarpımı da bir eigenform olacak şekilde tam bir sınıflandırılması verilmiştir. Bu problemle ilgili yapılmış önceki çalışmalar (Ghate, 2002), (Duke, 1999) ve (Emmans, 2005) çalışmalardır.

Bu çalışmaların ortak yönü çarpımdaki Eisenstein serisinin en az bir tanesi Eisenstein serisi olmasıdır. (Fakat Eisenstein serilerinde farklılıklar olabilir.)

n bir asalın kuvveti olmak üzere b_n katsayısı $g(q)$' nun seçiminden bağımsız olup $(m,n) = 1$ için $c_{m,n} = c_m c_n$ ilişkisi elimizdeki kısıtlardır. Tam sayıların birçoğu bir asalın kuvveti olmadığından, denklem sistemlerinin çözümleri oldukça nadir ve özeldir. (Xiong, 2025)'de $k \leq 20$ için tüm çözümlerin listesi verilmiştir. Burada yalnızca bir istisna vardır, bu istisna ise $g(q)$'nun modüler değil hemen hemen modüler olması durumudur, hemen hemen modüler formlar için detaylı bilgi (Kaneko ve Zagier, 1995) de bulunabilir yine (Xiong, 2025)' de yeterince büyük k'lar için çözüm olmadığı gösterilmiştir.

Buradaki temel strateji b_{p^i} değişkenleri $c_{m,n} = c_m c_n$ biçiminde olan eşitliklerden oluşan denklem sistemlerini analiz etmektir. Bu eşitliklerin katsayıları q asallar üzerinde ve $\frac{B_{2k}}{4k}$ üzerinde değişmek üzere q^{2k-1} cinsinden oluşan polinomlar olmak üzere verilebilir. Belli bir k için 40' a kadar olan katsayılara bakıldığında denklem sayısı bilinmeyen sayısını geçer, bu noktada 19 değişken ile ilgileneceğiz.

Dikkat edilirse bu denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak magma gibi programların limitine oldukça yakındır. Daha büyük k değerleri için çözüm bulmak çok zordur. Çünkü $f(q)$ nın katsayıları k' ya bağlı olup üsler artış göstermektedir. Buradaki çözüm p^{k-1} biçimindeki ifadeleri parametreler olarak ele alıp uygun bir bilgisayar programı yardımıyla k yı bulmaktır. Ancak bu hesaplamayı bilgisayarda yapmak mümkün değildir. Bu hesaplamayı mümkün hale getirebilmek için (Xiong, 2025)'de aşağıdaki strateji incelenmiştir.

A tamlık bölgesi üzerinde $x_1, \ldots, x_{n-1}$ gibi $n-1$ tane değişkene sahip n tane $f_{1,1}, \ldots, f_{1,n}$ polinomlarını göz önüne alalım öte yandan B bir tamlık bölgesi olmak üzere $\phi: A \to B$ homeorfizmini dikkate alalım, bu homeomorfizm altında $f_{1,i}$ nin görüntüsü $\tilde{f}_{1,i}$ olsun.

k ve L ile sırasıyla A ve B tamlık bölgelerinin kesirler cisimleri olsun. $1 \leq i \leq j-1 < n$ için

$f_{i+1,j}$ yi $f_{i,i}$ ve $f_{i,j}$ yi j nin x_i ye göre sonucu olarak tanımlayalım. Eğer $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \bar{K}^{n-1}$ tüm $f_{1,i} = 0$ için bir çözüm ise $(a_{i+1}, \ldots, a_{n-1})$ de tüm $f_{i+1,j} = 0$ çözüm olur.

Eğer $f_{n,n} \in A$ sıfırdan farklı ise bu durumda verilen denklem sisteminin $\bar{K}$ üzerinde çözümü yoktur. Bu hesaplamalar için Burnstein teoremi kullanılmıştır. Bu teorem hakkında detaylı bilgi (Gelfond, vd., 1994)'de bulunabilir.

Bazı özel polinomlar için bu yok etme süreci belli bir noktaya geldiğinde

$$f_{i,i} = \cdots = f_{i,n} = 0$$

elde edilmesine sebep olur. Hesaplamalarda bu durum da dikkate alınmıştır.

3.2. k' nın Küçük Değerleri İçin Çözümler

$\mathbb{P}$ ile bir asalın kuvvetlerinin kümesini gösterelim. Yani

$$\mathbb{P} = \{p^n : p \text{ asal}, n > 0\}$$

olur.

$$f(q) = E_{2k}(q), \quad g(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \, q^n$$

olmak üzere

$$f(q)g(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n} \, q^n$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $n \geq 2$ için

$$c_{k,n} = b_n - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{2k-1}\,(i) b_{n-i}$$

elde edilir, $c_{k,mn} = c_{k,m} c_{k,n}$ olduğu kullanılarak $(m, n) = 1$ olmak üzere

$$\left(b_m - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{i=1}^{m-1}\sigma_{2k-1}(i)b_{m-i}\right)\left(b_n - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{2k-1}(i)b_{n-i}\right)$$
$$= b_{mn} - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{i=1}^{mn-1}\sigma_{2k-1}(i)b_{mn-i}$$

olur. Eşitliğin sol tarafındaki parantezler açılıp $b_{mn} = b_m b_n$ olduğu kullanılarak **(2.1)** olur.

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{2k-1}(i)b_{n-i}$$

şeklindedir.

$(m,n) = 1$ olmak üzere

$$E_{k,mn} = S_{k,mn} - \left(b_m S_{k,n} + b_n S_{k,m} - \frac{4k}{B_{2k}} S_{k,m} S_{k,n}\right)$$

olarak tanımlansın o halde çözülmesi istenilen denklem sistemi b_n değişkenlerinden ve $E_{k,n}$ ile $b_{mn} - b_m b_n$ polinomlarından oluşur. $n \leq 40$ olmak üzere tüm b_n ve $E_{k,n}$'leri bulunduran alt denklem sistemi göz önüne alınsın o halde

$$\left(\{b_n\}_{n\leq 40}; \{E_{k,n}\}_{n\leq 40} \cup \{b_{mn} - b_m b_n\}_{mn\leq 40}\right)$$

Sistemi yok etme metoduyla çözmek istiyoruz. İlk olarak aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 3.2.1. (Xiong, 2025) $l \in \mathbb{P}$ ve $n \notin \mathbb{P}$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\frac{n}{2} < l < n$ ise bu takdirde

$$\mathrm{coef}_{b_l}(E_{k,n}) = \sigma_{2k-1}(n-l)$$

b_l $E_{k,n}$'de lineer olarak yer alır. Özel olarak eğer $p \in \mathbb{P}$ ve $p+1 \notin \mathbb{P}$ ise bu takdirde

$\mathrm{coef}_{b_p}(E_{k,p+1}) = 1$ olmak üzere $E_{k,p+1}$, b_p'de lineer olarak yer alır.

İspat. $(x,y) = 1$ olmak üzere $n = xy$ olsun, bu takdirde

$$E_{k,n} = S_{k,n} - \left(b_x S_{k,y} + b_y S_{k,x} - \frac{4k}{B_{2k}} S_{k,x} S_{k,y}\right)$$

olur.

$\max\{x, y\} \leq n/2 < l$ olduğundan b_l değişkeni $S_{k,x}, S_{k,y}$ veya $S_{k,x}, S_{k,y}$ de ortaya çıkmaz. Yalnızca $S_{k,n}$ de karşımıza çıkabilir, hipotez gereği

$$\mathrm{coef}_{b_l}\left(S_{k,n}\right) = \sigma_{2k-1}(n - l)$$

olduğundan ispat biter.

Problemi çözebilmek için aşağıdaki adımlar izlenecektir.

1.Adım: Bir Asalın Kuvveti Olmayan İndislerin Elenmesi

$b_{m,n} = b_m b_n$ olduğu kullanılarak bir eleme yapılabilir. Gerçekten de $b_{m,n}$ gördüğümüz yerleri $b_m b_n$ ile değiştirerek $b_{m,n} = b_m b_n$ biçimindeki tüm polinomları eleyebilir. Ayrıca $n \notin \mathbb{P}$ olmak üzere b_n değişkenlerini kaldırabiliriz.

2.Adım Lineer Elenenler

Teorem 2.1 gereği $p \in \mathbb{P}$ ve $p + 1 \notin \mathbb{P}$ olduğu durumda b_p terimi $E_{k,p+1}$ Einsentein serisinde lineer olarak ortaya çıkar. b_p için $E_{k,p+1} = 0$ eşitliğini çözerek $\{b_n\}_{n<p}$ dizisindeki b_p terimlerini ifade edebiliriz. Böylece denklem sisteminde hem b_p'yi hemde $E_{k,p+1}$ yok edebiliriz, buna ilave olarak $b_8, E_{k,15}$ de b_{16}, $E_{k,21}$ de ve $b_{31}, E_{k,34}$ ‘de lineer olarak yer alır.

Bu ise bu çiftleri de elememizi sağlar, tüm bunlar beraber dikkate alındığında denklem sisteminde aşağıdaki çiftleri elemiş oluruz.

$$\begin{gathered}(b_5, E_{k,6}), (b_8, E_{k,15}), (b_{11}, E_{k,12}), (b_{13}, E_{k,14}), (b_{16}, E_{k,21}), (b_{17}, E_{k,18}), (b_{19}, E_{k,20}) \\ (b_{23}, E_{k,24}), (b_{25}, E_{k,26}), (b_{27}, E_{k,28}), (b_{29}, E_{k,30}), (b_{31}, E_{k,34}), (b_{32}, E_{k,33}), (b_{37}, E_{k,38})\end{gathered}$$

Böylece indirgenmiş sistem ;

$$\{b_2, b_3, b_4, b_7\}, \quad \{E_{k,22}, E_{k,35}, E_{k,36}, E_{k,39}, E_{k,40}\}$$

şeklindeki değişkenlerden ve polinomlardan oluşur. Bu noktada denklem sistemindeki polinom sayısı bilinmeyen sayısını geçmektedir.

3.Adım Kalanlar Yardımıyla Eleme

Geriye kalan değişkenler artık herhangi bir $E_{k,n}$ de lineer olarak yer almazlar. Bu noktada kalanları devreye sokacağız. Aşağıdakileri tanımlayalım:

$$F_{k,35} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{k,22}, E_{k,35}), \quad F_{k,36} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{k,22}, E_{k,36})$$
$$F_{k,39} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{k,22}, E_{k,39}), \quad F_{k,40} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{k,22}, E_{k,40})$$

Böylece aşağıdaki denklem sistemi elde edilir. Dikkat edilirse b_7 elenmiş olur. Sıradaki adımda aşağıdaki değişkenleri tanımlayalım

$$G_{k,36} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{k,35}, F_{k,36})$$
$$G_{k,39} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{k,35}, F_{k,39})$$
$$G_{k,40} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{k,35}, F_{k,40})$$

b_4'ü eleyelim.

$$(\{b_2, b_3\}; \{G_{k,36}, G_{k,39}, G_{k,40}\})$$

denklem sistemi elde edilir.

Dikkat edilirse $\mathrm{Res}_{b_3}(G_{k,i}, G_{k,j}) = 0$' dır. Gerçekten de $n \in \{22,35,36,39,40\}$ için $(x, y) = 1$ olmak üzere $n = (xy)$ yazarak $\min(x, y) < 7$ olduğu görülür. Böylece $E_{k,n}$'deki b_7 katsayısı bu özellikleri n ler için lineer olur. O halde $P_{k,n}$ ve $Q_{k,n}$ b_7 den bağımsız olmak üzere

$$E_{k,n} = P_{k,n} b_7 + Q_{k,n}$$

yazılabilir. SageMath programında yazılacak uygun bir kod yardımıyla

$$\deg_{b_4}(P_{k,22}) = 1,$$

$$\deg_{b_4}(P_{k,n}) = 2(n \in \{35,36,39,40\}),$$

$$\deg_{b_4}(Q_{k,n}) = 2(n \in \{22,35,36,39,40\})$$

olarak hesaplanır. Öte yandan $E_{k,22}$

$$A = ab_7 + bb_4^2 + cb_4 + d$$

haline gelirken $n \in \{35,36,39,40\}$ için her bir $E_{k,n}$ b_4, b_7 katsayılarından bağımsız olmak üzere

$$B = (a'b_4 + e')b_7 + (b'b_4^2 + c'b_4 + d')$$

şeklinde yazılabilir. B için verilen iki farklı polinom karşılaştırılarak bu polinomlar aşağıdaki şekilde adlandırılabilir.

$$B_1 = (a_1'b_4 + e_1')b_7 + (b_1'b_4^2 + c_1'b_4 + d_1'),$$

$$B_2 = (a_2' b_4 + e_2') b_7 + (b_2' b_4^2 + c_2' b_4 + d_2')$$

Bu takdirde herhangi bir $G_{k,n}$

$$G = \mathrm{Res}_{b_4}\left(\mathrm{Res}_{b_7}(A, B_1), \mathrm{Res}_{b_7}(A, B_2)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli hesaplamalar yapılarak a^2'nin G'nin bir çarpanı olduğu bulunur.

Böylece $\left(P_{k,22}\right)^2$ ifadesi $n \in \{36{,}39{,}40\}$. $G_{k,n}$' yi böler. Nihayet $\deg_{b_3}\left(P_{k,22}\right) > 0$ olduğundan $i, j \in \{36{,}39{,}40\}$ için $\mathrm{Res}_{b_3}\left(G_{k,i}, G_{k,j}\right) = 0$ olduğu sonucuna varılır.

Aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım:

$$H_{k,36} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(\frac{G_{k,39}}{\left(P_{k,22}\right)^2}, \frac{G_{k,36}}{\left(P_{k,22}\right)^2}\right)$$
$$H_{k,40} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(\frac{G_{k,39}}{\left(P_{k,22}\right)^2}, \frac{G_{k,40}}{\left(P_{k,22}\right)^2}\right)$$

Bu durumda problemi iki farklı denklem sistemiyle çözeceğiz:

$$\mathrm{sys}_{k,1}\colon \left(\{b_2\}; \{H_{k,36}, H_{k,40}\}\right),$$
$$\mathrm{sys}_{k,2}\colon \left(\{b_2, b_3, b_4, b_7\}; \{P_{k,22}, Q_{k,22}, E_{k,35}, E_{k,36}, E_{k,39}, E_{k,40}\}\right)$$

4.Adım

$k = 2$ durumu dikkat edilirse $\mathrm{sys}_{2,1}, H_{2,36}$ ve $H_{2,40}$ sadece b_2 değişkeni bulunduran polinomlardır. Ortak bölenlerin en büyüğü alınarak

$$b_2 = -528, -288, -24, -8{,}18{,}216$$

elde edilir.

$\mathrm{sys}_{2,2}$ için aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım;

$$R_{2,22} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(P_{2,22}, Q_{2,22}\right)$$
$$R_{2,35} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(P_{2,22}, E_{2,35}\right)$$
$$R_{2,36} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(P_{2,22}, E_{2,36}\right)$$
$$R_{2,39} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(P_{2,22}, E_{2,39}\right)$$

ardından

$$T_{2,36} = \mathrm{Res}_{b_7}\left(R_{2,35}, R_{2,36}\right)$$
$$T_{2,39} = \mathrm{Res}_{b_7}\left(R_{2,35}, R_{2,39}\right)$$

ve

$$U_{2,36} = \mathrm{Res}_{b_4}(R_{2,22}, T_{2,36})$$
$$U_{2,39} = \mathrm{Res}_{b_4}(R_{2,22}, T_{2,39})$$

olarak tanımlansın Sagemath yardımıyla $(U_{2,36}, U_{2,39}) = 1$ olduğu bulunur. Bu ise $\mathrm{sys}_{2,2}$'nin çözüm olmadığı gösterilir.

Teorem 3.2.2. (Xiong, 2025) $g(q)$ için $k = 2$ durumundaki bütün çözümler aşağıdaki gibidir.

$$\Delta_{12}(q) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 + \cdots$$
$$\Delta_{16}(q) = q + 216q^2 - 3348q^3 + 13888q^4 + 52110q^5 + \cdots$$
$$\Delta_{18}(q) = q - 528q^2 - 4284q^3 + 147712q^4 - 1025850q^5 + \cdots$$
$$\Delta_{22}(q) = q - 288q^2 - 128844q^3 - 2014208q^4 + 21640950q^5 + \cdots$$
$$\varphi_8(q) = \eta(z)^8\eta(2z)^8 = q - 8q^2 + 12q^3 + 64q^4 - 210q^5 + \cdots$$
$$\frac{1}{480\pi i} \cdot \frac{dE_4}{dz}(q) = q + 18q^2 + 84q^3 + 292q^4 + 630q^5 + \cdots$$

Burada $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$ ve $\varphi_8(q)$ 8 ağırlıklı ve 2 seviyeli normalleştirilmiş cusp formdur.

Yukarıda verilen $\varphi_8(q)$'nun Fourier katsayıları online modüler form veri tabanı olan LMFDB' de (2.8.a.a) etiketiyle bulunabilir. Teorem ispatına geçmeden önce aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.2.3. (Xiong, 2025) hem $g(q)$ hemde $E_{2k}(q)g(q)$ çarpımsal fonksiyonları olmak üzere eğer

$$g(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} b_n\, q^n$$

ise bu takdirde (g, q) fonksiyonu ilk 8 Fourier katsayısı yardımıyla tek türde verilir.

Teorem 3.2.2'nin İspatı.

İlk olarak yukarıda listelenen altı serinin çözümü olduğunu görelim. Dikkat edilirse

$$\dim M_4 = \dim S_{12} = \dim S_{16} = \dim S_{18} = \dim S_{20} = \dim S_{22} = \dim S_{26} = 1$$

şeklindedir. Buradan

$$E_4(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{16}(q)$$
$$E_4(q)\Delta_{16}(q) = \Delta_{20}(q)$$
$$E_4(q)\Delta_{18}(q) = \Delta_{22}(q)$$
$$E_4(q)\Delta_{22}(q) = \Delta_{26}(q)$$

elde edilir. Böylece ilk dört seri denklem sisteminin çözümü olur.

$$E_4 \in M_4(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \text{ ve } \varphi_8 \in S_8(\Gamma_0(2))$$

olduğu kullanılarak

$$E_4(q)\varphi_8(q) \in S_{12}(\Gamma_0(2))$$

elde edilir.

$$\Delta_{12}(q) + 256\Delta_{12}(q^2)$$

modüler formu 12 ağırlıklı iki seviyeli bir cusp formdur.

$$E_4(q)\varphi_8(q) \text{ ve } \Delta_{12}(q) + 256\Delta_{12}(q^2)$$

modüler formlarının Fourier katsayılarının ilk üçü kıyaslanacak olursa birbiriyle aynı olduğu görülür. Diğer yandan $S_{12}(\Gamma_0(2))$ uzayı için Sturm sınırı 3'tür. Böylece verilen iki cusp formunun eşit olduğu görülür, yani

$$E_4(q)\varphi_8(q) = \Delta_{12}(q) + 256\Delta_{12}(q^2)$$

olur.

$\Delta_{12}(q)$ fonksiyonu çarpımsal olduğu için $\Delta_{12}(q) + 256\Delta_{12}(q^2)$ fonksiyonu da çarpımsaldır ve böylece $\varphi_8(q)$ bir çözüm olur. Ardından $E_4(q)^2 = E_8(q)$ özdeşliği kullanılarak ve z ye görev türev alınarak

$$2E_4(q)\frac{dE_4}{dz}(q) = 2\pi i q E_8'(q)$$

elde edilir. $qE_8'(q)$ çarpımsal olduğundan uygun bir değişken değişimi yardımıyla $\frac{dE_4}{dz}(q)$ fonksiyonunda bir çözüm olduğu görülür.

Şimdi $k = 2$ için tüm çözümlerin bunlar olduğunu göstereceğiz sırada $G_{2,36}$ ve $G_{2,39}$ da

$$b_2 = -528, -288, -24, -8, 18, 216$$

yazılarak ve $\left(G_{2,36}, G_{2,39}\right)$ hesaplanarak

$$b_3 = -4284, -128844, 252, 12, 84, -3348$$

olarak bulunur, bu şekilde devam edilerek katsayılar için aşağıdaki tablo elde edilir.

Tablo 3.1. Katsayı tablosu

	b_2	b_3	b_5	b_7	b_8
$g_1(q)$	-24	252	4830	-16744	84480
$g_2(q)$	216	-3348	52110	2822456	-4078080
$g_3(q)$	-528	-4284	-1025850	3225992	-8785920
$g_4(q)$	-288	-128844	21640950	-768078808	1184071680
$g_5(q)$	-8	12	-210	1016	-512
$g_6(q)$	18	84	630	2408	4680

Tabloya dikkat edilirse $g_1(q), \ldots, g_6(q)$ serilerinin ilk 8 terimiyle yukarıda verilen 6 serinin ilk 8 terimi birbiriyle eşleşir. Lemma 2.3 gereği bu seriler ilk 8 terimleri aynı olduğu için birbirlerine eşit olur. Bu ise ispatı bitirir.

Bu metodu $3 \leq k \leq 20$ için uygulayarak aşağıdaki özdeşlikler elde edilir.

Teorem 3.2.4. (Xiong, 2025) $f(q) \in \{E_{2k}(q): 3 \leq k \leq 20\}$ için çözümler aşağıdaki gibidir:

$$E_6(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{18}(q)$$
$$E_6(q)\Delta_{16}(q) = \Delta_{22}(q)$$
$$E_6(q)\Delta_{20}(q) = \Delta_{26}(q)$$
$$E_8(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{20}(q)$$
$$E_8(q)\Delta_{18}(q) = \Delta_{26}(q)$$
$$E_{10}(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{22}(q)$$
$$E_{10}(q)\Delta_{16}(q) = \Delta_{26}(q)$$
$$E_{14}(q)\Delta_{12}(q) = \Delta_{26}(q)$$

3.3.Ekstrem Monomialler ve Newton Poligonları

Önceki bölümlerde küçük k değerleri için çözümler bulunmuştu, burada ise daha büyük k değerleri için farklı bir metotta bulunmaktadır. Çünkü mevcut metot her bir kalanı direkt olarak hesaplamayı imkânsız hale getirmektedir. İlk olarak aşağıdaki tanımlarla başlayalım.

Tanım 2.3.1. $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ olmak üzere $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \, x^\alpha$, olsun. Her bir $i = 1,2, \cdots, n$ için eğer $\beta_i \geq \alpha_i$ ve en az bir i için $\beta_i > \alpha_i$ oluyorsa

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) > (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

olarak yazılır.

Kabul edelim ki $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ çok değişkenli polinomları jenerik katsayılarına sahip iki polinom olsun. Bu taktirde kalan tanımı gereği $\mathrm{Res}_{x_n}(f, g)$'nin ekstrem monomialleri tarafından belirlenir.

Tanım 3.3.2. $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ olmak üzere

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \, x^\alpha$$

sadece sonlu sayıda c_α katsayısı sıfırdan farklı olmak üzere bir cisim (veya halka) üzerinde tanımlı 0 dan farklı bir polinom olsun, bu durumda f' nin Newton poligonu (veya daha genel olarak Newton politopu)

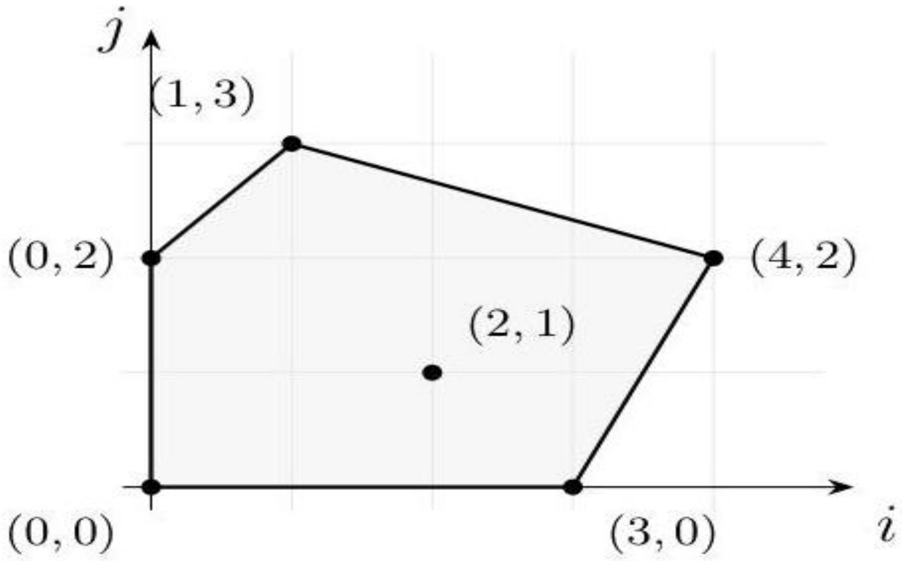
$$N(f) := \mathrm{Conv}(\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : c_\alpha \neq 0\})$$

şeklinde sıfırdan farklı monomiallerin üstel vektörlerinin $\mathbb{R}^n$ deki dış bükey gövdesi olarak tanımlanır.
$n = 2$ durumda bu dışbükey gövde $\mathbb{R}^2$ de düzlemsel poligon belirtir. Buna ise $f(x, y)$ nin Newton poligonu denir.

Örnek 3.3.3.

$$f(x, y) = 3x^4y^2 + 2x^3 + 5xy^3 + 7y^2 + x^2y + 1$$

olsun. Bu durumda $N(f)$ poligonu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Poligon örneği

Bu durumda f' nin ekstrem monomiyelleri

$$x^4y^2, \quad x^3, \quad xy^3, \quad y^2$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.4. $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda P ve Q nun Minkowski toplamı

$$P + Q := \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}$$

olarak tanımlanır. Eğer P ve Q dış bükey poligonlarsa bu durumda $P + Q$ da dış bükeydir.

Dikkat edilirse her bir $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ her bir çözümü $\mathrm{Res}_y(f, g) \in \mathbb{C}[x]$ polinomlarının köküne karşılık geldiğinden aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir.

Teorem 3.3.5. (Xiong, 2025) $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ Newton polinomları sırasıyla $P = N(f)$ ve $Q = N(g)$ olan sıfırdan farklı polinomlar olsun. Bu taktirde $(\mathbb{C}^*)^2 := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ içerisindeki izole edilmiş ortak sıfırların sayısı katlılıkları sayılmak üzere

$$\#\{(x, y) \in (\mathbb{C}^*)^2 : f(x, y) = g(x, y) = 0\} \leq \mathrm{Area}(P + Q) - \mathrm{Area}(P) - \mathrm{Area}(Q)$$

olur. Üstelik bu sınır genel katsayılar için elde edilir.

Örnek 3.3.6.

$$f(x, y) = 3x^2y + 2y^2 + 2,$$
$$g(x, y) = x^3 + 4x^2y + y^3 + 1$$

olarak verilsin. Bu takdirde

$$P = N(f) = Conv\{(0,0), (0,2), (2,1)\}$$
$$Q = N(g) = Conv\{(0,0), (0,3), (3,0)\}$$

olur. Minkowski toplamları ise

$$P + Q = Conv\{(0,0), (5,1), (3,0), (0,5), (2,4)\}$$

köşelerine sahiptir. *P*, *Q* ve *P* + *Q*'nun alanları ise sırasıyla 2, 9/2 ve 31/2'dir. Böylece

$$\deg_x Res_y(f, g) = \frac{31}{2} - 2 - \frac{9}{2} = 9$$

olur.

Doğrudan hesaplama yardımıyla

$$\mathrm{Res}_y(f, g) = -27x^9 - 48x^7 + 53x^6 + 36x^5 + 80x^4 + 16x^3 - 28x^2 + 16$$

elde edilir ki bu da $\deg_x \mathrm{Res}_y(f, g) = 9$ olmasını teyit eder.

3.4. Büyük *k* Değerleri İçin Çözümler

Önceki bölümlerde $8 \leq k \leq 20$ çözüm olmadığı görülmüştü. Şimdi ise bu sonucu $k \geq 8$ durumuna genişletecek olup $k \geq 8$ için çözüm olmayacağı gösterilecektir. İlk olarak gerekli hazırlıkları yapalım. p asal sayı olmak üzere x_0 ve her bir x_p cebirsel olarak bağımsız değişkenler olsun ve

$$E(q) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n\, q^n \in R[[q]]$$

formal kuvvet serisi tanımlayalım. Buradaki katsayılar çarpımsal olarak aşağıdaki gibi tanımlansın

$$y_1 = 1$$
$$y_{p^n} = \sum_{i=0}^{n} x_p^i$$
$$\big((m,n) = 1\big) \text{ olmak üzere}$$
$$y_{mn} = y_m y_n$$

Her bir k pozitif tam sayısı için aşağıdaki özelleştirme dönüşümlerini tanımlayalım:

$$\phi_k : R[[q]] \to \mathbb{C}[[q]], \quad x_0 \mapsto -\frac{B_{2k}}{4k}, \quad x_p \mapsto p^{2k-1}$$

Tanım gereği $\phi_k(y_n) = \sigma_{2k-1}(n)$ olup $\phi_k(E(q))$ değeri $E_{2k}(q)$ nin sıfırdan farklı bir skaler ile çarpımıdır.

Burada ikinci bölümde olduğu gibi denklem sistemi üzerinde eleme yapılarak çözüme gidilecektir ancak burada hesaplamalar $\mathbb{R}$ üzerinde yapılacaktır. $(m,n) = 1$ için $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i\, b_{n-i}$ olmak üzere

$$E_{mn} = S_{mn} - (b_m S_n + b_n S_m - x_0 S_m S_n)$$

olarak tanımlayalım. Şimdi

$$(\{b_n\}_{n \leq 40}; \{E_n\}_{n \leq 40} \cup \{b_{mn} - b_m b_n\}_{mn \leq 40})$$

denklem sistemini göz önüne alalım. İspata geçmeden önce aşağıdaki lemma verilcektir.

Lemma 3.4.1. (Xiong, 2025) $f \in \mathbb{R}$ değişkenleri $x_0, x_2, x_3, \ldots$ olan sabit olmayan bir polinom olsun, bu takdirde yeterince büyük k değerleri için $\phi_k(f) \neq 0$ olur.

Daha önce olduğu gibi $n \notin \mathbb{P}$ olmak üzere $b_{mn} = b_m b_n$ ilişkisi kullanılarak tüm b_n değişkenleri elenecektir, bu degişken değişimin ardından sadece $n \in \mathbb{P}$ özelliğindeki b_n değişkenleri kalacaktır.

Lemma 2.1 gereği $p + 1 \notin \mathbb{P}$ özelliğindeki her bir $p \in \mathbb{P}$ için b_p katsayısı E_{p+1}'de $\mathrm{coef}_{b_p}\left(E_{p+1}\right) = y_{p+1-p} = y_1 = 1$ olacak şekilde lineer olarak ortaya çıkar. Dikkat edilirse herhangi bir ϕ_k özelleştirmesi altında b_p hiçbir zaman sıfır olamaz. Bu nedenle ilk olarak $E_{p+1} = 0$ denklemi çözülecek ve çıkan değer, kalan denklem sistemine yazılarak her bir b_p katsayısı elenecektir, bu işlemler yapıldıktan sonra

$$(\{b_2, b_3, b_4, b_7, b_8, b_{16}, b_{31}\}; \{E_{15}, E_{21}, E_{22}, E_{34}, E_{35}, E_{36}, E_{39}, E_{40}\})$$

indirgenmiş sistemi elde edilir.

Şimdi b_8, b_{16} ve b_{31} katsayılarını eleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki polinomları tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
A &= -x_2^4 + 2x_2^3x_3 - x_2^2x_3^2 + x_2^2x_5 - x_2^2 - 2x_2x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_5 - 2x_2 \\
&\quad -x_3^2 - 2x_3 + x_5 + x_7 \\
B &= -2x_2^3 + x_2^2x_3 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2 + x_3 + x_5 \\
C &= -x_2^2 - 2x_2 + x_3
\end{aligned}$$

SageMath'da yapılan hesaplama yardımıyla

$$\begin{gathered}
\deg_{b_8}(E_{15}) = 1, \mathrm{coef}_{b_8}(E_{15}) = Ax_0^2 \\
\deg_{b_{16}}(E_{21}) = 1, \mathrm{coef}_{b_{16}}(E_{21}) = ABx_0^3 \\
\deg_{b_{31}}(E_{34}) = 1, \mathrm{coef}_{b_{31}}(E_{34}) = ABCx_0^4
\end{gathered}$$

olarak bulunur.

Böylece artık b_8, b_{16} ve b_{31} katsayıları elenebilir, bu elemelerin ardından denklem sistemi

$$(\{b_2, b_3, b_4, b_7\}; \{E_{22}, E_{35}, E_{36}, E_{39}, E_{40}\})$$

halini alır.

Şimdi aşağıdaki kalanları tanımlayalım:

$$F_{35} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{22}, E_{35}), \quad F_{36} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{22}, E_{36}), \quad F_{39} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{22}, E_{39}), \quad F_{40} = \mathrm{Res}_{b_7}(E_{22}, E_{40})$$

ve böylece

$$G_{36} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{35}, F_{36}), \quad G_{39} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{35}, F_{39}), \quad G_{40} = \mathrm{Res}_{b_4}(F_{35}, F_{40})$$

olur.

Burada b_7 E_{22}' de lineer olup P_{22} ve Q_{22} b_7' nin seçiminden bağımsız olmak üzere

$$E_{22} = P_{22} b_7 + Q_{22}$$

olarak yazılsın.

$k = 2$ durumunda olduğu gibi $n \in \{36,39,40\}$ için $(P_{22})^2$ her bir G_n' i böler, o halde aşağıdaki ifadeleri tanımlayabiliriz:

$$H_{36} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(\frac{G_{39}}{(P_{22})^2}, \frac{G_{36}}{(P_{22})^2}\right), \quad H_{40} = \mathrm{Res}_{b_3}\left(\frac{G_{39}}{(P_{22})^2}, \frac{G_{40}}{(P_{22})^2}\right).$$

O halde aşağıdaki iki alt denklem sistemi elde edilir:

$$\mathrm{sys}_1: (\{b_2\}; \{H_{36}, H_{40}\}), \quad \mathrm{sys}_2: (\{b_2, b_3, b_4, b_7\}; \{P_{22}, Q_{22}, E_{35}, E_{36}, E_{39}, E_{40}\})$$

Bu iki denklem sisteminin çözümünün olmadığı (Xiong, 2025)'de SageMath programı kullanılarak Newton polinomları ve Burnstein sınırı yardımıyla gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

Bernstein, D. N. (1975). The number of roots of a system of equations. *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, 9*(3), 1–4. (English translation: *Functional Analysis and Its Applications, 9*(3), 183–185.)

Cohen, H. (2020). *Algebraic triangle groups, hauptmoduln, complex multiplication, and hypergeometric functions*(Preprint).

Cohen, H. (2021). *Factorizations of Eisenstein series of level up to 4* (arXiv:2103.07698) [Preprint]. arXiv.

Cohen, H., & Strömberg, F. (2017). *Modular forms: A classical and computational introduction*. Providence, RI: American Mathematical Society. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 179)

Duke, W. (1999). When is the product of two Hecke eigenforms an eigenform? In K. Győry, H. Iwaniec, & J. Urbanowicz (Eds.), *Number theory in progress* (Vol. 2, pp. 737–741). de Gruyter.

Emmons, B. A. (2005). Products of Hecke eigenforms. *Journal of Number Theory, 115*(2), 381–393.

Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., & Zelevinsky, A. V. (1994). *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser.

Ghate, E. (2002). On products of eigenforms. *Acta Arithmetica, 102*(1), 27–44.

Johnson, M. L. (2013). Hecke eigenforms as products of eigenforms. *Journal of Number Theory, 133*(7), 2339–2362.

Kaneko, M., & Zagier, D. (1995). A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms. In E. Looijenga et al. (Eds.), *The moduli space of curves* (Texel Island, 1994) (pp. 165–172). Birkhäuser.

Larsen, M. (2021). Multiplicative series, modular forms, and Mandelbrot polynomials (with an appendix by A. Larsen). *Mathematics of Computation, 90*(327), 345–377.

LMFDB Collaboration. (n.d.). Newform orbit 2.8.a.a. *LMFDB – Modular forms*. https://www.lmfdb.org/ModularForm/GL2/Q/holomorphic/2/8/a/a/

Minding, F. (1841). Über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 22*, 178–183.

Stein, W. (2007). *Modular forms: A computational approach*. Providence, RI: American Mathematical Society.
(Graduate Studies in Mathematics, Vol. 79)

Sturm, J. (1987). On the congruence of modular forms. In *Number theory (New York, 1984–1985)* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1240, pp. 275–280). Springer.

Xiong, B. (2025). *Product of Eisenstein series with multiplicative power series* (arXiv:2511.01436) [Preprint]. arXiv.