ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK
ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

SIP ÖZELLİĞİNE SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ ADS MODÜLLER

Kübra ÜLGER KÖSE
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

BİLECİK, 2019
Ref. No:10267979

ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK
ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

SIP ÖZELLİĞİNE SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ ADS MODÜLLER

Kübra ÜLGER KÖSE
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

BİLECİK, 2019

ESKİŞEHİR ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

GENERALIZED ADS MODULES WITH THE SIP

Kübra ÜLGER KÖSE

Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Figen TAKIL MUTLU

BILECIK, 2019

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 12/06/2019 tarih ve 30-06 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 08/07/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Kübra ÜLGER KÖSE'nin " SIP Özelliğine Sahip Genelleştirilmiş Ads Modüller " başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

ÜYE : Doç. Dr. Fatih KARABACAK

ÜYE : Doç. Dr. İlker İNAM

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../........ tarih ve ..../............ sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlamasında, sunulmasında, başında ve sonunda; heran emek veren, ilgi ve alakalarını hiç eksik etmeyen saygı değer hocam, Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU' ya sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca benim tüm eğitim hayatımı tek başına sırtlayan, bana her daim güven veren, yol gösteren fedakar annem Gülsün SÜZGÜN'e bana verdiği her emek için çok teşekkür ederim.

Son olarak kıymetli eşim Ozan KÖSE'ye desteği ve yardımları için çok teşekkür ederim.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

11/07/ 2019

Kübra ÜLGER KÖSE

SIP ÖZELLİĞİNE SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ ADS MODÜLLER

ÖZET

1970’ de Fuchs tarafından tanımlanan, modüller için mutlak dik toplanan özelliği (absolute direct summand property, kısacası Ads) son yıllarda revaçta olan bir araştırma konusudur. 1986 yılında Wilson modüller için dik toplanan arakesit özelliği (summand intersection property ya da kısacası SIP) kavramını tanımladıktan sonra birçok matematikçi bu özellik üzerinde araştırmalar yaptı ve halen yapmaktadır. Bu iki kavram her ne kadar bağlantılıymış gibi gözüksede birbirinden tamamen farklı kavramlardır. 2015 yılında Takıl Mutlu, hem Ads hem de SIP özelliğini sağlayan yeni bir modül sınıfı olan SA-modül kavramını literatüre kazandırmıştır.

Bu tezde, Ads ve SIP özelliğini sağlayan modül sınıfının bir genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu amaçla önce çalışmamızda kullanacağımız modül teorinin temel kavramları ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, SA modüller olarak bilinen Ads ve SIP özelliğini sağlayan modül sınıfının bazı özellikleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Son bölümde ise, SA modüllerin bir genelleştirmesi olan SA-extending modüller tanımlanmıştır. Keyfi bir halka üzerinde tanımlı bir modülün SA-extending olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Ayrıca, iki SA-extending modülün dik toplamının SA-extending olması için gerekli koşul verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Ads; SIP; CS; İnjektif Modül; Yarı-İnjektif Modül.

GENERALIZED ADS MODULES WİTH THE SIP

ABSTRACT

In 1970, Fuchs defined modules for the absolute direct summand property (Ads) in recent years is a subject of popular research. After defining the summand intersection property (SIP) for Wilson modules in 1986, many mathematicians have done many researches on this feature and still do it. Although these two concepts seem to be connected, they are completely different concepts. In 2015, Takıl Mutlu added the concept of SA-module, which is a new module class that provides both Ads and SIP property.

In this thesis, a generalization of the class of modules that provides Ads and SIP property is made. Firstly, basic notions and theorems in the module theory which will be used in this work are given.

Then, some of the properties of the class of module that provides the Ads and SIP property known as SA modules are given with their proofs.

Finally, SA-extending modules, as a generalization of SA modules, are defined. Necessary and sufficient conditions for a module on an arbitrary ring to be SA-extending are given. Also a condition for the direct sum of two SA-extending modules to be an SA-extending module is provided.

Keywords: Ads; SIP; CS; Injective Module; Quasi-Injective Module.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

1	$\in$	Eleman
2	$\exists$	En az bir
3	$\forall$	Her
4	$\subseteq$	Alt küme
5	$\cap$	Kesişim
6	$\Rightarrow$	İse
7	$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
8	$\cong$	İzomorf
9	$\ker f$	f ’nin çekirdeği
10	$\operatorname{Im} f$	f ’nin görüntüsü
11	$\leq$	Alt modül
12	$\leq_d$	Dik toplanan alt modül
13	$\leq_e$	Essential alt modül
14	$\leq_c$	Tümleyen alt modül
15	$\bigoplus_{i\in I} M_i$	M_i ’lerin dik toplamı
16	$\prod_{i\in I} M_i$	M_i ’lerin dik çarpımı
17	$End_R(M)$	M ’nin $R-$ endomorfizmalar halkası
18	$E(M)$	M ’nin injektif hull’ı
19	$\mathbb{Z}$	Tam sayılar halkası
20	$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar halkası

1.GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

1.1 Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller

Tanım 1.1.1. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. $N \cap N' = 0$ ve $M = N + N'$ olacak şekilde $\exists\ N' \leq M$ varsa M'ye N ile N''nün dik toplamı ve N ile N' alt modüllerine de M'nin **dik toplananları** denir. $M = N \oplus N'$ ve $N, N' \leq_d M$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün alt modülleri $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$ şeklindedir. $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq 0$ olduğundan $n\mathbb{Z}$ ve $m\mathbb{Z}$ alt modülleri dik toplanan şeklinde yazılmaz.

Tanım 1.1.2. Bir M $R-$modülünü $M = N_1 \oplus N_2$ şeklinde yazılabilecek herhangi N_1, N_2 alt modülleri yoksa M modülüne **ayrıştırılamaz (indecomposable)**'dır denir.

Örneğin, Rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}-$modül olarak ayrıştırılamazdır. Eğer $\mathbb{Q}$ ayrıştırılamaz değilse $\mathbb{Q} = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde sıfır ve $\mathbb{Q}$'dan farklı N_1, $N_2 \leq \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $0 \neq \frac{a}{b} \in N_1$ ve $0 \neq \frac{a_1}{b_1} \in N_2$ için

$$0 \neq b.a_1.\frac{a}{b} = b_1.a.\frac{a_1}{b_1} \in N_1 \cap N_2 \neq 0$$

olur ki bu $N_1 \cap N_2 = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $\mathbb{Q}$ ayrıştırılamazdır.

Tanım 1.1.3. M bir $R-$modül olsun. A, $B \leq M$ olsun. A ve B'nin toplamı

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. $A + B$, M'nin bir alt modülüdür.

Sonuç 1.1.4. (Modüler Kural) M bir $R-$modül olsun. $C \leq B \leq M$ ve $A \leq M$ olsun. Bu durumda

$$C+(A \cap B)=B \cap (A+C)$$

dir.

Kanıt: $(A \cap B) \leq A$ ve $(A \cap B) \leq B$ olduğundan $C+(A \cap B) \leq C+A$ ve $C+(A \cap B) \leq C+B$'dir $C+(A \cap B) \leq C+B$ ve $C \leq B$ olduğundan $C+B \leq B$ dir. O halde

$$C+(A \cap B) \subseteq B \cap (C+A) \qquad (1.1)$$

Tersine $b \in B \cap (A+C)$ alalım. Bu durumda $b=a+c$ olacak şekilde $a \in A$ ve $c \in C$ vardır.

$$b=a+c \Rightarrow a=b-c \in A \cap B$$

$$\Rightarrow b=a+c \in C+(A \cap B)$$

olduğundan

$$B \cap (A+C) \subseteq C+(A \cap B) \qquad (1.2)$$

(1.1) ve (1.2)'den $B \cap (A+C)=C+(A \cap B)$'dir.

1.2 Büyük (Essential) Alt Modüller

Tanım 1.2.1. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq X \leq M$ için $N \cap X \neq 0$ ise M'ye N'nin essential genişlemesi ve N'ye de M'nin essential alt modülü denir. $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.2. M bir $R-$modül olsun. Bu durumda

(i) $K \leq_e M$ olması için gerekli ve yeterli şart $\forall m \neq 0$ için $K \cap mR \neq 0$'dır.

(ii) $X \leq Y \leq M$ için $X \leq_e M$ olması için gerekli ve yeterli şart $X \leq_e Y$ ve $Y \leq_e M$ olmasıdır.

(iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ 'dır .

(iv) $N_i \leq_e K_i$ $(1 \leq i \leq t)$ ise $\left(N_1 \cap ... \cap N_t\right) \leq_e \left(K_1 \cap ... \cap K_t\right)$'dir.

(v) $K \leq N \leq M$ için $\dfrac{N}{K} \leq_e \dfrac{M}{K}$ ise $N \leq_e M$ 'dir .

(vi) $m \in M$ ve $N \leq M$ için $m^{-1}N = \{r \in R : mr \in N\}$ kümesini tanımlayalım. $m^{-1}N \leq R_R$'dir. Ayrıca

$$N \leq_e M \Rightarrow m^{-1}N \leq_e R_R$$

dir .

(vii) $N_i \leq M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$ olması için gerek ve yeter şart $\forall i \in I$ için $N_i \leq_e M_i$ 'dir.

(viii) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N \Rightarrow f^{-1}(B) \leq_e M$ 'dir .

Kanıt:

(i) $K \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ olsun. O halde gösterelim ki $0 \neq mr \in K$ olacak biçimde $r \in R$ vardır. Gerçekten de R halkası birimli olduğundan $m \in mR$'dir. Böylece mR alt modülü boştan farklıdır. $K \leq_e M$ ise $K \cap mR \neq 0$ dır. Dolayısıyla $0 \neq mr \in K$ olacak biçimde $r \in R$ vardır.

Tersine, $0 \neq m \in L \leq M$ olsun. Varsayımdan $0 \neq mr \in K$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Ayrıca $mr \in L$ 'dir. Böylece $K \cap L \neq 0$ olup $K \leq_e M$ 'dir.

(ii) $X \leq Y \leq M$ için $X \leq_e M$ olsun. Göstereceğiz ki $X \leq_e Y$ ve $Y \leq_e M$ dir. Gerçekten de $0 \neq L \leq Y$ olsun. O halde $0 \neq L \leq M$ 'dir. Kabulden $X \cap L \neq 0$ 'dır. Her $0 \neq L \leq Y$ ve $X \leq Y$ olduğundan $X \leq_e Y$ 'dir. Şimdi $0 \neq K \leq M$ olsun. Kabulden $X \leq_e M$ olduğundan $X \cap K \neq 0$'dır. Gene kabulden $X \leq Y$ ve $X, Y, K \leq M$ olduğundan

$$0 \neq X \cap K \leq Y \cap K$$

dır. O halde her $0 \neq K \leq M$ için $Y \cap K \neq 0$'dır. $Y \leq_e M$ 'dir.

Tersine, $X \leq Y \leq M$ olmak üzere $X \leq_e Y$ ve $Y \leq_e M$ olsun. Göstereceğiz ki $X \leq_e M$ 'dir. $0 \neq B \leq M$ için $Y \leq_e M$ olduğundan $0 \neq Y \cap B \leq Y$ 'dir. $X \leq_e Y$ olduğundan

$$0 \neq X \cap (Y \cap B) = (X \cap Y) \cap B = X \cap B$$

dir. O halde $X \cap B \neq 0$ yani $X \leq_e M$ 'dir.

(iii) $0 \neq X \leq K$ olsun. Göstereceğiz ki $(N \cap K) \cap X \neq 0$'dır. Gerçekten de $N \leq_e M$ olduğundan $N \cap X \neq 0$'dır.

$$0 \neq N \cap X = N \cap (K \cap X) = (N \cap K) \cap X$$

O halde $N \cap K \leq_e K$ 'dır.

(iv) İspatı t üzerinden tümevarımla yapalım. $t = 1$ için açıktır.
$t = 2$ için $N_1 \leq_e K_1$, $N_2 \leq_e K_2$ olsun. Göstereceğiz ki $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. $A \leq (K_1 \cap K_2)$ ve $(N_1 \cap N_2) \cap A = 0$ olsun. $N_1 \cap (N_2 \cap A) = 0$ ve $N_1 \leq_e K$ olduğundan $N_1 = 0$ olamaz. $N_2 \cap A = 0$ 'dır. Aynı şekilde $N_2 = 0$ olamaz. $A = 0$ 'dır.
$t = k$ için $N_1 \leq_e K_1$, $N_2 \leq_e K_2$, … , $N_k \leq_e K_k$ iken

$$(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap ... \cap K_k)$$

olsun.

Şimdi $t = k+1$ için doğruluğunu kontrol edelim.

$S \leq (K_1 \cap K_2 \cap ... \cap K_{k+1})$ ve $(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_{k+1}) \cap S = 0$ olsun.
$N_1 \cap (N_2 \cap ... \cap N_{k+1} \cap S) = 0$ ise $(N_2 \cap ... \cap N_{k+1} \cap S) = 0$ 'dır. $(N_1 \leq_e K_1)$

$N_2 \cap (N_3 \cap ... \cap N_{k+1} \cap S) = 0$ ise $(N_3 \cap ... \cap N_{k+1} \cap S) = 0$ 'dır. $(N_2 \leq_e K_2)$

Bu şekilde devam edersek $S = 0$ 'dır. O halde

$$(N_1 \cap ... \cap N_{k+1}) \leq_e (K_1 \cap ... \cap K_{k+1}) \text{ 'dır.}$$

Bu özellik sonlu olmayan bir indeks kümesi için doğru değildir.

Örneğin, $\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}$ göz önüne alalım. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$'dir. Fakat

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \not\leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

(v) $Y \leq M$ ve $Y \cap N = 0$ olsun. İki durumu kontrol etmeliyiz. Eğer $Y \leq K$ ise

$$Y \cap N = Y = 0$$

olur. $N \leq_e M$'dir.

Eğer $K < Y$ ise $0 \neq \frac{Y}{K} \leq \frac{M}{K}$ dır. Şimdi $\frac{Y}{K} \cap \frac{N}{K} = \overline{0}$ olsun. $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{Y}{K} = \overline{0}$'dır. Dolayısıyla $Y = K$'dır. Kabulümüzle çelişti. O halde $N \leq_e M$'dir.

(vi) İlk olarak $m^{-1}N \leq R_R$ olduğunu gösterelim. $0 \in R$ ve $m0 = 0 \in N$ olduğundan $0 \in m^{-1}N$ ve $m^{-1}N \neq \varnothing$'dır. $r_1, r_2 \in m^{-1}N$ ve $s \in R$ alalım.

$$mr_1 - mr_2 = m(r_1 - r_2) \in N$$

olduğundan $(r_1 - r_2) \in m^{-1}N$'dir.

$$(mr_1)s = m(r_1 s) \in N$$

ve buradan $r_1 s \in m^{-1}N$'dir. Böylece $m^{-1}N \leq R_R$'dir.

Şimdi göstereceğiz ki $N \leq_e M$ iken $m^{-1}N \leq_e R_R$'dir. Gerçekten de $m \in M$ ve $0 \neq \mathrm{I} \leq R_R$ olsun. Eğer $m\mathrm{I} = 0$ ise

$$m\mathrm{I} \cap N = m\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} \cap m^{-1}N = \mathrm{I} \neq 0$$

dır.

Eğer $m\mathrm{I} \neq 0$ ise

$$m\mathrm{I} \cap N \neq 0$$

dır. O halde $mr \in N$ olacak şekilde $0 \neq r \in \mathrm{I}$ vardır.

$$mr \in N \Rightarrow r \in m^{-1}N$$

olduğundan $\mathrm{I} \cap m^{-1}N \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla $m^{-1}N \leq R_R$ 'dir.

(vii) $i = 2$ için bakalım. $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ fakat $N_1 \not\leq_e M_1$ olsun. Bu durumda $N_1 \cap L = 0$ olacak şekilde $0 \neq L \leq M_1$ vardır. $(N_1 + N_2) \cap L = 0$ 'dır. Gerçekten de $l \in (N_1 + N_2) \cap L$ alınsın. $l = n_1 + n_2$ olacak şekilde $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ vardır. $n_2 = l - n_1 \in M_1 \cap M_2 = 0$ olup $l = n_1 \in N_1 \cap L = 0$ 'dır. Bu sebeple $(N_1 + N_2) \cap L = 0$ 'dır. $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olduğundan $L = 0$ 'dır. Bu ise kabulle çelişir. O halde $N_1 \leq_e M_1$ 'dir. Benzer şekilde $N_2 \leq_e M_2$ de gösterilir. n'ye göre tümevarım uygulayıp genel sonuç bulunabilir.

Tersine $K_1 \leq_e M_1$ ve $K_2 \leq_e M_2$ ise $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olduğunu gösterelim. $0 \neq x_1 + x_2 \in M_1 \oplus M_2$ alınsın. $x_1 = 0$ ise $x_2 \neq 0$ olmalı. $K_2 \leq_e M_2$ olduğundan $0 \neq x_2 r \in K_2$ olacak biçimde $r \in \mathbb{R}$ vardır. $0 \neq (x_1 + x_2)r \in K_1 \oplus K_2$ olması nedeniyle $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ 'dir. $x_2 = 0$ olursa $x_1 \neq 0$ olup benzer şekilde aynı sonuç bulunur. $x_1, x_2 \neq 0$ olsun. $K_1 \leq_e M_1$ olduğundan $0 \neq x_1 r_1 \in K_1$ olacak biçimde $r_1 \in \mathbb{R}$ var. Eğer $x_2 r_1 \in K_2$ ise $K_1 \cap K_2 = 0$ olması $x_1 r_1 + x_2 r_1 \neq 0$ olmasını gerektirir. Böylece $(x_1 + x_2) r_1 \in K_1 \oplus K_2$ olur. Eğer $x_2 r_1 \notin K_2$ ise $x_2 r_1 \neq 0$ 'dır. $K_2 \leq_e M_2$ olduğundan $0 \neq (x_2 r_1) r_2 \in K_2$ olacak biçimde $r_2 \in \mathbb{R}$ vardır. $K_1 \cap K_2 = 0$ olması nedeniyle $x_1 r_1 r_2 + x_2 r_1 r_2 \neq 0$ 'dır. Ayrıca $(x_1 + x_2) r_1 r_2 \in K_1 \oplus K_2$ 'dir. $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ 'dir. n'ye göre tümevarım uygulayıp genel sonuç bulunabilir.

(viii) $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak şekilde $U \leq M$ olsun. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $f(u) \in f(U) \cap B$ ve böylece $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$'dır. Bu durumda

$$x = f(u) = f(0) = 0$$

dır. Yani $f(U) \cap B = 0$'dır. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$'dır. O halde $U \leq \ker f = f^{-1}(0)$'dır.

$$f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

dir. Böylece

$$U = f^{-1}(B) \cap U = 0$$

dır.

Örnek 1.2.3. $\mathbb{Q}$**,** $\mathbb{Z}-$modülünün her alt modülü essential'dir. Bunu görmek için $N_1 \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ ve $a \in \mathbb{Q} - N_1$ alalım. $\exists r \in \mathbb{Z}$ vardır ki $ar \in N_1$'dir. Gerçekten

$$a = \frac{p}{q},\ k = \frac{k_1}{k_2} \in N_1,\ r = qk_2k \text{ olsun.}$$

$$ar = \frac{p}{q} qk_2 \frac{k_1}{k_2} = pk_1 \in N_1$$

elde edilir. Böylece $N_1 \leq_e \mathbb{Q}$'dir.

Tanım 1.2.4. $0 \neq M$, $R-$modül olsun. Eğer $0 \neq K \leq M$ aynı zamanda $K \leq_e M$ ise M'ye **uniform (düzgün) modül** denir.

Örneğin , $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ modülüne bakalım.

$$N_1 = \left\langle \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right\rangle \ , \ N_2 = \left\langle \frac{1}{3} + \mathbb{Z} \right\rangle \leq \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

$$x = \frac{k}{2} + \mathbb{Z} = \frac{t}{3} + \mathbb{Z} \quad (k, t \in \mathbb{Z})$$

olsun.

$$2x = 0 + \mathbb{Z} = 3x$$

$$x = 0 + \mathbb{Z} = \overline{0}$$

dır. $N_1 \not\leq_e M$ ve $N_2 \not\leq_e M$, M düzgün değildir.

1.3 Tümleyen (Complement) Alt Modüller

Tanım 1.3.1. M bir $R-$modül ve $X \leq M$ olsun. Eğer $X \leq_e Y \leq M$ iken $X = Y$ ise X alt modülüne M 'de **kapalı (closed)** alt modül denir.

Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün 0 ve kendinden başka kapalı alt modülü yoktur.

Tanım 1.3.2. M bir $R-$modül ve $X \leq M$ olsun. $X \cap Y = 0$ özelliğini sağlayan maksimal Y modülüne X 'in M 'de ki **tümleyeni** denir.

Önerme 1.3.3. M bir $R-$modül $X, Y \leq M$ ve $X \cap Y = 0$ olsun. Bu durumda $Y \leq K$ olacak şekilde X 'in bir K tümleyeni vardır (Anderson ve Fuller, 1974).

Sonuç 1.3.4. Bir M modülünde her alt modülün tümleyeni vardır.

Kanıt: M bir $R-$modül ve $X \leq M$ olsun. $X \cap 0 = 0$ olup (Önerme 1.3.3'den) X ' in bir $0 \leq K$ olan tümleyeni vardır.

Önerme 1.3.5. M bir $R-$modül olsun. $X \leq M$ ve X 'in bir tümleyeni $Y \leq M$ ise $X \oplus Y \leq_e M$ 'dir.

Kanıt. $X \cap Y = 0$ olduğundan $X + Y = X \oplus Y \leq M$ 'dir. $K \leq M$ ve $(X \oplus Y) \cap K = 0$ olsun. $(X \oplus Y) \cap K = 0$ ise $(X \oplus Y) + K = (X \oplus Y) \oplus K$ 'dir. O halde $(X \oplus Y) \oplus K = X \oplus (Y \oplus K)$ 'dir. $X \cap (Y \oplus K) = 0$ olur. Y, X 'in tümleyeni olduğundan, $Y \oplus K = Y$ 'dir. $Y \cap K = 0$ olduğundan $K = 0$ 'dır. Böylece $X \oplus Y \leq_e M$ 'dir.

Teorem 1.3.6. M bir $R-$modül ve X, $Y \leq M$ olsun. $X \cap Y = 0$ özelliğine göre Y 'nin maksimal olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$(X + Y)/Y \leq_e M/Y$$

olmasıdır.

Kanıt. $(X+Y)/Y \cap K/Y = \overline{0}$ olacak şekilde $Y \leq K \leq M$ olsun. O halde $(X+Y)/Y \cap K/Y = Y/Y$ ve $(X+Y) \cap K = Y$ 'dir. Modüler kuraldan $(X \cap K) + Y = Y$ 'dir. O halde $X \cap K \leq Y$ 'dir. $X \cap K \leq X \cap Y$ ve $X \cap Y = 0$ olduğundan $X \cap K = 0$ 'dır. X ile arakesiti 0 olan maksimal alt modül Y olduğundan $K = Y$ ve $K/Y = \overline{0}$ 'dır.

Tersine X, $Y \leq M$ ve $(X+Y)/Y \leq_e M/Y$ olsun. $X \cap U = 0$ ve $Y \leq U \leq M$ olacak biçimde keyfi bir $a \in (X+Y) \cap U$ alalım. $a = x + y$ olacak şekilde $x \in X$, $y \in Y$ vardır. $x = a - y \in X \cap U = 0$ olduğundan $x = 0$ 'dır. Böylece $a = y \in Y$ olduğundan $(X+Y) \cap U = Y$ 'dir. O halde kabulden $(X+Y)/Y \cap U/Y = \overline{0}$ ise $U/Y = 0$ 'dır. Sonuç olarak $U = Y$ 'dir.

Tanım 1.3.7. M bir $R-$modül ve $X \leq M$ olsun. X 'in M 'de tümleyeni olduğu bir $Y \leq M$ varsa X 'e M 'de **tümleyen alt modül** denir. $X \leq_c M$ şeklinde gösterilir.

Her dik toplanan modül tümleyen alt modüldür. Örneğin, $X = A \oplus B$ $A \leq N \leq X$ ve $N \cap B = 0$ olsun.

$$N = N \cap X = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$$

Ama tersine her tümleyen alt modül dik toplanan olmak zorunda değildir.

Örneğin, K bir cisim V 'de K üzerinde boyutu 3 olan vektör uzayı olsun. $V = v_1K + v_2K + v_3K$ alalım. Bu durumda

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} k & v \\ 0 & k \end{bmatrix} : k \in K, v \in V \right\}$$

matris işlemleri ile tanımlı birimli değişmeli ve indecomposable bir halkadır.

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_1k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : k \in K \right\} \leq R_R$$

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_2k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : k \in K \right\} \leq R_R$$

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_3k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : k \in K \right\} \leq R_R$$

olsun. O halde $J \cap (I + L) = 0$, $I \cap (J + L) = 0$, $L \cap (I + J) = 0$ olur ve sırasıyla $(I + L)$, $(J + L)$, $(I + J)$ bu özelliğe göre maksimal alt modüllerdir.

Yani $(I + L) \leq_c R_R$, $(J + L) \leq_c R_R$, $(I + J) \leq_c R_R$ 'dir ancak sırasıyla $(I + L) \not\leq_d R_R$, $(J + K) \not\leq_d R_R$, $(I + J) \not\leq_d R_R$ 'dir.

Önerme 1.3.8. M bir $R-$modül olsun. $A \leq M$ ve $A \leq_e B \leq_c M$ olacak şekilde $B \leq M$ vardır. B 'ye A 'nın M 'de ki **kapanışı (closure)** denir.

Kanıt: Önerme 1.3.3.'den A', A'nın M'de ki tümleyeni olsun. O halde A' de M'de $A \leq B$ olacak biçimde bir B tümleyeni vardır. O halde bir $k \in K$, $a' \in A'$ ve $0 \neq a \in A$ vardır ki $a = k + a'$ şeklinde yazılabilir.

$$a' = a - k \in A' \cap B = 0$$

O halde $a' = 0$ ve $0 \neq a = k \in A \cap K$ olur. Böylece $A \leq_e B \leq_c M$'dir.

Önerme 1.3.9. M bir $R-$modül ve $X \leq M$ olsun. X'in M'de tümleyen alt modül olması için gerek ve yeter koşul $X \leq_e Y \leq M$ iken $X = Y$ olmasıdır.

Kanıt: $X \leq_c M$ ve $X \leq_e Y \leq M$ olsun. Öyleyse bir $K \leq M$ vardır ki X, K'nın M'de ki tümleyen alt modülüdür ve $K \cap X = 0$ özelliğine göre X maksimaldir. $X \leq_e Y$ ve $K \leq_e K$ olduğundan Önerme 1.1.1 (iv)'den

$$0 = K \cap X \leq_e K \cap Y$$

O halde $K \cap Y = 0$ dır. X, K'nın tümleyeni idi. O halde $X = Y$'dir. Önerme1.3.8'den $X \leq_e Y \leq_c M$'dir. Kabulümüzden $X = Y$'dir. O halde $X \leq_c M$'dir.

1.4. İnjektif Modüller

Tanım 1.4.1. R bir halka ve I bir $R-$modül olsun. Her $f : A \to B$ birebir homomorfizması ve $g : A \to I$ homomorfizması için $h \circ f = g$ şartını sağlayan bir $h : B \to I$ homomorfizması varsa I'ya **injektif modül** denir .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.1. $h \circ f = g$ homomorfizması.

Teorem 1.4.2. (Baer Kriteri) I bir $R-$modül olsun. I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U (sağ) ideali için her $k:U\to I_R$ modül homomorfizmasının bir $m:R\to I_R$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir (yani $m|_U = k$ olmasıdır) (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 1.4.3. $(G,+)$ bir grup olsun. $\forall x\in G$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $ny = x$ olacak biçimde $y\in G$ varsa G ye **divisible grup** denir.

Örneğin, $\mathbb{Z}$ divisible grup değil ancak $\mathbb{Q}$ divisible gruptur.

Teorem 1.4.5. Bir D grubunun injektif olması ($D_{\mathbb{Z}}$ injektif) için gerek ve yeter şart D'nin divisible olmasıdır.

Kanıt: D injektif ($\mathbb{Z}-$modül) grup, $d\in D$ ve $n>0$, $n\in\mathbb{Z}$ alalım. Her $m\in\mathbb{Z}$ için $f(m)=nm$ olmak üzere $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ve $\forall m\in\mathbb{Z}$ için $g(m)=md$ olmak üzere $g:\mathbb{Z}\to D$ fonksiyonlarını tanımlayalım. f 'nin bir monomorfizma, g'nin bir homomorfizma olduğu açıktır. $D_{\mathbb{Z}}$ injektif olduğundan $g = h\circ f$ olacak biçimde bir $h:\mathbb{Z}\to D$ homomorfizma vardır. Yani

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "h"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.2. : $f\circ h = g$ homomorfizması.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
d &= g(1) = (h\circ f)(1) = h(f(1)) \\
&= h(n) = h(n.1) \\
&= nh(1) \in nD
\end{aligned}$$

O halde $D_{\mathbb{Z}}$ divisible gruptur.

Tersine D divisible olsun. Baer Kriteri ile D'nin injektif olduğunu görelim.

$\mathbb{Z}$'nin herhangi bir $0 \neq I$ idealinden D'ye keyfi bir $f: I \to D$ homomorfizmasını alalım. $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$. D divisible olduğundan $f(n) = nd$ olacak biçimde bir $d \in D$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = md$ olmak üzere $g: \mathbb{Z} \to D$ fonksiyonunu tanımlayalım. g bir homomorfizmadır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = I$ için

$$g(nk) = nkd = knd = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g|_I = f$'dir. Baer Kriterinden $D_{\mathbb{Z}}$ injektiftir.

Teorem 1.4.6. A bir $R-$modül olsun. Bu durumda bir E bir $R-$modül vardır ki aşağıdaki koşullar sağlar;

(a) E, A'yı essential olarak kapsayan injektif modüldür.

(b) E, A'yı essential olarak kapsayan maksimal modüldür.

(c) E, A'yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Bu koşullardan birini sağlayan bir E, $R-$modülüne A modülünün injektif hull'ı denir ve E(A) ile gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 1.4.7. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Her $\phi: N \to X$ homomorfizması için $\psi: M \to X$, $\psi|_N = \phi$ olacak biçimde bir ψ homomorfizması varsa (yani her $\phi: N \to X$ homomorfizması bir $\psi: M \to X$ homomorfizmasına genişlerse) X modülüne $M-$injektif modül denir .

Eğer M modülü $M-$injektif ise M'ye **yarı-injektif (quasi-injective)** denir.

Lemma 1.4.8. Bir M modülü yarı$-$injektiftir gerekli ve yeterli şart $\forall f \in End\ E(M)$ için $f(M) \leq M$ olmasıdır (Mohamed ve Muller, 1990).

Lemma 1.4.9. $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ $A-$injektiftir gerekli ve yeterli şart $\forall \alpha \in \Lambda$ için M_α'lar $A-$injektiftir (Mohamed ve Muller, 1990).

1.5. Extending (CS), Yarı Sürekli (Quasi-Continuous) ve Sürekli (Continuous) Modüller

Bir X $R-$modülü için aşağıdaki koşulları göz önüne alalım;

(C_1) X 'in her alt modülü, X 'in bir dik toplananı tarafından essential olarak kapsanır.

(C_2) X 'in herhangi bir toplananına izomorf olan her modül X 'in bir dik toplananıdır.

(C_3) X 'in X_1, X_2 dik toplanan alt modülleri $X_1 \cap X_2 = 0$ özelliğini sağlasın. $X_1 \oplus X_2$ de X 'in bir dik toplananıdır.

Tanım 1.5.1. Bir X , $R-$modülü (C_1) özelliğini sağlıyorsa $CS-$modül (ya da extending) denir (Dung vd., 1994).

Tanım 1.5.2. Bir X , $CS-$modülü, (C_2) özelliğini sağlıyorsa X 'e sürekli (continuous) modül denir.

Tanım 1.5.3. Bir X , $CS-$modülü (C_3) özelliğini sağlıyorsa X 'e yarı-sürekli (quasi-continuous) modül denir.

Önerme 1.5.4. Herhangi bir (yarı$-$) injektif X modülü CS 'dir.

Kanıt: $Y \leq X$, $E(X) = E_1 \oplus E_2$ ve $E(Y) = E_1$ olsun. X (yarı–) injektif modül olduğundan

$$X = X \cap E(X) = X \cap (E_1 \oplus E_2) = (X \cap E_1) \oplus (X \cap E_2)$$

dir. $Y \leq_e E_1$, $Y \leq X$ ve $Y \leq X \cap E_1 \leq E_1$ olduğundan Önerme 1.1.1(iii)'den $Y \leq X \cap E_1$ 'dir.

Önerme 1.5.5. X bir $R-$modülü olsun. X 'in CS olması için gerek ve yeter şart X 'in her kapalı altmodülü X 'in bir dik toplananıdır.

Kanıt: $Y \leq M$ kapalı bir alt modül ve M, CS olsun. O halde $Y \leq_e Z \leq_d M$ olacak şekilde $Z \leq M$ vardır. Y kapalı alt modül olduğundan essential genişlemesi yoktur. O halde $Y = Z \leq_d M$ 'dir.

Tersine $Y \leq M$ alalım. Önerme 1.3.8.'den $Y \leq_e X \leq_c M$ olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Kabulümüzden $X \leq_d M$ 'dir. O halde M modülü CS şartını sağlar.

Önerme 1.5.6. X bir indecomposable $R-$modül olsun. X modülü CS olması için gerekli ve yeterli şart X 'in uniform olmasıdır.

Kanıt: X indecomposable modülü CS olsun. X 'in sıfırdan farklı her alt modülü X içinde essential olarak kapsanır. O halde X uniformdur.

Tersine X uniform bir modül olsun. $\forall Y \neq 0$ ve $Y \leq X$ için $Y \leq_e X$ ve X indecomposable olduğundan CS 'dir.

Önerme 1.5.7. X herhangi bir modül ve $Y \leq X$ olsun. Y, X 'in bir dik toplanında kapalı ise X kapalıdır.

Kanıt. $Y \leq_c Z \leq_d X$ olsun. Bir modülde her dik toplanan bir komplement alt modül olduğundan

$$Y \leq_c Z \leq_c X$$

dir. $Y' \leq Z$ ve $Z' \leq X$ vardır ki Y, Y' 'nün tümleyeni ve Z, Z' 'nün tümleyenidir. Ayrıca

$$Y \cap (Y' + Z') = 0$$

ve $Y' + Z' \leq X$ 'dir. Gerçekten de; $y \in Y \cap (Y' + Z')$ alırsak $y = y' + z'$ $(y' \in Y', z' \in Z')$ vardır. $y - y' = z' \in Z \cap Z' = 0$ olduğundan $y = y' \in Y \cap Y' = 0$ dır. O halde $y = y' = z' = 0$ bulunur.

Şimdi $Y \leq_e L \leq X$ olacak şekilde bir $L \leq X$ olsun. Bu durumda

$$Y \cap (Y' + Z') \leq_e L \cap (Y' + Z')$$

olduğundan $L \cap (Y' + Z') = 0$ 'dır. Böylece

$$\left[Z \cap \left(L + Z'\right)\right] \cap Y' = \left[\left(Z \cap Y'\right) \cap \left(L + Z'\right)\right] = Y' \cap (L + Z') = 0$$

olur. $Y \leq Z \cap (L + Z') \leq (L + Z')$ ve Y, Y' ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan

$$Y = \left[Z \cap (L + Z')\right]$$

dür. $Y = \left[Z \cap (L + Z')\right] \leq_e L$ olduğundan

$$0 = \left[Z \cap (L + Z')\right] \cap Z' \leq_e L \cap Z'$$

yani $L \cap Z' = 0$'dır. Böylece

$$(Z + L) \cap Z' = L \cap Z' = 0$$

dır. $Z \leq Z + L$ ve Z Z''nün tümleyeni olduğundan $Z + L = Z$'dir. O halde $L \leq Z$'dir. Sonuç olarak $Y \leq_e L \leq Z$ ve $Y \leq_c Z$ olduğundan Önerme 1.3.9.'dan $Y = L$'dir. Buradan $Y \leq_c X$'dir.

Teorem 1.5.8. Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir;

1. M quasi – continuous modüldür.
2. X ve Y, M'nin birbirlerinin komplementleri olan iki alt modülü ise $M = X \oplus Y$'dir.
3. Her $f^2 = f \in End_R(E(M))$ için $f(M) \leq M$'dir.
4. $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ise $M = \bigoplus_{i \in I} M \cap E_i$'dir.

(Mohamed ve Muller, 1990)

Teorem 1.5.9. M bir $R-$ modül olsun.

(1) M, injektiftir.

(2) M, yarı injektiftir.

(3) M, süreklidir.

(4) M, yarı süreklidir.

olmak üzere $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ gerektirmeleri vardır**.**

Kanıt: (1)⇒(2) X_R modülü injektif ise her A için $A-$injektiftir. Özel olarak A 'yı X alırsak $X-$injektiftir (yani yarı $-$ injektiftir). Tanımdan bunu görmek çok kolaydır. $Y \leq X$ olsun.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\phi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Şekil 1.3. $\varphi|_Y = \phi$ homomorfizması.

$\varphi|_Y = \phi$ olacak biçimde φ homomorfizması vardır. O halde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.4. $g \circ f = h$ homomorfizması

$g \circ f = h$ olacak şekilde h vardır.

(2)$\Rightarrow$(3) X $R-$modülü, $Y \leq X$, $E(X)=E_1 \oplus E_2$ ve $E(Y)=E_1$ olsun. M yarı $-$ injektif olduğundan Lemma 1.4.8. ‘den

$$X = X \cap E(X) = X \cap (E_1 \oplus E_2) = (X \cap E_1) \oplus (X \cap E_2)$$

elde edilir. $Y \leq_e E_1$, $Y \leq X$ ve $Y \leq X \cap E_1 \leq E_1$ olduğundan Önerme 1.1.1.’den $Y \leq X \cap E_1$’dir. Böylece (C_1) özelliği sağlanır.

$X' \leq_d X$ olmak üzere $f: X' \to X$ bir monomorfizma olsun. X yarı $-$ injektif olduğundan Lemma 1.4.9.’dan X' X $-$injektiftir. Böylece $A \cong X'$ ise $A \leq_d X$ olur. Böylece (C_2) koşulu sağlanmış olur.

(3)$\Rightarrow$(4) $(C_2) \Rightarrow (C_3)$ göstermek yeterli olacaktır. K ve L, X ’in dik toplananları ve $K \cap L = 0$ olsun. O halde $X = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq X$ vardır. $\Pi: X = K \oplus K' \to K'$ olarak tanımlansın. $K \cap L = 0$ ve $\Pi(L) \cong L$ olduğundan $\Pi(L) \leq K'$’dır. (C_2)'den $\Pi(L) \leq_d X$ ’dir. O halde $X = \Pi(L) \oplus L'$ olacak biçimde bir $L' \leq X$ vardır. Böylece

$$K' = \Pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

ve böylece

$$X = K \oplus \Pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

dür. Buradan $K \oplus \Pi(L) \leq_d X$ olduğundan $K \oplus L \leq_d M$ ’dir.

Tersine bir örnek vermek gerekirse (yarı $-$ sürekli ama sürekli olmayan bir modül) $X_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olsun. X indecompasable ve uniformdur. Bu sebeple yarı– süreklidir. Şimdi $Y = n\mathbb{Z}$ $(n \neq 0,$ 1 ve $n \in \mathbb{Z})$ diyelim. $\phi: Y \to X$ izomorfizmadır. Fakat $Y \nleq_d X_R$ (C_2) sağlanmaz.

1.6. Mutlak Dik Toplanan Özelliğine Sahip (Ads) Modüller

Tanım 1.1.6. M bir $R-$ modül olsun. Herhangi bir $M = A \oplus B$ ayrışımı için; C, A'nın M'de ki bir tümleyeni iken $M = A \oplus C$ oluyorsa M'ye Ads özelliğine sahiptir veya Ads$-$modül denir (Fuchs, 1970).

Örneğin, indecomposable modüller ve uniform modüller Ads'tir.

Önerme 1.6.2. M bir $R-$modül olsun. M, CS ve Ads özelliklerine sahip ise yarı$-$sürekli modüldür.

Kanıt: M bir $R-$modül ve $M = A \oplus B$ şeklinde yazılsın. C, M'de A'nın tümleyeni olsun. Önerme 1.3.9.'dan komplement her modül kapalıdır. C kapalı bir alt modüldür. M, CS olduğundan $C \leq_d M$'dir. O halde $M = C \oplus D$ olacak biçimde bir $D \leq M$ vardır. M Ads olduğundan $M = C \oplus A$'dır. Böylece (C_3) özelliği sağlandı. M yarı$-$sürekli modüldür.

Teorem 1.6.3. M bir $R-$modül olsun. M'nin Ads olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $M = A \oplus B$ ayrışımında A'nın $B-$injektif ve B'nin $A-$ injektif olmasıdır.

Kanıt: $K \leq A$ ve $\phi : K \to B$ bir homomorfizma olsun. $X = \{k - \phi(k) : k \in K\}$ kümesini tanımlayalım. $k_1 - \phi(k_1) \in X$ $(k_1 \in K)$ alalım. $k_1 \in A$ ve $\phi(k_1) \in B$ olduğundan $k_1 - \phi(k_1) \in M$'dir. O halde $X \leq M$'dir. $X \cap B = 0$'dır. Gerçekten de X'in elemanları $A \oplus B$'nin elemanları olduğundan arakesit sıfırdır. O halde B'nin M de $X \leq C$ olacak biçimde bir C tümleyeni vardır. Kabulümüzden M Ads-modüldür ve bu yüzden $M = C \oplus B$'dir. Böylece $a = c + b$ $(a \in A,\ b \in B,\ c,\ c - b \in C)$ formunda yazılabilir. Öyleyse $\pi_1 : M \to C$ ve $\pi_2 : M \to B$ projeksiyon dönüşümleri olsun. $\pi_2 \circ \pi_1|_A : A \to B$'dir. Bu durumda $i : K \to A$ içerme dönüşümü olmak üzere $\forall k \in K$

$$(\pi_2 \circ \pi_1|_A \circ i)(k) = (\pi_2 \circ \pi_1|_A)(i(k))$$

$$= (\pi_2 \circ \pi_1|_A)(k)$$

$$= (\pi_2(\pi_1|_A(k))$$

$$= \pi_2(k)$$

$$= \pi_2(k - \phi(k) + \phi(k))$$

$$= \pi_2(k - \phi(k)) + \pi_2(\phi(k))$$

$$= \pi_2(\phi(k)) = \phi(k)$$

olduğundan B, $A-$ injektiftir. Benzer şekilde A modülünün de $B-$injektif olduğu gösterilebilir.

Tersine M'nin bir parçalanışı $M = A \oplus B$ ve C, B'nin M'de ki bir tümleyeni olsun. $Y = A \cap (B \oplus C)$ kümesini tanımlayalım. $Y \leq M$ olsun. O halde herbir $y \in Y, b + c, b \in B, c \in C$ için $y = b + c$ şeklinde yazılabilir. $\pi : B \oplus C \rightarrow B$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\varphi = \pi|_Y : Y \rightarrow B$ bir homomorfizmadır. Gerçekten de $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall b_1, b_2 \in B$ ve $\forall c_1, c_2 \in C$ için $y_1 = b_1 + c_1$, $y_2 = b_2 + c_2$ şeklinde yazılabilir. Ve $\pi|_Y(y_1 + y_2) = \pi|_Y(y_1) + \pi|_Y(y_2)$ ve $\forall b \in B$ için $\pi|_Y(by_1) = b\pi|_Y(y_1)$ dir. Şimdi $B, A-$ injektif olduğundan φ homomorfizması bir $\psi : A \rightarrow B$ homomorfizmasına genişler. $a \in A$ için $H = R(a - \psi(a)) + C$ alt modülüne bakalım. $b = ra - r\psi(a) + c \in H \cap B,$ $c \in C,$ $r \in R$ olsun. O halde $ra = b + r\psi(a) - c \in Y$'dir. Bu durumda

$$\varphi(ra) = (\psi \circ i)(ra) = r\psi(a)$$

öyle ki

$$\varphi(ra) = \varphi(b + r\psi(a) - c) = (\pi \circ i)(b + r\psi(a) - c)$$

$$= \pi(b) + \pi(r\psi(a)) - \pi(c) = b + r\psi(a)$$

olduğundan $b = 0$ olur. O halde $H \cap B = 0$ olur. R birimli bir halka ve $B \cap C = 0$ özelliğine göre C maksimal olduğundan $\forall a \in A$ için $a - \psi(a) \in C$ dir. Böylece $\forall m \in M$ için

$$m = a + b = (a - \psi(a) + \psi(a)) + b \in B \oplus C$$

dir. $M = B \oplus C$ yazılabilir. O halde M Ads – modüldür.

Örnek 1.6.4. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ – injektif olmadığından dolayı $M = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü Ads – modül değildir.

Örnek 1.6.5. Teorem 1.4.6.'dan Quasi – continuous modüllerin Ads – modül olduğu açıktır.

Tanım 1.6.6. M bir R – modül olsun. M' nin keyfi iki dik toplananının arakesiti de yine bir dik toplanan ise, yani $A, B \leq_d M$ iken $A \cap B \leq_d M$ oluyorsa, M'ye dik toplanan kesişim özelliğine sahip (summand intersection property, kısaca, SIP) modül denir (Wilson, 1989).

Lemma 1.6 7. M R – modülünün SIP olabilmesi için gerek ve yeter şart her $M = A \oplus B$ ayrışımı ve her $f : A \to B$ homomorfizmi için $Kerf$ 'nin bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt: $M = A \oplus B$ SIP modül ve $f : A \to B$ homomorfizma olsun. $T = \{a + f(a) \mid a \in A\}$ alalım. Bu gösterir ki $M = T \oplus B$'dir ve $x \in M$ olmak üzere $x = a + b$ şeklinde yazılabilir ($a \in A$, $b \in B$). $x = a + f(a) - f(a) + b$'dır. $a + f(a) \in T$ ve $-f(a) + b \in B$ olduğundan $M = T + B$'dir. Şimdi $x \in T \cap B$ olsun. Burdan

$x = a + f(a)$, $a \in A$ ve $a = x - f(a) = A \cap B = 0$'dır. Böylece $f(a) = 0$ ve $x = 0$'dır. M SIP özelliğine sahip olduğundan M'nin bir dik toplananı $T \cap A$'dır. $T \cap A = Kerf$ olduğundan $Kerf$ M'nin bir dik toplananıdır.

Tersine her $M = A \oplus B$ ayrışımı ve her $f : A \to B$ homomorfizması için M'nin bir dik toplananı $Kerf$ olsun. $M = N \oplus N_1$ ve $M = K \oplus K_1$ ve $\pi|_{N_1} : M \to N_1$, $\pi|_K : M \to K$ doğal epimorfizma olsun. $h = (\pi|_{N_1} \circ \pi|_K)/N$ tanımlayalım. Bu gösterir ki $h : N \to N_1$ tanımlıdır. Böylece $Kerh$ M'nin bir dik toplananıdır. $Kerh = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1)$'dır. $N \cap K$, $Kerh$'nin bir dik toplananıdır ve $Kerh$ M'nin bir dik toplananıdır. Böylece $N \cap K$, M'nin bir dik toplananıdır.

Aşağıdaki örneklerden SIP modül sınıfı ile Ads$-$modül sınıflarının birbirinden farklı olduğunu görülür.

Örnek 1.6.8 F bir cisim ve $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $N = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ ve $L = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sağ $R-$modüllerdir. $M = \dfrac{R}{L}$ ve $X = M \oplus N$ alalım. (Garcia, 1969)'dan X modülü SIP özelliğini sağlamaz. Ancak $M = \dfrac{R}{L} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \cong F$ olduğundan $M = \dfrac{R}{L}$, $N-$injektiftir. Diğer yandan, $M = \dfrac{R}{L}$ cisimdir. Kendinden ve 0'dan başka alt modülü yoktur. Bu yüzden $M-$injektiftir. Böylece X Ads$-$modüldür.

Örnek 1.6.9. p bir asal tam sayı ve $K = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Q}$ olsun. K'nin tüm dik toplamları $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus 0)$, $0 \in \mathbb{Q}$, $0 \oplus 0$ ve K olduğundan, K SIP'dir. $\mathbb{Q}$ injektif olduğundan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-$injektiftir. Varsayalım ki $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}-$injektif olsun. $\pi : \mathbb{Z} \to p\mathbb{Z}$ kanonik epimorfizma olsun. $\pi(n) = n + p\mathbb{Z}(n \in \mathbb{Z})$ olur. Bu π'yi $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ homomorfizmasına genişletebiliriz. $\alpha\left(\dfrac{1}{p}\right) = x \in p\mathbb{Z}(x \in \mathbb{Z})$ olur. Böylece $p\alpha\left(\dfrac{1}{p}\right) = \alpha(1) = \pi(1) = 1 + p\mathbb{Z}$ olur. $px + p\mathbb{Z} = 1 + p\mathbb{Z}$ ve bu yüzden $1 \equiv 0(\bmod p)$ olur. Bu çelişkidir. Yani $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}-$ injektif değildir.

2. SA-MODÜLLER

Çalışmamızın bu bölümünde SIP ve Ads özelliğini sağlayan SA$-$ modüllerle ilgili çalışmamızda işimize yarayacak olan tanım teorem ve lemmalar verilecektir.

Tanım 2.1. SIP ve Ads özelliğini sağlayan modüllere SA$-$modül denir (Takıl Mutlu, 2015).

Diğer taraftan (Tercan ve Karabacak, 2007) makalesinde yazarlar SIP modüllerin daha genel hali olan SIP$-$extending modülleri aşağıdaki gibi tanımlayarak, SIP$-$extending koşulunu sağlayan matris halkalarını incelemişlerdir.

Tanım 2.2. M modülünün her $M = A \oplus B$ ayrışımındaki $A, B \leq_d M$ elemanları için $A \cap B \leq_e D$ özelliğini sağlayan $D \leq_d M$ varsa M modülüne SIP$-$extending modül denir.

SIP özelliğini sağlayan her modül SIP-extending'dir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $R = \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ SIP$-$extending modül olmasına rağmen SIP değildir. R'nin tüm idempotentleri aşağıdaki gibidir. $a, c \in Z_4$ ve $2b \in 2Z_4$ için

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 2ba + 2bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$a^2 = a \Rightarrow a = 0, a = 1$, $c^2 = c \Rightarrow c = 0, c = 1$, $2ba + 2bc = 2b$ 'dir. O halde

$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$e_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. Ve bu yüzden R_R'nin tüm dik çarpanları aşağıdaki gibidir:

$$e_1 R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_d R_R$$

$$e_2R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2c \\ 0 & c \end{bmatrix} : c \in Z_4 \right\} \leq_d R_R$$

$$e_3R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_d R_R$$

$$e_5R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} \leq_d R_R$$

$$e_6R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 & 2Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_d R_R$$

$e_2R \cap e_5R \nleq_d R_R$ olduğundan SIP-modül değildir.

Ancak $e_2R \cap e_3R \leq_e e_2R_R$ olduğundan R_R , SIP – extending modüldür.

3.SA-EXTENDING MODÜLLER

SIP – extending modüller, SIP modülerin bir genelleştirilmesi olduğundan hem Ads hem SIP – extending koşulunu sağlayan modüllerin hangi özellikleri sağladığı sorusu akla gelen doğal bir sorudur. Çalışmamızın bu bölümünde, adına SA-extending modüller diyeceğimiz hem Ads hem de SIP – extending koşulunu sağlayan modül sınıfının bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1. Hem Ads hem SIP – extending özelliğini sağlayan modüllere SA-extending modül diyelim.

Tanımdan görüleceği üzere, SA modüller aynı zaman da SA – extending olmasına rağmen tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.2. F cisim ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, x, y \in F \right\}$ olsun. T ’nin tüm sağ idealleri

$$I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$I_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid y \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$I_4 = \left\{ = \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \leq_d T$$

$$I_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b, y \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \leq_d T$$

$$I_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, a, x \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \leq_d T$$

$$I_7 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, b, y \in F \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \leq_d T$$

biçimindedir. Şimdi T 'nin tüm dik toplananlarını bulalım. Bunun için T 'nin tüm idempotentlerini hesaplayalım.

$$\begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

koşulunu sağlayan $a, x, b, y \in F$ elemanlarını bulalım.

$$\begin{bmatrix} a^2 & ax + xb & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & by + ay \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$a^2 = a \ , \ ax + xb = x \ , \ b^2 = b \ \text{ve} \ by + ay = y$$

denklemleri elde edilir. Buradan $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$ bulunur. Buna göre

- $a = 0, \ b = 0$ ise $y = 0$ bulunur.
- $a = 0, \ b = 1$ ise x ve y keyfi elemanlar olarak bulunur.
- $b = 0, \ a = 1$ ise x ve y keyfi elemanlar olarak bulunur.
- $a = 1, \ b = 1$ ise $x = 0$ ve $y = 0$ olarak bulunur.

Sonuç olarak T'nin tüm idempotent elemanlar $x, \ y \in F$ olmak üzere aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ I_{4x4} \ \text{ve} \ 0_{4x4}$$

İlk olarak T'nin SIP – extending olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi iki dik toplam alalım ve arakesitlerine bakalım.

$$e = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ve} \ f = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Keyfi iki dik toplam olup ilk olarak e formunda ki idempotentler tarafından üretilen dik toplamların arakesitine bakalım. Aşağıdaki durumlar geçerlidir:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ve} \ e' = \begin{bmatrix} 0 & x' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{olsun. Bu durumda}$$

$$eT=\left\{\begin{bmatrix}0&x&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&y\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&x&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y\\0&0&0&a\end{bmatrix}\mid a,b,x,y\in F\right\}$$

$$e'T=\left\{\begin{bmatrix}0&x'&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&y'\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&x&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y\\0&0&0&a\end{bmatrix}\mid a,b,x',y',x,y\in F\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}a&x'b&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y'\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mid a,b,x',y',x,y\in F\right\}$$

olur.

1) $x=0,\quad y\neq 0$ ve $x'=0,\quad y'\neq 0$ ise

$$eT\cap e'T=\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mid b,y\in F\right\}\leq_d T$$

2) $x=0,\quad y\neq 0$ ve $x'\neq 0,\quad y'=0$ ise

$$eT\cap e'T=\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mid b\in F\right\}\leq_d T$$

3) $x=0,\quad y\neq 0$ ve $x'=0,\quad y'=0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b, y \in F \right\} \leq_d T$$

4) $x = 0, \;\; y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \;\; y' \neq 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y + ya \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b, y, a \in F \right\} \leq_d T$$

5) $x \neq 0, \;\; y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \;\; y' \neq 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y + ya \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, y \in F \right\} \leq_d T$$

6) $x \neq 0, \;\; y \neq 0$ ve $x' = 0, \;\; y' \neq 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y + ya \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b, y, a \in F \right\} \leq_d T$$

7) $x \neq 0, \;\; y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \;\; y' = 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, b \in F \right\} \leq_d T$$

8) $x \neq 0, \;\; y \neq 0$ ve $x' = 0, \;\; y' = 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, b, y \in F \right\} \leq_d T$$

9) $x \neq 0, \;\; y = 0$ ve $x' \neq 0, \;\; y' \neq 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, x, b \in F \right\} \leq_d T$$

10) $x \neq 0, \;\; y = 0$ ve $x' \neq 0, \;\; y' = 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, x, b \in F \right\} \leq_d T$$

11) $x \neq 0, \;\; y = 0$ ve $x' = 0, \;\; y' \neq 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, b \in F \right\} \leq_d T$$

12) $x \neq 0, \;\; y = 0$ ve $x' = 0, \;\; y' = 0$ ise

$$eT \cap e'T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | \, b \in F \right\} \leq_d T$$

Şimdi f formundaki idempotentler tarafından üretilen dik toplananların arakesitlerine bakalım. Aşağıdaki durumlar geçerlidir.

$$f=\begin{bmatrix}1&x&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y\\0&0&0&1\end{bmatrix} \text{ ve } f'=\begin{bmatrix}1&x'&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y'\\0&0&0&1\end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$fT=\left\{\begin{bmatrix}1&x&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&x&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y\\0&0&0&a\end{bmatrix} \mid a,b,x,y\in F\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}a&x+xb&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&ya\\0&0&0&a\end{bmatrix} \mid a,b,x,y\in F\right\}$$

$$f'T=\left\{\begin{bmatrix}1&x'&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y'\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&x&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&y\\0&0&0&a\end{bmatrix} \mid a,b,x',y',x,y\in F\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}a&x+x'b&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&y'a\\0&0&0&a\end{bmatrix} \mid a,b,x,x',y'\in F\right\}$$

1) $x=0,\quad y\neq 0$ ve $x'=0,\quad y'\neq 0$ ise

$$fT\cap f'T=\left\{\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&b&Ya\\0&0&0&a\end{bmatrix} \mid a,b,Y\in F\right\}\leq_d T$$

2) $x=0,\quad y\neq 0$ ve $x'\neq 0,\quad y'=0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, a \in F \right\} \leq_d T$$

3) $x = 0, \quad y \neq 0$ ve $x' = 0, \quad y' = 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, a \in F \right\} \leq_d T$$

4) $x = 0, \quad y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \quad y' \neq 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ya \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, y, a, Y \in F \right\} \leq_d T$$

5) $x \neq 0, \quad y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \quad y' \neq 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x + Xb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ya \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, a, b, y, X, Y \in F \right\} \leq_d T$$

6) $x \neq 0, \quad y \neq 0$ ve $x' = 0, \quad y' \neq 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ya \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} | \, x, a, Y \in F \right\} \leq_d T$$

7) $x \neq 0, \quad y \neq 0$ ve $x' \neq 0, \quad y' = 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x+Xa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x, X \in F \right\} \leq_d T$$

8) $x \neq 0, \quad y \neq 0$ ve $x' = 0, \quad y' = 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x \in F \right\} \leq_d T$$

9) $x \neq 0, \quad y = 0$ ve $x' \neq 0, \quad y' \neq 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x+Xa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x, X \in F \right\} \leq_d T$$

10) $x \neq 0, \quad y = 0$ ve $x' \neq 0, \quad y' = 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x+Xa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x, X \in F \right\} \leq_d T$$

11) $x \neq 0, \quad y = 0$ ve $x' = 0, \quad y' \neq 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x \in F \right\} \leq_d T$$

12) $x \neq 0, \quad y = 0$ ve $x' = 0, \quad y' = 0$ ise

$$fT \cap f'T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, x \in F \right\} \leq_d T$$

Şimdi e ve f formundaki idempotentler tarafından üretilen dik toplananların arakesitine bakalım. Aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1) $x = 0, y = 0$

$$eT \cap fT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \leq_d T$$

2) $x = 0, y \neq 0$

$$eT \cap fT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ya \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid y, a \in F \right\} \leq_e eT$$

3) $x \neq 0, y = 0$

$$eT \cap fT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, b \in F \right\} \leq_e fT$$

4) $x \neq 0, y \neq 0$

$$eT \cap fT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ya \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, b, a, y \in F \right\} \leq_e eT$$

olduğundan T_T modülü SIP – extending'dir.

Şimdi T 'nin Ads – modül olduğunu gösterelim.

eT dik toplananının tüm tümleyenleri I_4 ve I_6; fT dik toplananının tüm tümleyenleri I_5 ve I_7 'dir. Ayrıca

$$T = eT \oplus I_4 = eT \oplus I_6 = fT \oplus I_5 = fT \oplus I_7$$

olduğundan T Ads – modüldür. Ancak $e^2 = e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$f^2 = f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa $eT \cap fT \not\leq_d T$ olduğu görülür. Bundan dolayı T SIP – modül değildir.

Sonuç olarak T SA – extending modül olmasına rağmen SA – modül değildir.

Teorem 3.3. Bir M modülünün SA – extending modül olabilmesi için gerekli ve yeterli şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır:

1. M 'nin her dik toplanan S, T çifti ve her $\pi : M \to S$ projeksiyon dönüşümü için $\ker \pi$, M 'nin bir dik toplanında essential'dir.

2. $M = A \oplus B$ ayrışımı göz önüne alındığında A 'nın M içindeki her C tümleyeni ve $\pi : M \to B$ projeksiyon dönüşümü için $\pi|_C : C \to B$ bir izomorfizmadır.

Kanıt: M modülü SA – extending olsun. İlk olarak (1)'in sağlandığını görelim. $M = S \oplus S'$ ayrışımını göz önüne alalım. $\pi : M \to S$ projeksiyon dönüşümü için $Ker\pi = S'$ olup $Ker\pi|_T = S' \cap T$ 'dir. M, SA – extending modül olduğundan $Ker\pi|_T = S' \cap T$ bir dik toplananda essential'dir.

Şimdi (2)'nin sağlandığını görelim. $M = A \oplus B$, $\pi : M \to B$ projeksiyon dönüşümü ve C, A'nın tümleyeni olsun. $x \in Ker\pi|_C$ alalım. Bu durumda $x \in C \cap A = 0$ olup $Ker\pi|_C = \{0\}$'dır. Böylece $\pi|_C$ bire-birdir.

$$A \oplus C = (A \oplus C) \cap M = (A \oplus C) \cap (A \oplus B) = \left[(A \oplus C) \cap B\right] + A$$

olduğundan

$$\pi(C) = \pi(A \oplus C) = \pi\left[(A \oplus C) \cap B\right] = (A \oplus C) \cap B$$

dir. M SA – extending olduğundan $A \oplus C = M$ olup

$$\pi(C) = (A \oplus C) \cap B = M \cap B = B$$

bulunur. Böylece $\pi|_C$ örten olur. Sonuç olarak $\pi|_C$ bir izomorfizmadır.

Tersine (1) ve (2) şartlarını kabul edelim. $M = A \oplus B$ ve C, A'nın tümleyeni olsun. Bu durumda (2)'den $\pi|_C\,(C) = B$ olup $M = A \oplus B = A \oplus C$'dir. Böylece M Ads modüldür.

Diğer taraftan S ve T, M'nin iki dik toplananı ise, $M = S \oplus S' = T \oplus T'$ olacak biçimde S', $T' \leq M$ vardır. $\pi : M \to S'$ projeksiyon dönüşümü olsun. $Ker\pi|_T = S \cap T$ olup kabulden $Ker\pi|_T = S \cap T$, M'nin bir dik toplamında essentialdir. Böylece M'nin SIP – extending olduğu görülür. Sonuç olarak M, SA – extending modüldür.

Bir Ads modülün dik toplananlarınında Ads olmasına rağmen (Takıl Mutlu, 2015) bir SIP – extending modülün dik toplananlarının SIP – extending olup olmadığı sorusu hala açıktır. Bu durumda bir SA – extending modülün dik toplamlarınında SA – extending modül olup olmadığı açık sorudur. Ancak aşağıdaki Lemma bir SA – extending modülün dik toplananlarının özel bir durumda SA – extending olduğunu gösterir.

Lemma 3.4. M bir SA – extending modül ve N M'nin bir dik toplananı olsun. Eğer N, essential altmodüllerinden her birinin M içindeki tek kapanışı ise N, SA – extending modüldür.

Kanıt: (Takıl Mutlu, 2015)'den N Ads-modüldür. Şimdi N 'nin SIP – extending modül olduğunu gösterelim. $N \leq_d M$ olduğunda $M = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq M$ vardır. K ve L , N 'nin dik toplananları olsunlar. Böylece M 'nin de dik toplananlarıdır. Kabulden M 'nin bir T_1 dik toplananı vardır öyleki $K \cap L \leq_e T_1$ 'dir ve $M = T_1 \oplus T_1'$ olacak biçimde $T_1' \leq M$ vardır. Buradan $K \cap L \cap N' \leq N \cap N' = 0$ olup $K \cap L \cap N' = 0$ 'dır.

$0 = (K \cap L) \cap N' \leq_e T_1 \cap N'$ olduğundan $T \cap N' = 0$'dır. Ayrıca $K \cap L \subseteq N \cap T_1 \subseteq T_1$ olduğundan $N \cap T_1 \leq_e T_1$ 'dir. $\pi : M \to T_1$ kanonik projeksiyon dönüşümü olsun. $g : N \to T_1$ dönüşümü π 'nin N 'ye kısıtlanışı olsun. $K = g^{-1}(N \cap T_1)$ alalım. $N \cap T_1 \leq_e T_1$ olduğundan $K = g^{-1}(N \cap T_1) \leq_e g^{-1}(T_1) = N$ 'dir.

Ayrıca $K = (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1')$ 'dür. Bunu görmek için $x \in (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1')$ alalım. $x \in a + b$ olacak şekilde $a \in N \cap T_1$, $b = N \cap T_1'$ vardır. Buradan $g(x) = g(a) + g(b) \in T_1 \cap N$ olup $x \in g^{-1}(T_1 \cap N) = K$ 'dır. Böylece

$$(N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1') \subseteq K$$

elde edilir. Diğer taraftan $x \in K$ alalım. $x \in M$ olduğundan $x = y + z$ olacak biçimde $y \in T_1$ ve $z \in T_1'$ vardır. Buradan $g(x) = y \in N \cap T_1$ olup $z \in N$ elde edilir. Burada $x \in (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1')$ olur. Yani $K \subseteq (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1')$ 'dir. Böylece $K = (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1')$ 'dür.

$N \cap T_1 \leq_e T_1$ olduğundan $K = (N \cap T_1) \oplus (N \cap T_1') \leq_e T_1 \oplus (N \cap T_1')$ 'dür. Ancak $K \leq_e N$ ve kabulden N, essential olan altmodüllerinin M içinde ki tek kapanışı olduğundan $T_1 \oplus (N \cap T_1') \subseteq N$ olmalıdır. O halde $T_1 \subseteq N$ 'dir. Böylece $T_1 \leq_d M$ olduğundan $T_1 \leq_d N$ 'dir. Sonuç olarak $K \cap L$, N 'nin bir dik toplanında essentialdir.

SA – extending modüllerin dik toplamları SA – extending olmak zorunda değildir.

Örnek 3.5. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$ ayrıştırılamaz olduğundan dik toplamları 0 ve kendisidir. O halde $\mathbb{Z}$, SA – extending modüldür. Ancak $\mathbb{Z}$ modülü $\mathbb{Z}-$ injektif olmadığından $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ Ads-modül değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, SA – extending modül değildir.

Tanım 3.6. R bir halka ve $x \in R$ olsun. $r(x) = \{a \in R \mid xa = 0\}$ kümesi R'nin bir sağ idealidir. Bu kümeye x elemanının **sağ sıfırlayıcısı** denir. Benzer biçimde bir $X \subseteq R$ kümesinin sağ sıfırlayıcısı da

$$r(X) = \{a \in R \mid \forall x \in X, xa = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.7. $M = M_1 \oplus M_2$ bir R modül olsun. Eğer $r(M_1) + r(M_2) = R$ ise M'nin her N altmodülü $N = N_1 \oplus N_2$ öyleki $N_1 \leq M_1$ ve $N_2 \leq M_2$ olacak biçimde yazılabilir (Hamdouni vd., 2005).

Lemma 3.8. M ve N, SA – extending modüller olsunlar. Eğer $r(M) + r(N) = R$ ise $M \oplus N$, SA – extending modüldür.

Kanıt: İlk olarak $M \oplus N$'nin SIP – extending olduğunu gösterelim:
A ve B, $M \oplus N$'nin herhangi iki dik toplananı olsun. Lemma 3.7.'den M_1, $M_2 \leq M$ ve N_1, olmak üzere $A = M_1 \oplus N_1$ ve $B = M_2 \oplus N_2$ olarak yazılabilir. A, $B \leq_d M \oplus N$ olduğundan $M \oplus N = A \oplus A' = B \oplus B'$ olacak biçimde A', $B' \leq M \oplus N$ vardır. Böylece

$$M \oplus N = (M_1 \oplus N_1) \oplus A' = (M_2 \oplus N_2) \oplus B'$$

dür. Modüler kuraldan

$$M = M \cap (M \oplus N) = M_1 \oplus (M \cap (N_1 \oplus A')) = M_2 \oplus (M \cap (N_2 \oplus B'))$$

olup $M_1,\ M_2 \leq_d M$ olduğu görülür. Benzer şekilde $N_1,\ N_2 \leq_d N$ olduğu görülür.

M ve N $\text{SIP}-\text{extending}$ olduğundan $M_1 \cap M_2 \leq_e M' \leq_d M$ ve $N_1 \cap N_2 \leq_e N' \leq_d N$ olacak biçimde $M',\ N' \leq M$ vardır. Şimdi

$$(M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2) = (M_1 \oplus N_1) \cap (M_2 \oplus N_2) = A \cap B$$

dir. Böylece

$$A \cap B = (M_1 \cap M_2) \oplus (N_1 \cap N_2) \leq_e M' \oplus N' \leq_d M \oplus N$$

olduğundan $M \oplus N$ $\text{SIP}-\text{extending}$ modül olur.

Diğer taraftan C A'nın bir tümleyeni olsun. Bu durumda $C = M_1' \oplus N_1'$ olacak biçimde $M_1' \subseteq M$ ve $N_1' \subseteq N$ vardır. Buradan

$$M_1' \cap M_1 = (M_1' \oplus N_1') \cap M_1 \leq (M_1' \oplus N_1') \cap (M_1 \oplus N_1) = C \cap A = 0$$

$$N_1' \cap N_1 = (M_1' \oplus N_1') \cap N_1 \leq (M_1' \oplus N_1') \cap (M_1 \oplus N_1) = C \cap A = 0$$

olduğundan $M_1' \cap M_1 = 0$ ve $N_1' \cap N_1 = 0$'dır. Böylece $M_1',\ M_1$'in tümleyeni ve $N_1',\ N_1$'in tümleyenidir. M ve N Ads-modül olduğundan $M = M_1 \oplus M_1'$ ve $N = N_1 \oplus N_1'$'dür. Böylece

$$M \oplus N = (M_1 \oplus M_1') \oplus (N_1 \oplus N_1') = A \oplus C$$

elde edilir. Böylece $M \oplus N$ $\text{Ads}-\text{modül}$ olup $M \oplus N$, $\text{SA}-\text{extending}$ modül olur.

KAYNAKLAR

Anderson, F.W. ve Fuller, K.R. (1974). *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag.

Dung, N.V., Smith, P.F. ve Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*, , Longman.

Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups*, Volume 1, Academic Press, London.

Garcia, J.L. (1989). *Properties of Direct Summands of Modules*, Communications in Algebra, 17, 73-92.

Hamdouni, A., Ozcan, A. Ç ve Harmancı, A. (2005). *Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property*, JP Jour Algebra, Number Theory & Appl. 5(3): 469-490.

Karabacak, F., Tercan, A. (2007). *On modules and matrix rings with SIP-extending*. Taiwanese J. Math., 11(4): 1037-1044.

Mohamed, S.H. ve Muller, B.J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge University Press.

Sharpe, D.W. ve Vamos, P. (1972). *Injective Modules*, Cambridge University Press.

Takıl Mutlu, F. (2015). *"On Ads-modules with the SIP"*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 41(6): 1355-1363

Wilson, G. V.,(1986). *"Modules with the summand intersection property"* , Communications in Algebra, 14, 21-38.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Kübra ÜlGER KÖSE

Doğum Yeri ve Tarihi : ŞİŞLİ – 19.07.1992

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İş Deneyimi

Stajlar : Matematik Öğretmenliği Ortaöğretim

Çalıştığı Kurumlar : Sınav Dershanesi (2015-2016)
Özel Mor Mavi Etüt Merkezi (2016-2018)
Özel Kırcı Etüt Merkezi (2018-2019)

İletişim

Adres : Beşiktaş mahallesi Marmara caddesi no:13 d:7
Merkez-BİLECİK 11100

E-Posta Adresi : ulgerkubra34@hotmail.com

Akademik Çalışmaları

- **Kübra Ülger Köse**, F.Takıl Mutlu, "*On Ads Modules with the SIP-Extending* ", 6. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı, (Konuşmacı).

Yabancı Dil Bilgisi : İngilizce (Orta Seviye):

Tarih: 11/07/2019