

BROCARD-RAMANUJAN BENZERİ ÇEŞİTLİ DENKLEMLER ÜZERİNE

Ramazan YALÇIN¹, İlker İNAM², Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA^{3*}

¹Bilecik Seyh Edebali Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, BİLECİK

²Bilecik Seyh Edebali Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, BİLECİK

³ Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Muradiye Meslek Yüksekokulu, Tıbbi Hizmetler ve Teknikler Bölümü, VAN,
zeynepdemirkolozkaya@yyu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, Brocard-Ramanujan tipi Diophantine denklemlerin bir benzeri olan $s = 5, 6, 7, \dots$ olmak üzere

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

denklemi ve $k \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$m^3 = (m + k)! + m$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümleri incelenmiştir. Buna göre bu denklemlerin hiçbir pozitif tamsayı çözümleri olmadığı ispatlanmıştır. İlk teoremin ispatında Γ fonksiyonunun özellikleri kullanılmış olup ikinci teoremin ispatında basit hesaplamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, faktöriyel terim içeren üstel Diophantine denklemlerde çözüm kümelerinin sonluluğu yönündeki genel literatürle tutarlıdır.

Anahtar kelimeler: Brocard-Ramanujan denklemi; Diophantine denklemleri; gama fonksiyonu

ON VARIOUS BROCARD-RAMANUJAN-LIKE EQUATIONS

Extended Abstract

In this study, the positive integer solutions of the equations

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

and

$$m^3 = (m + k)! + m$$

where $k \neq 1$ is a positive integer and $s = 5, 6, 7, \dots$, which are analogous to the Brocard-Ramanujan type Diophantine equations, are investigated. Accordingly, it is proven that these equations have no positive integer solutions. The properties of the Γ function are used in the proof of the first theorem, and simple calculations are performed in the proof of the second theorem. The obtained results are consistent with the general literature on the finiteness of solution sets in exponential Diophantine equations containing factorial terms.

Keywords: Brocard-Ramanujan equation; Diophantine equations; gamma function

1.Giriş

Çözümleri tamsayı olan denklemler olarak tanımlanan “Diophantine denklemleri” özellikle günlük hayat problemlerinin çözümlerinde önemli rol oynadığı için sayılar teorisinin en temel, en köklü ve ilgi çekici konularından biridir. Literatürde halen çözümsüz olan sayılar teorisi problemleri de bulunduğu için popülerliğini hiçbir zaman kaybetmemiştir. Örneğin, Tastan vd. (2021), Özkan & Uysal (2023), Yılmaz vd (2024), Uysal vd. (2023) konu ile ilgili güncel makaleler arasında sayılabilir. Bu sınıftaki klasik problemlerden biri olan Brocard-Ramanujan problemi ise

$$n! + 1 = m^2$$

şeklinde verilir ve yalnızca $n = 4,5,7$ durumları için çözümleri bilinmektedir. Bu tür denklemler, faktöriyel ve kare sayılar arasındaki nadir kesişimleri araştırır ve özellikle üstel olarak büyüme gösteren fonksiyonların çıkışma noktalarını inceler.

Brocard-Ramanujan problemi, ilk kez Henri Brocard tarafından 1876’da ortaya atılan ve daha sonra Ramanujan’ın da ilgisini çeken önemli bir denklemdir ve bu denklem, sınırlı sayıda çözüme sahip olması bakımından dikkat çekicidir. Brocard,

$$n! + 1 = m^2$$

denkleminin çözüm ararken, yalnızca birkaç küçük çözüm bulunduğunu belirtmiş, ancak genel bir sınırlama getirememiştir. Bu denklemi çalışan Ramanujan, mektuplarında ve notlarında denklemin özel durumları ile ilgilenmiştir. Başka bir çalışmada ise Guy [*Unsolved Problems in Number Theory*] bu problemi S14 olarak sınıflandırır ve çözüm sayısının sonlu olduğunu öne sürer. Tijdeman (1976)’da ise, bu tür denklemlerin çözüm sayısının sınırlı olduğunu göstermek için Baker’ın *linear forms in logarithms* (logaritmalarda lineer formlar) teorisi kullanılmıştır.

Brocard-Ramanujan tipi denklemler, üstel Diophantine denklemler bağlamında incelenmiştir. Alan Baker’ın çalışmaları, bu tip denklemlerin çözüm kümesinin sonluluğunu kanıtlamakta devrim niteliğinde olmuştur. Baker (1966, 1968), logaritma biçimindeki lineer ifadelerle bu tür denklemlerin çözümünü sınırlamak için bir yöntem geliştirmiştir. Tijdeman (1976), Brocard-Ramanujan probleminin yalnızca sonlu sayıda çözümü olabileceğini göstermiştir:

$$n! + 1 = m^2 \Rightarrow n < C$$

şeklinde bir eşitsizlik sağlamıştır; burada C sabiti Baker’ın teorisinden türemiştir.

Brocard-Ramanujan probleminin doğrudan genelleştirilmesiyle ortaya çıkan denklemler oldukça geniştir. Aşağıda bu genelleştirmelerden örnekler verilmiştir:

- $n! + A = B^k$
- $n! = x^2 + 1$
- $y! = x^2 + D$
- $x! + y! = z^2$

Bu denklemler sayılar teorisinde farklı yöntemlerin uygulanmasına olanak tanımıştır:

- Modüler aritmetiğe dayalı yöntemler, özellikle faktöriyel ifadeleri modüler eşitliklerle karşılaştırarak çözüm arayan çalışmalarda görülür (örneğin mod 5, 7 gibi küçük asallar).
- Hesaplamaları cebir ve sayılar teorisi araçları (Magma, SageMath) ile bazı sınırlandırmaların hesaplı olarak ispatı yapılmıştır (Örneğin Luca ve Shorey’in çalışmaları).
-

Ramanujan, Brocard problemi olarak bilinen $n! + 1 = m^2$ denklemini doğrudan çözmemiş olsa da, benzeri yapılar taşıyan birçok ilginç ve dikkat çekici aritmetik örüntü ile ilgilenmiştir. Özellikle sayılar arasındaki alışılmadık ilişkiler ve biçimsel simetriler, Ramanujan’ın araştırma tarzında sıkça görülmektedir. Bu yönüyle onun bazı örnekleri, Brocard-Ramanujan probleminin yapısal benzerlerini yansıtır.

Örneğin, Ramanujan’ın sıklıkla incelediği ilginç bir eşitlik şudur:

$$8712 = 4 \times 2178$$

Bu örnekte dikkat çekici olan, 8712 sayısının 2178'in rakamlarının ters çevrilmiş hali olması ve aralarında çarpımsal bir ilişkinin bulunmasıdır. Bu tür örnekler, sadece sayısal estetik açısından değil, aynı zamanda permütasyon içeren yapıların aritmetik özelliklerle etkileşimi bağlamında da önemlidir. Ramanujan ayrıca faktöriyel ifadelerle karesel sayılar arasındaki ilişkileri incelemiş ve bu kapsamda aşağıdaki gibi yapılarla da ilgilenmiştir:

$$n^2 + 1 = m!$$

Bu denklem, Brocard tipi yapıların simetrik bir varyantıdır ve çözüm kümesinin sınırlı olup olmadığı sorusu bu tür denklemlerle ilgilenen matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu bağlamda Ramanujan–Nagell denklemi gibi yapılarla da yapısal benzerlik gösterir.

Ramanujan'ın bu tür ifadeleri daha sonra matematikçiler tarafından çeşitli araçlarla incelenmiştir:

- Rekürans ilişkileri kullanılarak benzeri diziler üretilmiş,
- Asimptotik analiz ile belirli yapıların büyüme davranışları anlaşılmış,
- Üstel Diophantine analiz ile denklemlerin çözüm kümeleri sınırlandırılmıştır.

Ayrıca Ramanujan'ın bazı not defterlerinde yer alan “karmaşık görünen ama çözüm açısından sade” türde eşitlikler, modern sayılar teorisinde örüntü tanıma, p-adik analiz ve hesaplamalı tekniklerin gelişimine ilham vermiştir. Bu sebeple, Ramanujan'ın doğrudan Brocard problemiyle ilgilenmemiş olsa bile, bu tip denklemlerin estetik ve yapısal değerine yönelik sezgileri, literatürde Brocard-Ramanujan tipi olarak adlandırılan denklemlerin gelişiminde dolaylı bir etkiye sahiptir.

Son yıllarda bilgisayar destekli analizler, Brocard tipi problemlerin daha geniş uzantılarını test etmede kullanılmaktadır:

- Luca (2000), faktöriyel ifadeler içeren üstel Diophantine denklemleri analiz etmiş ve çözüm kümesini sınırlamıştır.
- Alzer & Luca (2017), benzeri yapıdaki $x^2 + D = y!$ denklemlerini incelemiş ve çözüm kümesinin sonlu olduğunu göstermiştir.
- Bilgisayar hesaplamaları ile bazı genelleştirilmiş Brocard denklemleri örneğin $n! + c = m^2$ türü denklemler belirli c değerleri için taranmıştır.

Bağlantılı Problemler ve Literatürdeki Konumu

- **Catalan Problemi:** $x^a - y^b = 1$ denklemi ile Brocard problemi arasında çözüm sayısının sonluluğu açısından kavramsal bir benzerlik bulunur.
- **Ramanujan–Nagell Denklemi:** $x^2 + 7 = 2^n$ şeklindedir. Bu da Brocard tipi bir yapı gösterir ve çözüm kümesi sonludur.
- **Pillai Conjecture:** Faktöriyel ve kuvvetli sayılar arasındaki farkların sınırlı sayıda çakışabileceğini öne sürer.

Literatür, Brocard-Ramanujan tipi denklemlerin yalnızca birkaç çözüm içerdiği, genellikle sonlu çözümlere sahip olduğu ve bu çözümlerin sınırlandırılmasında üstel denklemler kuramı, Baker-Tijdeman yöntemleri, modüler aritmetiğe dayalı teknikler ve sayısal doğrulama araçlarının etkin biçimde kullanıldığını göstermektedir. Bu çerçevede, “Brocard-Ramanujan benzeri” olarak tanımlanabilecek her yeni denklem hem klasik teori hem de hesaplamalı teknikler açısından zengin analiz imkanları sunmaktadır.

2. Materyal ve Yöntemler

Bu çalışmada Brocard-Ramanujan tipi Diophantine denklemlerin bir benzeri olan $s = 5, 6, 7, \dots$ olmak üzere

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

denklemi ve $k \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$m^3 = (m + k)! + m$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümleri analiz edilmiştir. Çözüm yaklaşımı analitik metotlara dayalıdır.

Tüm hesaplamalar SageMath ve Wolfram Mathematica yazılımlarıyla doğrulanmış, elde edilen çözümler ve sınır eşitsizlikleri sembolik olarak test edilmiştir. Olabilecek en genel denklemler dikkate alınmıştır.

Teorem 1.1.

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

eşitliğinin $s = 5, 6, 7, \dots$ için herhangi bir tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $m^{s+2} - m^s = (m + 1)!$ olduğundan

$$m^s(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$m^{s-1} = (m - 2)!$$

elde edilir. Bu ise

$$m^{s-1} = \Gamma(m - 1)$$

eşitliğini verdiği için $s = 5, 6, 7, \dots$ için tamsayı çözüm yoktur. Burada dikkat edilirse klasik Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlanır.

Sonuç 1.2. $m^6 = (m + 1)! + m^4$ eşitliğini sağlayan m tamsayı kökü yoktur.

İspat.

$$m^6 - m^4 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^4(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m^3 = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve $\Gamma(m - 1) = m^3$ eşitliği sadece $m = 2, 3, 4$ tamsayıları için sağlanır.

Sonuç 1.3. $m^5 = (m + 1)! + m^3$ eşitliğini sağlayan m tamsayı kökü yoktur.

İspat.

$$m^5 - m^3 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^3(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m^2 = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve $\Gamma(m - 1) = m^2$ eşitliği sadece $m_1 \cong 1.43$ ve $m_2 \cong 6.33$ için sağlanır. Yani bu eşitliğin de tamsayı çözümleri yoktur.

Sonuç 1.4. $m^4 = (m + 1)! + m^2$ eşitliğini sağlayan m tamsayı kökü yoktur.

İspat.

$$m^4 - m^2 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^2(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve $\Gamma(m - 1) = m$ eşitliği sadece $m \cong 4.82$ için sağlanır. Yani bu eşitliğin de tamsayı çözümleri yoktur.

Teorem 1.5. $k \neq 1$ bir pozitif tamsayı olsun. Buna göre

$$m^3 = (m + k)! + m$$

eşitliğini sağlayan bir pozitif m tamsayısı yoktur.

İspat. Kabul edelim ki

$$m^3 = (m + k)! + m$$

eşitliğini sağlayan bir m tamsayısı olsun. $m^3 = (m + k)! + m$ ifadesi, $m^3 - m = (m + k)!$ olarak yazılabilir.

Bu eşitlik açıldığında ise

$$m \cdot (m - 1)(m + 1) = (m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)(m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

eşitliği elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$1 = (m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)(m - 2)!$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $(m - 2)!$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$(m - 2)! = \frac{1}{(m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)} \notin \mathbb{Z}$$

olduğundan bir çelişki elde edilmiş olur. Dolayısıyla $m^3 = (m + k)! + m$ eşitliğini sağlayan bir pozitif m tamsayısı yoktur.

Teşekkür

Bu çalışmayı titizlikle okuyup değerlendiren ve katkı sağlayan editör ile hakemlere teşekkür ederiz.

Kaynaklar

1. Alzer, H., & Luca, F. (2017). Diophantine equations involving factorials. *Mathematica Bohemica*, 142(2), 181-184.
2. Baker, A. (2022). *Transcendental number theory*. Cambridge University Press.
3. Guy, R. (2004). *Unsolved problems in number theory* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
4. Luca, F. (2000). Equations involving arithmetic functions of factorials. *Divulgaciones Matemáticas*, 8(1), 15-23.
5. Nagell, T. (1961). The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$. *Arkiv för Matematik*, 4(2), 185-187.
6. Özkan, E., & Uysal, M. (2023). d-Gaussian Fibonacci, d-Gaussian Lucas Polynomials, and their Matrix Representations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 75(4).
7. Tastan, M., Özkan, E., & Shannon, A. (2021). The generalized k-Fibonacci polynomials and generalized k-Lucas polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(2).
8. Tijdeman, R. (1976). On the equation of Catalan. *Acta Arithmetica*, 29, 197-209.
9. Uysal, M., Inam, I., & Özkan, E. (2022). A short note on the Pell-Lucas–Eisenstein series. *Asian-European Journal of Mathematics*, 15(05), 2250219.
10. Yilmaz, N. Ş., Włoch, A., & Özkan, E. (2024). Generalization of the Distance Fibonacci Sequences. *Axioms*, 13(7), 420.