

**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR**

**Hatice KAYA**

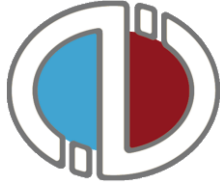
**Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı**

**Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**BİLECİK, 2014**

**Ref. No: 10043326**



**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR**

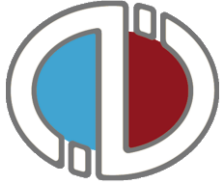
**Hatice KAYA**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı**

**Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**BİLECİK, 2014**



**ANADOLU UNIVERSITY**



**BILECIK SEYH EDEBALI  
UNIVERSITY**

**BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY**

**Graduate School Of Sciences**

**Department of Mathematics**

**IMPROPER BICOMPLEX NUMBERS**

**Hatice KAYA**

**Master's Thesis**

**Thesis Advisor**

**Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ**

**BİLECİK, 2014**



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/06/2014 tarih ve 25/1 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27/06/2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hatice KAYA 'nın "Genelleştirilmiş Bilkompleks Sayılar" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

ÜYE : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ  
(TEZ DANIŞMANI)

ÜYE: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

ÜYE : Doç. Dr. Tamer BÜYÜKKÖROĞLU

**ONAY**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalıőmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOğLU' na teőekkürlerimi sunarım.

Çalıőmalarımda manevi desteğini her zaman hissettiğim sevgili eőim Serdar KAYA' ya teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalıőmalarımda yanımda bulunan bütün arkadaşlarıma teőekkürlerimi sunarım.

Hatice KAYA

Bilecik, 2014

## ÖZET

Bikompleks sayılar teorisi uzun zamandır çalışılmaktadır. Bu tez çalışmasının birinci bölümünde bikompleks sayılar teorisinde gerekli olan homotetik hareket, Lie grubu, Lie Cebiri, Matris Lie grubu, eğriler, Hiperyüzey, Dual sayılar, Hamilton operatörü gibi temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde bikompleks sayılar cümlesi tanımlanmış ve bu cümle üzerinde toplama, çıkarma ve eşlenik kavramları verilmiştir. Ayrıca, bikompleks sayıların reel matris gösterimleri, kompleks matris gösterimleri, Matris Lie grubu yapısı,  $M$  Lie grubunun  $x_1x_4 = x_2x_3$  hiperyüzeyindeki Lie cebiri oluşturulmuş ve  $M'$  nin manifold yapısı göz önüne alınmıştır.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş bikompleks sayılar tanımlanmış ve eşlenik özellikleri verilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi elde edilmiştir. Ayrıca,  $M$  Lie grubunun  $x_1x_4 = x_2x_3$  hiperyüzeyindeki genelleştirilmiş bikompleks sayıların Lie cebiri oluşturulmuştur.  $\alpha = \beta = 1$  için bikompleks sayılardaki eşitliklerin elde edildiği genelleştirme kullanılarak doğrulanmıştır. Son olarak da dual genelleştirilmiş bikompleks sayıların tanımı verilip eşlenik özelliklerine değinilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bikompleks sayı, Lie grubu, Lie cebiri, Homotetik hareket, Hamilton operatörü, Hamilton matrisi, Genelleştirilmiş bikompleks sayı, dual sayı, dual genelleştirilmiş bikompleks sayı

## ABSTRACT

Bicomplex numbers theory has been studied for a long time. The first chapter in this thesis, basic concepts such as homothetic motion, Lie groups, Lie algebra, matrix Lie group, curves, hypersurfaces, Dual numbers, Hamilton operator which are required in theory of the numbers are given.

In the second part of the thesis, the set of bicomplex numbers is defined and subtraction and conjugate concepts are given. In addition, real matrix representations, complex matrix representations, the matrix Lie group structure, Lie algebra on hypersurfaces of  $x_1x_4 = x_2x_3$  of M Lie group is generated and manifold structure of M is considered.

In the third part of the thesis, the generalized bicomplex numbers are defined and conjugate concepts are given. Then, real matrix representation of generalized bicomplex numbers is obtained. Moreover, Lie algebra of the generalized bicomplex numbers on hypersurfaces of  $x_1x_4 = x_2x_3$  of M Lie group is generated. For the special case  $\alpha = \beta = 1$  equalities in the bicomplex number are confirmed by using the generalization. Finally, the generalized dual bicomplex numbers are defined and conjugate concepts are mentioned.

**Key Words:** Bicomplex number, Lie group, Lie algebra, matrix Lie group, homothetic motion, Hamilton operator, Hamilton matrix, generalized bicomplex numbers, Dual number, generalized dual bicomplex numbers.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

JÜRİ ONAY SAYFASI

TEŞEKKÜR

ÖZET.....i

ABSTRACT .....ii

İÇİNDEKİLER..... iii

ÇİZELGE VE ŞEKİLLER DİZİNİ .....v

SİMGELER DİZİNİ.....vi

GİRİŞ ..... 1

1. TEMEL KAVRAMLAR.....3

1.1 Afin Uzaylar ..... 3

1.2 Öklid Uzayı ..... 5

1.3  $E^n$  'de Eğriler.....7

1.4 Diferansiyellenebilir Manifoldlar.....7

1.5 Lie Grubu, Lie Cebiri ve Matris Lie Grubu ..... 8

1.6 Homomorfizm ..... 10

1.7 Dual Sayılar ..... 100

2. BİKOMPLEKS SAYILAR VE ÖZELİKLERİ ..... 133

2.1 Bikompleks Sayılar ..... 133

2.2 Eşlenik Özellikleri ..... 17

2.2.1 (i) Birimine Göre Eşlenik Özellikleri..... 17

2.2.2 (j) Birimine Göre Eşlenik Özellikleri;..... 200

2.2.3 (ij) Birimine göre göre Eşleniğin Özellikleri ..... 223

2.2.4 Eşleniklerin Birbirlerine Göre Durumları ..... 26

2.3	Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi .....	311
2.4	Bikompleks Sayıların Kompleks Matris Gösterimi .....	36
2.5	Matris Lie Grubu.....	38
2.6	$N^n$ nin Manifold Yapısı.....	400
2.7	Bikompleks Sayıların Lie Grubu.....	41
2.8	Dual Bikompleks Sayılar.....	43
<b>3.GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR .....</b>		<b>47</b>
3.1	( $i$ ) Birimine Göre Eşlenik İle Çarpım.....	50
3.2	( $j$ ) Birimine Göre Eşlenik ile Çarpım.....	51
3.3	( $ij$ ) Birimine Göre Eşlenik ile Çarpım.....	51
3.4	Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi.....	54
3.5	Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Matris Lie Grubu.....	59
3.6	Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda $M$ Lie Grubunun Lie Cebiri.....	63
3.7	Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar.....	66
<b>4.SONUÇLAR.....</b>		<b>70</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>		<b>71</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>		<b>73</b>

## ÇİZELGE VE ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa No**

**Şekil 1.1:** Afın Dönüşüm.....5

## SİMGELER DİZİNİ

$E^n$	n-boyutlu Öklid Uzayı
$IR^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin cümlesi
$R$	Sabit Uzay
$R_0$	Hareketli Uzay
$\langle . \rangle$	Öklid iç çarpımı
$\  \ $	Norm işareti
$GL(n + 1, IR)$	Genel lineer grup
$\mathbb{C}_1$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_2$	Bikompleks sayılar cümlesi
$\otimes$	Bikompleks sayıların çarpımı
$\oplus$	Bikompleks sayıların toplamı
$Hom$	Homomorfizma
$\mathbb{C}_\alpha^1$	$\alpha$ ya bağlı Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^1$	Genelleştirilmiş Bikompleks sayılar cümlesi
$H^+, H^-$	Hamilton Operatörleri
$G$	Lie Grubu
$(X, G)$	G Lie Grubunun Lie Cebiri
$ID$	Dual Sayılar Cümlesi
$\mathbb{C}_2^D$	Dual Bikompleks Sayılar Cümlesi
$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^{2D}$	Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar Cümlesi

## GİRİŞ

Tarihi 1800' lü yıllara dayanan bikompleks sayılar ilk olarak 1892'de Corrada Serge tarafından tanımlanmıştır. Bikompleks sayılar kuaterniyonlar cebirinin alt cebirlerinden birinin elemanları olup, Serge, bikompleks sayıları hatta trikompleks, ..., n-kompleks sayıları tanımladı. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Öklid uzayına gömülebilir olduğunu gösterdi. Bikompleks idempotent elemanları ve bikompleks sayıların idempotent gösterimini elde etti.

1894'de Scheffers tek kompleks değişkenli fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirilmesini verdi. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928-1940 yıllarıdır. Özellikle 1933'de yazdığı makalede, Ringleb'in bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla arasındaki bağlantıyı vermesi ile bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Günümüzde, hiperkompleks sayılar ya da kuaterniyonlar teorisi alanlarında bu sayılarla yapılan çalışmalara rastlanmaktadır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay kinematiğine uygulamalarını ifade etmiştir. Hareket matrislerinin formlarını vermiştir. Hacısalıhoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Agrawal (1987) dual kuaterniyonları, Hamilton operatörleri ile formüleştirmiştir ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özelliklerini ifade etmiştir. Bu özellikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketlerinin kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır. Kula (2003) split kuaterniyonları incelemiş ve Hamilton operatörlerini ve özelliklerini vermiştir. Ayrıca Minkowski-3 uzayında vida hareketlerini tanımlamıştır. Ölmez (2006) genelleştirilmiş kuaterniyonlar ve uygulamalarını göstermiştir.

Bu tezde bikompleks sayılar

$$i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad ij = ji, \quad (ij)^2 = (ji)^2 = \alpha\beta$$

alınarak genelleştirilmiş bikompleks sayılar elde edilmiştir. Bikompleks sayıların ve genelleştirilmiş bikompleks sayıların eşlenik durumları incelenmiştir. Bikompleks sayılar ve genelleştirilmiş bikompleks sayıların matris Lie Grupları  $x_1x_4 = x_2x_3$  hiper yüzeyindeki Lie cebirleri elde edilmiştir. Ayrıca Hamilton operatörlerine benzerliklerine değinilmiştir. Son olarak da dual bikompleks ve dual genelleştirilmiş bikompleks sayılara değinilmiştir.

## 1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan bazı kavram ve tanımları vereceğiz.

### 1.1. Afin Uzaylar

#### Tanım 1.1.1 Afin Uzay

$A \neq \emptyset$  bir cümle  $V$  de  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

dönüşümü  $P, Q \in A$  noktaları için

aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise  $A$  cümlesine  $V$  ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir .

$$i) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \text{ dir.}$$

$$ii) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek}$$

$$Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

$\overrightarrow{PQ}$  vektöründe  $P$  noktasına başlangıç noktası ve  $Q$  noktasına uç noktası denir (Hacısalıhoğlu 1980).

#### Tanım 1.1.2 Afin Çatı

Bir  $V$  vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri  $A$  olsun .

$P_0, P_1, \dots, P_n \in A$  noktaları için  $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in A$  vektörlerinin sistemi  $V$ ' nin bir bazı ise

$$\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$$

nokta  $(n + 1)$  – lisine  $A$  afin uzayının bir afin çatısı denir (affine frame). Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve  $P_n$  noktasına da çatının bitim noktası denir (Hacısalihoglu 1980).

### **Teorem 1.1.1**

Bir vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri  $A$  olsun. Belli bir  $P_0 \in A$  noktası seçildiğinde başlangıçlı  $P_0$  olan bir afin çatı vardır (Hacısalihoglu 1980).

Teorem 1.1.1.'in ifadesine göre  $V$  nin bir bazı  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  olsun. Her bir  $j, 1 \leq j \leq n$  için  $\overrightarrow{P_0 P_j} = \alpha_j$  olacak şekilde bir tek  $P_j \in A$  noktasının var olduğunu biliyoruz.

O halde  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n + 1)$  –lisi bir afin çatıdır ve

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  bazı verildiğinde tektir.

### **Tanım 1.1.3**

Bir  $F$  cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı  $V_1$  ve  $V_2$  ile birleştirilmiş afin uzaylar sırası ile  $A_1$  ve  $A_2$  olsun

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

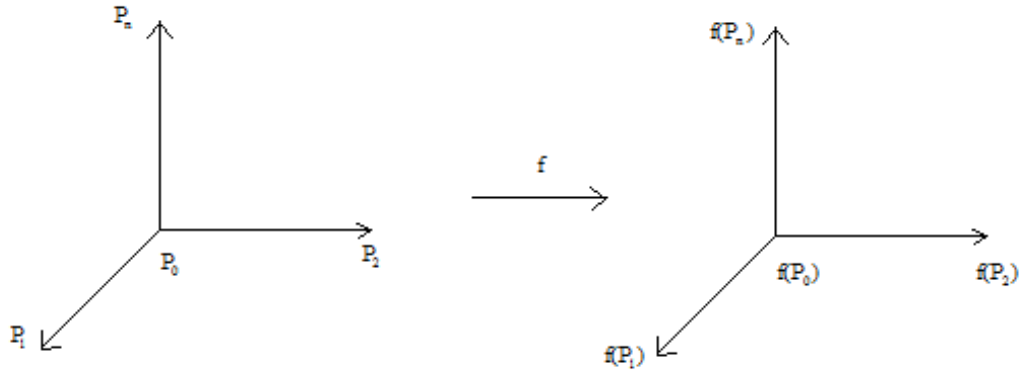
bir dönüşüm olsun. Herhangi bir  $P \in A_1$  noktası için bir

$$X_p : V_1 \rightarrow V_2$$

dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım.  $\alpha \in V_1$  vektörü için  $\alpha = \overrightarrow{PQ}$  olacak şekilde ikinci afin aksiyomuna göre tek olarak var olan nokta  $Q \in A_1$  olduğuna göre

$$X_p(\alpha) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

dır (Hacısalihoglu 1980).



**Şekil 1.1** Afin dönüşüm.

## 1.2. Öklid Uzayı

### Tanım 1.2.1 Öklid Uzayı

$n$ -boyutlu reel iç çarpım uzayı  $V$  olsun.  $V$  ile birleşen bir  $A$  afin uzayına  $n$ -boyutlu **Öklid** uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu,1980).

### Tanım 1.2.2

$E^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir nokta  $X$  olsun.  $E^n$ ' de bir afin koordinat sistemine göre  $X$  noktasının koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.

$$x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine  $E^n$ ' in  **$i$ -yinci koordinat fonksiyonu** denir.

$\mathbb{R}^n$  standart reel afin uzay olmak üzere  $\mathbb{R}^n$ 'de bir

$$\langle . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımını

$$\langle . \rangle(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlayalım. Bu iç çarpıma  $IR^n$  'de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $IR^n$  vektör uzayı ile birleşen  $IR^n$  afin uzayına  $n$ - boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1980).

### Tanım 1.2.3 Öklid Çatısı

Bir  $n$ -boyutlu reel iç çarpım uzayı  $V$  olsun.  $V$  ile birleşen  $E^n$  Öklid uzayında sıralı bir  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$  -lisi için eğer  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör sistemi  $V$ 'nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  çatısına dik çatı (Öklid Çatısı) denir (Hacısalihoglu, 1980).

### Tanım 1.2.4

$E^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir nokta  $X$  ve bu noktanın bileşenleri  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun

$$x_i : E^n \rightarrow IR$$

bileşenlerine  $E^n$ ' in  $i$  -yinci koordinat fonksiyonu denir. Buna göre  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reel sayıları  $n$  -lisine Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1980).

## 1.3. $E^n$ 'de Eğriler

**Tanım 1.3.1**  $n$ - boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  ve  $IR$  'nin bir irtibatlı açık alt cümlesi  $I$  olmak üzere,

$$a: I \subseteq IR \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise  $a(I)$  cümlesine  $E^n$  'de bir eğri denir.

### Tanım 1.3.2 Hiperyüzey

$E^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $(n-1)$  boyutlu bir yüzey veya  $(n-1)$  -yüzey diye  $E^n$  deki boş olmayan bir  $M$  cümlesine denir. Öyle ki bu  $M$  cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}^n, U \text{ açık cümle} \right\}$$

$$x \rightarrow f(x) = C$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$  biçiminde tanımlanır.  $E^2$  de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir.  $E^3$  'de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir.  $E^n$  'de bir  $(n-1)$ -yüzey,  $n > 3$  olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu 1994).

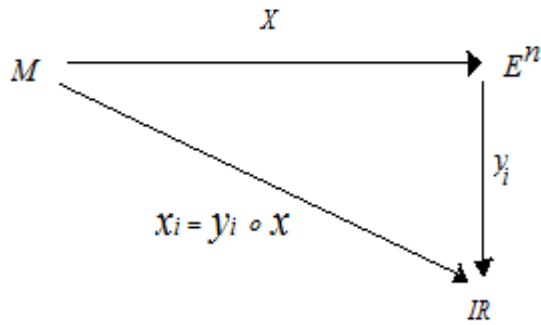
#### 1.4. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

**Tanım 1.4.1**  $M$  bir Hausdorff uzayı olsun.  $M$  'nin her bir açık cümlesi  $E^n$  'nin bir açık alt cümlesine homeomorf ve  $M$  sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa  $M$  'ye  $n$ -boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

**Tanım 1.4.2**  $M$  bir topolojik manifold olsun.  $U \subset M$  açık alt cümlesinden  $E^n$  bir  $V$  açık alt cümlesine bir

$$X: U \rightarrow V$$

homomorfizim verilsin.  $(X, U)$  ikilisine  $M$  'de bir koordinat komşuluğu veya harita denir (Hacısalıhoğlu 1980).



$x_i = y_i \circ x$  olmak üzere  $x_i$  lere  $X$  haritasına bağlı koordinat fonksiyonları denir.

**Tanım 1.4.3**  $M$   $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $A$  da  $\alpha$  indislerinin cümlesi olsun.  $U_\alpha \subset M$  açık alt cümlelerinin  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  ailesi  $M$ 'nin örtüsü olsun. Her bir  $U_\alpha$ 'nın  $E^n$ 'deki bir  $V_\alpha$  açık alt cümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. Böylece elde edilen  $(X_\alpha, V_\alpha)$  haritalarının

$$S = \{(X_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

ailesine  $M$ 'nin koordinat komşuluğu sistemi veya atlası denir (Hacısalihoglu 1980).

**Tanım 1.4.4**  $n$ -boyutlu topolojik manifoldunun bir atlası  $S = \{(X_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  olsun.

$$X_\alpha(V_\alpha) \cap X_\beta(V_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekilde her  $(\alpha, \beta) \in A \times A$  için  $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$  ve  $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$  fonksiyonları  $r \in \mathbb{N}$  için  $C^r$  sınıfından ise  $S$  atlasına  $C^r$  sınıfından atlas denir (Hacısalihoglu 1993).

#### **Tanım 1.4.5 Diferansiyellenebilir Manifold**

$M$  bir  $n$ -boyutlu manifold ve  $M$ 'nin bir  $S$  atlası  $C^r$  sınıfından ise  $M$ 'ye  $n$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold denir.

### **1.5. Lie Grubu, Lie Cebiri ve Matris Lie Grubu**

#### **Tanım 1.5.1 Lie Grubu**

Bir  $M$  diferansiyellenebilir manifoldu ve bir  $G$  grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa  $(M, G)$  ikilisine bir Lie Grubu denir.

$$L_1: M \text{ nin noktaları } G \text{ nin elemanları ile çakışır.}$$

$$L_2: M \times M \rightarrow M$$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

işlemi her yerde diferansiyellenebilirdir.

$M$ 'ye Lie grubunun temel manifoldu ve  $G$ 'ye de temel grubu denir (Hacısalihoglu, 2006).

### Tanım 1.5.2 Lie Cebiri

$V$  bir vektör uzayı olmak üzere

$$[\ ]: V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

işlemi,

- 1) Bilineer
- 2) Antisimetrik
- 3)  $[X, Y], Z] + [Y, Z], X] + [Z, X], Y] = 0$

özelliklerine sahip ise  $(X, [ \ ])$  ikilisine bir Lie Cebiri denir (Hacısalıhoğlu, 2006).

**Tanım 1.5.3**  $G$  bir Lie grubu olsun. Belli bir  $g_0 \in G$  noktasında

$$I_{g_0} : G \rightarrow G$$

dönüşümü  $\forall g \in G$  için

$$I_{g_0}(g) = g_0 g$$

şeklinde tanımlanır ve  $G$  üzerinde bir sol paralelizm (öteleme) adını alır (Hacısalıhoğlu, 2006).

### Tanım 1.5.4 Matris Lie Grubu

$\{[a_{ij}]_{n \times n} : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$  matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpma işlemine göre bir grup ise bu gruba Matris Lie Grubu denir (Hacısalıhoğlu, 2006).

**Tanım 1.5.5**  $G$  bir matris Lie grubu ve  $G$  üzerinde bir vektör alanı da  $X$  olsun. Eğer  $\forall g_0, g_1 \in G$  için

$$I_{(g_0)_*} X(g_1) = X(g_0 g_1)$$

yani  $\forall g \in G$  için

$$I_{(g)*} \circ X = X \circ I_{(g)}$$

ise  $X$  vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir.

$$\chi_l = \{X: X \in \chi, I_{(g)*} \circ X = X \circ I_{(g)}\}$$

cümlesi  $X$  vektör alanları uzayının bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya sol invaryant vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 2006).

**Teorem 1.5.1**  $G$  bir matris Lie grubu ve  $G$  nin sol invaryant vektör alanlarının vektör uzayı  $\chi_l$  olsun. Bu durumda

$$\chi_l = T_G(e)$$

dir. Burada  $e$ ,  $G$  nin birim elemanıdır.

**Tanım 1.5.6**  $G$  Lie grubunun Lie cebiri  $G$  üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının Lie Cebiri olarak tanımlanır. Bunun yanında  $G$  Lie grubunun Lie cebiri olarak  $G$  nin  $e$  birim noktasındaki  $T_G(e)$  tanjant uzayını Lie cebir yapısı ile birlikte alabiliriz (Hacısalıhoğlu, 2006).

## 1.6. Homomorfizm

**Tanım 1.6.1**  $(G, \cdot)$  ve  $(H, *)$  iki grup ve  $f : G \rightarrow H$  ye bir fonksiyon olsun  $\forall a, b \in G$  için

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

ise  $f$  'ye  $G$  'den  $H$  'ye bir homomorfizma denir.

## 1.7. Dual Sayılar

### Tanım 1.7.1 Dual Sayılar

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$  olmak üzere bir  $A = (a, a^*)$  ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cümlesi  $ID$  ile gösterilsin.

$ID = \{(a, a^*) : a, a^* \in IR\}$  üzerindeki iç işlem ve eşitlik şu şekilde tanımlanır: (Hacısalıhoğlu 1983)

**Tanım 1.7.2 (Toplama)**

$A = (a, a^*)$  ve  $B = (b, b^*) \in ID$  olmak üzere

$$\oplus : ID \times ID \rightarrow ID$$

iç işlemi:

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklinde tanımlanır ve  $ID$ 'deki toplama işlemi olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 1.7.3 (Çarpma)**

$A = (a, a^*)$  ve  $B = (b, b^*) \in ID$  olmak üzere

$$\odot : ID \times ID \rightarrow ID$$

iç işlemi:

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve  $ID$ 'deki çarpma olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 1.7.4 (Eşitlik)**

$A = (a, a^*)$  ve  $B = (b, b^*) \in ID$  olmak üzere

$$a = b, a^* = b^*$$

ise  $A$  ile  $B$  eşittir denir.  $A = B$  şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 1.7.5**

$IR$  reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$ID = IR \times IR$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise  $ID$  cümlesine dual sayılar sistemi ve  $\forall (a, a^*) \in ID$  elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 1.7.6** Bir  $A = (a, a^*) \in ID$  dual sayısında “ $a$ ” reel sayısına  $A$ ’nın reel kısmı, “ $a^*$ ” reel sayısına da  $A$ ’nın dual kısmı denir ve  $ReA = a$ ,  $DuA = a^*$  şeklinde yazılır (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 1.7.7**

$(0,1)$  dual sayısı kısaca  $\varepsilon$  ile gösterilir ve dual birim olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 1.7.1**

$A = (a, a^*) \in ID$  olmak üzere

$$A = a + \varepsilon a^*$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

**Sonuç 1.7.1**

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0)$$

olduğu görülür.

## 2. BİKOMPLEKS SAYILAR VE ÖZELİKLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayıları daha iyi anlayabilmek ve genelleştirilmiş bikompleks sayılarla olan ilişkisini verebilmek için bikompleks sayılar ve bikompleks sayılara ilişkin bazı bilgiler vereceğiz.

### 2.1. Bikompleks Sayılar

#### Tanım 2.1.1 Bikompleks Sayılar Tanımı

Bir bikompleks sayı sıralı dört sayının  $+1, i, j, ij$  gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim 1 bir reel, diğer üç birim ise

$$i^2 = j^2 = -1$$

$$ij = ji$$

özelliklerine sahiptir. Böylece bikompleks sayı  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$  biçiminde ifade edilebilir. Burada  $x_1, x_2, x_3, x_4$  reel sayılarına  $x$  bikompleks sayının bileşenleri denir.

Bikompleks sayılar kümesini  $\mathbb{C}_2$  ile gösterelim. Buna göre,

$$\mathbb{C}_2 = \{x \mid x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq 4\}$$

biçiminde ifade edilebilir.  $\mathbb{C}_2$  de iki eleman toplanabilir ve bir skaler ile çarpılabilir.

$\mathbb{C}_2$  de toplama ve skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

#### Tanım 2.1.2 (Toplama işlemi)

Bikompleks sayılarda skaler ile toplama işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\forall x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, y = y_1 + iy_2 + jy_3 + i jy_4 \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

bikompleks sayılarda toplama işlemi

$$\oplus : \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + ij(x_4 + y_4)$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece  $(\mathbb{C}_2, \oplus)$  ikilisi bir Abel gruptur. Buradaki etkisiz eleman sıfır bikompleks sayısı  $(0,0,0,0)$  sıralı dördlüsüdür.

### Tanım 2.1.3 Skaler ile Çarpma

Bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\forall x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ix_4 \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall a \in IR$  için skaler ile çarpma işlemi

$$\odot : IR \times \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$$

$$(a, x) \rightarrow a \odot x = ax_1 + iax_2 + jax_3 + ijax_4$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan dış işlem

$$i. a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y); \forall a \in IR, \forall x, y \in \mathbb{C}_2$$

$$ii. (a + b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x); \forall a, b \in IR, \forall x \in \mathbb{C}_2$$

$$iii. (a.b) \odot x = a \odot (b \odot x); \forall a, b \in IR, \forall x \in \mathbb{C}_2$$

$$iv. 1 \odot x = x, \forall x \in \mathbb{C}_2$$

özelliklerine sahiptir. O halde  $\{\mathbb{C}_2, \oplus, IR, +, \cdot, \odot\}$  sistemi bir reel vektör uzayıdır (Price, 1990). Bu uzayı  $\mathbb{C}_2$  ile  $\mathbb{C}_2$ 'deki  $\oplus$  işlemini kısaca “+” ile göstereceğiz.

### Tanım 2.1.4 Çarpma

$$\otimes : \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$$

$$(x, y) \rightarrow x \otimes y$$

işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır.

$\otimes$	$+1$	$i$	$j$	$ij$
$+1$	$1$	$i$	$j$	$ij$
$i$	$i$	$-1$	$ij$	$-j$
$j$	$j$	$ij$	$-1$	$-i$
$ij$	$ij$	$-j$	$-i$	$1$

...(E 2.1)

Buna göre,

$$\begin{aligned}
x \otimes y &= (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \otimes (y_1 + iy_2 + jy_3 + ijy_4) \\
&= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4) \\
&\quad + i(x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3) \\
&\quad + j(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2) \\
&\quad + ij(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)
\end{aligned}$$

böylece bikompleks sayılar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- a)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes y \in \mathbb{C}_2'$  dir.
- b)  $\forall x, y, z \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z'$  dir.
- c)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes y = y \otimes x'$  dir.
- d)  $\forall x, y, z \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)' \text{ dir}$$

Bu özelliklerle birlikte  $\{\mathbb{C}_2, \oplus, IR, +, \cdot, \odot, \otimes\}$  sistemi bir cebirdir. Bu cebire bikompleks sayı cebiri denir ve kısaca  $\mathbb{C}_2$  ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı  $\{1, i, j, ij\}$  ve boyutu 4 tür.

### Tanım 2.1.5 Bikompleks Sayılar Üzerinde Temel İşlemler:

#### Eşitlik:

Bikompleks sayılar için eşitlik bağıntısı

$$\forall x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4,$$

$$y = y_1 + iy_2 + jy_3 + i jy_4 \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, 1 \leq i \leq 4$$

şeklinde tanımlanır.

#### Eşlenik:

Bikompleks sayılarda eşlenik kavramı  $i$ ,  $j$  ve  $ij$  birimlerine göre olmak üzere üç farklı şekilde tanımlanır.

$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$  bikompleks sayısı  $z = x_1 + ix_2$  ve  $w = x_3 + ix_4$  kompleks sayıları yardımıyla  $x = (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4)$  şeklinde düzenlenirse

$x = w + jz$ ,  $j^2 = -1$  şeklinde yazılabilir. Buna göre bikompleks sayısının  $i$ ,  $j$  ve  $ij$  birimine göre eşlenikleri sırasıyla  $x^*(i)$ ,  $x^*(j)$  ve  $x^*(ij)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} 1) \quad x^*(i) &= \overline{w + jz} = \bar{w} + j\bar{z} \\ &= (x_1 - ix_2) + j(x_3 - ix_4) \\ &= x_1 - ix_2 + jx_3 - ijx_4 \end{aligned}$$

$$x \otimes x^* = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2j(x_1x_3 + x_2x_4)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^*(j) &= \overline{w + jz} = w - jz \\ &= (x_1 + ix_2) - j(x_3 + ix_4) \\ &= x_1 + ix_2 - jx_3 - ijx_4 \end{aligned}$$

$$x \otimes x^* = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2i(x_1x_2 + x_3x_4)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x^*(ij) &= \overline{w + jz} = \bar{w} - j\bar{z} \\ &= (x_1 - ix_2) - j(x_3 - ix_4) \\ &= x_1 - ix_2 - jx_3 + ijx_4 \end{aligned}$$

$$x \otimes x^* = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2ij(x_1x_4 - x_2x_3)$$

olarak tanımlanır (Price, 1990).

## 2.2 Eşlenik Özellikleri

### 2.2.1 (i) Birimine göre eşlenik özellikleri

(i) birimine göre eşlenik aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\forall x = z_1 + jz_2, \quad y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$a) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için} \quad (x + y)^* = x^* + y^*$$

$$b) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için} \quad (x - y)^* = x^* - y^*$$

$$c) \quad \forall x \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için} \quad (x^*)^* = x$$

$$d) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için} \quad (x \otimes y)^* = x^* \otimes y^*$$

$$e) \quad x = z_1 + jz_2 \quad \text{için} \quad x \otimes x^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2j\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$f) \quad \forall x \in \mathbb{C}_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad (\lambda x)^* = \lambda x^*$$

$$g) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad (\lambda x + \lambda y)^* = \lambda x^* + \lambda y^*$$

### İspat:

$$a) \quad \forall x = z_1 + jz_2, \quad y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için}$$

$$(x + y)^* = [(z_1 + jz_2) + (w_1 + jw_2)]^*$$

$$= [(z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2)]^*$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{z_1 + w_1}) + j(\overline{z_2 + w_2}) \\
&= \overline{z_1} + \overline{w_1} + j(\overline{z_2} + \overline{w_2}) \\
&= (\overline{z_1} + j\overline{z_2}) + (\overline{w_1} + j\overline{w_2}) \\
&= x^* + y^*
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$b) \quad \forall x = z_1 + jz_2, \quad y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için}$$

$(x - y)^* = x^* - y^*$  olduğu (a) şikkındaki gibi benzer bir şekilde yapılabilir.

$$c) \quad \forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için } x^* = \overline{z_1} + j\overline{z_2} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
(x^*)^* &= \overline{(\overline{z_1} + j\overline{z_2})} \\
&= z_1 + jz_2 \\
&= x
\end{aligned}$$

elde edilir

$$d) \quad \forall x = z_1 + jz_2, \quad y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için}$$

$$\begin{aligned}
x^* \otimes y^* &= \overline{(z_1 + jz_2)} \cdot \overline{(w_1 + jw_2)} \\
&= (\overline{z_1} + j\overline{z_2}) \cdot (\overline{w_1} + j\overline{w_2}) \\
&= \overline{z_1}\overline{w_1} - \overline{z_2}w_2 + j(\overline{z_1}\overline{w_2} + \overline{z_2}\overline{w_1}) \quad (*)
\end{aligned}$$

$$(x \otimes y)^* = [(z_1 + jz_2) \cdot (w_1 + jw_2)]^*$$

$$\begin{aligned}
&= [(z_1 w_1 - z_2 w_2) + j(z_2 w_1 + z_1 w_2)]^* \\
&= \bar{z}_1 \bar{w}_1 - \bar{z}_2 \bar{w}_2 + j(\bar{z}_2 \bar{w}_1 + \bar{z}_1 \bar{w}_2) \quad (**)
\end{aligned}$$

(\*) ve (\*\*)'dan

$$x^* \otimes y^* = (x \otimes y)^*$$

elde edilir.

e)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için  $x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
x \otimes x^* &= (z_1 + jz_2) \cdot (\bar{z}_1 + j\bar{z}_2) \\
&= z_1 \bar{z}_1 + j(z_1 \bar{z}_2) + j(z_2 \bar{z}_1) - z_2 \bar{z}_2 \\
&= (z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) + j(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \\
&= |z_1|^2 - |z_2|^2 + j(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \quad (*)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$z_1 = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}_1$  ve  $z_2 = x_3 + ix_4 \in \mathbb{C}_1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
z_1 \bar{z}_2 &= (x_1 + ix_2) \cdot (x_3 - ix_4) \\
&= (x_1 x_3 + x_2 x_4) + i(x_2 x_3 - x_1 x_4) \\
z_2 \bar{z}_1 &= (x_3 + ix_4) \cdot (x_1 - ix_2) \\
&= (x_3 x_1 + x_2 x_4) + i(x_1 x_4 - x_2 x_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 2(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 2Re(z_1 \bar{z}_2) \quad (**)$$

olduğu görülür. (\*\*) ifadesini (\*) da ifadesinde yerine yazarsak

Bu durumda;

$$x \otimes x^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2j\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\|x\| = \sqrt{||z_1|^2 - |z_2|^2 + 2j\text{Re}(z_1\bar{z}_2)|}$$

elde edilir.

*f)*  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned} (\lambda x)^* &= (\lambda z_1 + j\lambda z_2)^* \text{ için} \\ &= \lambda\bar{z}_1 + j\lambda\bar{z}_2 \\ &= \lambda(\bar{z}_1 + j\bar{z}_2) \\ &= \lambda x^* \end{aligned}$$

elde edilir.

*g)*  $\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned} (\lambda x + \lambda y)^* &= [\lambda(z_1 + jz_2) + \lambda(w_1 + jw_2)]^* \\ &= \bar{\lambda}(\bar{z}_1 + j\bar{z}_2) + \bar{\lambda}(\bar{w}_1 + j\bar{w}_2) \\ &= \lambda x^* + \lambda y^* \end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.2.2 (j) Birimine göre eşlenik özellikleri

(j) birimine göre eşlenik aşağıdaki özellikleri sağlar

$x^*(j)$  yi kısaca  $x^r$  ile gösterelim.

$\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  olmak üzere

a)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x + y)^r = x^r + y^r$

b)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x - y)^r = x^r - y^r$

- c)  $\forall x \in \mathbb{C}_2$  için  $(x^r)^r = x$   
d)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x \otimes y)^r = x^r \otimes y^r$   
e)  $x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes x^r = |z_1|^2 - |z_2|^2$   
f)  $\forall x \in \mathbb{C}_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  için  $(\lambda x)^r = \lambda x^r$   
g)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  için  $(\lambda x + \lambda y)^r = \lambda x^r + \lambda y^r$

**ispat:**

- a)  $\forall x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$\begin{aligned} (x + y)^r &= [(z_1 + w_1) + (z_2 + w_2)j]^r \\ &= (z_1 + w_1) - j(z_2 + w_2) \\ &= (z_1 - jz_2) + (w_1 - jw_2) \\ &= x^r + y^r \end{aligned}$$

elde edilir.

- b)  $\forall x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$(x - y)^r = x^r - y^r$$

olduğu (a) şikkındaki gibi benzer bir şekilde yapılabilir.

- c)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$\begin{aligned} (x^r)^r &= ((z_1 + jz_2)^r)^r \\ &= (z_1 - jz_2)^r \\ &= z_1 - (-j)z_2 \\ &= z_1 + jz_2 \end{aligned}$$

- d)  $\forall x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$(x \otimes y)^r = [(z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2)]^r$$

$$\begin{aligned}
&= [(z_1 w_1 - z_2 w_2) + j(z_1 w_2 + z_2 w_1)]^r \\
&= (z_1 w_1 - z_2 w_2) - j(z_1 w_2 + z_2 w_1) \quad \dots(*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^r \otimes y^r &= (z_1 - jz_2)(w_1 - jw_2) \\
&= (z_1 w_1 - jz_1 w_2 - jz_2 w_1 + j^2 z_2 w_2) \\
&= (z_1 w_1 - w_2 z_2) - j(z_1 w_2 + z_2 w_1) \quad \dots(**)
\end{aligned}$$

(\*) ile (\*\*) eşitliklerinden

$$(x \otimes y)^r = x^r \otimes y^r$$

elde edilir.

e)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$\begin{aligned}
x \otimes x^r &= (z_1 + z_2 j) \cdot (z_1 - z_2 j) \\
&= z_1 z_1 + j^2 z_2^2 - jz_1 z_2 + jz_1 z_2 \\
&= z_1^2 - z_2^2 \\
&= |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1 \text{ olduğundan}) \\
\|x\| &= \sqrt{||z_1|^2 - |z_2|^2|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

f)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned}
(\lambda x)^r &= (\lambda z_1 + \lambda jz_2)^r \\
&= \lambda z_1 - \lambda jz_2 \\
&= \lambda(z_1 - jz_2) \\
&= \lambda x^r
\end{aligned}$$

g)  $\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}_2$  için

$$\begin{aligned}
 (\lambda x + \lambda y)^r &= [(\lambda z_1 + \lambda jz_2) + (\lambda w_1 + \lambda jw_2)]^r \\
 &= [(\lambda z_1 - \lambda jz_2) + (\lambda w_1 - \lambda jw_2)] \\
 &= (\lambda z_1 - j\lambda z) + (\lambda w_1 - j\lambda w_2) \\
 &= \lambda(z_1 - jz_2) + \lambda(w_1 - jw_2) \\
 &= \lambda x^r + \lambda y^r
 \end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.2.3 (ij) Birimine göre eşleniğin özellikleri

(ij) birimine göre eşlenik olan  $x^*(ij)$  'yi kısaca  $x^t$  ile gösterelim.  $ij$  'ye göre eşlenik aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  olmak üzere

a)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x + y)^t = x^t + y^t$

b)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x - y)^t = x^t - y^t$

c)  $\forall x \in \mathbb{C}_2$  için  $(x^t)^t = x$

d)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  için  $(x \otimes y)^t = x^t \otimes y^t$

e)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için  $x \otimes x^r = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2jIm(z_1\bar{z}_2)$

f)  $\forall x \in \mathbb{C}_2$  ,  $\forall \lambda \in IR$  için  $(\lambda x)^t = \lambda x^t$

g)  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  ,  $\forall \lambda \in IR$  için  $(\lambda x + \lambda y)^t = \lambda x^t + \lambda y^t$

#### İspat:

a)  $\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$\begin{aligned}
 (x + y)^t &= [(z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2)]^t \\
 &= \overline{z_1 + w_1} - j\overline{(z_2 + w_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{z}_1 - j\bar{z}_1) + (\bar{w}_1 - j\bar{w}_2) \\
&= x^t + y^t
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{b) } \forall x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$(x - y)^t = x^t - y^t$$

olduğu (a) şıkkındaki gibi benzer bir şekilde yapılabilir

$$\text{c) } \forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$(x^t)^t = \bar{\bar{z}}_1 - j\bar{\bar{z}}_2$$

$$= \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$= x \text{ elde edilir.}$$

$$\text{d) } \forall x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2 \text{ için,}$$

$$x^t \otimes y^t = (\bar{z}_1 - j\bar{z}_2)(\bar{w}_1 - j\bar{w}_2)$$

$$= (\bar{z}_1\bar{w}_1 - \bar{z}_2\bar{w}_2) - j(\bar{z}_1\bar{w}_2 + \bar{z}_2\bar{w}_1) \quad (*)$$

$$(x \otimes y)^t = [(z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2)]^t$$

$$= [(z_1w_1 - z_2w_2) + j(z_2w_1 + z_1w_2)]$$

$$= [(z_1 - jz_2)(w_1 - jw_2)]^t$$

$$= \overline{\bar{z}_1\bar{w}_1 - \bar{z}_2\bar{w}_2} - j\overline{\bar{z}_1\bar{w}_2 + \bar{z}_2\bar{w}_1}$$

$$= \bar{z}_1\bar{w}_1 - \bar{z}_2\bar{w}_2 - j(\bar{z}_1\bar{w}_2 + \bar{z}_2\bar{w}_1) \quad (**)$$

(\*) ve (\*\*) 'dan

$$x^t \otimes y^t = (x \otimes y)^t$$

elde edilir.

$$e) \quad \forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \text{için}$$

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$\begin{aligned} x \otimes x^t &= (z_1 + jz_2)(\bar{z}_1 - j\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - j(z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - j(z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1) \quad (*) \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 &= (x_1 + ix_2)(x_3 - ix_4) \\ &= x_1x_3 + x_2x_4 + i(x_2x_3 - x_1x_4) \\ \bar{z}_1z_2 &= (x_1 - ix_2)(x_3 + ix_4) \\ &= x_1x_3 + x_2x_4 + i(x_1x_4 - x_2x_3) \\ z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 &= 2i(x_2x_3 - x_1x_4) = 2Im(z_1\bar{z}_2) \quad (**) \end{aligned}$$

(\*\*) ifadesini (\*) da ifadesinde yerine yazarsak

$$x \otimes x^t = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2jIm(z_1\bar{z}_2)$$

$$\|x\| = \sqrt{||z_1|^2|z_2|^2 - 2jIm(z_1\bar{z}_2)|}$$

elde edilir.

$$f) \quad \forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2, \quad \forall \lambda \in IR \quad \text{için}$$

$$(\lambda x)^t = (\lambda z_1 + \lambda jz_2)^t$$

$$= \lambda\bar{z}_1 - \lambda j\bar{z}_2$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(\bar{z}_1 - j\bar{z}_2) \\
&= \lambda x^t
\end{aligned}$$

elde edilir.

g)  $\forall x = z_1 + jz_2$  ,  $y = w_1 + jw_2 \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned}
(\lambda x + \lambda y)^t &= [(\lambda z_1 + \lambda w_1) + j(\lambda z_2 + \lambda w_2)]^t \\
&= (\overline{\lambda z_1 + \lambda w_1}) - j(\overline{\lambda z_2 + \lambda w_2}) \\
&= (\lambda \bar{z}_1 + \lambda \bar{w}_1) - j(\lambda \bar{z}_2 + \lambda \bar{w}_2) \\
&= (\lambda \bar{z}_1 - j\lambda \bar{z}_2) + (\lambda \bar{w}_1 - j\lambda \bar{w}_2) \\
&= \lambda(\bar{z}_1 - j\bar{z}_2) + \lambda(\bar{w}_1 - j\bar{w}_2) \\
&= \lambda x^t + \lambda y^t
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 2.2.4 Eşleniklerin birbirlerine göre durumları

Daha önce bikompleks sayıların,  $i$ ,  $j$  ve  $ij$  birimlerine göre eşleniklerinin özellikleri incelenmiştir. Burada da eşleniklerin birbirlerine göre durumları incelenecektir.

$x^*$ ,  $x'$  in  $i$  birimine göre eşleniğini;  $x^r$ ,  $x'$  in  $j$  birimine göre eşleniğini;  $x^t$ ,  $x'$  in  $ij$  birimine göre eşleniğini göstermek üzere;

$x = z_1 + jz_2$  olmak üzere

$$x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$x^r = z_1 - jz_2$$

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a)  $(x^*)^r = x^t$

b)  $(x^*)^t = x^r$

c)  $(x^r)^* = x^t$

- d)  $(x^r)^t = x^*$
- e)  $(x^r)^t = x^r$
- f)  $(x^t)^r = x^*$
- g)  $((x^*)^r)^t = x$
- h)  $((x^*)^t)^r = x$
- i)  $((x^t)^r)^* = x$
- j)  $((x^t)^*)^r = x$
- k)  $((x^r)^t)^* = x$
- l)  $((x^r)^*)^t = x$

**İspat :**

- a)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1$  için

$$x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

ve

$$(x^*)^r = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

olarak tanımlanır. O halde  $(x^*)^r = x^t$  elde edilir.

- b)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

ve

$$(x^*)^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$= z_1 - jz_2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1 \text{ olduğundan } \overline{\bar{z}_1} = z_1)$$

$$= (x^r)$$

$$(x^*)^t = x^r$$

elde edilir.

- c)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^r = z_1 - jz_2$$

$$(x^r)^* = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$(x^r)^* = x^t$$

elde edilir.

**d)**  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^r = z_1 - jz_2$$

ve

$$(x^r)^t = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

dir. Buradan

$$(x^r)^t = x^*$$

elde edilir.

**e)**  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$(x^t)^* = \bar{\bar{z}}_1 - j\bar{\bar{z}}_2$$

$$= z_1 - jz_2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1 \text{ olduğundan } \bar{\bar{z}}_1 = z_1)$$

dir. Bu durumda

$$(x^t)^* = x^r$$

elde edilir.

**f)**  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

ve

$$(x^t)^r = \bar{z}_1 - (-j\bar{z}_2)$$

bu durumda

$$(x^t)^r = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$= x^*$$

elde edilir.

g)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$(x^*)^r = \bar{\bar{z}}_1 - j\bar{\bar{z}}_2$$

$$((x^*)^r)^t = z_1 + jz_2$$

$$((x^*)^r)^t = x$$

elde edilir.

h)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$(x^*)^t = (\bar{z}_1 - j\bar{z}_2)$$

$$((x^*)^t)^r = (\bar{z}_1 - j\bar{z}_2)^r$$

$$((x^*)^t)^r = \bar{\bar{z}}_1 - j(-j\bar{\bar{z}}_2)$$

$$= z_1 + jz_2$$

$$= x$$

elde edilir.

i)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$(x^t)^r = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$((x^t)^r)^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

dir. Bu durumda

$$((x^t)^r)^* = x$$

elde edilir.

**j)**  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$(x^t)^* = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$= z_1 - jz_2$$

$$((x^t)^*)^r = z_1 - (-j)z_2$$

$$= z_1 + jz_2$$

$$= x$$

elde edilir.

**k)**  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^r = z_1 - jz_2$$

$$(x^r)^t = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$((x^r)^t)^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$= z_1 + jz_2$$

$$= x$$

elde edilir.

1)  $\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$x^r = z_1 - jz_2$$

$$(x^r)^* = \overline{z_1} - j\overline{z_2}$$

$$((x^r)^*)^t = \overline{z_1} - (-j)\overline{z_2}$$

$$= z_1 + jz_2$$

$$= x$$

elde edilir.

### 2.3 Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi

Bu bölümde bikompleks sayıların reel matris gösterimlerini inceleyeceğiz

$$\mathbb{C}_2 = \{x \mid x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq 4\}$$

bir reel vektör uzayıdır.  $\mathbb{C}_2$  nin bir bazı  $\{1, i, j, ij\}$  dir. Bikompleks sayıların reel matris dönüşümü  $T$  olmak üzere;

$$T: \mathbb{C}_2 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_2)$$

$$x \rightarrow T(x) = T_x$$

dönüşümü

$$\forall y \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$T_x: \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$$

$$y \rightarrow T_x(y) = x \otimes y = y \otimes x$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $T_x$  lineer bir operatördür.

$\forall x, y \in \mathbb{C}_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  için

$$i. T_x(y + z) = x \otimes (y + z)$$

$$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

$$= T_x(y) \oplus T_x(z)$$

$$\text{ii. } T_x(\lambda y) = x \otimes (\lambda y)$$

$$= \lambda(x \otimes y)$$

$$= \lambda T_x(y)$$

olduğundan  $T_x$  lineerdir.  $T_x$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_x(1) = x \otimes 1 = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$T_x(i) = x \otimes i = -x_2 + ix_1 - jx_4 + ijx_3$$

$$T_x(j) = x \otimes j = -x_3 - ix_4 + jx_1 + ijx_2$$

$$T_x(ij) = x \otimes ij = +x_4 - ix_3 - jx_2 + ijx_1$$

olduğunda

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{E 2.2})$$

ya da

$$T(x) = [1 \quad i \quad j \quad ij] \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{E 2.3})$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu matris aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$T(\mathbf{x}) = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup burada aşağıdaki adlandırmalar yapılarak

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{x}) = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4$  şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$G = \{ T(x) \mid x \in \mathbb{C}_2 \}$$

ile tanımlanan  $G$  cümlesi  $IR_4^4$  uzayının bir alt matris uzayıdır.

$G = S_p\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  ve boy  $G = 4$  dür.

$$1 \in \mathbb{C}_2 \text{ için } T(1) = E_1$$

$$i \in \mathbb{C}_2 \text{ için } T(i) = E_2$$

$$j \in \mathbb{C}_2 \text{ için } T(j) = E_3$$

$$ij \in \mathbb{C}_2 \text{ için } T(ij) = E_4$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -E_1$$

elde edilir.

$$E_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -E_1$$

elde edilir.

$$E_2 E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= E_4$$

$$E_3 E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= E_4$$

elde edilir.

$$E_3 E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -E_2$$

elde edilir

$$E_4 E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -E_2 \quad \text{elde edilir.}$$

$$\begin{aligned}
E_2^2 &= E_3^2 = -E_1 \\
E_2E_3 &= E_3E_2 = E_4 \\
E_3E_4 &= E_4E_3 = -E_2
\end{aligned} \tag{E 2.4}$$

eşitlikleri sağlanır.

## 2.4 Bikompleks Sayıların Kompleks Matris Gösterimi

Bu bölümde bikompleks sayıların kompleks matris gösterimi yapılacaktır.

$$\mathbb{C}_2 = \{x \mid x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq 4\}$$

$$\mathbb{C}_2 = \{x \mid x = (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4); j^2 = -1, 1 \leq k \leq 4\}$$

$$\mathbb{C}_2 = \{x \mid x = z_1 + jz_2; z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4 \in \mathbb{C}_1, j^2 = -1\}$$

$$\mathbb{C}_2 = \{z_1 + jz_2 \mid j^2 = -1, z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1\}$$

$\mathbb{C}_2$ , bikompleks sayıların cümlesi,  $\mathbb{C}_1$  kompleks sayılar üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzayın bir bazı  $\{1, j\}$  dir.

Bikompleks sayıların kompleks matris dönüşümü  $T$  olmak üzere

$$x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$T: \mathbb{C}_2 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_2)$$

$$x \rightarrow T(x) = T_x$$

$$T_x: \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$$

$$y \rightarrow T_x(y) = x y = y x$$

dönüşümü

$$T_x \forall y, z \in \mathbb{C}_2 \text{ için}$$

$$i) \quad T_x(y + z) = T_x(y) + T_x(z)$$

$$ii) \quad \forall y, z \in \mathbb{C}_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad T_x(\lambda y) = \lambda T_x(y)$$

özellikleri sağlandığından lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen matris,

$$T_x(1) = x \cdot 1 = (z_1 + jz_2) \cdot 1 = z_1 + jz_2$$

$$T_x(j) = x \cdot j = (z_1 + jz_2) \cdot j = -z_2 + jz_1$$

olduğundan

$$T = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

dir.

$\forall x = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_2$  için

$$T = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} \tag{E 2.5}$$

$$= z_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T_1 T_j \tag{E 2.6}$$

$$\underbrace{\quad}_{T_1} \quad \underbrace{\quad}_{T_j}$$

Burada özel olarak  $z_1$  ve  $z_2$  kompleks sayılarını

$z_1 = a$  ,  $z_2 = b$  gibi bir reel sayı alırsak

$$T(x) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu ise  $x = a + jb$  ,  $j^2 = -1$  kompleks sayısının matris gösterimi olur.

## 2.5 Matris Lie Grubu

Tanım 2.1.1 'de bikompleks sayıların cümlesi  $\mathbb{C}_2$  ile gösterilmişdi. Bikompleks sayıların matris dönüşümünü  $T$  ile göstermiştik. Şimdi,

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_k \in IR, \quad 1 \leq k \leq 4 \right\}$$

cümlesini ele alalım.

$\{N, +, IR, +, \cdot, \cdot\}$  sistemi bir vektör uzayıdır. Gösterebiliriz ki  $N$  cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir cebirdir.

$$T : \mathbb{C}_2 \rightarrow N \quad T(x) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \vec{0}$$

$T, 1:1$  ve örtendir.

Ayrıca  $\forall x, y \in \mathbb{C}_2$  ve  $\forall \lambda \in IR$  için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

dir. O halde  $T$  fonksiyonu bir cebir izomorfizmidir.  $\mathbb{C}_2$  ve  $N$  'nin izomorf olması nedeni ile  $\mathbb{C}_2$  üzerindeki incelemeleri  $N$  'nin üzerinde yapacağız.  $N$  cümlesine cebirsel olarak şöyle de bakılabilir. Bunun için bir

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \in IR^4$$

matrisi ele alalım. Bu matrisin elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlasın.

$$x_{11} = x_{22} \Rightarrow x_{11} - x_{22} = 0$$

$$x_{11} = x_{33} \Rightarrow x_{11} - x_{33} = 0$$

$$x_{11} = x_{44} \Rightarrow x_{11} - x_{44} = 0$$

$$x_{14} = -x_{23} \Rightarrow x_{14} + x_{23} = 0$$

$$x_{14} = -x_{32} \Rightarrow x_{14} + x_{32} = 0$$

$$x_{14} = x_{41} \Rightarrow x_{14} - x_{41} = 0$$

$$x_{21} = -x_{12} \Rightarrow x_{21} + x_{12} = 0$$

$$x_{13} = x_{24} \Rightarrow x_{13} - x_{24} = 0$$

$$x_{13} = -x_{31} \Rightarrow x_{13} + x_{31} = 0$$

$$x_{13} = -x_{42} \Rightarrow x_{13} + x_{42} = 0$$

$$x_{21} = -x_{34} \Rightarrow x_{21} + x_{34} = 0$$

$$x_{21} = x_{43} \Rightarrow x_{13} - x_{43} = 0$$

(E 2.7)

(E 2.7) denklem sistemi homojen lineer denklem sistemi olup 16 bilinmeyenli 12 denklemden oluşur. Sistemin katsayılar matrisinin rankı 12 olup ve çözüm uzayının boyutu 4 olmalıdır. 16 bilinmeyenin 4 tanesi keyfi seçersek diğer bilinmeyenler bunların cinsinden bulunur.

$$x_{11} = x_1$$

$$x_{12} = -x_2$$

$$x_{13} = -x_3$$

$$x_{14} = x_4$$

seçildiğinde;

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Bu matrislerin cümlesi  $N$  olduğundan (E 2.7) 'de verilen denklem sisteminin çözüm cümlesi  $N$  dir.

## 2.6 $N$ 'nin Manifold Yapısı

$$g: N \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \rightarrow g(T) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$g$  fonksiyonu 1:1 ve örtendir.

$g(T) = \mathbb{R}^4$  olup  $g(T)$  açıktır.  $x_i$  ler sürekli olduğundan  $g$  ve  $g^{-1}$  süreklidir.

$(g, N)$  ikilisi  $N$  'nin bir haritasıdır. Ayrıca  $\{(g, N)\}$  tek haritalı atlas diferansiyellenebilirdir. Böylece  $N$  bu atlasla birlikte diferansiyellenebilir bir manifolddur.

$N$  'nin çarpmaya göre grup yapısı yoktur. Şimdi  $N$  'nin bir alt cümlesinin Lie grup yapısını araştıralım.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_1 x_4 = x_2 x_3 \text{ ve } (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0, 1 \leq k \leq 4, x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesini ele alalım

$M \subset N$  dir.  $M$  nin homeomorfizmlerini kurmak için  $\mathbb{R}^4$  deki açık alt cümlelerini tanımlayalım.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_4 = 0, x_1 \neq 0\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_4) \mid x_3 = 0, x_2 \neq 0\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_3, x_4) \mid x_2 = 0, x_3 \neq 0\}$$

$$A_4 = \{(x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 0, x_4 \neq 0\}$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_1 x_4 = x_2 x_3 \text{ ve } (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0, 1 \leq k \leq 4, x_k \in \mathbb{R}, \right\}$$

elde edilir.

## 2.7 Bikompleks Sayıların Lie Grubu

Tanım 2.6 da  $N$  nin diferansiyellenebilir bir manifold olduğundan bahsedildi.  $M$  nin üzerindeki grup işlemi olarak matris çarpım işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i)

$$\therefore M \times M \rightarrow M$$

$$(A, B) \rightarrow A \cdot B$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & -z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & -z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$$

$$z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3$$

$$z_3 = x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_4 - x_4y_2$$

$$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1$$

elde edilir.

$$\det(z) = \det(A.B) = \det A \cdot \det B \neq 0$$

olduğundan

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq \vec{0} \text{ dir.}$$

ii) Ayrıca  $z_1z_4 = z_2z_3$ 'dür. Bu durumda  $A.B \in M$ 'dir.

iii)  $\forall A, B, C \in M$  için  $(A.B).C = A.(B.C)$

iv)  $\forall A \in M$  için  $I_4A = AI_4 = A$

$\forall A \in M$  için

$$A^{-1} = \frac{A^T}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}$$

olduğundan  $A^{-1} \in M$ 'dir.

v)  $A.B = B.A$ 'dır. Dolayısıyla  $(M, \cdot)$  ikilisi bir Abel grubudur.

Şimdi de  $M$  deki grup işleminin diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot : M \times M & \longrightarrow & M \\
 (A, B) & \longrightarrow & A.B^{-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 IR^3 \times IR^3 & \xrightarrow{F} & IR^3 \\
 (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) & & (f_1, f_2, f_3)
 \end{array}$$

Burada  $f_1, f_2, f_3$  fonksiyonları  $x_i$  ve  $y_i$  Öklid koordinat fonksiyonlarına bağlıdır.  $f_1, f_2, f_3$  fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan  $M$  bir Lie grubudur (Babadağ 1995).

## 2.8. Dual Bikompleks Sayılar

**Tanım 2.8.1** Bir  $A$  dual sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  ile gösterilir.

Burada  $a, a^* \in IR$  ve  $\varepsilon; \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$  kurallarıyla belirli bir sayıdır.

$$q = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$q^* = x_1^* + ix_2^* + jx_3^* + ijx_4^*$$

olmak üzere,

$Q = q + \varepsilon q^*$  şeklinde tanımlanan bikompleks sayıya dual bikompleks sayı denir. Dual bikompleks sayılar cümlesini  $\mathbb{C}_2^D$  ile göstereceğiz.

$Q = q + \varepsilon q^* = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 ij$   $A_1, A_2, A_3, A_4$  birer dual sayıdır.

$$A_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, A_2 = x_2 + \varepsilon x_2^*, A_3 = x_3 + \varepsilon x_3^*, A_4 = x_4 + \varepsilon x_4^*$$

dır.

**Tanım 2.8.2**  $\forall Q, P \in \mathbb{C}_2^D$  için

$$Q = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 = q + \varepsilon q^*$$

$$P = B_1 + iB_2 + jB_3 + ijB_4 = p + \varepsilon p^*$$

dual bikompleks sayıların toplamı

$$Q + P = (A_1 + B_1) + i(A_2 + B_2) + j(A_3 + B_3) + ij(A_4 + B_4)$$

şeklinde tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere skaler çarpma işlemi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_1) + i(\lambda A_2) + j(\lambda A_3) + ij(\lambda A_4)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.8.3** Dual bikompleks sayılarda çarpma işlemi

$$X: \mathbb{C}_2^D \times \mathbb{C}_2^D \rightarrow \mathbb{C}_2^D$$

$$(Q, P) \rightarrow Q \times P = QP$$

biçiminde bir işlem olup

$$\varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon \neq 0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$QP = (q + \varepsilon q^*) \cdot (p + \varepsilon p^*)$$

$$= qp + \varepsilon(qp^* + q^*p)$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.8.4**  $ID$ , dual sayılar cümlesini göstermek üzere, dual bikompleks sayılarda eşlenik  $i, j$  ve  $ij$  birimine göre olmak üzere üç şekilde tanımlanır.  $(i)$  birimine göre eşlenik  $Q^i$  ile,  $(j)$  birimine göre eşlenik  $Q^j$  ile  $(ij)$  birimine göre eşleniği de  $Q^t$  ile tanımlayacağız.

$$ID = \{A_k : A_k = a_k + \varepsilon a_k^*, \quad a_k, a_k^* \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon^2 = 0\}$$

$$\mathbb{C}_2^D = \{Q | Q = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4, \quad 1 \leq k \leq 4, \quad A_k \in ID\}$$

dir.

$A_1, A_2, A_3, A_4$  birer dual sayı olmak üzere

$$\forall A_k = a_k + \varepsilon a_k^* \quad 1 \leq k \leq 4 \quad \text{için} \quad a_k \in \mathbb{R}, a_k^* \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$$

$$Q = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 = (A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)$$

bir dual bikompleks sayıdır. Bu durumda  $i, j$  ve  $ij$  birimine göre  $Q$  dual bikompleks sayısının eşlenikleri

$$Q^i = (A_1 - iA_2) + j(A_3 - iA_4)$$

$$Q^r = (A_1 + iA_2) - j(A_3 + iA_4)$$

$$Q^t = (A_1 - iA_2) - j(A_3 - iA_4)$$

dir.

### Tanım 2.8.5 Bir Dual Bikompleks Sayının Normu

$A_1, A_2, A_3, A_4$  birer dual sayı

$$\forall A_k = a_k + \varepsilon a_k^* \quad 1 \leq k \leq 4 \quad \text{için} \quad a_k \in \mathbb{R}, a_k^* \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$$

$$\forall Q = (A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4) \in \mathbb{C}_2^D \quad \text{için}$$

$$a) \quad Q \cdot Q^i = [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 - iA_2) + j(A_3 - iA_4)]$$

$$= A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 - A_4^2 + 2j[A_1A_3 + A_2A_4]$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 - A_4^2 + 2j[A_1A_3 + A_2A_4]}$$

$$b) \quad Q \cdot Q^r = [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 + iA_2) - j(A_3 + iA_4)]$$

$$= A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 + 2i[A_1A_2 + A_3A_4]$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 + 2i[A_1A_2 + A_3A_4]}$$

$$c) Q \cdot Q^t = [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 - iA_2) - j(A_3 - iA_4)]$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + 2ij[A_1A_4 - A_2A_3]$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + 2ij[A_1A_4 - A_2A_3]}$$

elde edilir.

### 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR

Bu bölümde daha önce verilen bikompleks sayıların genelleştirmesini tanımlayacağız. Ayrıca genelleştirilmiş bikompleks sayıların  $i$ ,  $j$  ve  $ij$ 'ye göre eşlenik durumlarını inceleyeceğiz. Ayrıca burada özel olarak  $\alpha = \beta = 1$  alınarak Bölüm 2 de incelemiş olduğumuz bikompleks sayıları elde ederiz.

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 = \{q = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 \mid i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, ij = ji, (ij)^2 = (ji)^2 = \alpha\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 &= \{q \mid q = (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4); i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, ij = ji, (ij)^2 = (ji)^2 = \alpha\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{q \mid q = z_1 + jz_2; z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4 \in \mathbb{C}_1, j^2 = -\beta, i^2 = -\alpha, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{q \mid q = z_1 + jz_2; z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1, j^2 = -\beta, i^2 = -\alpha, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$q = \underbrace{(x_1 + ix_2)}_{z_1} + j \underbrace{(x_3 + ix_4)}_{z_2} = z_1 + jz_2$$

#### Tanım 3.1 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Toplama İşlemi

$$\oplus : \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \times \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$  olmak üzere

$$\begin{aligned} q_1 \oplus q_2 &= x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 + y_1 + iy_2 + jy_3 + i jy_4 \\ &= \underbrace{(x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)}_{w_1} + j \underbrace{[(x_3 + y_3) + i(x_4 + y_4)]}_{w_2} \end{aligned}$$

$w_1, w_2 \in \mathbb{C}_1$  olmak üzere,

$$= w_1 + jw_2$$

elde edilir.

Böylece  $(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \oplus)$  ikilisi bir Abel gruptur. Burada etkisiz elaman  $(0, 0, 0, 0)$  bikompleks sayıdır.

### Tanım 3.2 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Skaler ile Çarpım

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\odot : IR \times \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

$$(q, x) \rightarrow a \odot q = ax_1 + iax_2 + jax_3 + ijax_4$$

şeklinde tanımlanan dış işlem

$$\forall a \in IR, \forall q_1, q_2 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \text{ için}$$

$$i) \quad a \odot (q_1 \oplus q_2) = (a \odot q_1) \oplus (a \odot q_2)$$

$$ii) \quad (a + b) \odot q = (a \odot q) \oplus (b \odot q)$$

$$iii) \quad (a \cdot b) \odot q = a \odot (b \odot q)$$

$$iv) \quad 1 \odot q = q$$

özellikleri sağlanır. Bu durumda  $\{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \oplus, IR, +, \cdot, \odot\}$  cümlesi bir vektör uzayıdır. Bu uzayı  $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$  ile  $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$ 'deki  $\oplus$  işlemini kısaca “+” ile göstereceğiz.

### Tanım 3.3 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Çarpma

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\otimes : \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \times \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \otimes q_2 = q_2 \otimes q_1$$

$\otimes$  işlemini kısaca . ile göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
 q_1 \cdot q_2 &= (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \cdot (y_1 + iy_2 + jy_3 + iyy_4) \\
 &= (x_1y_1 - \alpha x_2y_2 - \beta x_3y_3 + \alpha\beta x_4y_4) \\
 &\quad + i(x_1y_2 + x_2y_1 - \beta x_3y_4 - \beta x_4y_3) \\
 &\quad + j(x_1y_3 - \alpha x_2y_4 + x_3y_1 - \alpha x_4y_2) \\
 &\quad + ij(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)
 \end{aligned}$$

$\otimes$	1	i	j	ij	
1	1	i	j	ij	
i	i	$-\alpha$	ij	$-\alpha j$	(E 3.1)
j	j	ij	$-\beta$	$-\beta i$	
ij	ij	$-\alpha j$	$-\beta i$	$\alpha\beta$	

Böylece genelleştirilmiş bikompleks sayılar aşağıdaki özelliklere sahip olduğu görülür.

- a)* Genelleştirilmiş iki bikompleks sayının çarpımı da genelleştirilmiş bikompleks sayıdır.
- b)* Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi birleşimlidir.
- c)* Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi dağılımlıdır.
- d)* Genelleştirilmiş bikompleks sayı çarpma işlemi değişmelidir.

Buna göre  $\{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \oplus, IR, +, \cdot, \odot, \otimes\}$  sistemi bir cebirdir. Bu cebire genelleştirilmiş bikompleks sayılar cebiri denir. Bu cebirin bir bazı  $\{1, i, j, ij\}$  dir ve boyutu 4 dür.

### Tanım 3.4 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Eşlenik

Daha önce 2. Bölümde bikompleks sayıların eşlenikleriyle ilgili özelliklerden bahsetmiştik. Burada da genelleştirilmiş bikompleks sayıların eşlenik özelliklerine değineceğiz.

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda eşlenik kavramı üç şekilde tanımlanır.

Buna göre

$$\forall q = (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4) = z_1 + jz_2 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{z_2} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{z_1}$$

$$q^*(i) = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2 \quad i \text{ birimine göre eşleniği } q^* \text{ ile ,}$$

$$q^*(j) = z_1 - jz_2 \quad j \text{ birimine göre eşleniği } q^r \text{ ile ,}$$

$$q^*(ij) = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2 \quad ij \text{ birimine göre eşleniği } q^t \text{ ile gösterelim.}$$

dır.

#### 3.1 (i) Birimine Göre Eşlenik İle Çarpım

$$\forall q \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1 \text{ olmak üzere}$$

$$q = z_1 + jz_2$$

$$q^* = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2$$

$$z_1 = x_1 + ix_2$$

$$z_2 = x_3 + ix_4$$

olarak alalım bu durumda,

$$q \cdot q^* = (z_1 + jz_2) \cdot (\bar{z}_1 + j\bar{z}_2)$$

$$= (z_1\bar{z}_1 - \beta z_2\bar{z}_2) + j(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$$

$$= (x_1^2 + \alpha x_2^2 - \beta(x_3^2 + \alpha x_4^2) + j[x_1x_3 - ix_1x_4 + ix_2x_3 + \alpha x_2x_4 + x_3x_1 - ix_3x_2 + ix_4x_1 + \alpha x_4x_2])$$

$$= x_1^2 + \alpha x_2^2 - \beta(x_3^2 + \alpha x_4^2) + 2j[x_1x_3 + \alpha x_2x_4]$$

dır.

### 3.2 (j) Birimine Göre Eşlenik ile Çarpım

$\forall q \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1$  olmak üzere

$$q = z_1 + jz_2$$

$$q^r = z_1 - jz_2$$

$$z_1 = x_1 + ix_2$$

$$z_2 = x_3 + ix_4$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$q \cdot q^r = (z_1 + jz_2) \cdot (z_1 - jz_2)$$

$$= z_1^2 - jz_1z_2 + jz_2z_1 - j^2z_2^2$$

$$(x_1 + ix_2)^2 + \beta(x_3 + ix_4)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2i - \alpha x_2^2 + \beta(x_3^2 + 2x_3x_4 - \alpha x_4^2)$$

$$= x_1^2 - \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 - \alpha \beta x_4^2 + 2i(x_1x_2 + \beta x_3x_4)$$

dır.

### 3.3 (ij) Birimine Göre Eşlenik ile Çarpım

$\forall q \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_1$  olmak üzere

$$q = z_1 + jz_2$$

$$q^t = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2$$

$$z_1 = x_1 + ix_2$$

$$z_2 = x_3 + ix_4$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} q \cdot q^t &= (z_1 + jz_2) \cdot (\bar{z}_1 - j\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 - jz_1\bar{z}_2 + jz_2\bar{z}_1 - j^2z_2\bar{z}_2 \\ &= (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + \beta(x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) + j(z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2) \\ &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta(x_3^2 + \alpha x_4^2) + j[(x_3 + ix_4)(x_1 - ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_3 - ix_4)] \\ &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta(x_3^2 + \alpha x_4^2) + j[x_1x_3 + \alpha x_4x_2 + ix_4x_1 - ix_3x_2 \\ &\quad - (x_1x_3 + \alpha x_2x_4 + ix_2x_3 - ix_1x_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \cdot q^t &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta(x_3^2 + \alpha x_4^2) + 2ji[x_4x_1 - x_3x_2] \\ &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2 + 2ij(x_1x_4 - x_2x_3) \end{aligned}$$

dır.

### Özelik :

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar aşağıdaki özellikleri sağlar

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^2 \text{ için}$$

$$q_1 = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, \quad i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad ij = ji$$

$$q_2 = y_1 + iy_2 + jy_3 + ijy_4$$

olmak üzere ,

$$a. (q_1 + q_2)^* = q_1^* + q_2^*$$

$$b. ((q)^*)^* = q$$

$$c. (q_1 \cdot q_2)^* = q_1^* \cdot q_2^*$$

$$d. (q_1 + q_2)^r = q_1^r + q_2^r$$

$$e. (q_1^r)^r = q_1$$

$$f. (q_1 \cdot q_2)^r = q_1^r \cdot q_2^r$$

$$g. (q_1 + q_2)^t = q_1^t + q_2^t$$

$$h. ((q)^t)^t = q$$

$$i. (q_1 \cdot q_2)^t = q_1^t \cdot q_2^t$$

$$j. ((q^r)^t)^* = ((q^r)^*)^t = ((q^t)^r)^* = ((q^t)^*)^r = ((q^*)^t)^r = ((q^*)^r)^t$$

olduğu görülür.

### İspat:

Bikompleks sayılarda yapıldığı gibi benzer şekilde burada da yapılabilir.

### 3.4 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi

Bölüm 3'de bikompleks sayıların reel matris gösterimi yapılmıştı. Burada da genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi yapılacaktır.

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 = \{ q: q = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, \quad ij = ji, (ij)^2 = (ji)^2 = \alpha\beta \}$$

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar reel vektör uzayıdır ve bir bazı  $\{1, i, j, ij\}$  dir.

$$T: \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2, \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2)$$

$$q_1 \rightarrow T(q_1) = Tq_1$$

$$Tq_1: \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

$$q_2 \rightarrow Tq_1(q_2) = q_1 \times q_2$$

olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 \text{i. } Tq_1(q_2 + q_3) &= q_1 \times (q_2 + q_3) \\
 &= (q_1 \times q_2) + (q_1 \times q_3) \\
 &= Tq_1(q_2) + Tq_1(q_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } Tq_1(\lambda q_2) &= q_1 \times (\lambda q_2) \\
 &= \lambda(q_1 \times q_2) \\
 &= \lambda Tq_1(q_2) \\
 &\text{olduğundan } Tq_1 \text{ lineerdir.}
 \end{aligned}$$

Şimdi  $Tq_1$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım.

$$Tq_1(1) = q_1 \times 1 = q_1 = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$Tq_1(i) = q_1 \times i = (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \times i = -\alpha x_2 + x_1 i - \alpha x_4 j + x_3 ij$$

$$Tq_1(j) = q_1 \times j = (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \times j = -\beta x_3 - \beta x_4 i + x_1 j + x_2 ij$$

$$Tq_1(ij) = q_1 \times ij = (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \times ij = \alpha\beta x_4 - \beta x_3 i - \alpha x_2 j + x_1 ij$$

$$Tq_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$$Tq_1 = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Burada aşağıdaki adlandırmalar yapılarak

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Tq_1 = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$  şeklinde yazılabilir. Buna göre

$G_{\alpha,\beta} = \{Tq_1 \mid q_1 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2\}$   $G_{\alpha,\beta}$  matris cümlesi  $IR_4^4$  uzayının alt uzayıdır.

$$Sp\{E_1, E_2, E_3, E_4\} = G_{\alpha,\beta}$$

dir ve boy  $G_{\alpha,\beta} = 4$  dür.

$$1 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$$

için

$$Tq_1(1) = q_1 \times 1 = q_1 = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$i \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2 \text{ için}$$

$$Tq_1(i) = q_1 \times i = (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \times i = -\alpha x_2 + x_1 i - \alpha j x_4 + x_3 ij$$

dir.

$E_2^2 = -\alpha E_1$  olduğunu gösterelim.

$$E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$= -\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\alpha E_1$$

$E_3^2 = -\beta E_1$  olduğunu gösterelim.

$$E_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$= -\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\beta E_1$$

dir.

$E_2 E_3 = E_3 E_2 = E_4$  olduğunu gösterelim.

$$E_2 E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= E_4$$

dür.

$$E_3 E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= E_4$$

dür.

$$E_4 E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 1 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\beta E_2$$

dir.

$$E_3 E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\beta \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\beta E_2$$

dir.

$$E_2^2 = -\alpha E_1$$

$$E_3^2 = -\beta E_1$$

$$E_2 E_3 = E_3 E_2 = E_4$$

$$E_4 E_3 = E_3 E_4 = -\beta E_2$$

Özel olarak  $\alpha = \beta = 1$  alınırsa, daha önce elde edilen bikompleks sayılar bölümünde yer alan (E 2.4)'deki eşitlikler elde edilir.

### 3.5 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Matris Lie Grubu

Genelleştirilmiş Bikompleks sayılarda **Tanım 2.6** 'da verilen

$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1x_4 = x_2x_3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \overline{0}\}$  hiperyüzeyi üzerindeki Lie grup yapılarını elde edeceğiz.

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1x_4 = x_2x_3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \overline{0}\}$$

cümlesi ele alınarak,

$$x = x_1 + i x_2 + j x_3 + ij x_4, \quad x_1x_4 = x_2x_3 \quad \text{ve} \quad i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad ij = ji, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \overline{0}$$

olmak üzere,

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_1x_4 = x_2x_3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \overline{0} \right\}$$

cümlesi oluşur.  $\{\tilde{M}, +, IR, \cdot, \cdot\}$  bir vektör uzayıdır.  $\tilde{M}$ ' nin üzerinde grup işlemi olarak matris çarpımını ele alırsak

$$i. \quad \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \\ (x, y) \rightarrow x \cdot y$$

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & -\alpha y_2 & -\beta y_3 & \alpha\beta y_4 \\ y_2 & y_1 & -\beta y_4 & -\beta y_3 \\ y_3 & -\alpha y_4 & y_1 & -\alpha y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 \\ z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 \\ z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = x_1y_1 - \alpha x_2y_2 - \beta x_3y_3 + \alpha\beta x_4y_4$$

$$z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 - \beta x_3y_4 - \beta x_4y_3$$

$$z_3 = x_1y_3 + x_3y_1 - \alpha x_2y_4 - \alpha x_4y_2$$

$$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1$$

dir.

Buna göre,

$$\begin{aligned} z_1z_4 - z_2z_3 &= \alpha x_1^2(y_4y_1 - y_2y_3) + \alpha\beta y_4^2(x_1x_4 - x_2x_3) \\ &\quad + y_1^2(x_1x_4 - x_2x_3) + \alpha y_2^2(x_1x_4 - x_2x_3) \\ &\quad + \beta y_3^2(x_1x_4 - x_2x_3) + \alpha x_2^2(y_1y_4 - y_2y_3) \\ &\quad + \beta x_3^2(y_1y_4 - y_2y_3) + \alpha\beta x_4^2(y_1y_4 - y_2y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde  $x \cdot y \in \tilde{M}$  olur.

Ayrıca  $\det z = \det(x \cdot y) = \det x \cdot \det y$ ,  $\det x \neq 0$  ve  $\det y \neq 0$  olduğundan,  $\det z \neq 0$  olmalıdır.

Bu durumda,  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq \vec{0}$

i.  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  birleşimlidir.

ii.  $\forall x \in \tilde{M}$  için  $I_4 \cdot x = x \cdot I_4 = x$  (birim eleman)

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

iii. İvers Eleman Özeliği

$\forall x \in \tilde{M}$  için  $x^{-1}$ 'i bulalım.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha\beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$x^T \cdot \varepsilon \cdot x$  'i bulalım

$$\begin{aligned} x^T \cdot \varepsilon &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -\alpha x_2 & x_1 & -\alpha x_4 & x_3 \\ -\beta x_3 & -\beta x_4 & x_1 & x_2 \\ \alpha \beta x_4 & -\beta x_3 & -\alpha x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \alpha x_2 & \beta x_3 & \alpha \beta x_4 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_1 & -\alpha \beta x_4 & \alpha \beta x_3 \\ -\beta x_3 & -\beta x_4 & \beta x_1 & \alpha \beta x_2 \\ \alpha \beta x_4 & -\beta \alpha x_3 & -\alpha \beta x_2 & \alpha \beta x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^T \cdot \varepsilon \cdot x &= \begin{bmatrix} x_1 & \alpha x_2 & \beta x_3 & \alpha \beta x_4 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_1 & -\alpha \beta x_4 & \alpha \beta x_3 \\ -\beta x_3 & -\beta x_4 & \beta x_1 & \alpha \beta x_2 \\ \alpha \beta x_4 & -\beta \alpha x_3 & -\alpha \beta x_2 & \alpha \beta x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & -\alpha x_2 & -\beta x_3 & \alpha \beta x_4 \\ x_2 & x_1 & -\beta x_4 & -\beta x_3 \\ x_3 & -\alpha x_4 & x_1 & -\alpha x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$x_1 x_4 = x_2 x_3$  hiperyüzeyinde aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$a_{11} = x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2$$

$$a_{12} = -\alpha x_1 x_2 + \alpha x_1 x_2 - \alpha \beta x_3 x_4 + \alpha \beta x_3 x_4 = 0$$

$$a_{13} = -\beta x_1 x_3 - \alpha \beta x_2 x_4 + \beta x_1 x_3 + \alpha \beta x_2 x_4 = 0$$

$$a_{14} = +\alpha \beta x_1 x_4 - \alpha \beta x_2 x_3 - \alpha \beta x_2 x_3 + \alpha \beta x_4 x_1 = 0$$

$$a_{21} = -\alpha x_1 x_2 + \alpha x_1 x_2 - \alpha \beta x_3 x_4 + \alpha \beta x_3 x_4 = 0$$

$$a_{22} = \alpha^2 x_2^2 + \alpha x_1^2 + \alpha^2 \beta x_4^2 + \alpha \beta x_3^2 = \alpha [x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2]$$

$$a_{23} = \alpha \beta x_2 x_3 - \alpha \beta x_1 x_4 - \alpha \beta x_4 x_1 + \alpha \beta x_2 x_3 = 0$$

$$a_{24} = -\alpha^2\beta x_2x_4 - \beta\alpha x_1x_3 + \alpha^2\beta x_2x_4 + \alpha\beta x_1x_3 = 0$$

$$a_{31} = -\beta x_3x_1 - \alpha\beta x_4x_2 + \beta x_1x_3 + \alpha\beta x_2x_4 = 0$$

$$a_{32} = +\beta\alpha x_2x_3 - \alpha\beta x_4x_1 - \beta\alpha x_1x_4 + \alpha\beta x_2x_3 = 0$$

$$a_{33} = +\beta x_3^2 - \alpha\beta^2 x_4^2 + \beta x_1^2 + \alpha\beta x_2^2 = \beta[x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_3^2 + \alpha\beta x_4^2]$$

$$a_{34} = -\alpha\beta^2 x_3x_4 + \alpha\beta^2 x_4x_3 - \beta\alpha x_1x_2 + \alpha\beta x_2x_1 = 0$$

$$a_{41} = \alpha\beta x_4x_1 - \alpha\beta x_3x_2 - \alpha\beta x_2x_3 + \alpha\beta x_1x_4 = 0$$

$$a_{42} = -\alpha^2\beta x_4x_2 - \alpha\beta x_1x_3 + \alpha^2\beta x_2x_4 + \alpha\beta x_1x_3 = 0$$

$$a_{43} = -\alpha\beta^2 x_3x_4 + \alpha\beta^2 x_3x_4 - \alpha\beta x_2x_1 + \alpha\beta x_1x_2 = 0$$

$$a_{44} = \alpha^2\beta^2 x_4^2 + \alpha\beta^2 x_3^2 + \alpha^2\beta x_2^2 + \alpha\beta x_1^2$$

$$= \alpha\beta[x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2]$$

$$\lambda = x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2$$

olmak üzere:

$$x^T \cdot \varepsilon \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\beta\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha\beta\lambda) \end{bmatrix} = \lambda \varepsilon$$

$$x^T \cdot \varepsilon \cdot x = \lambda \varepsilon$$

$$x^T \cdot \varepsilon = \lambda \varepsilon x^{-1}$$

$$(\lambda \varepsilon)^{-1} x^T \cdot \varepsilon = x^{-1}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\lambda} \varepsilon^{-1} \cdot x^T \cdot \varepsilon = x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{M}x \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y \text{ diferansiyellenebilir.}$$

Böylece  $(\tilde{M}, \cdot)$  bir Lie grubudur.

$$\text{boy } \tilde{M} = 3 \text{ dür.}$$

### 3.6 Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda $M$ Lie Grubunun Lie Cebiri

$$E^4 \text{ de, } M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 x_4 = x_2 x_3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq \vec{0}\}$$

verilen  $M$  hiperyüzeyinin 3-boyutlu Lie grubu olduğunu biliyoruz. Şimdi  $M$  nin Lie cebirini oluşturalım.

$M$  üzerinde  $\alpha(0) = 1$ , yani  $\alpha(0) = (1, 0, 0, 0)$  olan bir eğri

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)i + \alpha_3(t)j + \alpha_4(t)ij$$

olsun.

$$\alpha_1(t)\alpha_4(t) - \alpha_2(t)\alpha_3(t) = 0 \text{ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır}$$

$$\alpha_1'(t)\alpha_4(t) + \alpha_1(t)\alpha_4'(t) - \alpha_2'(t)\alpha_3(t) - \alpha_2(t)\alpha_3'(t) = 0$$

elde edilir. Eğer  $t = 0$  yazılırsa  $\alpha_4'(t) = 0$  elde edilir. Böylece Lie cebiri

$$\zeta = \zeta_m \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right) \Big|_{\alpha^{-1}} \quad m = 1, 2, 3$$

formundaki vektörlerle oluşturulur.  $\zeta$  vektörü genelleştirilmiş bikompleks sayı olarak

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i + \zeta_3 j$$

şeklinde yazılabilir.

$$X|_{\alpha^{-1}} = \zeta$$

için  $M$  üzerindeki  $X$  sol invaryant vektör alanlarını bulalım:  $\beta$  eğrisi

$$\beta(0) = 1, \beta'(0) = \zeta$$

şartını sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda  $x$  bir bikompleks sayı olmak üzere  $\beta$  eğrisinin sol ötelemesi

$$L_x(\beta(t)) = x\beta(t)$$

dir. Bunun tanjant vektörü  $x\beta'(0) = x\zeta$  dir. Özel olarak,  $M$  üzerindeki sol invaryant vektör alanlar  $X_m$  ile gösterilirse,

$$X_m|_{\alpha^{-1}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \Big|_{\alpha^{-1}}, \quad m = 1, 2, 3$$

Bu vektör alanlar  $x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$  olmak üzere  $(x_1)_x = x 1$ ,  $(x_2)_x = x i$ ,  $(x_3)_x = x j$  olduğundan

$$\begin{aligned} X_1 &= x 1 \\ &= x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= x i \\ &= (x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)i \\ &= x_1 i - \alpha x_2 + x_3 ij - \alpha x_4 j \\ &= (-\alpha x_2, x_1, -\alpha x_4, x_3) \end{aligned}$$

$$X_3 = x j$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)i \\
&= x_1 j + x_2 ij - \beta x_3 - \beta x_4 i \\
&= (-\beta x_3, -\beta x_4, x_1, x_2)
\end{aligned}$$

elde edilir

### Teorem 3.7.1

$\forall Q_1, Q_2 \in M$  için

$$N(Q_1 \times Q_2) = N(Q_1) \cdot N(Q_2)$$

dır.

### İspat:

$\forall Q_1, Q_2 \in M$  için  $Q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij$  ve

$$Q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 ij$$

olarak alalım.

$$\begin{aligned}
Q_1 \times Q_2 &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij) \times (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 ij) \\
&= (a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3) \\
&\quad + (a_0 b_1 + a_1 b_0 - \beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2) i \\
&\quad + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - \alpha a_1 b_3 - \alpha a_3 b_1) j \\
&\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) ij
\end{aligned}$$

$$A = (a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3)$$

$$B = (a_0 b_1 + a_1 b_0 - \beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2)$$

$$C = (a_0 b_2 + a_2 b_0 - \alpha a_1 b_3 - \alpha a_3 b_1)$$

$$D = (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)$$

olarak alırsak,

$$Q_1 \times Q_2 = A + Bi + Cj + Dij$$

dır.

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 \alpha + a_2 b_2 \beta + a_3 b_3 \alpha \beta$$

$$N(Q_1) = a_0^2 + a_1^2 \alpha + a_2^2 \beta + a_3^2 \alpha \beta$$

$$N(Q_2) = b_0^2 + b_1^2 \alpha + b_2^2 \beta + b_3^2 \alpha \beta$$

$$N(Q_1 \times Q_2) = A^2 + B^2 \alpha + C^2 \beta + \alpha \beta D^2$$

$M$  bir hiperyüzey olduğundan;

$$N(Q_1 \times Q_2) - N(Q_1) \cdot N(Q_2) = 4\alpha\beta[(a_0 a_3 - a_1 a_2) + (b_0 b_3 - b_1 b_2)]$$

ifadesindeki

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2) = 0$$

$$(b_0 b_3 - b_1 b_2) = 0$$

oldüğundan,

$$N(Q_1 \times Q_2) - N(Q_1) \cdot N(Q_2) = 0$$

olur. O halde;

$$N(Q_1 \times Q_2) = N(Q_1) \cdot N(Q_2)$$

elde edilir.

### 3.7 Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar

Bir  $A$  dual sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  ile gösterilir. Burada  $a, a^* \in IR$  ve

$\varepsilon, \varepsilon \neq 0$ ,  $\varepsilon^2 = 0$  kuralıyla belirli bir sayıdır.

Dual sayılar cümlesi  $ID$  olmak üzere;

$$ID = \{A_k : A_k = a_k + \varepsilon a_k^* , \quad a_k, a_k^* \in R, \quad \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}$$

$$q = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 \text{ ve } q^* = x_1^* + ix_2^* + jx_3^* + ijx_4^* \quad (q, q^* \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^2)$$

olmak üzere

$Q = q + \varepsilon q^*$  şeklinde tanımlanan bikompleks sayıya dual genelleştirilmiş bikompleks sayı denir. Dual genelleştirilmiş bikompleks sayılar cümlesini  $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$  ile göstereceğiz.

Buna göre;

$$\mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D} = \{Q = q + \varepsilon q^* = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 ; A_k \in ID \quad i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, (ij)^2 = \alpha\beta, 1 \leq k \leq 4\}$$

dır.

### Tanım 3.5 Genelleştirilmiş Dual Bikompleks Sayılarda Toplama ve Skaler ile Çarpma İşlemi

$\forall Q = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$  ,  $P = B_1 + iB_2 + jB_3 + ijB_4 \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$  için genelleştirilmiş dual bikompleks sayılarda toplama işlemi

$$Q + P = (A_1 + B_1) + i(A_2 + B_2) + j(A_3 + B_3) + ij(A_4 + B_4)$$

şeklinde tanımlanır.

$\lambda \in IR$  olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_1) + i(\lambda A_2) + j(\lambda A_3) + ij(\lambda A_4) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

### Tanım 3.6 Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Çarpma İşlemi

$\forall Q = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$  ,  $P = B_1 + iB_2 + jB_3 + ijB_4 \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$  için genelleştirilmiş dual bikompleks sayılarda çarpma işlemi

$$X : \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D} \times \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha, \beta}^{2D}$$

$$(Q, P) \rightarrow Q \times P = QP$$

$$Q.P = [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)]. [(B_1 + iB_2) + j(B_3 + iB_4)]$$

$$= (A_1B_1 - \alpha A_2B_2 - \beta A_3B_3 + \alpha\beta A_4B_4)$$

$$+ i(A_1B_2 + A_2B_1 - \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3)$$

$$+j(A_1B_3 - \alpha A_2B_4 + A_3B_1 - \alpha A_4B_2)$$

$$+ij(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^{2D} = \{Q = q + \varepsilon q^* = A_1 + iA_2 + jA_3 + ijA_4 ; A_k \in ID \quad i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, (ij)^2 = \alpha\beta, 1 \leq k \leq 4\}$$

cümlesi yukarıdaki çarpma işlemi ile birlikte dual genelleştirilmiş bikompleks sayılar cebiri olur.

### Tanım 3.7 Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar Üzerinde Eşlenik

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda olduğu gibi dual genelleştirilmiş bikompleks sayılar üzerinde de eşlenik üç şekilde tanımlanır.

(i) birimine göre  $Q^i$  ile

(j) birimine göre  $Q^r$  ile

(ij) birimine göre de  $Q^t$  ile gösterilir.

$$\forall A_k \in ID, \quad 1 \leq k \leq 4$$

ve  $\forall Q \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^{2D}$  için

$$Q = (A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)$$

olmak üzere

$$Q^i = (A_1 - iA_2) + j(A_3 - iA_4)$$

$$Q^r = (A_1 + iA_2) - j(A_3 + iA_4)$$

$$Q^t = (A_1 - iA_2) - j(A_3 - iA_4)$$

dir.

### Tanım 3.8 Dual Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar Üzerinde Norm

Dual genelleştirilmiş bikompleks sayılarda norm eşlenik üç şekilde tanımlandığından dolayı norm kavramı da üç şekilde tanımlanır.

$$\forall A_k \in ID, \quad 1 \leq k \leq 4$$

$$\forall Q = (A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4) \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}^{2D} \quad \text{için}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } Q \cdot Q^i &= [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 - iA_2) + j(A_3 - iA_4)] \\ &= A_1^2 + \alpha A_2^2 - \beta A_3^2 - \alpha\beta A_4^2 + 2j[A_1A_3 + \alpha A_2A_4] \end{aligned}$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 + \alpha A_2^2 - \beta A_3^2 - \alpha\beta A_4^2 + 2j[A_1A_3 + \alpha A_2A_4]}$$

elde edilir. Burada özel olarak  $\alpha = \beta = 1$  alınırsa bir dual bikompleks sayının (i) birimine göre normu elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{ii) } Q \cdot Q^r &= [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 + iA_2) - j(A_3 + iA_4)] \\ &= A_1^2 - \alpha A_2^2 + \beta A_3^2 - \alpha\beta A_4^2 + 2i[A_1A_2 + \beta A_3A_4] \end{aligned}$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 - \alpha A_2^2 + \beta A_3^2 - \alpha\beta A_4^2 + 2i[A_1A_2 + \beta A_3A_4]}$$

elde edilir. Burada özel olarak  $\alpha = \beta = 1$  alınırsa bir dual bikompleks sayılarda elde edilen (j) birimine göre norm karşımıza çıkar.

$$\begin{aligned} \text{iii) } Q \cdot Q^t &= [(A_1 + iA_2) + j(A_3 + iA_4)] \cdot [(A_1 - iA_2) - j(A_3 - iA_4)] \\ &= A_1^2 + \alpha A_2^2 + \beta A_3^2 + \alpha\beta A_4^2 + 2ij[A_1A_4 - A_2A_3] \end{aligned}$$

$$\|Q\| = \sqrt{A_1^2 + \alpha A_2^2 + \beta A_3^2 + \alpha\beta A_4^2 + 2ij[A_1A_4 - A_2A_3]}$$

elde edilir. Burada özel olarak  $\alpha = \beta = 1$  alınırsa dual bikompleks sayılarda elde edilen (ij) birimine göre norm karşımıza çıkar.

#### 4. SONUÇLAR

$\mathbb{C}_2$  ile gösterdiğimiz bikompleks sayılar cümlesi ve  $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}^2$  ile gösterdiğimiz genelleştirilmiş bikompleks sayıların (i), (j) ve (ij) birimlerine göre eşlenik özellikleri verilmiştir. Bikompleks sayılar ve genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi ve bikompleks sayılarda kompleks matris gösterimi yapılmıştır.

Daha sonra bikompleks sayıların reel matris gösteriminden yararlanarak  $N$  cümlesi tanımlanmış,  $N'$  nin  $\mathbb{C}_2$  ye izomorf olması ile  $N'$  nin manifold yapısı gösterilmiştir. Benzer şekilde genelleştirilmiş bikompleks sayılarda da gösterilmiştir.

$N'$  nin çarpmaya göre grup yapısı olmadığından  $N'$  nin bir alt cümlesi olan  $E^4$  de  $M$  hiper yüzeyinde  $M$  nin Lie grup yapısı incelenmiştir. Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda da  $E^4$  ' de  $M$  hiperyüzeyinde Lie grup yapısı ve Lie cebiri oluşturulmuştur.

Bu tezde ayrıca dual bikompleks sayılar tanımı verildi.  $\mathbb{C}_2^D$  ile gösterdiğimiz dual bikompleks sayılar cümlesinin  $(i)$  ,  $(j)$  ve  $(ij)$  birimlerine göre eşlenik ve norm tanımları verildi. Bundan yararlanarak dual genelleştirilmiş bikompleks sayılar da tanımlandı. Son olarak da dual genelleştirilmiş bikompleks sayıların  $(i)$  ,  $(j)$  ve  $(ij)$  birimlerine göre eşlenik durumları ve norm kavramları verildi.

## KAYNAKLAR

- Agrawal, O. P.. “Hamilton Operators and Dual Number Quaternionsin Spectral Kinematic”, **Mech. Mach. Theory** , 22 (6): 569-575 (1987).
- Babadağ, F.”Bikompleks Sayılar”,Yüksek Lisans Tezi, **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi**,1998.
- Hacısalihoglu, H. H.”On The Rolling Of One Curve On Surface Upon Another”, **Royal Irish Academy**, 71( 2):13-16 (1971).
- Hacısalihoglu, H. H.. Yüksekboyutlu Uzaylarda dönüşümler ve Geometriler.” **İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi** ,Malatya, 1-18:49-55, 78-85 (1980).
- Hacısalihoglu, H. H. “Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş”, **Fırat Üniversitesi Yayını**, Elazığ, 59-70, 73-80, 239-250 (1980).
- Hacısalihoglu, H. H. ,“Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”,**Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyet Fakültesi Yayınları Mat.No. 2**, Ankara,1-10,78-94(1983).
- Hacısalihoglu, H. H. ,“ Diferansiyel Geometri 1.Cilt “, **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını**,Ankara, 2000 a.
- Hacısalihoglu, H. H. ,“ Diferansiyel Geometri 2. Cilt “, **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını**,Ankara, 2000 b.
- Kula, L. “Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları”, Doktora Tezi. **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi**, Ankara, 2003.
- Ölmez, O., “Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, **Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi**, Ankara, 2006.

### **KAYNAKLAR(Devam ediyor)**

Karakuş Özkaldı , S. , “Aksoyak F. K. Genaralized Bicomplex Numbers and Lie Groups”, (Yayın için incelemede).

Price, G.B., “An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions”. **Marcel Dakker**, New York,1(1):44(1) (1991).

Pottmann, H., “Computational Line Geometry, Mathematics Subject Classification”, **Springer-Verlag Berlin Heidelberg**,New York , 2000.

Ward, J. P., “Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications”. **Published by Kluver Acedemic Publishers**, 250(1997).

Yaylı, Y.,Çalışkan, A. and Uğurlu H.H., “The E. StudyMaps of Circles on Dual HyperbolicandLorentzianUnitSpheres  $\mathbb{H}_0^2$  and  $\mathbb{S}_1^2$ ”, **Mathematical Proceedings of theRoyalIrish Academy**, 102A (1): 37-47 (2002).

## ÖZGEÇMİŞ



### **Kişisel Bilgiler**

Adı Soyadı :Hatice KAYA  
Doğum Yeri ve Tarihi :Bozkır / 1978

### **Eğitim Durumu**

Lisans Öğrenimi : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi  
Matematik Bölümü (1997-2001)

Yüksek Lisans Öğrenimi : Beykent Üniversitesi  
Matematik Uygulamaları (2006-2008)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

### **İş Deneyimi**

Çalıştığı Kurum : Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi Öğretmen  
Sertifikası (2001)

Y.i.B.O. varto /Muş (2001-2002)

Atatürk Lisesi Van (2002-2003)

Atatürk İ.Ö.O. Özalp /VAN (2003-2004)

Çatalca Anadolu Lisesi İSTANBUL (2004-2008)

Haydar Akın Anadolu Teknik Lisesi  
Avcılar / İSTANBUL (2008-2011)

Kırımlı Rüştü Olcay Anadolu Lisesi  
Zeytinburnu /İSTANBUL (2011-)

**İletişim**

Adres : Prof. Muammer Aksoy Cad. 49/2  
Zeytinburnu/İSTANBUL

Tel : 05423927241

E-Posta Adresi : meyre\_42@outlook.com

**Tarih :****İmza**