

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KAPALI ARALIKTA TANIMLI BERİNDE DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN  
İTERATİV YAKLAŞIMLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
EDA AKIN

TEZ DANIŞMANI  
DR. ÖĞR. ÜYESİ OSMAN ALAGÖZ

BİLECİK, 2022

10481699

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KAPALI ARALIKTA TANIMLI BERİNDE DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN  
İTERATİV YAKLAŞIMLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
EDA AKIN

TEZ DANIŞMANI  
DR. ÖĞR. ÜYESİ OSMAN ALAGÖZ

BİLECİK, 2022

10481699

## BEYAN

“Kapalı Aralıkta Tanımlı Berinde Dönüşümleri İçin İterativ Yaklaşımlar” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.			
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<input type="checkbox"/>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR</b>	<input checked="" type="checkbox"/>
<b>Destek alındı ise;</b>			
<b>Destekleyen kurum;</b>			
<b>Desteğin Türü</b>		<b>Proje Numarası</b>	
<b>1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</b>			
<b>2- TÜBİTAK</b>			
<b>Diğer;.....</b> .....			
<b>ETİK KURUL onayı var ise;</b>			
<b>ETİK KURUL karar tarih/sayı:</b>		...../..... .....	

Eda Akın

Tarih

.....

İmza

.....

## ÖN SÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, bana destek olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Osman ALAGÖZ'e ve farklı açılardan bakmamı sağlayan hocam Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM'e, yapıcı yorumları için Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca manevi desteğini esirgemeyen kurum müdürüm Zekai ÇOBANDERE'ye teşekkürü borç bilirim. Hayatım boyunca beni destekleyen kız kardeşim Beyza AKIN'a ve aileme sonsuz teşekkür ederim.

**Eda Akın**

**2022**

## ÖZET

### KAPALI ARALIKTA TANIMLI BERİNDE DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN

#### İTERATİV YAKLAŞIMLAR

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sabit nokta teorisinde yapılan çalışmalarla ilgili literatürde yer alan bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde kullanılan tanım ve teoremlerden oluşan kuramsal temeller açıklanmıştır. Üçüncü bölümde tezde kullanılan materyal ve yöntemler açıklanmış olup en sık kullanılan iterasyonlar, üzerinde çalışılan dönüşüm sınıfları, sabit nokta teorisinde geçen önemli tanım ve teoremler ile iterasyonların yakınsama hızlarına yer verilmiştir. Bu bölümde kullanılan mapple algoritmasına da yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Berinde dönüşümleri için verilen iterasyonların yakınsama hızları karşılaştırılarak sonuçlar nümerik tablo ve grafik olarak sunulmuştur. Beşinci bölümde de bulgulardan yola çıkılarak ulaşılan sonuçlar tartışılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Sabit Nokta, Yakınsama Hızı, Yakınsaklık Teoremi, M-İterasyonu.

## **ABSTRACT**

### **ITERATIVE PROCESSES FOR BERINDE MAPPINGS DEFINED ON A CLOSED INTERVAL**

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the literature and the studies on fixed point theory is given. In the second chapter, the theoretical foundations consisting of the definitions and theorems used are explained. In the third chapter, the material and methods used in the thesis are explained and the most frequently used iterations, the classes of mapping studied, the important definitions and theorems in fixed point theory and the rate of convergence for the iterations for Berinde mappings are compared and the results are presented as numerical tables and graphical representations. In the fifth chapter, the conclusions reached based on the findings are discussed.

**Keywords:** Fixed Point, Rate of Convergence, Convergence Theorem, M-Iteration

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	5
3.1. İterasyonlar .....	5
3.2. Dönüşüm Sınıfları .....	8
3.3. Bazı Önemli Tanım ve Teoremler .....	10
3.4. Tablo ve Grafiklerin Oluşturulmasında Kullanılan Mapple Kodları .....	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....	14
4.1. Berinde Dönüşümleri İçin İterasyonların Yakınsama Hızlarının Karşılaştırılması.....	14
4.2. Kapalı Aralıkta Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	29
4.3. Yakınsama Hızı .....	32
5. SONUÇ VE TARTIŞMA .....	36
KAYNAKÇA .....	37

## TABLULAR LİSTESİ

	Sayfa
<b>Tablo 4.1.</b> Örnek 4.1.3 ün nümerik değerleri .....	17
<b>Tablo 4.2.</b> Örnek 4.1.4 ün nümerik değerleri .....	19
<b>Tablo 4.3.</b> Örnek 4.1.5 in nümerik değerleri .....	21
<b>Tablo 4.4.</b> Örnek 4.1.6 nın nümerik değerleri .....	23
<b>Tablo 4.5.</b> Örnek 4.1.7 nin nümerik değerleri .....	24
<b>Tablo 4.6.</b> Örnek 4.1.8 in nümerik değerleri .....	26
<b>Tablo 4.7.</b> Örnek 4.1.9 un nümerik değerleri .....	28

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1. Örnek 4.1.3 ün grafiksel gösterimi .....	18
Şekil 4.2. Örnek 4.1.4 ün grafiksel gösterimi .....	20
Şekil 4.3. Örnek 4.1.5 in grafiksel gösterimi .....	22
Şekil 4.4. Örnek 4.1.6 nın grafiksel gösterimi .....	23
Şekil 4.5. Örnek 4.1.7 nin grafiksel gösterimi .....	25
Şekil 4.6. Örnek 4.1.8 in grafiksel gösterimi .....	27
Şekil 4.7. Örnek 4.1.9 un grafiksel gösterimi .....	29

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$X$	: Küme
$X'$	: $X$ kümesinin tümleyeni
$T$	: Dönüşüm
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$(X, d)$	: $X$ metrik uzayı
$(x_n)$	: Reel sayı dizisi
$x_n \rightarrow x$	: $(x_n)$ dizisinin $x$ e yakınsaması
$D(T)$	: $T$ dönüşümünün tanım kümesi
$F(T)$	: $T$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$d(x, y)$	: $x$ ve $y$ noktaları arasındaki uzaklık
$\ x\ $	: $x$ vektörünün normu
$T(x_n)$	: $(x_n)$ dizisinin $T$ dönüşümü altındaki görüntüsü
$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$	: $(\alpha_n)$ dizisinin terimlerinin sonsuz toplamı

## 1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde sabit nokta kavramının ilk ortaya çıkış tarihinin 1900'lü yıllar olduğu görülmektedir. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılmak üzere sabit nokta kavramı ilk olarak Henri Poincare tarafından tanımlanmıştır. Fakat sabit nokta kavramını teorem olarak ifade eden ve ispatlayan ilk matematikçi Lej Brouwer olmuştur. Brouwer'in normlu lineer uzaylarda yapmış olduğu çalışmalar 1930 yılında Schauder (Schauder, 1930: 172) tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmiştir. Tam metrik uzaylarda ilk sabit nokta çalışmaları ise 1922 yılında Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından başlatılmıştır. Banach'ın sabit noktanın varlığını ve tekliliğini gösterdiği bu teorem Banach teoremi olarak da bilinmektedir. (Banach, 1922)

Sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümü için sıklıkla kullanılmaktadır. Günümüzde, mühendislik alanında kontrol problemlerinin çözümünde ve algoritmaların test edilmesinde (Argyros ve Hilout, 2013: 1; Argyros ve Hilout, 2007: 1) optimizasyonda (Ceng vd., 2011:1) kimyasal denklemlerin çözümünde, astronomi alanında güneş sistemindeki nesnelere konumlarının hesaplanmasında (Bucur, 2017: 13), haberleşme ve telekomünikasyon alanında (Liu vd., 2010) ve iletişim mühendisliğindeki denklemlerin çözümünde, ayrıca ekonomi ve oyun teorisi (Border, 1989; Ok, 2007; Kohlberg ve Mertens, 1986) biyoloji ve tıp alanlarında da sabit nokta teorisinden yararlanılmaktadır. (Chen vd., 2008: 1; Radde, 2010; Wang ve Cheng, 2009).

Bu çalışmada, yukarıda uygulama alanları verilen sabit nokta teorisinin bir kısmı olan sabit noktaya yaklaşım iterasyonları incelenmiştir. Yaklaşım iterasyonlarından en yaygın kullanılanları verilmiştir. Kapalı aralıkta sürekli dönüşümler için verilen iterasyonların yakınsama hızları karşılaştırılmış ve daha hızlı yakınsayan başka bir iterasyon tanımlanmıştır. Yeni iterasyonun diğer iterasyonlarla kıyaslanması için sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Yaklaşım iterasyonları, daha hızlı iterasyona ulaşmak için karşılaştırılmıştır. Bir iterasyonun hızlı olması ise hem zaman hem maliyet açısından çalışmalarda avantaj sağlayacaktır. Bilimsel çalışmalarda kullanılan denklemlerin daha hızlı çözülmesi sonuçlara daha erken ulaşılmasına dolayısıyla gelişmelerin de hızlanmasına neden olacaktır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sabit nokta kavramı, metrik uzay, açık ve kapalı küme, dönüşüm, sürekli dönüşüm, konveks küme, dizi çeşitleri, monotonluk özellikleri ile dizilerde yakınsama kavramı, normlu uzay ve Banach uzayı tanımlarına yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $T(x) = x$  denkleminin  $x \in X$  çözümüne  $T$  dönüşümünün sabit noktaları denir. (Soykan, 2008: 242)

**Tanım 2.2.**  $X \neq \emptyset$  küme ve  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y, z \in X$  için

$$M1) d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlıyorsa  $d$  ye  $X$  üzerinde bir metrik denir.  $d$  ile birlikte  $X$  e metrik uzay denir ve  $(X, d)$  ile gösterilir. (Soykan, 2008: 26)

**Tanım 2.3.**  $X$  bir metrik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $\forall x \in A$  için  $D(x; r) \subseteq A$  olacak şekilde bir  $r$  pozitif sayısı varsa  $A$  ya  $X$  uzayının açık alt kümesi denir. (Soykan, 2008: 39)

**Tanım 2.4.**  $X$  metrik uzayının  $B$  alt kümesinin  $X$  deki tümleyeni açık küme ise  $B$  ye  $X$  uzayının kapalı alt kümesi denir. (Kılıç ve Erdem, 1982: 6)

**Tanım 2.5.**  $X$  ve  $Y$  boştan farklı iki küme ve  $T = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$

$X \times Y$  içinde bir bağıntı olsun. Eğer

$$1. \quad x \in X \text{ için } \exists y \in Y \ni (x, y) \in T$$

$$2. \quad (x, y_1), (x, y_2) \in T \Rightarrow y_1 = y_2$$

koşulları sağlanıyorsa  $T$  ye  $X$  den  $Y$  ye bir dönüşüm denir. (Balcı, 1999: 38)

**Tanım 2.6.**  $X = (X, d)$  ve  $Y = (Y, \rho)$  iki metrik uzay,  $T: X \rightarrow Y$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in X$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  sayısı için  $d(x, x_0) < \delta$  olduğunda  $\rho(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $f$  ye  $x_0$  noktasında sürekli denir.  $T, X$  uzayının her noktasında sürekli ise  $T$  dönüşümüne  $X$  uzayında sürekli dönüşüm denir. (Soykan, 2008: 80)

**Tanım 2.7.**  $X$  kümesi  $\mathbb{R}$  üzerinde bir vektör uzayı ve  $A \subseteq X$  olmak üzere,  $x, y \in A$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

ise  $A$  kümesine konveks küme denir (Musayev vd., 2003: 538).

**Tanım 2.8.**  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  aralığında tanımlı  $T: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  ve  $\forall \lambda \in [0,1]$  olmak üzere  $T(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda T(x_1) + (1 - \lambda)T(x_2)$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $T$  dönüşümüne konveks dönüşüm denir (Musayev vd., 2003: 538).

**Tanım 2.9.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_0$  olduğunda  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  sayısı varsa  $(x_n)$  dizisine Cauchy dizisi denir (Kılıç ve Erdem, 1982: 19).

**Tanım 2.10.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  sayısı varsa  $(x_n)$  dizisi üstten sınırlıdır denir. Burada  $M$  sayısı dizinin bir üst sınırıdır.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $A \leq x_n$  olacak şekilde bir  $A$  sayısı varsa  $(x_n)$  dizisi alttan sınırlıdır denir. Burada  $A$  sayısı dizinin bir alt sınırıdır (Nasibov ve Kaçar, 2008: 186).

**Tanım 2.11.**  $(x_n)_0^\infty$  dizisi verilsin. Eğer

$$\text{i. } x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisine azalan dizi denir.

$$\text{ii. } x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisine artmayan dizi denir.

$$\text{iii. } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisine artan dizi denir.

$$\text{iv. } x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisine azalmayan dizi denir (Nasibov ve Kaçar, 2008: 184).

**Tanım 2.12.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa  $(x_n)$  dizisi  $X$  uzayında yakınsaktır denir. Burada dizinin limiti  $x$  tir ve  $x_n \rightarrow x$  ile gösterilir (Kılıç ve Erdem, 1982: 12).

**Tanım 2.13.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi olsun.  $X$  uzayındaki her  $(x_n)$  Cauchy dizisi yakınsak ise yani  $x_n \rightarrow x \in X$  ise  $(X, d)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir (Kılıç ve Erdem, 1982: 20).

**Tanım 2.14**  $N$ , lineer bir uzay olsun.  $\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $x$  deki değeri  $\|x\|$  ile gösterilsin.  $\forall x, y, z \in N$  ve  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $N$  de bir norm denir.  $(N, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay denir (Soykan, 2008: 59).

**Tanım 2.15.**  $N$ , normlu lineer bir uzay olsun.  $N$ , norm metriğine göre tam ise  $N$  ye Banach uzayı denir (Soykan, 2008: 112).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde sabit nokta teorisinde kullanılan önemli iterasyon çeşitleri ve dönüşüm sınıfları verilmiştir.

#### 3.1. İterasyonlar

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisinde sabit noktayı bulmak için çeşitli yaklaşım iterasyonları kullanılır. Bu durumda seçilecek olan iterasyonun hangi şartlarda ve hangi hızda yakınsadığı çok önemlidir. Bu bölümde Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S ve M iterasyonu gibi hızlı iterasyonların tanımları ve neden bu iterasyonların kullanıldıkları hakkında bilgi verilmiştir.

##### 3.1.1. Picard İterasyonu

E. Picard tarafından 1890 yılında, Banach daralma teoremini sağlayan dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamak için kullanılmıştır.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$  ve  $K, X$  uzayının konveks bir alt kümesi olmak üzere  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır (Picard, 1890: 145).

##### 3.1.2. Mann İterasyonu

W. R. Mann tarafından 1953 yılında, Banach daralma teoremini sağlayan dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamak için kullanılmıştır.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K, X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $(\alpha_n) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  şartları sağlanır (Mann, 1953: 506).

##### 3.1.3. Ishikawa İterasyonu

S. Ishikawa tarafından pseudo-contractive ve Lipschitzian dönüşümleri için 1974 yılında, Mann iterasyonunun yetersiz kaldığı durumlarda kullanılmak üzere tanımlanmıştır.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K, X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(y_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $(\alpha_n), (\beta_n) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$  şartları sağlanır (Ishikawa, 1976: 65).

Ishikawa iterasyonunda  $\beta_n = 0$  alınırsa Mann iterasyonu elde edilir. Fakat Ishikawa ve Mann iterasyonlarının yakınsama sonuçları karşılaştırıldığında genel bir ilişki yoktur (Berinde, 2007: 113).

### 3.1.4. S-İterasyonu

Agarwal, O'Regan ve Sahu tarafından 2007 yılında, asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için oluşturulmuştur. Bu iterasyon Picard iterasyonuna benzer fakat Mann ve Ishikawa iterasyonlarından bağımsız bir iterasyondur.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$   $X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T(x_n) + \alpha_n T(y_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $(\alpha_n), (\beta_n) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) = \infty$  şartları sağlanır (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2007: 61).

### 3.1.5. Picard-S İterasyonu

F. Gürsoy ve V. Karakaya tarafından 2014 yılında, özel diferansiyel denklemlerin çözümü için tanımlanmıştır. Bu iterasyon belirli koşullarda Picard, Mann ve Ishikawa iterasyonlarından daha hızlı sabit noktaya yaklaşmaktadır.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$   $X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n) \\ y_n = (1 - \alpha_n)T(x_n) + \alpha_n T(z_n) \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $(\alpha_n), (\beta_n) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  şartları sağlanır. (Gürsoy ve Karakaya, 2014: 1)

### 3.1.6. $S_n$ - İterasyonu

W. Sintunavarat ve A. Pitea tarafından 2016 yılında, normlu uzaylarda doğrusal olmayan ve Berinde daralma şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için tanımlanmıştır.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$   $X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T(z_n) + \alpha_n T(y_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n y_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n), \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$  şartları sağlanır (Sintunavarat ve Pitea, 2016: 2553).

### 3.1.7. M- İterasyonu

K. Ullah ve M. Arshad tarafından 2018 yılında, düzgün konveks Banach uzaylarında Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için oluşturulmuştur.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$   $X$  uzayının konveks bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı bir dönüşüm ve  $x_0$  herhangi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n) \\ y_n = T(z_n) \\ z_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $(\alpha_n) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  şartları sağlanır (Ullah ve Arshad, 2018: 187).

A. Şahin, 2019 yılında bu iterasyonu kullanarak hiperbolik uzaylarda genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için bazı yeni sonuçlar elde etmiştir.

### 3.1.8. Karaca ve Yıldırım İterasyonu

N. Karaca ve İ. Yıldırım tarafından 2013 yılında, kapalı aralıkta tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için oluşturulmuştur.  $X$  bir normlu uzay,  $K \neq \emptyset$ ,  $K$   $X$  uzayının kapalı bir alt kümesi,  $T: K \rightarrow K$  tanımlı sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} z_n = (1 - a_n)x_n + a_n T(x_n) \\ y_n = (1 - b_n)z_n + b_n T(z_n) \\ x_{n+1} = T(y_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

iterasyonu tanımlanır. Burada  $(a_n), (b_n) \in (0, 1)$  dir (Karaca ve Yıldırım, 2013).

### 3.2. Dönüşüm Sınıfları

Bu bölümde daraltan dönüşüm, genişlemeyen dönüşüm, Berinde dönüşümü gibi sabit nokta teorisinde önemli dönüşüm sınıflarının tanımları ve bu dönüşümlere örnekler verilmiştir.

**Tanım 3.2.1.**  $X = (X, d)$  bir tam metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için  $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$  eşitsizliği  $0 \leq k < 1$  olması halinde sağlanıyorsa  $T$  ye daraltan dönüşüm denir.

**Örnek 3.2.2.**  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $T(x) = \frac{2x}{5}$  olmak üzere

$d(T(x), T(y)) = d\left(\frac{2x}{5}, \frac{2y}{5}\right) = \frac{2}{5}d(x, y)$  denkleminde  $k = \frac{2}{5}$  olup  $0 \leq k < 1$  şartı sağlandığından  $T$  daraltan dönüşümdür.

**Tanım 3.2.3.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için  $d(T(x), T(y)) \leq k.d(x, y)$  eşitsizliği  $k = 1$  için sağlanıyorsa  $T$  ye genişlemeyen dönüşüm denir.

**Örnek 3.2.4.**  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $T(x) = \cos x$  olmak üzere

$$\begin{aligned}d(T(x), T(y)) &= d(\cos x, \cos y) \\&= |\cos x - \cos y| \\&= \left| 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \\&\leq 2.1. \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \\&\leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \\&= |x - y| \\&= d(x, y)\end{aligned}$$

denkleminde  $k = 1$  olup  $0 \leq k \leq 1$  şartı sağlandığından  $T$  genişlemeyen dönüşümdür.

**Tanım 3.2.5.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için

$$d(T(x), T(y)) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, T(x)) \quad (1.6)$$

eşitsizliğini sağlayan  $\delta \in [0,1)$  ve  $L \geq 0$  varsa  $T$  ye Berinde dönüşümü denir (Berinde, 2004: 45).

**Örnek 3.2.6.**  $X = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$  ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ \frac{x}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  için  $T(x) = \frac{x}{2}$ ,  $T(y) = \frac{y}{2}$  olduğundan

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= d\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - y| \\ &= \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{4}|x - y| \\ &\leq \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{3} \cdot \left|x - \frac{x}{2}\right| \end{aligned}$$

olup  $\delta = \frac{1}{4}$  ve  $L = \frac{1}{3}$  seçilirse  $T$  bir Berinde dönüşümü olur.

$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$  ve  $\forall y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  için  $T(x) = \frac{1}{2}$ ,  $T(y) = \frac{y}{2}$  olduğundan

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= d\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ &= \left|\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right| = \left|\frac{1-y}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|1 - y| \\ &\leq \frac{1}{2}|1 - y| + \frac{1}{7} \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right| \end{aligned}$$

olup  $\delta = \frac{1}{2}$  ve  $L = \frac{1}{7}$  seçilirse  $T$  bir Berinde dönüşümü olur.

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  ve  $\forall y \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$  için  $T(x) = \frac{x}{2}$ ,  $T(y) = \frac{1}{2}$  olduğundan

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= d\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|x - 1| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}|x - 1| + \frac{1}{4} \cdot \left| x - \frac{x}{2} \right|$$

olup  $\delta = \frac{1}{2}$  ve  $L = \frac{1}{4}$  seçilirse  $T$  bir Berinde dönüşümü olur.

$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$  için  $T(x) = \frac{1}{2}$  ve  $T(y) = \frac{1}{2}$  olduğundan

$$d(T(x), T(y)) = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 0 \leq 0|x - y| + 2 \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

olup  $\delta = 0$  ve  $L = 2$  seçilirse  $T$  bir Berinde dönüşümü olur.

**Tanım 3.2.7.**  $(X, d)$  tam metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlanan bir dönüşüm olsun.  $a \in [0, 1)$ ,  $b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  olacak şekilde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $\forall x, y \in X$  için aşağıdakilerden en az biri doğruysa

$$Z1) d(T(x), T(y)) \leq a \cdot d(x, y)$$

$$Z2) d(T(x), T(y)) \leq b \cdot [d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$$

$$Z3) d(T(x), T(y)) \leq c \cdot [d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$$

$T$  dönüşümüne Zamfirescu dönüşümü denir (Zamfirescu, 1972: 292).

### 3.3. Bazı Önemli Tanım ve Teoremler

Bu bölümde sabit nokta teorisinde kullanılan bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

**Teorem 3.3.1.**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in X$  için  $d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y)$  olacak biçimde bir  $k \in [0, 1)$  bulunabiliyorsa  $T$  nin  $X$  üzerinde bir tek sabit noktası vardır (Banach, 1922: 153).

**Teorem 3.3.2.**  $(X, d)$  tam metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  tanımlanan bir Zamfirescu dönüşümü olsun. Yani  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\beta, \gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  olacak şekilde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ve  $\forall x, y \in X$  için aşağıdakilerden en az biri doğruysa

$$Z1) d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

$$Z2) d(T(x), T(y)) \leq \beta \cdot [d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$$

$$Z3) d(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot [d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$$

bu durumda  $T$  nin tek bir  $x^*$  sabit noktası vardır ve  $(x_n)$  dizisi ile tanımlanmış Picard iterasyonu keyfi bir  $x_0 \in X$  için  $x^*$  a yakınsar (Zamfirescu, 1972: 292).

**Tanım 3.3.3.**  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  sırasıyla  $a$  ve  $b$  sayılarına yakınsayan iki reel sayı dizisi olsun.

$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|}$  limitinin var olduğunu kabul edelim.

R1)  $l = 0$  ise  $(a_n) \rightarrow a$ 'ya,  $(b_n) \rightarrow b$ 'ye yakınsadığından daha hızlı yakınsar.

R2)  $0 < l < \infty$  ise  $(a_n)$  ve  $(b_n)$ in aynı yakınsama hızına sahip olduğu söylenebilir (Berinde, 2004: 99).

**Tanım 3.3.4.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu bir lineer uzay,  $(u_n)$  ve  $(v_n)$  de  $X$  de iki dizi olsun.  $(u_n)$  ve  $(v_n)$  in aynı  $p \in X$  noktasına yakınsadığı ve hata tahminlerinin aşağıdaki gibi olduğu kabul edilsin.

$$\|u_n - p\| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|v_n - p\| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Burada  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  pozitif terimli ve sifıra yakınsayan iki dizi olsun. Eğer  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  den daha hızlı yakınsıyorsa  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  den daha hızlı  $p$  ye yakınsar (Abbas ve Nazır, 2014: 224).

### 3.4. Tablo ve Grafiklerin Oluşturulmasında Kullanılan Mapple Kodları

Bu bölümde tablolar ve grafikler elde edilirken kullanılan Mapple kodları verilmiştir.

restart:

with(LinearAlgebra):

with(linalg):

with(plots):

with(plottools):

T:=(2\*x+3)/99:

for n from 1 to 500 do

alpha[n]:=0.08:

a[n]:=0.2:

b[n]:=0.3:

beta[n]:=0.3:

Gamma[n]:=0.2:

Picard İterasyonunun Tanımlanması

x1[1]:=1.50:

x1[n+1]:=eval(T,x=x1[n]):

Mann İterasyonunun Tanımlanması

x2[1]:=1.50:

u2[n]:=eval(T,x=x2[n]):

x2[n+1]:=(1-alpha[n])\*x2[n]+alpha[n]\*u2[n]:

Ishikawa İterasyonunun Tanımlanması

x3[1]:=1.50:

$u3[n] := \text{eval}(T, x = x3[n]):$   
 $y3[n] := (1 - \text{beta}[n]) * x3[n] + \text{beta}[n] * u3[n]:$   
 $v3[n] := \text{eval}(T, x = y3[n]):$   
 $x3[n+1] := (1 - \text{alpha}[n]) * x3[n] + \text{alpha}[n] * v3[n]:$

#### S İterasyonunun Tanımlanması

$x4[1] := 1.50:$   
 $u4[n] := \text{eval}(T, x = x4[n]):$   
 $y4[n] := (1 - \text{beta}[n]) * x4[n] + \text{beta}[n] * u4[n]:$   
 $v4[n] := \text{eval}(T, x = y4[n]):$   
 $x4[n+1] := (1 - \text{alpha}[n]) * u4[n] + \text{alpha}[n] * v4[n]:$

#### Picard S İterasyonunun Tanımlanması

$x5[1] := 1.50:$   
 $u5[n] := \text{eval}(T, x = x5[n]):$   
 $z5[n] := (1 - \text{beta}[n]) * x5[n] + \text{beta}[n] * u5[n]:$   
 $w5[n] := \text{eval}(T, x = z5[n]):$   
 $y5[n] := (1 - \text{alpha}[n]) * u5[n] + \text{alpha}[n] * w5[n]:$   
 $v5[n] := \text{eval}(T, x = y5[n]):$   
 $x5[n+1] := v5[n]:$

#### Sn İterasyonunun Tanımlanması

$x6[1] := 1.50:$   
 $u6[n] := \text{eval}(T, x = x6[n]):$   
 $y6[n] := (1 - \text{beta}[n]) * x6[n] + \text{beta}[n] * u6[n]:$   
 $z6[n] := (1 - \text{Gamma}[n]) * x6[n] + \text{Gamma}[n] * y6[n]:$   
 $w6[n] := \text{eval}(T, x = z6[n]):$   
 $v6[n] := \text{eval}(T, x = y6[n]):$   
 $x6[n+1] := (1 - \text{alpha}[n]) * w6[n] + \text{alpha}[n] * v6[n]:$

#### M İterasyonunun Tanımlanması

$x7[1] := 1.50:$   
 $u7[n] := \text{eval}(T, x = x7[n]):$   
 $z7[n] := (1 - \text{alpha}[n]) * x7[n] + \text{alpha}[n] * u7[n]:$   
 $w7[n] := \text{eval}(T, x = z7[n]):$   
 $y7[n] := w7[n]:$   
 $v7[n] := \text{eval}(T, x = y7[n]):$   
 $x7[n+1] := v7[n]:$

#### Karaca İterasyonunun Tanımlanması

$x8[1] := 1.50:$   
 $u8[n] := \text{eval}(T, x = x8[n]):$   
 $z8[n] := (1 - a[n]) * x8[n] + a[n] * u8[n]:$   
 $w8[n] := \text{eval}(T, x = z8[n]):$   
 $y8[n] := (1 - b[n]) * z8[n] + b[n] * w8[n]:$   
 $v8[n] := \text{eval}(T, x = y8[n]):$   
 $x8[n+1] := v8[n]:$

#### İterasyon Adımlarının Tablo Halinde Çıktı Alınması

end do:

```
for n from 1 to 500 do
print(n , x1[n], x2[n], x3[n], x4[n], x5[n], x6[n], x7[n]);
end do:
```

Yakınsaklık Grafiklerinin Elde Edilmesi

```
plot1:=plot([seq]([n,x1[n]],n=1..500), color=cyan);
plot2:=plot([seq]([n,x2[n]],n=1..500),color=brown);
plot3:=plot([seq]([n,x3[n]],n=1..500),color=blue);
plot4:=plot([seq]([n,x4[n]],n=1..500),color=yellow);
plot5:=plot([seq]([n,x5[n]],n=1..500),color=green);
plot6:=plot([seq]([n,x6[n]],n=1..500),color=black);
plot7:=plot([seq]([n,x7[n]],n=1..500),color=red);
plot8:=plot([seq]([n,x8[n]],n=1..500),color=black);

plots:-display([plot1], [plot2], [plot3], [plot4], [plot5], [plot6], [plot7]);
```

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde literatürde hızlı olarak bilinen bir çok iterasyonun sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırılacaktır.

##### 4.1. Berinde Dönüşümleri İçin İterasyonların Yakınsama Hızlarının Karşılaştırılması

###### Tanım 4.1.1. M- İterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n) \\ y_n = T(z_n) \\ z_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olmak üzere  $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$  ve  $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$  dizileri sırasıyla  $[\alpha, 1 - \alpha]$ ,  $[\beta, 1 - \beta]$  ve  $[\gamma, 1 - \gamma]$  aralıklarında olsun.

**Teorem 4.1.2.**  $K, (X, \|\cdot\|)$  Banach uzayının boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve  $T: K \rightarrow K$  tanımlı (4.8) zayıf daralma koşulunu sağlayan, sabit noktası  $p$  olan bir dönüşüm olsun.  $M, S_n$ , Picard-S ve  $S$  iterasyonlarının sırasıyla  $(x_n), (u_n), (p_n)$  ve  $(\xi_n)$  dizileri tarafından tanımlandığını kabul edelim.  $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olmak üzere  $(\alpha_n), (\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri sırasıyla  $[\alpha, 1 - \alpha]$ ,  $[\beta, 1 - \beta]$  ve  $[\gamma, 1 - \gamma]$  aralıklarında olsun. Bu durumda M iterasyonu S ve Picard-S iterasyonlarından daha hızlı yakınsar. Ayrıca eğer

$$\alpha(2 - \gamma) < \gamma$$

ise M iterasyonu  $S_n$  iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Alagöz vd. 2018: 298).

**İspat:**  $\forall n \in \mathbb{N}$  için M iterasyonu kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|T(y_n) - p\| \\ &\leq \delta \|y_n - p\| \\ &= \delta \|T(z_n) - p\| \\ &\leq \delta^2 \|z_n - p\| \\ &= \delta^2 \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| \\ &\leq \delta^2 [(1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \delta \|x_n - p\|] \\ &= (1 - (1 - \delta)\alpha_n)\delta^2 \|x_n - p\| \end{aligned} \quad (4.1)$$

Buradan  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\|x_n - p\| \leq \{(1 - (1 - \delta)\alpha)\delta^2\}^n \|x_0 - p\| \text{ bulunur.}$$

$$\alpha_n := \{(1 - (1 - \delta)\alpha)\delta^2\}^n \|x_0 - p\| \text{ seçelim.}$$

Picard-S iterasyonunu kullanırsak;

$$\begin{aligned} \|r_n - p\| &\leq \|(1 - \beta_n)p_n + \beta_n T(p_n) - p\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|p_n - p\| + \beta_n \|T(p_n) - p\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|p_n - p\| + \beta_n \delta \|p_n - p\| \\ &= (1 - (1 - \delta)\beta_n)\|p_n - p\| \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) ve Picard-S iterasyonu kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|q_n - p\| &\leq \|(1 - \alpha_n)T(p_n) + \alpha_n T(r_n) - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|T(p_n) - p\| + \alpha_n \|T(r_n) - p\| \\ &\leq (1 - \alpha)\delta \|p_n - p\| + \alpha_n \delta \|r_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha)\delta \|p_n - p\| + \alpha_n \delta (1 - (1 - \delta)\beta_n)\|p_n - p\| \\ &= (1 - (1 - \delta)\alpha_n \beta_n)\delta \|p_n - p\| \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3)'ten  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - p\| &= \|T(q_n) - p\| \\ &\leq \delta \|q_n - p\| \\ &< (1 - (1 - \delta)\alpha_n \beta_n)\delta^2 \|p_n - p\| \text{ elde edilir.} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Böylece  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\|p_n - p\| \leq \{((1 - (1 - \delta)\alpha\beta)\delta^2)\}^n \|p_0 - p\| \text{ olur.}$$

$$b_n := \{((1 - (1 - \delta)\alpha\beta)\delta^2)\}^n \|p_0 - p\| \text{ olsun.}$$

Teorem 4.1.2 de kanıtlandığı gibi (Sintunavarat ve Pitea, 2016: 2553)  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\|u_n - p\| \leq \{1 - (1 - \delta)\beta[\gamma_n - \alpha_n + \alpha_n \gamma_n]\}^n \|u_0 - p\| \quad (4.5)$$

ve

$$\|\xi_n - p\| \leq [1 - (1 - \delta)\alpha\beta]^n \|\xi_0 - p\| \quad (4.6)$$

$$c_n := \{1 - (1 - \delta)\beta[\gamma - \alpha + \alpha\gamma]\}^n \|u_0 - p\| \text{ ve}$$

$$d_n := [1 - (1 - \delta)\alpha\beta]^n \|\xi_0 - p\| \text{ seçilsin.}$$

$\alpha(2 - \gamma) < \gamma$  olduğundan

$$1 - (1 - \delta)\beta(\gamma - \alpha + \alpha\gamma) < 1 - (1 - \delta)\alpha\beta < 1 \text{ elde edilir.}$$

Mann ve Ishikawa iterasyonlarının tanımı kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - (1 - \delta)\alpha)\delta^2]^n \|x_0 - p\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{(1 - (1 - \delta)\alpha\beta)\delta^n\}^n \|p_0 - p\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (1 - \delta)\beta[\gamma - \alpha + \alpha\gamma]]^n \|u_0 - p\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi - p\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (1 - \delta)\alpha\beta]^n \|\xi_0 - p\| = 0 \text{ eşitsizlikleri elde edilir.}$$

Yukarıdaki iterasyonların yakınsama oranlarını aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1 - (1 - \delta)\alpha)^n \delta^{2n}}{(1 - (1 - \delta)\alpha\beta)^n \delta^{2n}} \right\} \frac{\|x_0 - p\|}{\|p_0 - p\|} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1 - (1 - \delta)\alpha)^n \delta^{2n}}{[1 - (1 - \delta)\beta[\gamma - \alpha + \alpha\gamma]]^n} \right\} \frac{\|x_0 - p\|}{\|u_0 - p\|} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1 - (1 - \delta)\alpha)^n \delta^{2n}}{[1 - (1 - \delta)\alpha\beta]^n} \right\} \frac{\|x_0 - p\|}{\|\xi_0 - p\|} = 0$$

Teoremi desteklemek amacıyla, zayıf daralma koşulunu sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarına farklı iterasyonlarla yaklaşmıştır. Verilen örneklerde her bir dönüşümün grafikleri, sabit noktaları ve hangi iterasyonun kaçınıcı adımda sabit noktaya yaklaştığı incelenmiştir.

**Örnek 4.1.3.**  $D = [-10, 10]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$$T: D \rightarrow D \text{ tanımlı bir dönüşüm ve } \forall x \in D \text{ için } T(x) = \cos(\sin x) \text{ olsun.}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.2 \text{ seçelim. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.5 \text{ seçelim.}$$

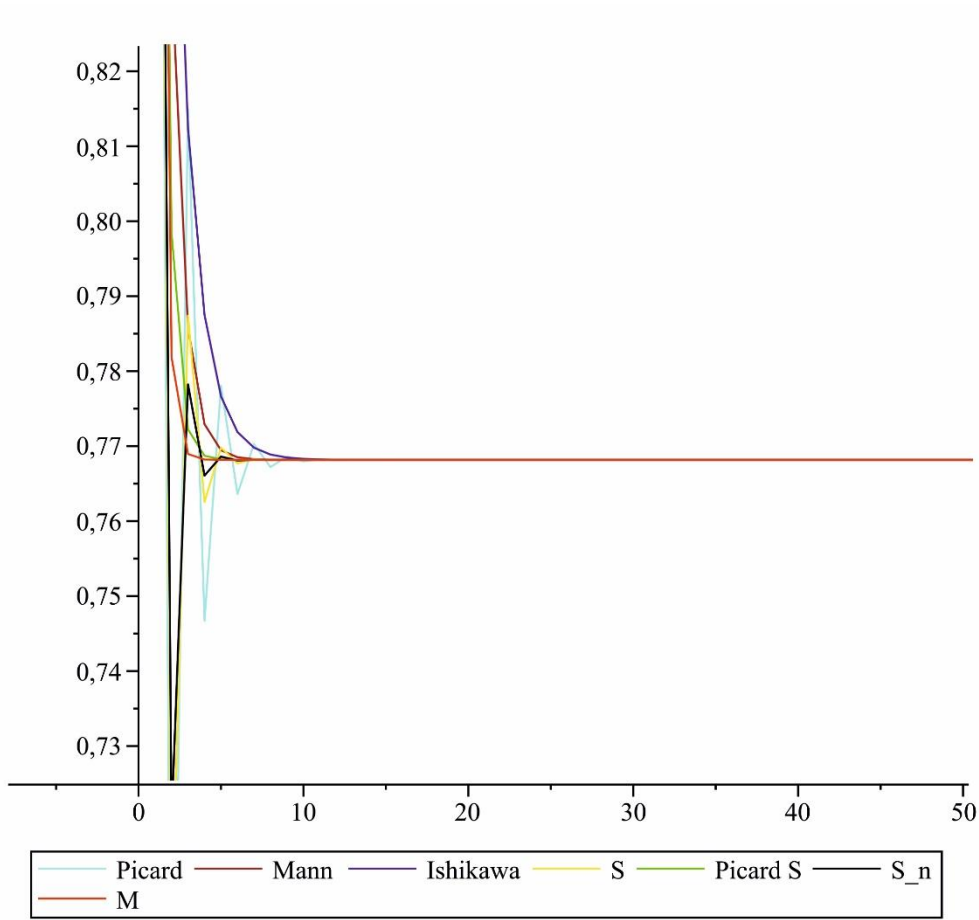
Bu durumda  $T$  nin sabit noktasının  $p = 0.7681691568 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S,  $S_n$  ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.1. de verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Grafik 4.1. de yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.1.** Örnek 4.1.3 ün Nümerik Değerleri

	Picard	Mann	Ishikawa	S	Picard S	$S_n$	M
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.6663667454	0.8331833727	0.8692086522	0.7023920249	0.7984708592	0.7198745702	0.7818814397
3	0.8149612096	0.7858003386	0.8123617455	0.7874065972	0.7722438677	0.7782326757	0.7689539250
4	0.7467069000	0.7729300989	0.7875142686	0.7625499169	0.7687175983	0.7660732993	0.7682140443
5	0.7780594582	0.7694538132	0.7766392722	0.7698121615	0.7682429806	0.7686056834	0.7681717241
6	0.7636177375	0.7685157414	0.7718779897	0.7676888737	0.7681790940	0.7680782384	0.7681693036
7	0.7702653454	0.7682626571	0.7697931937	0.7683095634	0.7681704944	0.7681880930	0.7681691652
8	0.7672040628	0.7681943807	0.7688803027	0.7681281109	0.7681693369	0.7681652127	0.7681691572
9	0.7686135612	0.7681759615	0.7684805602	0.7681811560	0.7681691810	0.7681699781	0.7681691568
10	0.7679645330	0.7681709925	0.7683055173	0.7681656489	0.7681691600	0.7681689857	
11	0.7682633778	0.7681696519	0.7682288677	0.7681701822	0.7681691571	0.7681691924	
12	0.7681257724	0.7681692904	0.7681953036	0.7681688569	0.7681691568	0.7681691494	
13	0.7681891333	0.7681691928	0.7681806062	0.7681692444		0.7681691582	
14	0.7681599584	0.7681691664	0.7681741703	0.7681691312		0.7681691565	
15	0.7681733922	0.7681691594	0.7681713522	0.7681691642		0.7681691568	
16	0.7681672065	0.7681691575	0.7681701181	0.7681691546			
17	0.7681700547	0.7681691570	0.7681695777	0.7681691573			
18	0.7681687433	0.7681691568	0.7681693410	0.7681691566			
19	0.7681693471		0.7681692374	0.7681691568			
20	0.7681690691		0.7681691921				
21	0.7681691971		0.7681691722				
22	0.7681691381		0.7681691635				
23	0.7681691653		0.7681691598				
24	0.7681691528		0.7681691581				
25	0.7681691585		0.7681691573				
26	0.7681691559		0.7681691570				
27	0.7681691571		0.7681691569				
28	0.7681691566		0.7681691568				
29	0.7681691568						
30	0.7681691567						
31	0.7681691568						
32	0.7681691567						
33	...						



Şekil 4.1. Örnek 4.1.3 ün Grafiği

**Örnek 4.1.4.**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$T: D \rightarrow D$  tanımlı bir dönüşüm ve  $\forall x \in D$  için  $T(x) = e^{\frac{4}{4+x^2}}$  olsun.

$\alpha = \beta = \gamma = 0.1$  seçelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.1$  seçelim.

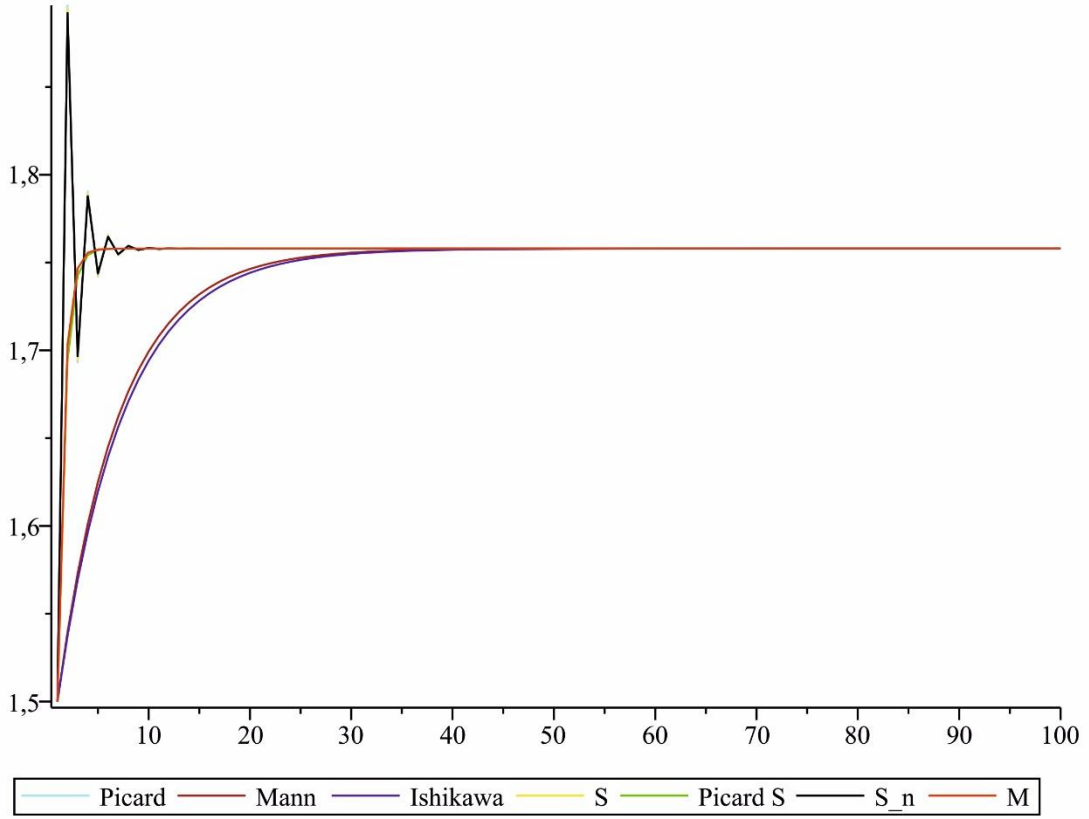
Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 1.757944871 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1.5$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S,  $S_n$  ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.2 de verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.2 de yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.2.** Örnek 4.1.4 ün Nümerik Değerleri

	Picard	Mann	Ishikawa	S	Picard S	S_n	M
1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2	1.896480879	1.539648088	1.537365787	1.894198578	1.694095457	1.892122150	1.703323017
3	1.693078718	1.573049066	1.569222549	1.694994211	1.742569058	1.696701170	1.746627190
4	1.790575528	1.601230287	1.596408092	1.789106492	1.754272097	1.787819073	1.755612676
5	1.742081387	1.625038210	1.619626087	1.743010895	1.757069342	1.743813981	1.757464848
6	1.765789615	1.645173450	1.639469263	1.765216739	1.757736261	1.764729410	1.757846094
7	1.754097680	1.662218246	1.656438177	1.754430959	1.757895173	1.754710442	1.757924547
8	1.759839365	1.676658144	1.670956490	1.759649197	1.757933031	1.759492078	1.757940689
9	1.757013835	1.688899271	1.683383476	1.757119722	1.757942050	1.757205954	1.757944011
10	1.758402878	1.699282188	1.694024313	1.758344716	1.757944199	1.758298039	1.757944695
11	1.757719673	1.708093101	1.703138607	1.757751199	1.757944711	1.757776137	1.757944835
12	1.758055626	1.715572984	1.710947467	1.758038699	1.757944833	1.758025502	1.757944864
13	1.757890407	1.721925044	1.717639418	1.757899419	1.757944862	1.757906344	1.757944870
14	1.757971656	1.727320871	1.723375350	1.757966891	1.757944869	1.757963281	1.757944871
15	1.757931699	1.731905521	1.728292674	1.757934205	1.757944871	1.757936076	
16	1.757951349	1.735801740	1.732508833	1.757950038		1.757949075	
17	1.757941686	1.739113477	1.736124256	1.757942369		1.757942863	
18	1.757946438	1.741928827	1.739224868	1.757946084		1.757945831	
19	1.757944101	1.744322492	1.741884220	1.757944284		1.757944412	
20	1.757945250	1.746357849	1.744165287	1.757945156		1.757945091	
21	1.757944685	1.748088689	1.746122011	1.757944733		1.757944766	
22	1.757944963	1.749560685	1.747800607	1.757944938		1.757944923	
23	1.757944826	1.750812628	1.749240679	1.757944838		1.757944846	
24	1.757944894	1.751877474	1.750476174	1.757944888		1.757944884	
25	1.757944860	1.752783227	1.751536192	1.757944863		1.757944865	
26	1.757944877	1.753553686	1.752445684	1.757944876		1.757944875	
27	1.757944868	1.754209083	1.753226047	1.757944869		1.757944869	
28	1.757944873	1.754766618	1.753895629	1.757944873		1.757944873	
29	1.757944871	1.755240915	1.754470169	1.757944871		1.757944871	
30		1.755644410	1.754963165				
31		1.755987678	1.755386196				
32		1.756279712	1.755749197				
33		1.756528164	1.756060690				
34		1.756739539	1.756327986				
35		1.756919372	1.756557357				
36		1.757072371	1.756754186				
37		1.757202541	1.756923090				
38		1.757313289	1.757068033				
39		1.757407513	1.757192414				
40		1.757487680	1.757299150				
41		1.757555886	1.757390745				
42		1.757613916	1.757469346				
43		1.757663288	1.757536797				
44		1.757705295	1.757594680				
45		1.757741036	1.757644353				
46		1.757771444	1.757686980				
...		...	...				
109		1.757944866	1.757944854				
110		1.757944866	1.757944857				
111			1.757944859				
112			1.757944861				
113			1.757944862				
114			1.757944864				
115			1.757944865				
116			1.757944865				



**Şekil 4.2.** Örnek 4.1.4 ün Grafiği

**Örnek 4.1.5 :**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$T: D \rightarrow D$  tanımlı bir dönüşüm ve  $\forall x \in D$  için  $T(x) = \sqrt{9 - \ln(x^2 + 4)}$  olsun.

$\alpha = \beta = \gamma = 0.3$  seçelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.4$  seçelim.

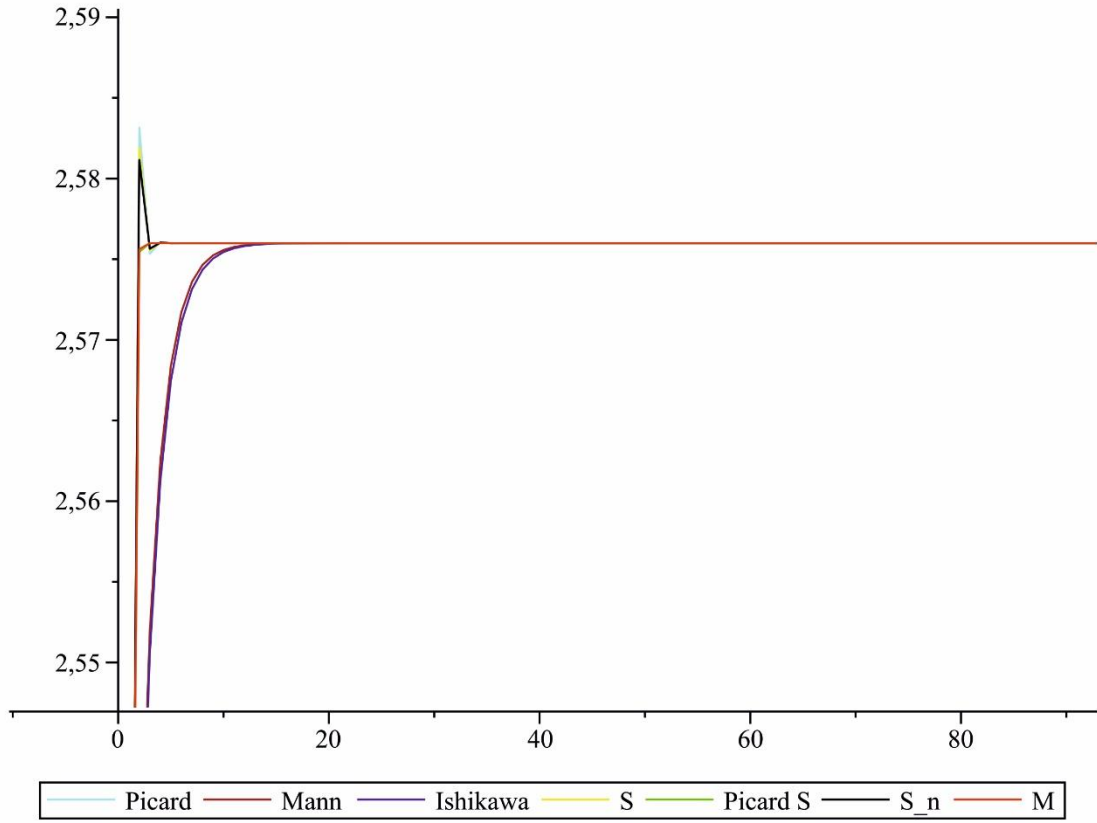
Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 2.576000104 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n), (\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 2.5$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S,  $S_n$  ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.3 te verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.3 te yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.3.** Örnek 4.1.5 in Nümerik Değerleri

1	Picard 2.5	Mann 2.5	Ishikawa 2.5	S 2.5	Picard S 2.5	S_n 2.5	M 2.5
2	2.583161298	2.533264519	2.532009280	2.581906059	2.575444911	2.581152517	2.575621889
3	2.575326937	2.551967991	2.550536654	2.575542083	2.575996055	2.575651379	2.575998224
4	2.576063398	2.562485298	2.561260810	2.576035630	2.576000075	2.576023710	2.576000095
5	2.575994153	2.568399701	2.567468345	2.575997348	2.576000104	2.575998506	2.576000104
6	2.576000664	2.571725770	2.571061526	2.576000318		2.576000213	
7	2.576000052	2.573596277	2.573141421	2.576000087		2.576000097	
8	2.576000109	2.574648220	2.574345361	2.576000106		2.576000105	
9	2.576000104	2.575239819	2.575042259	2.576000104			
10		2.575572527	2.575445656				
11		2.575759639	2.575679163				
12		2.575864868	2.575814328				
13		2.575924049	2.575892568				
14		2.575957331	2.575937857				
15		2.575976049	2.575964072				
16		2.575986575	2.575979247				
17		2.575992495	2.575988031				
18		2.575995825	2.575993116				
19		2.575997698	2.575996060				
20		2.575998751	2.575997763				
21		2.575999344	2.575998749				
22		2.575999676	2.575999319				
23		2.575999864	2.575999649				
24		2.575999969	2.575999840				
25		2.576000028	2.575999951				
26		2.576000061	2.576000016				
27		2.576000080	2.576000054				
28		2.576000091	2.576000075				
29		2.576000097	2.576000087				
30		2.576000100	2.576000094				
31		2.576000102	2.576000098				
32		2.576000103	2.576000101				
33		2.576000104	2.576000103				
34			2.576000104				



**Şekil 4.3.** Örnek 4.1.5 in Grafiği

**Örnek 4.1.6 :**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$$T: D \rightarrow D \text{ tanımlı bir dönüşüm ve } \forall x \in D \text{ için } T(x) = \left( \frac{x+3}{\ln(x^2+9)} \right)^{\frac{1}{6}} \text{ olsun.}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.18 \text{ seçelim. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.6 \text{ seçelim.}$$

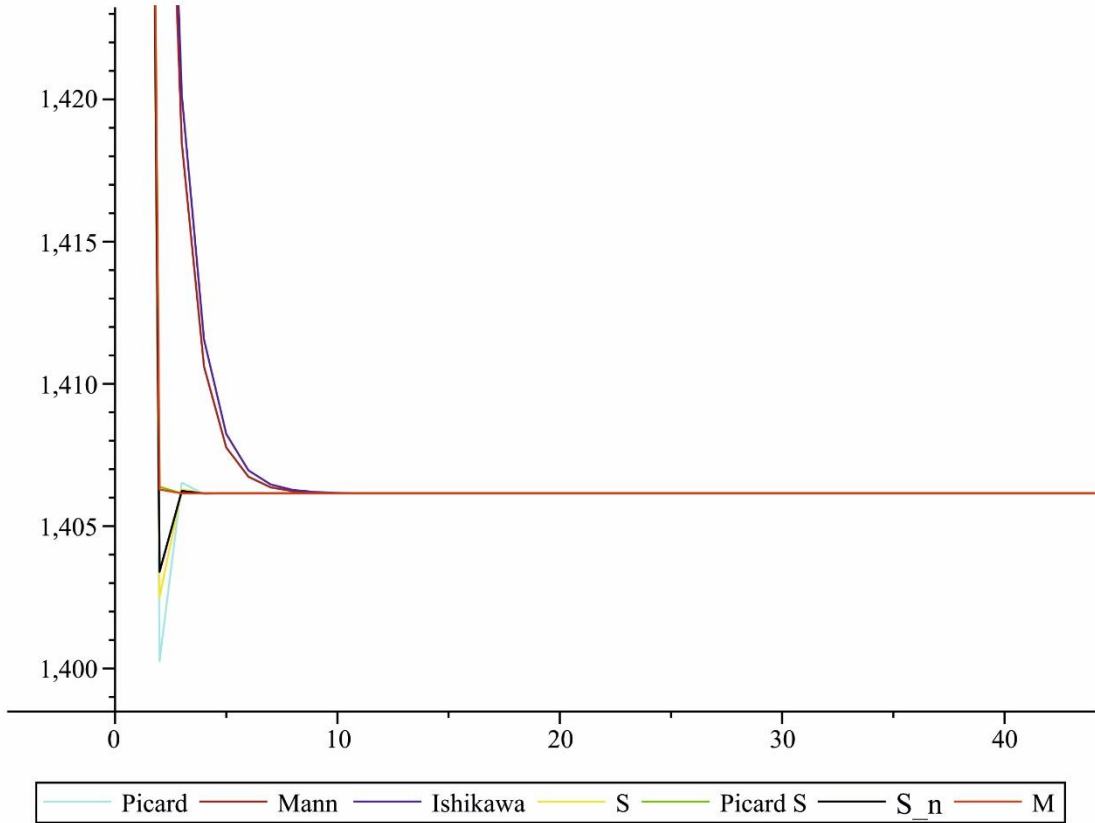
Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 1.406289435 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1.5$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S, Sn ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.4 te verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.4 te yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.4.** Örnek 4.1.6 nın Nümerik Değerleri

	Picard	Mann	Ishikawa	S	Picard S	S_n	M
1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2	1.400267336	1.440160402	1.442399813	1.402506748	1.406384496	1.403399007	1.406289435
3	1.406527162	1.418463974	1.420151421	1.406295619	1.406153014	1.406233718	
4	1.406128596	1.410607935	1.411558779	1.406146814	1.406152436	1.406150036	
5	1.406153952	1.407764669	1.408240316	1.406152655	1.406152435	1.406152506	
6	1.406152338	1.406735800	1.406958752	1.406152426		1.406152433	
7	1.406152441	1.406363514	1.406463825	1.406152435		1.406152435	
8	1.406152434	1.406228809	1.406272690				
9	1.406152435	1.406180069	1.406198876				
10		1.406162434	1.406170370				
11		1.406156052	1.406159361				
12		1.406153744	1.406155109				
13		1.406152908	1.406153467				
14		1.406152606	1.406152833				
15		1.406152497	1.406152589				
16		1.406152457	1.406152494				
17		1.406152443	1.406152457				
18		1.406152438	1.406152443				
19		1.406152436	1.406152438				
20		1.406152435	1.406152436				
21			1.406152435				



**Şekil 4.4** Örnek 4.1.6 nın Grafiği

**Örnek 4.1.7.:**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$T: D \rightarrow D$  tanımlı bir dönüşüm ve  $\forall x \in D$  için  $T(x) = \ln(x^2 + 2)$  olsun.

$\alpha = \beta = \gamma = 0.35$  seçelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.8$  seçelim.

Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 1.319073676 \in D$  olduğu açıktır.

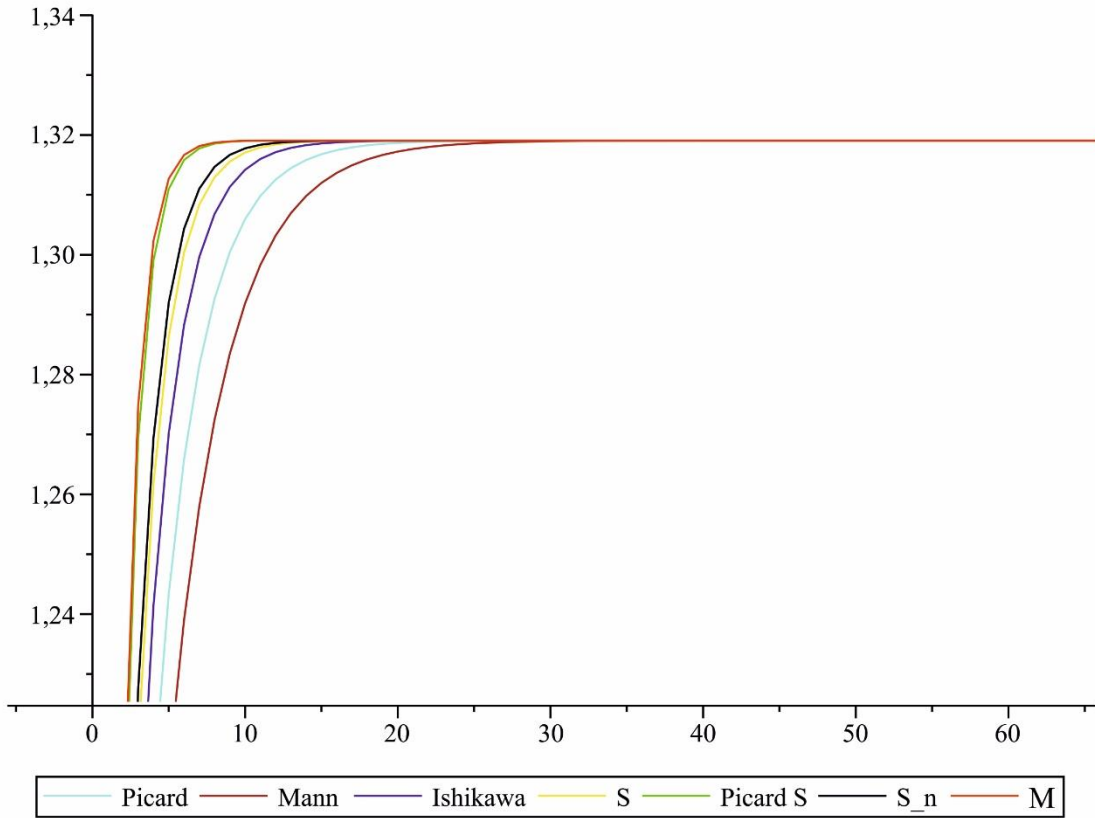
Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S, S<sub>n</sub> ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.5 te verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.5 te yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.5.** Örnek 4.1.7 nin Nümerik Değerleri

	Picard	Mann	Ishikawa	S	Picard S	S_n	M
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.098612289	1.078889831	1.121470466	1.141192923	1.194625642	1.149690283	1.201990130
3	1.165320006	1.137248432	1.195468747	1.218348146	1.269275328	1.227604588	1.274928595
4	1.211336838	1.180970026	1.241414852	1.261706437	1.299026338	1.269384518	1.302330091
5	1.243386845	1.213964010	1.270177211	1.286319291	1.310988125	1.292014895	1.312711942
6	1.265823266	1.238971033	1.288252248	1.300350097	1.315810405	1.304322086	1.316655085
7	1.281574901	1.257975985	1.299633544	1.308364156	1.317756305	1.311027176	1.318153981
8	1.292652202	1.272444701	1.306807688	1.312946072	1.318541804	1.314683345	1.318723924
9	1.300450407	1.283472671	1.311332637	1.315567062	1.318858931	1.316677869	1.318940665
10	1.305943823	1.291884728	1.314187683	1.317066766	1.318986971	1.317766179	1.319023092
11	1.309815306	1.298304881	1.315989485	1.317925015	1.319038668	1.318360087	1.319054439
12	1.312544515	1.303206681	1.317126741	1.318416216	1.319059542	1.318684212	1.319066361
13	1.314468849	1.306950248	1.317844610	1.318697358	1.319067970	1.318861112	1.319070894
14	1.315825854	1.309809832	1.318297773	1.318858277	1.319071373	1.318957660	1.319072619
15	1.316782876	1.311994491	1.318583847	1.318950384	1.319072747	1.319010356	1.319073275
16	1.317457855	1.313663705	1.318764443	1.319003105	1.319073302	1.319039116	1.319073524
17	1.317933932	1.314939191	1.318878455	1.319033282	1.319073525	1.319054813	1.319073619
18	1.318269730	1.315913880	1.318950431	1.319050555	1.319073616	1.319063382	1.319073655
19	1.318506588	1.316658743	1.318995869	1.319060442	1.319073652	1.319068058	1.319073669
20	1.318673661	1.317227991	1.319024556	1.319066101	1.319073666	1.319070610	1.319073674
21	1.318791510	1.317663040	1.319042666	1.319069341	1.319073673	1.319072002	1.319073676
22	1.318874639	1.317995534	1.319054099	1.319071195	1.319073676	1.319072761	
23	1.318933277	1.318249653	1.319061318	1.319072256		1.319073177	
24	1.318974640	1.318443873	1.319065875	1.319072864		1.319073404	
25	1.319003817	1.318592313	1.319068752	1.319073212		1.319073528	
26	1.319024398	1.318705766	1.319070567	1.319073411		1.319073596	
27	1.319038916	1.318792479	1.319071713	1.319073524		1.319073632	
28	1.319049157	1.318858754	1.319072438	1.319073590		1.319073652	
29	1.319056381	1.318909409	1.319072895	1.319073627		1.319073662	
30	1.319061476	1.318948125	1.319073183	1.319073648		1.319073669	
31	1.319065070	1.318977715	1.319073365	1.319073661		1.319073673	
32	1.319067606	1.319000332	1.319073480	1.319073668		1.319073675	
33	1.319069394	1.319017618	1.319073552	1.319073672		1.319073676	
34	1.319070656	1.319030830	1.319073597	1.319073673			
35	1.319071546	1.319040928	1.319073625	1.319073675			
36	1.319072174	1.319048647	1.319073644	1.319073676			
37	1.319072617	1.319054546	1.319073656				
38	1.319072929	1.319059055	1.319073664				
39	1.319073149	1.319062501	1.319073669				
40	1.319073304	1.319065135	1.319073672				

41	1.319073414	1.319067148
42	1.319073492	1.319068687
43	1.319073546	1.319069863
44	1.319073585	1.319070762
45	1.319073612	1.319071449
46	1.319073631	1.319071974
47	1.319073645	1.319072376
48	1.319073654	1.319072682
49	1.319073661	1.319072916
50	1.319073666	1.319073095
51	1.319073669	1.319073232
52	1.319073671	1.319073336
53	1.319073673	1.319073416
54	1.319073674	1.319073477
55	1.319073675	1.319073524
56	1.319073676	1.319073560
	...	
65		1.319073667
66		1.319073669
67		1.319073671
68		1.319073672



Şekil 4.5 Örnek 4.1.7 nin Grafiği

**Örnek 4.1.8.:**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$T: D \rightarrow D$  tanımlı bir dönüşüm ve  $\forall x \in D$  için  $T(x) = \sin(\ln(x + 7))$  olsun.

$\alpha = \beta = \gamma = 0.05$  seçelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.7$  seçelim.

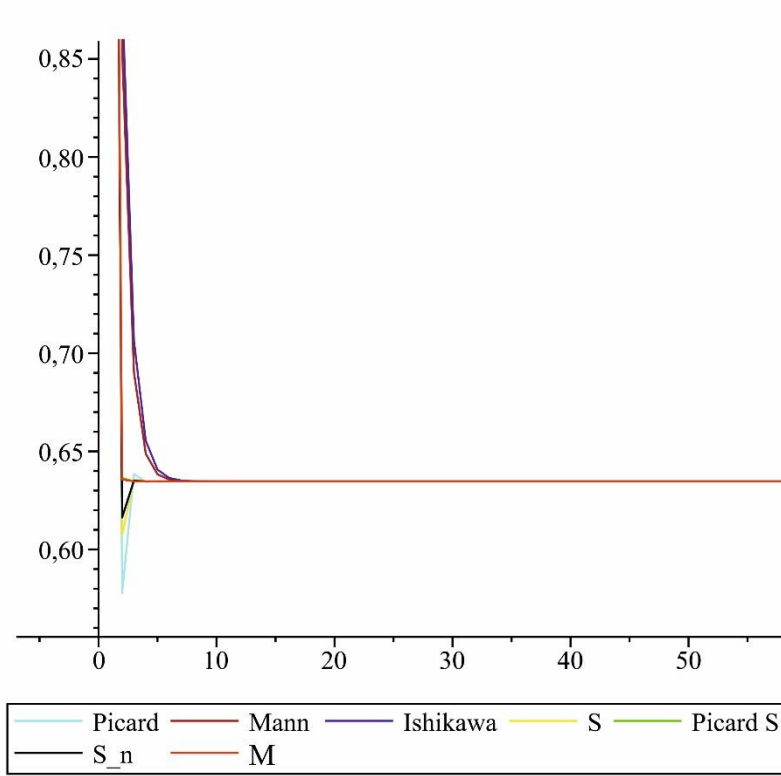
Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 0.6346857989 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1.5$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S, Sn ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.6 da verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.6 da yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.6** Örnek 4.1.8 in Nümerik Değerleri

	Picard	Mann	Ishikawa	S	Picard S	S_n	M
1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2	0.5776640069	0.8543648048	0.8840844724	0.6073836745	0.6364995713	0.6162820301	0.6356533161
3	0.6384747951	0.6903939138	0.7065662368	0.6355517308	0.6346896195	0.6350778140	0.6346868808
4	0.6344341428	0.6488092817	0.6554027479	0.6346583388	0.6346858074	0.6346774493	0.6346858005
5	0.6347025146	0.6382662631	0.6406567077	0.6346866703	0.6346857989	0.6346859774	0.6346857989
6	0.6346846892	0.6355934744	0.6364066959	0.6346857714		0.6346857956	
7	0.6346858731	0.6349159010	0.6351817852	0.6346858002		0.6346857989	
8	0.6346857943	0.6347441313	0.6348287494	0.6346857989			
9	0.6346857997	0.6347005869	0.6347269996				
10	0.6346857989	0.6346895478	0.6346976739				
11		0.6346867494	0.6346892218				
12		0.6346860402	0.6346867857				
13		0.6346858605	0.6346860836				
14		0.6346858148	0.6346858811				
15		0.6346858031	0.6346858230				
16		0.6346858001	0.6346858056				
17		0.6346857992	0.6346858009				
18		0.6346857990	0.6346857995				
19		0.6346857989	0.6346857990				
20			0.6346857989				



Şekil 4.6 Örnek 4.1.8 in Grafiği

**Örnek 4.1.9.:**  $D = [0,5]$ ,  $\mathbb{R}$  normlu uzayının bir alt kümesi olmak üzere

$T: D \rightarrow D$  tanımlı bir dönüşüm ve  $\forall x \in D$  için  $T(x) = \cos\left(\frac{1}{x^3-8}\right)$  olsun.

$\alpha = \beta = \gamma = 0.05$  seçelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0.35$  seçelim.

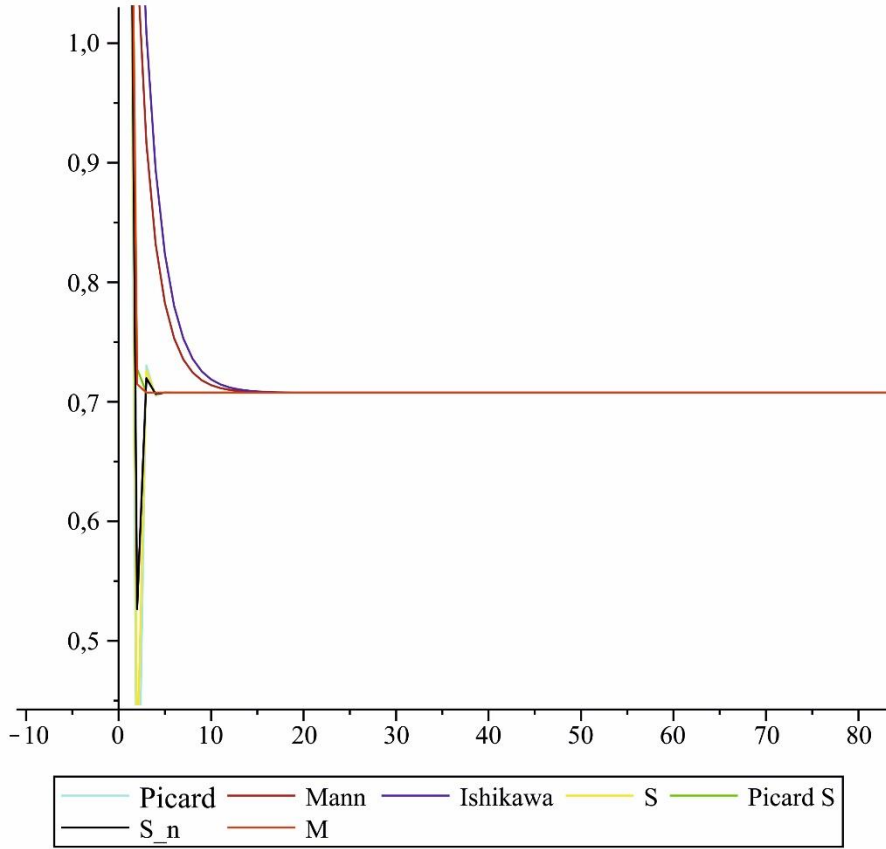
Bu durumda  $T$ 'nin sabit noktasının  $p = 0.7075657287 \in D$  olduğu açıktır.

Ayrıca  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  ve  $(\gamma_n)$  dizileri ve  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  parametreleri Teorem 4.1.2 nin koşullarını sağlar.

Rastgele bir başlangıç noktası  $x_0 = 1.5$  için, Picard, Mann, Ishikawa, S, Picard-S,  $S_n$  ve M iterasyonlarının değerleri Tablo 4.7 de verilmiştir. Dolayısıyla, M-iterasyon sürecinin diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı açıktır. Şekil 4.7 de yakınsama davranışlarını göstermek için bu yinelemelerin grafikleri verilmiştir.

**Tablo 4.7** Örnek 4.1.9 un Nümerik Değerleri

1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2	0.2701020601	1.069535721	1.196541289	0.3971076284	0.7276427593	0.5265289075	0.7147330621
3	0.7304252635	0.9167395079	1.008736678	0.7259701506	0.7077772138	0.7196610394	0.7076180745
4	0.7049775011	0.8321063527	0.8942348047	0.7057846988	0.7075678978	0.7065273547	0.7075661086
5	0.7078464491	0.7826479415	0.8237604371	0.7077329421	0.7075657507	0.7076533721	0.7075657312
6	0.7075351339	0.7531180694	0.7800811927	0.7075499836	0.7075657287	0.7075583201	0.7075657287
7	0.7075690612	0.7352988765	0.7528932085	0.7075672107		0.7075663548	
8	0.7075653653	0.7244841655	0.7359261770	0.7075655891		0.7075656757	
9	0.7075657681	0.7178989671	0.7253208707	0.7075657419		0.7075657329	
10	0.7075657244	0.7138814238	0.7186855099	0.7075657273		0.7075657283	
11	0.7075657291	0.7114275502	0.7145314902	0.7075657287		0.7075657287	
12	0.7075657287	0.7099277092	0.7119299176				
13		0.7090106005	0.7103002266				
14		0.7084496717	0.7092791973				
15		0.7081065389	0.7086394460				
16		0.7078966169	0.7082385711				
17		0.7077681830	0.7079873696				
18		0.7076896023	0.7078299549				
19		0.7076415226	0.7077313100				
20		0.7076121045	0.7076694930				
21		0.7075941046	0.7076307545				
22		0.7075830911	0.7076064784				
23		0.7075763523	0.7075912653				
24		0.7075722289	0.7075817316				
25		0.7075697060	0.7075757572				
26		0.7075681623	0.7075720132				
27		0.7075672177	0.7075696670				
28		0.7075666397	0.7075681968				
29		0.7075662861	0.7075672754				
30		0.7075660697	0.7075666980				
31		0.7075659373	0.7075663360				
32		0.7075658562	0.7075661092				
33		0.7075658066	0.7075659671				
34		0.7075657764	0.7075658780				
35		0.7075657578	0.7075658222				
36		0.7075657465	0.7075657872				
37		0.7075657395	0.7075657654				
38		0.7075657353	0.7075657516				
39		0.7075657326	0.7075657429				
40		0.7075657311	0.7075657375				
41		0.7075657301	0.7075657341				
42		0.7075657295	0.7075657321				
43		0.7075657291	0.7075657308				
44		0.7075657289	0.7075657299				
45		0.7075657288	0.7075657293				
46		0.7075657287	0.7075657290				
47			0.7075657288				
48			0.7075657287				



Şekil 4.7 Örnek 4.1.9 un Grafiği

#### 4.2.Kapalı Aralıkta Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, keyfi bir kapalı aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar için sabit nokta ile ilgili yakınsama teoremleri verilmiştir. İlk olarak bu alandaki çalışma (Cholamjiak ve Baiya, 2016: 505) tarafından aşağıda (4.7) ile tanımlanan üç adımlı iterasyon kullanılarak elde edilmiştir.

$p_1 \in E$  ve

$$\begin{cases} r_n = (1 - a_n)p_n + a_nT(p_n) \\ q_n = (1 - b_n - c_n)r_n + b_nT(r_n) + c_nT(p_n) \\ p_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)q_n + \alpha_nT(q_n) + \beta_nT(r_n) \end{cases} \quad (4.7)$$

$\forall n \geq 1$  için, burada  $0 \leq b_n + c_n < 1$  ve  $0 \leq \alpha_n + \beta_n < 1$  ile  $(\alpha_n), (\beta_n), (a_n), (b_n)$  ve  $(c_n)$   $[0, 1)$  de dizilerdir.

Öte yandan 2014 yılında Karaca ve Yıldırım (Karaca ve Yıldırım, 2015: 257) yeni bir iterasyonu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:  $u_1 \in E$  ve  $(u_n)$  dizisi şöyle tanımlansın

$$\begin{cases} w_n = (1 - a_n)u_n + a_nT(u_n) \\ u_n = (1 - b_n)w_n + b_nT(w_n) \\ u_{n+1} = T(v_n) \end{cases} \quad (4.8)$$

burada  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri  $(0,1)$  aralığındadır. (4.8) iterasyon sürecinin Picard (Picard, 1890: 145), Mann (Mann, 1953: 506), Ishikawa (Ishikawa, 1974: 147) ve Agarwal ve ark. (Agarwal vd., 2007: 61) iterasyon süreçlerinin tümünden daha hızlı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Banach uzayında genişlemeyen dönüşümler için bir yakınsama teoremi kanıtlamışlardır.

Bu çalışmada Karaca ve Yıldırım'ın tanımladığı (4.8) iterasyonu kullanılarak, kapalı aralıkta tanımlı Berinde dönüşüm sınıfına ait fonksiyonlar için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

**Teorem 4.2.1.**  $E$  reel sayılar üzerinde kapalı bir aralık olsun ve  $T: E \rightarrow E$  sürekli bir dönüşüm olsun.  $x_1 \in E$  için,  $(u_n)$  dizisi (4.8) ile tanımlansın, burada  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$   $[0,1]$  de dizilerdir öyle ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} |T(u_n) - v_n| = 0$ . O halde  $\{u_n\}$  sınırlıdır ancak ve ancak  $(u_n)$   $T$  nin sabit noktasına yakınsar.

**İspat.** Eğer  $(u_n)$   $T$  nin bir sabit noktasına yakınsarsa, o zaman  $(u_n)$  in sınırlı olduğu açıktır.  $(u_n)$  in sınırlı olduğu varsayıldığında amaç,  $(u_n)$  in yakınsak olduğunu göstermektir. Olmadığı varsayalım. O halde

$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ ,  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$  ve  $a < b$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}$  vardır. İlk olarak, eğer  $a < m < b$  ise  $T(m) = m$  olduğu gösterilecektir.  $T(m) \neq m$  olduğu kabul edilsin. O zaman, genelliği kaybetmeden,  $T(m) - m > 0$  olduğu varsayalım.  $T$  sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$|x - m| \leq \delta \text{ için } T(x) - x > 0 \quad (4.9)$$

olacak şekilde bir  $\delta \in (0, b - a)$  vardır.

$(u_n)$  dizisi hipotezden dolayı kapalı bir aralıkta yer alır.  $T$  nin sürekliliği,  $(T(u_n))$  in başka bir sınırlı kapalı aralığa ait olduğunu gösterir. Yani  $(T(u_n))$  sınırlıdır ve

$$w_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_nT(u_n)$$

olduğundan  $(w_n)$  sınırlıdır ve böylece  $(T(w_n))$  sınırlıdır.

Benzer şekilde

$$v_n = (1 - \alpha_n)w_n + \alpha_nT(w_n)$$

olduğundan  $(v_n)$  ve  $(T(v_n))$ sınırlıdır. (4.8) takip edilirse

$$u_{n+1} - u_n = T(v_n) - v_n + \alpha_n(T(w_n) - w_n) + \beta_n(T(u_n) - u_n)$$

$$v_n - u_n = \beta_n(T(u_n) - u_n) + \alpha_n(T(w) - w_n)$$

$$w_n - u_n = \beta_n(T(u_n) - u_n)$$

Teorem 4.2.1 in varsayımıyla,  $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$ ,  $|v_n - u_n| \rightarrow 0$  ve  $|w_n - u_n| \rightarrow 0$  alınır.

Böylece  $\forall n > N$  için

$$|u_{n+1} - u_n| < \frac{\delta}{3}, |v_n - u_n| < \frac{\delta}{3} \text{ ve } |w_n - u_n| < \frac{\delta}{3} \quad (4.10)$$

olacak şekilde bir  $N$  sayısı vardır.

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n > m$$

olduğundan  $u_{n_k} > m$  olacak şekilde  $k_1 > N$  vardır.  $k = n_{k_1}$  olsun, bu durumda  $u_k > m$  olur.

$u_k$  için sadece 2 durum vardır:

**Durum 1:**  $u_k \geq m + \frac{\delta}{3}$ , (4.10) dan

$$u_{k+1} - u_k > -\frac{\delta}{3}, u_{k+1} > u_k - \frac{\delta}{3} \geq m \text{ ve } u_{k+1} \geq m.$$

**Durum 2:**  $m < u_k < m + \frac{\delta}{3}$ , (4.10)'dan

$$m - \frac{\delta}{3} < v_k < m + \frac{2\delta}{3} \text{ ve } m - \frac{\delta}{3} < w_k < m + \frac{2\delta}{3}.$$

Böylece

$$|u_k - m| < \frac{\delta}{3}, |v_k - m| < \frac{2\delta}{3} \text{ ve } |w_k - m| < \frac{2\delta}{3}$$

olur. (4.9) kullanılırsa

$$T(u_k) - u_k > 0, T(v_k) - v_k > 0, T(w_k) - w_k > 0$$

olur. (4.8) iterasyonundan

$$u_{k+1} = u_k + T(v_k) - v_k + \alpha_k(T(w_k) - w_k) + \beta_k(T(u_k) - u_k) \text{ dir.}$$

Durum 1 ve Durum 2'den  $u_{k+1} \geq m$  olduğuna ulaşabiliriz. Yukarıdaki argümanı kullanarak,  $u_{k+2} > u_{k+3} > u_{k+4} > m \dots$  elde ederiz. Böylece,  $\forall n = k = n_{k_1}$  için  $u_n > m$  dir.  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq m$  ile  $a < m$  bir çelişki oluşturur. Böylece  $T(m) = m$  olur.  $(u_n)$  dizisi için aşağıdaki iki durumu ele alıyoruz:

**Durum 1'** :  $a < u_m < b$  olacak şekilde  $u_m$  vardır. O halde  $T(u_m) = u_m$  olur. Böylece

$$w_m = (1 - \beta_m)u_m + \beta_m T(u_m) = u_m$$

$$v_m = (1 - \alpha_m)u_m + \alpha_m T(w_m) = u_m$$

$$u_{m+1} = f(v_m) = T(u_m) = u_m$$

Tümevarım metodundan  $u_m = u_{m+1} = u_{m+2} = u_{m+3} = \dots$  elde ederiz. Böylece  $u_n \rightarrow u_m$  olur. Bu da  $u_m = a$  ve  $u_n \rightarrow a$  varsayımımızla çelişir.

**Durum 2'**:  $\forall n$  için  $u_n \leq a$  ya da  $u_n \geq b$  eşitsizlikleri sağlanır. Çünkü  $b - a > 0$  ve  $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$  olmak üzere  $\forall n > N_0$  için  $|u_{n+1} - u_n| < \frac{b-a}{3}$  olacak şekilde bir  $N_0$  vardır.

Bu,  $\forall n > N_0$  için  $u_n \leq a$  ya da  $\forall n > N_0$  için  $u_n \geq b$  olduğu anlamına gelir.  $\forall n > N_0$  için  $u_n \leq a$  ise  $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a$  olup bu ise  $a < b$  ile çelişir. Dolayısıyla  $(u_n)$  yakınsaktır.

Son olarak,  $(u_n)$  in  $T$ 'nin bir sabit noktasına yakınsadığı gösterilecektir.  $u_n \rightarrow p$  ve  $T(p) \neq p$  olduğunu kabul edilsin.  $T$ 'nin sürekliliğinden  $(T(u_n))$  sınırlıdır.  $w_m = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n T(u_n)$  ve  $\beta_n \rightarrow 0$  olduğundan  $w_n \rightarrow p$  elde edilir. Benzer şekilde  $v_m = (1 - \alpha_n)w_n + \alpha_n T(w_n)$  ve  $\alpha_n \rightarrow 0$  olup  $v_n \rightarrow p$  bulunur.  $p_k = T(v_k) - u_k$  olsun.  $T$ 'nin sürekliliğinden  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (T(v_k) - u_k) = T(p) - p \neq 0$  elde edilir.  $w \neq 0$  olmak üzere  $w = T(p) - p$  yazarsak, (4.8) iterasyonundan  $u_{n+1} - u_n = T(v_n) - u_n$  buradan da  $p_k \rightarrow w \neq 0$  olduğundan

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \tag{4.11}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  serisinin ıraksak olduğunu biliyoruz, bu  $u_n \rightarrow p$  ile çelişir. Böylece  $T(p) = p$  olur. Yani  $(u_n)$ ,  $T$  nin bir sabit noktasına yakınsar.

### 4.3.Yakınsama Hızı

Bu bölümde, (4.7) ve (4.8) iterasyonlarının yakınsama oranı hakkında sonuçlar verilecektir. Bunun için bazı yararlı tanımlar ve lemmalar kullanılmıştır.

**Tanım 4.3.1.**  $E$  reel sayılar kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  tanımlı, sürekli bir dönüşüm olsun.  $(u_n)$  ve  $(x_n)$  dizileri  $T$  nin sabit  $p$  noktasına yakınsayan iki dizi olsun.  $\forall n \geq 1$  için

$$|u_n - p| \leq |x_n - p|$$

ise  $(u_n)$  dizisi  $(x_n)$  dizisinden daha hızlı yakınsar (Rohoades, 1976: 742).

**Lemma 4.3.2.** E reel sayılar kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  tanımlı, sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun.  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}, (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$  dizileri  $[0, 1)$  aralığında,  $0 \leq b_n + c_n < 1$  ve  $0 \leq \alpha_n + \beta_n < 1$ .  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tarafından tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Cholamjiyak ve Baiya, 2016: 505).

- i.  $T(x_1) < x_1$  ise  $\forall n \geq 1$  için  $T(x_n) < x_n$  ve  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  artmayandır.
- ii.  $T(x_1) > x_1$  ise  $\forall n \geq 1$  için  $T(x_n) > x_n$  ve  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  azalmayandır.

**Lemma 4.3.3.** E reel sayı kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun.  $(\alpha_n), (\beta_n), (a_n), (b_n)$  ve  $(c_n)$  dizileri  $[0, 1)$  de

$$0 \leq b_n + c_n < 1 \text{ ve } \alpha_n + \beta_n < 1$$

koşullarını sağlasın.  $(p_n)$ , (4.7) tarafından tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır

- (1)  $\forall n \geq 1$  için  $(p_n)$  artmayan bir dizi ve  $T(p_1) < p_1$  ise  $T(p_n) < p_n$
- (2)  $\forall n \geq 1$  için  $(p_n)$  azalmayan bir dizi ve  $T(p_1) > p_1$  ise  $T(p_n) > p_n$ .

**Lemma 4.3.4.** E reel sayı kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  tanımlı

sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun.  $(\alpha_n)$  ve  $(\beta_n)$ ,  $[0, 1)$  de diziler ve  $(u_n)$  dizisi (4.8) tarafından tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır

- (1)  $\forall n \geq 1$  için  $(u_n)$  artmayan bir dizi ve  $T(u_1) < u_1$  ise  $T(u_n) < u_n$
- (2)  $\forall n \geq 1$  için  $(u_n)$  azalmayan bir dizi ve  $T(u_1) > u_1$  ise  $T(u_n) > u_n$ .

**İspat. (1) :**  $T(u_1) < u_1$  olsun.  $(u_1) < w_1 \leq u_1$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $T(w_1) \leq T(u_1) < w_1$ . Diğer taraftan  $T(w_1) < v_1 \leq w_1$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $T(v_1) \leq T(w_1) \leq v_1$ .  $T(v_1) = u_2 \leq v_1$  ve  $T(u_2) \leq T(v_1) = u_2$ . Böylece  $T(u_2) < u_2$  elde edilir. Tümevarım ile  $\forall n \geq 1$  için  $T(u_n) < u_n$ . Buradan  $\forall n \geq 1$  için  $T(u_n) < w_n \leq u_n$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $\forall n \geq 1$  için  $T(w_n) \leq T(u_n) < w_n \leq u_n$ .  $T(w_n) < v_n \leq w_n$ .  $T(v_n) \leq T(w_n) \leq u_n$ . Böylece  $\forall n \geq 1$  için  $u_{n+1} \leq u_n$  yani  $(u_n)$  artmayandır.

**(2):** (1) deki benzer işlemleri yaparak istenen sonucu gösterebiliriz.

**Lemma 4.3.5.** E reel sayı kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  tanımlı

sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun.  $(\alpha_n), (\beta_n), (a_n), (b_n)$  ve  $(c_n)$ ,  $[0, 1)$  de diziler olsun.  $u_1 = p_1 \in E$  için  $(u_n)$  ve  $(p_n)$  sırasıyla (4.8) ve (4.7) tarafından tanımlanan diziler olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) \quad \forall n \geq 1 \text{ için } T(p_1) < p_1 \text{ ise } u_n \leq p_n$$

$$(2) \quad \forall n \geq 1 \text{ için } T(p_1) > p_1 \text{ ise } u_n \geq p_n$$

**İspat. (1) :**  $T(p_1) < p_1$  olsun.  $u_1 = p_1$  olduğundan  $T(u_1) < u_1$ . (4.8) iterasyonundan  $T(u_1) < w_1 \leq u_1$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $T(w_1) \leq T(u_1) < w_1 \leq u_1$ . Böylece  $T(w_1) < v_1 \leq w_1$ . (4.7) ve (4.8) iterasyonları kullanılarak aşağıdaki tahmin elde edilir:

$$w_1 - r_1 = (1 - a_1)(u_1 - p_1) + a_1(T(u_1) - T(p_1)) = 0$$

Bu yüzden  $w_1 = r_1$  ve ayrıca

$$v_1 - q_1 = (1 - b_1)(w_1 - r_1) + b_1(T(w_1) - T(r_1)) + c_1(r_1 - T(p_1)) \geq 0.$$

$T$  azalmayan olduğundan  $T(q_1) \leq T(v_1)$ . Diğer taraftan  $T(p_1) < p_1$ . (4.7) iterasyonundan  $T(p_1) < r_1 \leq p_1$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $T(r_1) \leq T(p_1) < r_1$ . (4.7) iterasyonundan  $T(r_1) \leq q_1 < r_1$ .  $T$  azalmayan olduğundan  $T(q_1) \leq T(r_1) < q_1$ . Ardından  $T(w_1) < v_1 < w_1$  eşitsizliğinde  $w_1 = r_1$  sonucunu kullanarak  $T(r_1) < v_1 < r_1$  elde edilir.  $T$  azalmayan olduğundan  $T(v_1) < T(r_1) < v_1$  ve buradan da  $T(v_1) < T(r_1) < q_1$  bulunur. Yukarıdaki argümanları kullanarak

$$u_2 - p_1 = T(v_1) - q_1 + \alpha_1(q_1 - T(q_1)) + \beta_1(q_1 - T(r_1)) \leq 0.$$

Böylece  $u_2 \leq p_2$ . Varsayalım ki  $u_k \leq p_k$  olsun. Buradan  $T(u_k) \leq T(p_k)$ . Lemma 4.3.2 (i) ve Lemma 4.3.3 (i) den  $T(p_k) < p_k$  ve  $T(u_k) < u_k$ . Ardından  $T(u_k) < w_k < u_k$  ve  $T(w_k) < T(u_k) < w_k$ . Buradan  $w_k - r_k = (1 - a_k)(u_k - p_k) + a_k(T(u_k) - T(p_k)) \leq 0$ .

Böylece  $w_k \leq r_k$ .  $T(w_k) \leq T(r_k)$ ,

$$v_k - q_k = (1 - b_k)(w_k - r_k) + b_k(T(w_k) - T(r_k)) + c_k(r_k - T(p_k)) \leq 0.$$

Böylece  $v_k \leq q_k$ ,  $T(v_k) \leq T(q_k)$ . Buradan

$$u_{k+1} - p_{k+1} = T(v_k) - q_k + \alpha_k(q_k - T(q_k)) + \beta_k(q_k - T(r_k)) \leq 0, u_{k+1} \leq p_{k+1}$$

elde edilir. Tümevarımla  $\forall n \geq 1$  için  $u_n \leq p_n$  sonucuna varılır.

**(2):** Lemma 4.3.2 (ii) ve Lemma 4.3.3 (ii) den, (i) deki kanıtlarla  $\forall n \geq 1$  için  $u_n \geq p_n$  olduğu kanıtlanır.

**Teorem 4.3.6.**  $E$  reel sayı kümesi üzerinde kapalı bir aralık ve  $T: E \rightarrow E$  tanımlı

sürekli ve azalmayan bir dönüşüm,  $F(T)$  boş olmayan ve sınırlı bir küme olsun.  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ ,  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  ve  $(c_n)$ ,  $[0, 1)$  de diziler olsun.  $u_1 = p_1 \in E$  için  $(u_n)$  ve  $(p_n)$  sırasıyla (4.8) ve

(4.7) tarafından tanımlanan diziler ve  $p \in F(T)$ ye yakınsak olsun. O halde (4.8) iterasyonu (4.7) iterasyonundan daha hızlıdır.

**İspat :**  $L = \inf\{p \in F: p = T(p)\}$  ve  $U = \sup\{p \in E: p = T(p)\}$  olmak üzere  $u_1$  için üç durum vardır;

**Durum 1 :**  $u_1 = p_1 > U$ .  $T(u_1) < u_1$  ve  $T(p_1) < p_1$  olduğu bilinmektedir. Lemma 4.3.4 (1) kullanılırsa,  $\forall n \geq 1$  için  $u_n \leq p_n$  bulunur.  $\forall n \geq 1$  için  $U \leq u_n$ .

$\forall n \geq 1$  için  $|u_n - p| \leq |x_n - p|$  olduğundan  $0 \leq u_n - p \leq p_n - p$  olur. (4.8) iterasyonunun (4.7) iterasyonundan daha hızlı olduğu görülür.

**Durum 2 :**  $u_1 = p_1 < U$ .  $T(u_1) > u_1$  ve  $T(p_1) > p_1$  olduğu bilinmektedir.

Lemma 4.3.4 (1) kullanılırsa,  $\forall n \geq 1$  için  $u_n \geq p_n$  bulunur.  $\forall n \geq 1$  için  $u_n \leq L$   $\forall n \geq 1$  için  $|u_n - p| \leq |x_n - p|$  olduğundan  $0 \leq u_n - p \leq p_n - p$  olur. (4.8) iterasyonunun (4.7) iterasyonundan daha hızlı olduğu görülür.

**Durum 3 :**  $L \leq u_1 = p_1 < U$ . Kabul edilsin ki  $T(u_1) \neq u_1$  olsun.  $T(u_1) < u_1$  ise Lemma 4.3.2 (1) den  $(u_n)$  azalmayıdır ve limiti  $p$  dir. Lemma 4.3.4 (1) den  $\forall n \geq 1$  için  $p \leq u_n \leq p_n$ . Buradan  $\forall n \geq 1$  için  $|u_n - p| \leq |p_n - p|$ . Buradan (4.8) iterasyonunun (4.7) iterasyonundan daha hızlı olduğuna ulaşılır.  $T(u_1) > u_1$  ise Lemma 4.3.2 (2) den azalmayıdır ve limiti  $p$ 'dir. Lemma 4.3.4 (2) den  $\forall n \geq 1$  için  $p \geq u_n \geq p_n$ . Buradan  $\forall n \geq 1$  için  $|u_n - p| \leq |p_n - p|$ . Buradan (4.8) iterasyonunun (4.7) iterasyonundan daha hızlı olduğuna ulaşılır.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde daraltan dönüşüm sınıfının bir genellemesi olan Berinde dönüşümleri için belirli iterasyonların arasında yakınsama hızları teorik olarak karşılaştırılmış ve teoremi desteklemek amacıyla, zayıf daralma koşulunu sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarına farklı iterasyonlarla kullanılarak Matlab programında sonuçlar nümerik tablolar grafiksel gösterimler ile desteklenmiştir. Bu konuyla ilgilenen araştırmacılar için kullanılan algoritmalar da tezde sunulmuştur.

Bunun yanında (Karaca ve Yıldırım, 2015) tarafından tanımlanan iterasyon ile kapalı aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktalarının varlığı üzerine bazı teoremler de derleme olarak sunulmuştur.

Tezde kullanılan yöntem ve metotlar yakınsama hızı karşılaştırmalarında kullanılabilir olacak önemli bir araç olduğundan yeni araştırmacılar için de önemli bir literatür kaynağı teşkil etmektedir.

## KAYNAKÇA

- Abbas M. & Nazir T.** (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, *Mathematički Vesnik*, 66 (2) 223- 234.
- Agarwal R. P., O'Regan D. And Sahu D. R.** (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *J. Nonlinear Convex Anal.* 8 (1) 61-79.
- Alagöz O., Gündüz B. ve Akbulut S.** (2019). Fixed Point Of Continuous Mappings Defined On An Arbitrary Interval, *Miskolc Mathematical Notes* HU e-ISSN 1787-2413 Vol. 20 No. 2, pp. 719–728 DOI: 10.18514/MMN.2019.2509
- Alagöz O., Gündüz B. ve Akbulut S.** (2018). Numerical Reckoning Fixed Points for Berinde Mappings via a Faster iteration Process, *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics* 33(2): 295-305.
- Argyros, I.** (2007). Computational Theory of Iterative Methods: *Elsevier Science*.
- Argyros, I.K. ve Hilout, S.** (2013). Computational Methods in Nonlinear Analysis: Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications: *World Scientific Publishing Company Incorporated*.
- Balcı M.,** (1998) Analiz 1, *Balcı Yayınları*, 38.
- Banach S.,** (1922) Sur les op'érations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, *Fund. Math.* 3 133–181.
- Berinde V.,** (2007) Iteravite Approximation of Fixed Points, *Lecture Notes in Math*, 113.
- Berinde V.,** (2004) Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, *Nonlinear Analysis Forum* 9, 43-54.
- Berinde V.,** (2004) Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, *Fixed Point Theory Appl*, 2., 97–105.
- Border, K.C.** (1989). Fixed point theorems with applications to economics and game theory, *Cambridge university press*, Cambridgei UK
- Bucur A.**( 2017). About Applications of the Fixed Point Theory, *Scientific Bulletin*, vol.22, no.1, pp.13-17. <https://doi.org/10.1515/bsaft-2017-0002>
- Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C.** (2011). Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74: 5286-5302.

- Chen M., Lu W., Chen Q., Ruchala K.J. ve Olivera, G.H.** (2008). A simple fixed-point approach to invert a deformation field, *Medical physics*, 35: 81.
- Cholamjiyak P. and Baiya S.** (2016). Convergence theorem convergence rate and convergence speed for continuous real functions. *Filomat*, vol. 30:2, pp. 505–513, doi: 10.2298/FIL1602505C.
- Gursoy F. and Karakaya V.** (2014). A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument, arXiv:1403.2546v2
- Ishikawa S.** Fixed points by a new iteration method. *Proc. Am. Math. Soc.* 44 (1974), 147-150.
- Karaca N. and Yıldırım İ.** (2013) On the Rate of Convergence of Mann Ishikawa Noor and SP iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval. *Fixed Point Theory and Applications*, 124
- Karaca N. and Yildirim I.**, “Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process.” *J. Adv. Math. Stud. Vol.*, vol. 8, pp. 257–264, 2015.
- Kılıç S. A. ve Erdem M.** (1982) “Fonksiyonel Analize Giriş” *Gazi Üniversitesi Yayın No:11*
- Kohlberg E., & Mertens J. F.** (1986). On the strategic stability of equilibrium points, *Econometrica*, 54, 1003-1037.
- Liu H., Zhang J. ve Cheng L.** (2010). Application examples of the network fixed point theory for space-air-ground integrated communication network, *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 18-20 Oct. 2010, Moscow.
- Mann W. R.** Mean value methods in iteration. *Proc. Am. Math. Soc.* 4 (1953), 506-510
- Musayev B., Alp M., Musafayev N. ve Ekinciöglü İ.** (2003) “Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz” *Tek Ağaç Eylül Kitap Yayın Dağıtım*, Ankara.
- Nasibov F. H. ve Kaçar A.** (2008), “Analize Giriş” *Palme Yayıncılık*, Ankara.
- Ok, E. A.** (2007). Real analysis with economic applications, *Princeton University Press*, Princeton.

**Picard E.** Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methodedes approximations successives. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 6 (1890), 145-210.

**Phuengrattana W. and Suantai S.**, (2011) On the Rate of Convergence of Mann Ishikawa Noor and SP iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval, *J. Math. Anal. Appl.*, 235: 3006–3014.

**Radde N.** (2010). "Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology", *Bioinformatics*, 26: 2874-2880.

**Rhoades B. E.**, Comments on two fixed point iteration methods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 56, pp. 741–750, 1976, doi: 10.1016/0022-247X(76)90038-X

**Schauder J.** 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionenrumen. *Studia Math.*, 2, 171-182.

**Sintunavarat W. and Pitea A.** On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9 (2016), 2553-2562.

**Soykan Y.** (2008) Fonksiyonel Analiz *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara.

**Şahin, A.** (2019). Some new results of M-iteration process in hyperbolic spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, 35(2), 221–232.

**Ullah K. and Arshad M.** Numarical Reckoning Fixed Points for Suzuki’s Generalized Nonexpansive Mappings via Iteration Process. *Filomat*, 32:1 (2018), 187-196.

**Wang, G.-Q. ve Cheng S.S.** (2009). Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks, *Applied Mathematical Modelling*, 33: 499- 506.

**Zamfirescu T.** (1972) Fix point theorems in metric spaces, *Arch. Math. (Basel)* 23, 292–298.