T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİYLE BAĞLANTILI İNTEGRAL EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELİN KAYNAR

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2025

10755334

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİYLE BAĞLANTILI İNTEGRAL EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELİN KAYNAR

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2025

10755334

BEYAN

“ **4- Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Bir Eğriyle Bağlatılı İntegral Eğrileri”**adlı yüksek lisans tezi hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td>X</td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">TÜBİTAK</td><td colspan="2" rowspan="2">2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;…………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">…………………………………/…………………………..</td></tr>
</table>

Öğrenci Adı ve Soyadı

……………….............

Tarih

……………….............

İmza

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında emeği geçen, bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan, her aşamada rehberliğini esirgemeyen, sabrıyla ve yapıcı yaklaşımıyla beni motive eden başta değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tez sürecinde karşılaştığım zorluklarda yanımda olan, fikirleriyle katkı sağlayan, moral desteğiyle beni cesaretlendiren kıymetli hocalarıma ve arkadaşlarıma da ayrıca teşekkür ederim. Ayrıca, bu çalışmam TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında desteklenmiştir. Sağladığı burs desteği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Bununla birlikte, her zaman yanımda olan, sevgisi ve desteğiyle beni güçlendiren, kendimi geliştirmem için tüm imkânlarını seferber eden, hayatımın her alanında yanımda hissettiğim saygıdeğer aileme en derin teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu sürecin her anında bana katkı sunan herkese sonsuz teşekkür ederim.

Selin KAYNAR

2025

ÖZET

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİYLE BAĞLANTILI İNTEGRAL EĞRİLERİ

Bu çalışma 3 bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde, Öklid uzayında temel kavramlara ayrılmıştır. Ayrıca $4-$boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre helisler ele alınmış ve bu helislerin (genel helis, slant helis ve B_2-slant helis) karakterizasyonları verilmiştir. Ardından $4-$boyutlu Öklid uzayında bağlantılı eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilmiştir. $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler incelenmiştir. Üçüncü bölümde bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $4-$ boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğriyle bağlantılı integral eğrileri üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Frenet vektörleri, Çatılandırılmış eğri, Frenet çatısı

ABSTRACT

INTEGRAL CURVES ASSOCIATED WITH A FRAMED CURVE IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

This study consists of three chapters. The first chapter includes the introduction. In the second chapter, fundamental concepts in Euclidean space are presented. Additionally, helices in 4-dimensional Euclidean space are examined according to the Frenet frame, and the characterizations of these helices (general helix, slant helix, and B_2–slant helix) are provided. Then, the definition of connected curves in 4-dimensional Euclidean space and some of their characterizations are given. Curves with frames in 4-dimensional Euclidean space are also studied. The third chapter forms the original part of this study. In this chapter, integral curves associated with a framed curve in 4-dimensional Euclidean space are investigated.

Keywords: Frenet vectors, Osculating curve, Frenet frame

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^4$	: 4- Boyutlu Öklid Uzayı
$\boldsymbol{V}$	: Vektör Uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\lVert , \rVert$	: Norm
$\boldsymbol{I}$	: Öklid Uzayında Bir Açık Aralık
$\times$	: Vektörel Çarpım
$\boldsymbol{W_i}$	: $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayında $i-$yinci Frenet Vektörü
$\boldsymbol{k_i}$	: $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayında $i-$yinci Frenet Eğriliği
$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2\}$	: $\mathbb{R}^4$ Eğrisinin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3\}$	: $\mathbb{R}^4$ Eğrisinin Eğrilikleri
$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$	: $\mathbb{R}^4$ Çatılandırılmış Eğrinin Uyarlanmış Çatısı
$\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$	: $\mathbb{R}^4$ Çatılandırılmış Eğrinin Uyarlanmış Çatısıya Göre Eğrilikleri

1.GİRİŞ

3- boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, klasik diferansiyel geometrinin en kapsamlı ve derinlemesine incelenen alanlarından birini oluşturmaktadır. Son yıllarda, bu alanda özellikle helisler, slant helisler ve bağlantılı eğriler üzerine yoğunlaşan çalışmalar dikkat çekmektedir. Eğriler içerisinde en çok ilgi görenler regüler eğriler olup, bunlar arasında helis eğrileri önemli bir araştırma sahası teşkil etmektedir. Genel helis, teğet vektörünün sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yaptığı eğri olarak tanımlanırken; slant helis, asli normal vektörünün sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yaptığı eğri olarak tanımlanmaktadır. Choi ve Kim, klasik Frenet çatısı ile ilişkili olarak asli-doğrultu eğrisi ve binormal-doğrultu eğrisi adını verdikleri yeni eğri türlerini literatüre kazandırmışlardır (Choi, J. H., ve Kim, Y. H., 2012: 9116–9124). Bu yeni türlerin incelenmesi kapsamında, helisel eğriler söz konusu bağlantılı eğriler aracılığıyla karakterize edilmiştir. Ayrıca, bazı özel eğriler, konum vektörlerinin ait oldukları altuzaylara bağlı olarak rektifiyan, oskülatör ve normal eğriler şeklinde sınıflandırılmıştır. Bu tür eğriler üzerine, farklı uzaylarda ve farklı çatılar kullanılarak çalışma yapılmıştır.

Diferansiyel geometride, Frenet çatısının eğri boyunca anlık dönüş eksenini belirleyen Darboux vektör alanı $\omega = \tau T + \kappa B,$ uzay eğrileri için önemli bir yere sahiptir. Konum vektörü her zaman rektifiyan düzlemde yatan eğri, rektifiyan eğri olarak tanımlanır. Chen, 2003 yılında rektifiyan eğrilerle ilgi bazı karakterizasyonları vermiştir (Chen, B. Y., 2003; 110: 147–152). Bu karakterizasyonlara göre rektifiyan eğrilerin konum vektörlerinin, Darboux vektörü yönünde olduğunu ve dolayısıyla rektifiyan eğrilerin kinematik olarak eğrinin her noktasında konum vektörleri, ani dönme eksenini belirleyen eğriler olarak yorumlanmaktadır. (Chen, B., ve Dillen, F 2005; 33: 77–90). Daha sonra, 2005 yılında İlarslan ve Nešović, $\mathbb{R}_1^3$uzayında konum vektörü yardımıyla normal eğri tanımı vermişlerdir (Ilarslan, K., 2005: 53–63). Önder ve arkadaşları 2008 yılında $\mathbb{R}^4$' teki B_2-slant helisleri, ikinci binormal vektörü (B_2) sabit bir yönle sabit bir açı yapan eğriler olarak tanımlamış ve bu eğrilerle alakalı bazı karakterizasyonlar vermişlerdir. Choi ve Kim, üç yeni eğri türü tanımlamışlardır: asli (binormal) doğrultu eğrileri, asli donör (binormal donör) eğriler, ve PD-rektifiyan eğriler. Ayrıca, bu eğrilerin, genel ve slant helis olma durumlarıyla ilgili bazı karakterizasyonlar vermişlerdir (Choi, J. H., ve Kim, Y. H., 2012: 9116–9124). Choi ve Kim'in yaptığı çalışmadan hareketle Macit ve Düldül, 4-boyutlu Öklid uzayında, asli doğrultu eğrisi, B_1-doğrultu eğrisi, B_2-doğrultu eğrisi ve B_2-rektifiyan eğriyi tanımladılar (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

Bu tezde 4-boyutlu Öklid uzayında singüler noktalı çatılandırılmış bir eğri için integral eğrisi kavramı kullanılarak $\eta_1 -$doğrultu eğrisi, $\eta_2 -$doğrultu eğrisi ve $\eta_3 -$doğrultu eğrisi tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu doğru eğrilerinin genel helis ve slant helis olma durumlarıyla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak da $\eta_3 -$rektifiyan eğri tanımı verilip bir eğrinin $\eta_3 -$rektifiyan eğri olmasıyla ilgili karakterizasyon verilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(v_1,...,v_n) : 1 \leq i \leq n,\ v_i \in \mathbb{R}\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$\left(v_1, v_2, ..., v_n\right) + \left(u_1, u_2, ..., u_n\right) = \left(v_1 + u_1, v_2 + u_2, ..., v_n + u_n\right)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\lambda(v_1, v_2, ..., v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, ..., \lambda v_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere birlikte $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır (Hacısalihoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ve $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\to \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$ uzayının Öklid iç çarpımı denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $\forall v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ için v vektörünün normu

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$v \times w = (v_2 w_3 - w_2 v_3, v_3 w_1 - w_3 v_1, v_1 w_2 - w_1 v_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ ve $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ vektörleri için vektörel çarpım,

$$x\times y\times z=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Williams ve Stein, 1964: 231).

Tanım 2.1.6. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere α ya $\mathbb{R}^n$de bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014: 39).

Tanım 2.1.7. α , $n-$ boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx\big|_t}\right)$$

vektörü, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü olarak adlandırılır ve genellikle $\alpha'(t)$ biçiminde gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014: 46).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri olsun. Eğer her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa bu eğri düzenli (regüler) olarak adlandırılır. Buradaki $\alpha'(t)$ türev vektörünün sıfır olmaması, eğrinin her noktasında tanımlı ve yönü belirlenmiş bir hız vektörüne sahip olduğunu, dolayısıyla eğrinin o noktada duraksamadan ilerlediğini ifade eder (Hacısalihoğlu 2000: 150).

Tanım 2.1.9. α , $\mathbb{R}^n$ de bir eğri olmak üzere $\forall s \in I$, için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresi ise eğrinin yay-parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000: 149).

Tanım 2.1.10: $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{R}^n \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

olsun. $X \in \chi(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\frac{d\alpha}{ds} = X(\alpha(s))$ oluyorsa, α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir (Hacısalihoğlu 2000:52).

Tanım 2.1.11: α, $\mathbb{R}^n$ de bir eğri olsun. $\vartheta=\{\alpha',\alpha'',...,\alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^{(k)}$, $k>r$ için, $\alpha^{(k)}\in Span\{\vartheta\}$ olmak üzere ϑ sisteminden elde edilen $\{W_1,W_2,...,W_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin Serret-Frenet $r-$ ayaklı alanı ve $s\in I$ için $\{W_1(s),W_2(s),...,W_r(s)\}$ ye $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir. Her bir W_i, $1\le i\le r$ vekrörüne ise $i-$yinci Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu 2000: 158).

Tanım 2.1.12: $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı $\{W_1(s),W_2(s),...,W_r(s)\}$ olsun. Buna göre, $1\le i\le r$,

$$k_i : I\to\mathbb{R},$$

$$s\to k_i(s)=\left\langle W_i'(s),W_{i+1}(s)\right\rangle$$

biçiminde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s)$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000: 173).

Tanım 2.1.13: $\alpha : I\to\mathbb{R}^n$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin $s\in I$ için Serret-Frenet $r-$ ayaklısı $\{W_1(s),W_2(s),...,W_r(s)\}$ biçiminde verilsin. α eğrisinin eğrilikleri $k_1,k_2,...,k_{n-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&W_1'(s)=k_1(s)W_2'(s),\\
&W_i'(s)=-k_{i-1}(s)W_{i-1}(s)+k_i(s)W_{i+1}(s), \qquad 1\le i<\mathrm{n}\\
&W_n'(s)=-k_{n-1}(s)W_{n-1}(s)
\end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Yukarıdaki eşitlikler aynı zamanda Serret-Frenet türev formülleri olarak da adlandırılır ve yardımıyla

$$\begin{bmatrix} W_1'(s)\\ W_2'(s)\\ \vdots\\ W_{n-1}'(s)\\ W_n'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & k_{n-2}(s) & 0 & k_{n-1}(s)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1(s)\\ W_2(s)\\ \vdots\\ W_{n-1}(s)\\ W_n(s)\end{bmatrix}$$

şeklinde de verilebilir (Hacısalihoğlu, 2000: 155).

Özel Hal: n=4 için

$W_1 = T$ (Teğet vektör alanı),
$W_2 = N$ (Normal vektör alanı),
$W_3 = B_1$ (Binormal vektör alanı),
$W_4 = B_2$ (İkinci Binormal vektör alanı)

şeklinden adlandırılır.

Teorem 2.1.14: α, $4-$boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin Frenet vektörleri

$$T(s) = \alpha'(s),$$
$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$
$$B_1(s) = B_2(s) \times T(s) \times N(s),$$
$$B_2(s) = -\frac{\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)}{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)\|}$$

ve Serret-Frenet türev formülleri de

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) \\ 0 & 0 & -k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir (Aléssio, O., 2009: 455-471).

Teorem 2.1.15: α, $4-$boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin eğrilikleri

$$k_1 = \|\alpha''\|,$$
$$k_2 = \frac{\langle B_1, \alpha''' \rangle}{k_1},$$
$$k_3 = \frac{\langle B_2, \alpha^{(4)} \rangle}{k_1 k_2}$$

dir (Aléssio, O., 2009:455-471).

2.2 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bağlantılı İntegral Eğrileri

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında bağlantılı eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilecektir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

Tanım 2.2.1. α , $\mathbb{R}^4$ de bir Frenet eğrisi ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ de α nın Frenet çatısı olsun. α nın normal vektör alanın integral eğrisine α nın asli doğrultusu denir (Macit ve Düldül, 2014:1025).

Tanım 2.2.2. α , $\mathbb{R}^4$ de bir Frenet eğrisi ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ de α nın Frenet çatısı olsun. α nın birinci binormal vektör alanının integral eğrisine B_1-doğrultu eğrisi denir (Macit ve Düldül, 2014:1025).

Tanım 2.2.3. α , $\mathbb{R}^4$ de bir Frenet eğrisi ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ de α Frenet çatısı olsun. α nın ikinci binormal vektör alanının integral eğrisine B_2-doğrultu eğrisi denir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

Teorem 2.2.4. α , eğrilikleri k_1, k_2, k_3 olan bir eğri ve $\bar{\alpha}$, α nın asli doğrultu eğrisi olsun. $\bar{\alpha}$ eğrisinin eğrilikleri

$$\bar{k}_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

$$\bar{k}_2 = \frac{\sqrt{\left(k_2' k_1 - k_1' k_2\right)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}}{(k_1^2 + k_2^2)},$$

$$\bar{k}_3 = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\left[2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2' k_2 (k_3' k_1 - 2k_1' k_3) + k_2(-k_1' k_3' k_2 + k_3(-k_2'' k_1 + k_2 k_1'' + k_1 k_2 k_3^2))\right]}{(k_2' k_1 - k_1' k_2)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}$$

şeklindedir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: $\bar{\alpha}$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ olsun. $\bar{\alpha}$ asli doğrultu eğrisi olduğundan $N = \bar{\alpha}' = \bar{T}$ dir. Dolayısıyla, $\bar{T}' = N' = -k_1 T + k_2 B_1$ dir. $\bar{\alpha}$ birinci eğriliği Teorem 2.1.14'den $\bar{k}_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ şeklinde elde edilir. Teorem 2.1.13 kullanılırsa, $\bar{\alpha}$ eğrisinin normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları

$$\bar{N} = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_1,$$

$$\overline{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + \left(k_1' k_2 - k_2' k_1\right)^2}} \left[\frac{-k_1' k_2^2 + k_2' k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_1^2 k_2' - k_1 k_2 k_1'}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_1 + \frac{k_2^3 k_3 + k_1^2 k_2 k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_2 \right],$$

$$\overline{B}_2 = -\frac{k_2^2 k_3 T + k_1 k_2 k_3 B_1 + (k_1' k_2 - k_2' k_1) B_2}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Yine Teorem 2.1.14 göz önünde bulundurulursa $\bar{\alpha}$ eğrisinin ikinci ve üçüncü eğriliklerini

$$\begin{aligned}
\overline{k}_2 &= \frac{\left\langle \overline{B}_1, \bar{\alpha}''' \right\rangle}{\overline{k}_1}, \\
&= \frac{\sqrt{\left(k_2' k_1 - k_1' k_2\right)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}}{(k_1^2 + k_2^2)}, \\
\overline{k}_3 &= \frac{\left\langle \overline{B}_2, \overline{\alpha}^{(4)} \right\rangle}{\overline{k}_1 \overline{k}_2} \\
&= \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \left[2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2' k_2 (k_3' k_1 - 2k_1' k_3) + k_2 (-k_1' k_3' k_2 + k_3 (-k_2'' k_1 + k_2 k_1'' + k_1 k_2 k_3^2)) \right]}{(k_2' k_1 - k_1' k_2)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}.
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.5. α eğrisinin eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ve $\hat{\alpha}$, α nın B_1 – doğrultu eğrisi olsun. $\hat{\alpha}$ nın eğrilikleri

$$k_1 = \sqrt{k_2^2 + k_3^2},$$

$$k_2 = \frac{-k_1^2 k_2^2 k_3^2 - k_1^2 k_2 k_2^3 - 2k_2 k_2' k_3 k_3' - \left(k_2' k\right)^2 - \left(k_3' k_2\right)^2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2} \left(k_2^2 + k_3^2\right)},$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \left(2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2 k_2' (-2k_3' k_1 + k_1' k_3) + k_2 (-k_1' k_2 k_3' + k_3'' k_1 k_2 - k_2'' k_1 k_3 + k_1^3 k_2 k_3)\right)}{\left(k_3'\right)^2 k_2 - 2k_2 k_3 k_2' k_3' + k_3^2 \left(k_2'\right)^2 + k_1^2 k_2 \left(k_2 + k_3\right)}$$

biçimindedir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: $\hat{\alpha}$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3\}$ olsun. $\hat{\alpha}$, B_1-doğrultu eğrisi olduğundan $B_1 = \hat{\alpha}' = \hat{T}$ dir. Dolayısıyla, $\hat{T}' = B_1' = -k_2 N + k_3 B_2$ dir. B_1-doğrultu eğrisinin birinci eğriliği Teorem 2.1.14'den

$$\hat{k}_1 = \|\hat{\alpha}''\| = \|-k_2 N + k_3 B_2\| = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$$

şeklinde elde edilir. Teorem 2.2.6' ı kullanılırsa, B_1-doğrultu eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\hat{k}_1} = \frac{-k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} N + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} B_2,$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\hat{\alpha}''' = -k_2' N - k_2 N' + k_3' B_2 + k_3 B_2' = k_1 k_2 T - k_2' N + \left(-k_2^2 - k_3^2\right) B_1 + k_3' B_2,$$

$$\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'' \times \hat{\alpha}''' = \left(k_2 k_3' - k_2' k_3\right) T + \left(-k_1 k_2 k_3\right) N + \left(-k_1 k_2^2\right) B_2,$$

$$\|\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'' \times \hat{\alpha}'''\| = \sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + \left(k_3' k_2 - k_2' k_3\right)^2}$$

eşitliklerinden B_1-doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\hat{B}_2 = \frac{\left(k_2 k_3' - k_2' k_3\right) T + \left(-k_1 k_2 k_3\right) B_1 + (-k_1 k_2^2) B_2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2}}$$

olarak elde edilir. $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \times \hat{T} \times \hat{N}$ eşitliği kullanılırsa, B_1-doğrultu eğrisinin binormal vektör alanı

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + \left(k_3' k_2 - k_2' k_3\right)^2}} \left[\frac{\left(-k_1 k_2 k_3^2 - k_1 k_2^3\right)}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} T - \frac{\left(k_3 \left(k_3' k_2 - k_2' k_3\right)\right)}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} N + \frac{\left(-k_2 \left(k_3' k_2 + k_2' k_3\right)\right)}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} B_2 \right],$$

şeklinde elde edilir. Yine Teorem 2.1.14 göz önünde bulundurulursa B_1-doğrultu eğrisinin ikinci eğriliği

$$\hat{k}_2 = \frac{\left\langle \hat{B}_1, \hat{\alpha}''' \right\rangle}{\hat{k}_1}$$

$$= \frac{-k_1^2 k_2^2 k_3^2 - k_1^2 k_2 k_2^3 - 2k_2 k_2' k_3 k_3' - \left(k_2' k\right)^2 - \left(k_3' k_2\right)^2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2}\left(k_2^2 + k_3^2\right)},$$

olup,

$$\alpha^{(4)} = \left(k_1' k_2 + 2k_1 k_2'\right)T + \left(k_1^2 k_2 - k_2'' + k_2^3 + k_2 k_3^2\right)N + \left(-3k_2 k_2' - 3k_3 k_3'\right)B_1 + \left(-k_3 k_2^2 - k_3^3 + k_3''\right)B_2$$

ve

$$\hat{k}_3 = \frac{\left\langle \hat{B}_2, \hat{\alpha}^{(4)} \right\rangle}{\hat{k}_1 \hat{k}_2}$$

eşitliklerinden B_1 – doğrultu eğrisinin üçüncü eğriliği de

$$\hat{k}_3 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}\left(2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2 k_2'(-2k_3' k_1 + k_1' k_3) + k_2(-k_1' k_2 k_3' + k_3'' k_1 k_2 - k_2'' k_1 k_3 + k_1^3 k_2 k_3)\right)}{\left(k_3'\right)^2 k_2 - 2k_2 k_3 k_2' k_3' + k_3^2 \left(k_2'\right)^2 + k_1^2 k_2 \left(k_2 + k_3\right)}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.6. α eğrisinin eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ve $\tilde{\alpha}$, α nın B_2 – doğrultu eğrisi olsun. $\tilde{\alpha}$ nın eğrilikleri

$$\tilde{k}_1 = |k_3|,$$
$$\tilde{k}_2 = k_2,$$
$$\tilde{k}_3 = \operatorname{sgn}(k_3) k_1$$

biçimindedir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3\}$ olsun. B_2 – doğrultu eğri tanımından $B_2 = \tilde{\alpha}' = \tilde{T}$ yazılabilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa $\tilde{T}' = B_2' = -k_3 B_1$ elde edilir. $\tilde{\alpha}$ nın birinci eğriliği $\tilde{k}_1 = |k_3|$ şeklinde elde edilir. Ayrıca $\tilde{\alpha}$ ın asli normal vektör alanı, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları Teorem 2.1.13 yardımıyla

$$N = -\operatorname{sgn}(k_3)B_1,$$
$$B_1 = \operatorname{sgn}(k_2)\operatorname{sgn}(k_3)N,$$
$$B_2 = -\operatorname{sgn}(k_2)T$$

biçiminde elde edilir. $\tilde{\alpha}$ nın ikinci ve üçüncü eğrilikleri Teorem 2.1.13 yardımıyla

$$k_2 = \frac{\langle B_1, \tilde{\alpha}''' \rangle}{k_1} = \operatorname{sgn}(k_1)k_2,$$
$$k_3 = \frac{\langle B_2, \tilde{\alpha}^{(4)} \rangle}{k_1 k_2} = \operatorname{sgn}(k_3)k_1$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.7. α , $\mathbb{R}^4$ uzayında bir Frenet eğrisi ve $\bar{\alpha}$, α nın asli doğrultu eğrisi olsun. α slant helistir gerek ve yeter şart $\bar{\alpha}$ genel helistir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: α nın Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere $\bar{\alpha}$ asli doğrultu eğrisi olduğundan $N = \bar{\alpha}' = \bar{T}$ dir. Buradan,

$$\alpha, \text{ slant helistir} \Leftrightarrow \langle N, u \rangle = \cos\theta, \quad (\theta = \text{sabit}, \ u = \text{sabit birim vektör})$$
$$\Leftrightarrow \langle \bar{T}, u \rangle = \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \bar{\alpha} \text{ genel helistir.}$$

Teorem 2.2.8. α , $\mathbb{R}^4$ uzayında bir Frenet eğrisi ve $\tilde{\alpha}$, α yönündeki B_2- doğrultu eğrisi olsun. α , B_2-slant helistir gerek ve yeter şart $\tilde{\alpha}$, genel helistir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: α nın Frenet çatısını $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere B_2- doğrultu eğrisi tanımından, $B_2 = \tilde{\alpha}' = T$ dir. Buradan,

$$\alpha, B_2-\text{slant helistir} \Leftrightarrow \langle B_2, v \rangle = \cos\theta, \ (\theta = \text{sabit}, \ v = \text{sabit birim vektör})$$
$$\Leftrightarrow \langle \tilde{T}, v \rangle = \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\alpha} \text{ genel helistir.}$$

Tanım 2.2.9. α , $\mathbb{R}^4$ te Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ olan bir Frenet eğrisi ve $\tilde{\alpha}$, α nın B_2-doğrultu eğrisi olsun. Eğer $\tilde{\alpha}$ eğrisinin konum vektörü her zaman α nın asli normalinin ortogonal tümleyeninde bulunuyorsa, yani $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\tilde{\alpha} = \lambda_1 T + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 B_2 \tag{2.1}$$

oluyorsa, $\tilde{\alpha}$ eğrisine B_2 –rektifiyan eğri denir (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

Teorem 2.2.10. $\tilde{\alpha}$, $\mathbb{R}^4$ te eğrilikleri $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ olan bir Frenet eğrisi olsun. $\tilde{\alpha}$, B_2 –rektifiyan eğriye kongurenttir gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$-\left(\frac{c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}\right)' + \left(s - c\int \frac{\tilde{k}_1 \tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds\right)\tilde{k}_1 = 0 \tag{2.2}$$

dır (Macit ve Düldül, 2014: 1025).

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$, B_2 –rektifiyan eğri olsun. B_2 –rektifiyan eğri tanımdan dolayı $\tilde{\alpha}$, α eğrisinin B_2 –doğrultu eğrisidir. O halde Teorem 2.2.7. den $T = -\tilde{B}_2$, $B_1 = -\operatorname{sgn}(k_3)\tilde{N}$, $B_2 = \overline{T}$ dir. Bu eşitlikler (2.1) denkleminde yerine yazılır ve türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lambda_3' + \operatorname{sgn}(k_3)\lambda_2\tilde{k}_1 = 1,\\
&-\operatorname{sgn}(k_3)\lambda_2' + \lambda_3\tilde{k}_1 = 0,\\
&\lambda_1\tilde{k}_3 - \operatorname{sgn}(k_3)\lambda_2\tilde{k}_2 = 0,\\
&\lambda_1' = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin son eşitliğinden $\lambda_1 = c = \text{sabit}$ elde edilir. λ_1 değeri üçüncü eşitlikte yerine yazılırsa $\lambda_2 = \dfrac{c\tilde{k}_3}{\operatorname{sgn}(k_3)\tilde{k}_2}$ bulunur. λ_2 değeri de birinci eşitlikte yerine yazılırsa $\lambda_3 = s - c\int \dfrac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds$ elde edilir. Elde edilenler ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$-\left(\frac{c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}\right)' + \left(s - c\int \frac{\tilde{k}_1 \tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds\right)\tilde{k}_1 = 0$$

eşitliği elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$, $\mathbb{R}^4$ te (2.2) eşitliğini sağlayan herhangi bir eğri olsun. $X(s)$ vektörü $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet elemanları yardımıyla

$$X = \tilde{\alpha} + c\tilde{B}_2 + \frac{c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}\tilde{N} - \left(s - c\int \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds \right)\tilde{T}$$

biçiminde yazılan herhangi bir vektör olsun. X vektörünün diferansiyeli alınır ve (2.2) eşitliği kullanılırsa $X' = 0$ elde edilir. Buradan X vektörünün sabit vektör olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\tilde{\alpha} = -c\tilde{B}_2 - \frac{c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}\tilde{N} + \left(s - c\int \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds \right)\tilde{T} + X$$

yazılabilir. Son eşitlikte $\tilde{B}_2 = -T, \tilde{N} = -\operatorname{sgn}(k_3)B_1, \ \tilde{T} = B_2$ eşitlikleri yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\tilde{\alpha} = cT + \operatorname{sgn}(k_3)\frac{c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}B_1 + \left(s - c\int \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds \right)B_2 + X$$

elde edilir. Bu da $\tilde{\alpha}$ eğrisinin bir B_2 −rektifiyan eğriye kongurent olduğu anlamına gelir.

2.3 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Bu bölümde singüler noktalı eğriler ve bu eğrilerin davranışlarını incelemek için gerekli olan bazı kavramlar verilecektir.

Δ_3 kümesi

$$\left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \langle \mu_i, \mu_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1,2,3 \right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. ν birim vektör olmak üzere $\nu = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$ eşitliğiyle tanımlanır. O halde $\{\nu, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ kümesi ortonormal bir kümedir (Akyiğit & Yıldız, 2021: 259).

Tanım 2.3.1. $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ için $\langle \gamma', \mu_i \rangle = 0$ ise $(\gamma, \mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ ikilisine bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer (γ, μ) bir çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ varsa γ eğrisine de bir baz (taban) eğrisi denir (Honda ve Takahashi, 2016: 265).

$(\gamma, \mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri olsun. O halde (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin $\{\nu, \mu_1, \mu_2, \mu\}$ ortonormal çatısı için

$$\mu_1'(t) = f(t)\mu_2(t) + g(t)\mu_3(t) + h(t)v(t),$$
$$\mu_2'(t) = -f(t)\mu_1(t) + j(t)\mu_3(t) + k(t)v(t),$$
$$\mu_3'(t) = -g(t)\mu_1(t) - j(t)\mu_2(t) + l(t)v(t),$$
$$v'(t) = -h(t)\mu_1(t) - k(t)\mu_2(t) - l(t)\mu_3(t)$$

eşitlikleri verilebilir. Bu eşitlikler Serret-Frenet tipli türev formülleri olarak adlandırılır ve matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} \mu_1'(t) \\ \mu_2'(t) \\ \mu_3'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(t) & g(t) & h(t) \\ -f(t) & 0 & j(t) & k(t) \\ -g(t) & -j(t) & 0 & l(t) \\ -h(t) & -k(t) & -l(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \mu_3(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca diferansiyellenebilir $\alpha : I \to \mathbb{R}$ dönüşümü vardır öyle ki:

$$\gamma'(t) = \alpha(t)v(t)$$

dir. Burada $f(t), g(t), h(t), j(t), k(t)$ ve $l(t)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. $(f, g, h, j, k, l, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $(f(t), g(t), h(t), j(t), k(t), l(t), \alpha(t))$ ye $\gamma(t)$ nın çatlandırılmış eğrilikleri denir. $\alpha(t_0) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul t_0 nın γ nın bir singüler noktası olmasıdır. Singüler noktalarda bir eğrinin davranışını incelemek amacıyla, çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri kullanılabilir (Akyiğit ve Yıldız, 2021: 259).

Teorem 2.3.2 (γ, μ) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri sırası ile $(f, g, h, j, k, l, \alpha)$ ve $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{\alpha})$ olsun. $(f, g, h, j, k, l, \alpha)$ ve $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{\alpha})$ eğrilikleri çakışık ise (γ, μ) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu})$ çatılandırılmış eğrileri denktirler (Honda ve Takahashi, 2016: 265).

$(\gamma, \mu) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış bir eğri ve eğrilikleri $f(t), g(t), h(t), j(t), k(t)$, $l(t), \alpha(t)$ olsun. θ, φ, ψ, Euler açıları düzgün fonksiyonlar olmak üzere $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Delta_3$,

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\sin\theta \\ \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir. Basit hesaplamalar ile

$$\tilde{v} = \eta_1 \times \eta_2 \times \eta_3 = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = v$$

olduğu kolayca görülebilir.

$(\gamma, \mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğridir. θ, φ ve ψ (Euler açıları) düzgün fonksiyonları için

$$\begin{aligned} &\frac{\tan\psi}{\cos\theta} = l\sin\varphi - k\cos\varphi, \\ &h = \cot\theta\left(l\cos\varphi + k\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

denklemleri sağlansın; Bu durumda $(v, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, (γ, η) boyunca uyarlanmış bir çatı oluşturur ve uyarlanmış çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ \eta_1'(t) \\ \eta_2'(t) \\ \eta_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p(t) & 0 & 0 \\ -p(t) & 0 & q(t) & 0 \\ 0 & -q(t) & 0 & r(t) \\ 0 & 0 & -r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. v, η_1, η_2 ve η_3 vektörleri sırasıyla genelleştirilmiş teğet vektörü, genelleştirilmiş asli normal vektörü, genelleştirilmiş binormal vektörü ve genelleştirilmiş ikinci binormal vektörü olarak adlandırılır. Burada $\left(p(t), q(t), r(t)\right)$ düzgün fonksiyonları $\gamma(t)$ in çatılandırılmış eğrilikleri olarak adlandırılır. Eğrinin çatılandırılmış eğrilikleri $\left(p(t), q(t), r(t)\right)$ ile açıları arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} &p = -h\sec\theta\sec\psi, \\ &q = -\left(j - \varphi'\right)\sin\theta - \psi', \\ &r = \frac{-\cos\theta}{\cos\psi}\left(j - \varphi'\right) \end{aligned}$$

şeklindedir, burada

$$\begin{aligned} &f = -\sin\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right), \\ &g = -\cos\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right), \\ &j = r\frac{\cos\psi}{\cos\theta} \end{aligned}$$

dır (Akyiğit ve Yıldız, 2021: 260).

Tanım 2.3.3 $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$, γ ’ nın uyarlanmış çatısı olsun. γ ’ nın genelleştirilmiş normal vektörü sabit bir yön ile sabit bir açı yapıyorsa çatılandırılmış slant helis denir (Ates, M., ve Akyigit, M., 2023: 15-26).

Tanım 2.3.4 $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$, γ ’ nın uyarlanmış çatısı olsun. γ ’ nın genelleştirilmiş birinci binormal vektörü sabit bir yön ile sabit bir açı yapıyorsa çatılandırılmış η_2 – slant helis denir (Ates, M., ve Akyigit, M., 2023: 15-26).

Tanım 2.3.5 $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$, γ ’ nın uyarlanmış çatısı olsun. γ ’ nın genelleştirilmiş ikinci binormal vektörü sabit bir yön ile sabit bir açı yapıyorsa çatılandırılmış η_3 – slant helis denir (Ates, M., ve Akyigit, M., 2023:15-26).

3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİYLE BAĞLANTILI İNTEGRAL EĞRİLERİ

Bu bölüm tezin orijinal kısmı olup $4-$ boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğrinin uyarlanmış çatısından hareketle yeni integral eğrileri tanımlanacaktır. Doğrultu eğrileri olarak adlandırılan bu eğriler ile ilgili bazı karakterizasyonlara yer verilecektir. Aynı zamanda bu eğrilerin helis olma durumları incelenecektir. Daha sonra doğrultu eğrisi ve çatılandırılmış rektifiyan eğri tanımları göz önünde bulundurularak yeni bir eğri çeşidi tanımlanacaktır.

Tanım 3.1.1 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ de γ' nın bir uyarlanmış çatısı olsun. γ' nın η_1 genelleştirilmiş vektör alanının integral eğrisine γ' nın η_1- doğrultu eğrisi denir ve $\bar{\gamma}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.1.2 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ de γ' nın bir uyarlanmış çatısı olsun. γ' nın η_2 genelleştirilmiş birinci binormal vektör alanının integral eğrisine γ'nın η_2- doğrultu eğrisi denir ve $\hat{\gamma}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.1.3 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ de γ' nın bir uyarlanmış çatısı olsun. γ' nın η_3 genelleştirilmiş ikinci binormal vektör alanının integral eğrisine γ' nın η_3- doğrultu eğrisi denir ve $\tilde{\gamma}$ biçiminde gösterilir.

Not: $\forall t\in I$ için η_1,η_2 ve η_3 vektör alanları sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla η_1- doğrultu, η_2- doğrultu ve η_3- doğrultu eğrileri regülerdir.

Teorem 3.1.4. γ, bir çatılandırılmış eğri ve $\bar{\gamma}$, γ' nın η_1-asli doğrultu eğrisi olsun. η_1- doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$' nın Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
\bar{T}&=\eta_1,\\
\bar{N}&=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\left(\eta_2 q-p\nu\right),\\
\bar{B}_1&=\frac{\left(-q^2p'+pqq'\right)\nu-\left(pqp'-p^2q'\right)\eta_2+\left(p^2qr+q^3r\right)\eta_3}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}},\\
\bar{B}_2&=-\frac{\left(q^2r\right)\nu+\left(pqr\right)\eta_2+\left(qp'-pq'\right)\eta_3}{\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'+pq'\right)^2}}
\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklindedir.

İspat. $\bar{\gamma}$, η_1-doğrultu eğrisi olduğundan $\bar{T}(s)=\bar{\gamma}'(s)=\eta_1(s)$ dir. γ' nın uyarlanmış çatı formülleri göz önünde bulundurulursa, $\bar{\gamma}$' nin ikinci türevi ve ikinci türevinin normu

$$\bar{\gamma}''=-p\nu+q\eta_2$$

ve

$$\|\bar{\gamma}''\|=\sqrt{p^2+q^2}$$

biçiminde elde edilir. η_1-doğrultu eğrisinin asli normal vektörü Teorem 2.1.13'den

$$\bar{N}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(\eta_2 q-p\nu)$$

şeklinde elde edilir. $\bar{\gamma}$ nin üçüncü türevi

$$\bar{\gamma}'''=-p'\nu+\left(-p^2-q^2\right)\eta_1+q'\eta_2+qr\eta_3$$

dir. Buradan hareketle $\bar{\gamma}'\times\bar{\gamma}''\times\bar{\gamma}'''$ vektörü ve bu vektörün normu

$$\bar{\gamma}'\times\bar{\gamma}''\times\bar{\gamma}'''=q^2r\nu+pqr\eta_2+\left(qp'-pq'\right)\eta_3 \tag{3.2}$$

ve

$$\|\bar{\gamma}'\times\bar{\gamma}''\times\bar{\gamma}'''\|=\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2} \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir. (3.2), (3.3) denklemleri ve Teorem 2.1.13 yardımıyla η_1-doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektörü

$$\bar{B}_2=-\frac{\left(q^2r\right)\nu+\left(pqr\right)\eta_2+\left(qp'-pq'\right)\eta_3}{\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'+pq'\right)^2}}$$

biçimde elde edilir. Son olarak η_1-doğrultu eğrisinin birinci binormal vektörü $\bar{B}_1=\bar{B}_2\times\bar{T}\times\bar{N}$ eşitliği yardımıyla

$$\bar{B}_1=\frac{\left(-q^2p'+pqq'\right)\nu-\left(pqp'-p^2q'\right)\eta_2+\left(p^2qr+q^3r\right)\eta_3}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.5 γ çatılandırılmış eğrisinin η_1-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ' nin $\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3$ eğrilikleri

$$\bar{k}_1=\sqrt{p^2+q^2},$$

$$\bar{k}_2=\frac{\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}}{p^2+q^2},$$

$$\bar{k}_3=\frac{\sqrt{p^2+q^2}\left(q\left(-p'\left(2rq'+qr'\right)+qrp''\right)+p\left(q^2r^3+2rq'^2+q\left(q'r'-rq''\right)\right)\right)}{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}$$

dir.

İspat: $\bar{\gamma}$, η_1-doğrultu eğrisi olsun. $\bar{\gamma}'(s)=\eta_1(s)$ ve $\bar{k}_1=\|\bar{\gamma}'\|$ eşitliklerinden η_1- doğrultu eğrisinin birinci eğriliği

$$\bar{k}_1=\sqrt{p^2+q^2}$$

biçiminde elde edilir. $\bar{\gamma}'''$ ve $\bar{k}_2=\dfrac{\left\langle \bar{B}_1,\bar{\gamma}'''\right\rangle}{\bar{k}_1}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\bar{k}_2&=\frac{\left\langle \bar{B}_1,\bar{\gamma}'''\right\rangle}{\bar{k}_1}\\&=\frac{\left\langle \dfrac{\left(-q^2p'+pqq'\right)\nu-\left(pqp'-p^2q'\right)\eta_2+\left(p^2qr+q^3r\right)\eta_3}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}},-p'\nu+\left(-p^2-q^2\right)\eta_1+q'\eta_2+qr\eta_3\right\rangle}{\sqrt{p^2+q^2}}\\&=\frac{\sqrt{p^2q^2r^2+q^4r^2+\left(qp'-pq'\right)^2}}{p^2+q^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\bar{\gamma}$, η_1- doğrultu eğrisinin dördüncü türevi

$$\bar{\gamma}^{(4)}=\left(-p\left(-p^2-q^2\right)-p''\right)\nu+\left(-3pp'-3qq'\right)\eta_1+\left(q\left(-p^2-q^2\right)-qr^2+q''\right)\eta_2+\left(2rq'+qr'\right)\eta_3$$

dir. $\bar{\gamma}^{(4)}$ ve $\bar{k}_3=\dfrac{\left\langle \bar{B}_2,\bar{\gamma}^{(4)}\right\rangle}{\bar{k}_1\bar{k}_2}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\bar{k}_3 = \frac{\left\langle \bar{B}_2, \bar{\gamma}^{(4)} \right\rangle}{\bar{k}_1 \bar{k}_2}$$

$$= \frac{\left\langle \dfrac{\left(-q^2 p' + pqq'\right)\nu - \left(pqp' - p^2 q'\right)\eta_2 + \left(p^2 qr + q^3 r\right)\eta_3}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p^2q^2r^2 + q^4r^2 + \left(qp' - pq'\right)^2}}, \left(-p\left(-p^2-q^2\right) - p''\right)\nu + \left(-3pp' - 3qq'\right)\eta_1 + \left(q\left(-p^2-q^2\right) - qr^2 + q''\right)\eta_2 + \left(2rq' + qr'\right)\eta_3 \right\rangle}{\sqrt{p^2+q^2}\,\dfrac{\sqrt{p^2q^2r^2 + q^4r^2 + \left(qp' - pq'\right)^2}}{p^2+q^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{p^2+q^2}\left(q\left(-p'\left(2rq' + qr'\right) + qrp''\right) + p\left(q^2r^3 + 2rq'^2 + q\left(q'r' - rq''\right)\right)\right)}{\left(q^2\left(\left(p^2+q^2\right)r^2 + p'^2\right) - 2pqp'q' + p^2q'^2\right)}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.6 γ bir çatılandırılmış eğri ve $\hat{\gamma}$, γ nın $\eta_2 -$doğrultu eğrisi olsun. $\hat{\gamma}$ nın Frenet çatısı

$$\hat{T} = \eta_2,$$

$$\hat{N} = \frac{-q\eta_1 + r\eta_3}{\sqrt{q^2+r^2}},$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\left(pq^3 + pqr^2\right)\nu - \left(r^2q' + qrr'\right)\eta_1 - \left(qrq' - q^2r'\right)\eta_3}{\left(\sqrt{q^2+r^2}\sqrt{\left(p^2q^4 + p^2q^2r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)},$$

$$\hat{B}_2 = -\frac{\left(\left(-rq' + qr'\right)\nu - pqr\eta_1 - pq^2\eta_3\right)}{\left(\sqrt{\left(p^2q^4 + p^2q^2r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)}$$

şeklindedir.

İspat: $\hat{\gamma}$, $\eta_2 -$doğrultu eğrisi olduğundan $\hat{T} = \hat{\gamma}' = \eta_2$ dir. γ ’ nın uyarlanmış çatı formülleri göz önünde bulundurulursa $\hat{\gamma}$ ’ nin ikinci türevi ve ikinci türevinin normu

$$\hat{\gamma}'' = -q\eta_1 + r\eta_3$$

ve

$$\left\| \hat{\gamma}'' \right\| = \sqrt{q^2+r^2}$$

biçiminde elde edilir. $\eta_2 -$doğrultu eğrisinin asli normal vektörü Teorem 2.1.13’den

$$\hat{N} = \frac{-q\eta_1 + r\eta_3}{\sqrt{q^2+r^2}}$$

şeklinde elde edilir. $\hat{\gamma}$ ’ nin üçüncü türevi

$$\hat{\gamma}''' = pq\nu - q'\eta_1 + \left(-q^2 - r^2\right)\eta_2 + r'\eta_3$$

dir. Buradan hareketle $\hat{\gamma}'\times\hat{\gamma}''\times\hat{\gamma}'''$ vektörü ve bu vektörün normu

$$\hat{\gamma}'\times\hat{\gamma}''\times\hat{\gamma}''' = \left(-rq' + qr'\right)\nu - \left(pqr\right)\eta_1 - pq^2\eta_3 \tag{3.4}$$

ve

$$\left\|\hat{\gamma}'\times\hat{\gamma}''\times\hat{\gamma}'''\right\| = \sqrt{p^2q^4 + p^2q^2r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2} \tag{3.5}$$

şeklindedir. (3.4), (3.5) denklemleri ve Teorem 2.1.13 yardımıyla η_2-doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektörü

$$\hat{B}_2 = -\frac{\left(\left(-rq' + qr'\right)\nu - pqr\eta_1 - pq^2\eta_3\right)}{\left(\sqrt{\left(p^2q^4 + p^2q^2r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)}$$

biçimde elde edilir. Son olarak η_2-doğrultu eğrisinin birinci binormal vektörü $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \times \hat{T} \times \hat{N}$ eşitliği yardımıyla

$$\hat{B}_1 = \frac{\left(pq^3 + pqr^2\right)\nu - \left(r^2q' + qrr'\right)\eta_1 - \left(qrq' - q^2r'\right)\eta_3}{\left(\sqrt{q^2 + r^2}\sqrt{\left(p^2q^4 + p^2q^2r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.7 γ çatılandırılmış eğrisinin η_2-doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ ' nin $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$ eğrilikleri

$$\hat{k}_1 = \sqrt{q^2 + r^2},$$

$$\hat{k}_2 = \frac{\sqrt{p^2q^2\left(q^2 + r^2\right) + \left(rq' - qr'\right)^2}}{\left(q^2 + r^2\right)},$$

$$\hat{k}_3 = \frac{\left(\sqrt{q^2 + r^2}\left(p^3q^2r + qp'\left(rq' - qr'\right) + p\left(r\left(2q'^2 - qq''\right) + q\left(2q'r' + qr''\right)\right)\right)\right)}{\left(p^2q^2\left(q^2 + r^2\right) + \left(rq' - qr'\right)^2\right)}$$

dir.

İspat: $\hat{\gamma}$, η_2-doğrultu eğrisi olsun. $\hat{\gamma}' = \eta_2$ ve $\hat{k}_1 = \left\|\hat{\gamma}'\right\|$ eşitliklerinden η_2-doğrultu eğrisinin birinci eğriliği

$$\hat{k}_1 = \sqrt{q^2 + r^2}$$

biçiminde elde edilir. $\hat{\gamma}'''$ ve $\hat{k}_2 = \dfrac{\left\langle \hat{B}_1, \hat{\gamma}''' \right\rangle}{\hat{k}_1}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\hat{k}_2 &= \frac{\left\langle \hat{B}_1, \hat{\gamma}''' \right\rangle}{\hat{k}_1} \\
&= \frac{\left\langle \dfrac{\left(pq^3 + pqr^2\right)\nu - \left(r^2 q' + qrr'\right)\eta_1 - \left(qrq' - q^2 r'\right)\eta_3}{\left(\sqrt{q^2 + r^2}\sqrt{\left(p^2 q^4 + p^2 q^2 r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)}, pq\nu - q'\eta_1 + \left(-q^2 - r^2\right)\eta_2 + r'\eta_3 \right\rangle}{\sqrt{q^2 + r^2}} \\
&= \frac{\sqrt{p^2 q^2\left(q^2 + r^2\right) + \left(rq' - qr'\right)^2}}{\left(q^2 + r^2\right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\hat{\gamma}$, $\eta_2 -$doğrultu eğrisinin dördüncü türevi

$$\hat{\gamma}^{(4)} = \left(qp' + 2pq'\right)\nu + \left(p^2 q - q\left(-q^2 - r^2\right) - q''\right)\eta_1 + \left(-3qq' - 3rr'\right)\eta_2 + \left(r\left(-q^2 - r^2\right) + r''\right)\eta_3$$

dir. $\hat{\gamma}^{(4)}$ ve $\hat{k}_3 = \dfrac{\left\langle \hat{B}_2, \hat{\gamma}^{(4)} \right\rangle}{\hat{k}_1 \hat{k}_2}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\hat{k}_3 &= \frac{\left\langle \hat{B}_2, \hat{\gamma}^{(4)} \right\rangle}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \\
&= \frac{\left\langle -\dfrac{\left(\left(-rq' + qr'\right)\nu - pqr\eta_1 - pq^2\eta_3\right)}{\left(\sqrt{\left(p^2 q^4 + p^2 q^2 r^2 + \left(-rq' + qr'\right)^2\right)}\right)}, \left(qp' + 2pq'\right)\nu + \left(p^2 q - q\left(-q^2 - r^2\right) - q''\right)\eta_1 + \left(-3qq' - 3rr'\right)\eta_2 + \left(r\left(-q^2 - r^2\right) + r''\right)\eta_3 \right\rangle}{\sqrt{q^2 + r^2}\,\dfrac{\sqrt{p^2 q^2\left(q^2 + r^2\right) + \left(rq' - qr'\right)^2}}{\left(q^2 + r^2\right)}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{q^2 + r^2}\left(p^3 q^2 r + qp'\left(rq' - qr'\right) + p\left(r\left(2q'^2 - qq''\right) + q\left(2q'r' + qr''\right)\right)\right)\right)}{\left(p^2 q^2\left(q^2 + r^2\right) + \left(rq' - qr'\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.8 γ bir çatılandırılmış eğri ve $\tilde{\gamma}$, γ' nın $\eta_3 -$doğrultu eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet çatısı

$$\tilde{T} = \eta_3,$$
$$\tilde{N} = -\operatorname{sgn}(r)\eta_2,$$
$$\tilde{B}_1 = \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(r)\eta_1,$$
$$\tilde{B}_2 = -\operatorname{sgn}(q)\nu$$

şeklindedir.

İspat: $\tilde{\gamma}$, $\eta_3 -$doğrultu eğrisi olduğundan $\tilde{T} = \tilde{\gamma}' = \eta_3$ dir. γ' nın uyarlanmış çatı formülleri göz önünde bulundurulursa $\tilde{\gamma}$' nin ikinci türevi ve ikinci türevinin normu

$$\tilde{\gamma}'' = -r\eta_2$$

ve

$$\|\tilde{\gamma}''\| = \sqrt{r^2}$$

biçimindedir. $\eta_3 -$doğrultu eğrisinin asli normal vektörü Teorem 2.1.13'den

$$\tilde{N} = -\operatorname{sgn}(r)\eta_2$$

şeklinde elde edilir. $\tilde{\gamma}$' nin üçüncü türevi

$$\tilde{\gamma}''' = qr\eta_1 - r^2\eta_3 - \eta_2 r'$$

dir. Buradan hareketle $\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'' \times \tilde{\gamma}'''$ vektörü ve bu vektörün normu

$$\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'' \times \tilde{\gamma}''' = qr^2\nu \tag{3.6}$$

ve

$$\|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}'' \times \tilde{\gamma}'''\| = q^2 r^4 \tag{3.7}$$

şeklindedir. (3.6), (3.7) denklemleri ve Teorem 2.1.13 yardımıyla $\eta_3 -$doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektörü

$$\tilde{B}_2 = -\operatorname{sgn}(q)\nu$$

biçimde elde edilir. Son olarak $\eta_3 -$ doğrultu eğrisinin birinci binormal vektörü $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 \times \tilde{T} \times \tilde{N}$ eşitliği yardımıyla

$$\tilde{B}_1 = \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(r)\eta_1$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.9 γ çatılandırılmış eğrisinin η_3 – doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ ' nin $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ eğrilikleri

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= \operatorname{sgn}(r)\, r, \\ \tilde{k}_2 &= \operatorname{sgn}(q)\, q, \\ \tilde{k}_3 &= \operatorname{sgn}(r)\, p \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $\tilde{\gamma}$, η_3 – doğrultu eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}'(s) = \eta_3(s)$ ve $\tilde{k}_1 = \|\tilde{\gamma}'\|$ eşitliklerinden $\eta_3 -$ doğrultu eğrisinin birinci eğriliği $\tilde{k}_1 = \operatorname{sgn}(r)\, r$ biçiminde elde edilir. $\tilde{\gamma}'''$ ve $\tilde{k}_2 = \dfrac{\langle \tilde{B}_1, \tilde{\gamma}''' \rangle}{\tilde{k}_1}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= \frac{\langle \tilde{B}_1, \tilde{\gamma}''' \rangle}{\tilde{k}_1} \\ &= \frac{\langle qr\eta_1, qr\eta_1 - r'\eta_2 - r^2\eta_3 \rangle}{\operatorname{sgn}(r)\, r} \\ &= \operatorname{sgn}(q)\, q \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\tilde{\gamma}$, $\eta_3 -$doğrultu eğrisinin dördüncü türevi

$$\tilde{\gamma}^{(4)} = -pqr\nu + (rq' + 2qr')\eta_1 + (q^2 r + r^3 - r'')\eta_2 - 3rr'\eta_3$$

dir. $\tilde{\gamma}^{(4)}$ ve $\tilde{k}_3 = \dfrac{\langle \tilde{B}_2, \tilde{\gamma}^{(4)} \rangle}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \tilde{k}_3 &= \frac{\langle \tilde{B}_2, \tilde{\gamma}^{(4)} \rangle}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2} \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(q)\, pqr}{(\operatorname{sgn}(r)\, r)(\operatorname{sgn}(q)\, q)} \\ &= \frac{p}{\operatorname{sgn}(r)} \\ &= \operatorname{sgn}(r)\, p \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.10 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\bar{\gamma}$, γ yönündeki η_1- doğrultu eğrisi olsun. γ, slant helistir gerek ve yeter şart $\bar{\gamma}$ genel helistir.

İspat: γ nın çatılandırılmış eğrisi $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ olsun. η_1-doğrultu eğrisi tanımından $\bar{T}(s)=\bar{\gamma}'(s)=\eta_1(s)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$
\begin{aligned}
\gamma \text{ slant helistir } &\Leftrightarrow \langle \eta_1,u\rangle=\cos\phi \quad (\phi=\text{sabit } u=\text{sabit birim vektör})\\
&\Leftrightarrow \langle \bar{T},u\rangle=\cos\phi\\
&\Leftrightarrow \bar{\gamma} \text{ genel helistir.}
\end{aligned}
$$

Teorem 3.1.11 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\hat{\gamma}$, γ yönündeki η_2- doğrultu eğrisi olsun. γ, η_2- slant helistir gerek ve yeter şart $\hat{\gamma}$ genel helistir.

İspat: γ nın çatılandırılmış eğrisi $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ olsun. η_2-doğrultu eğrisi tanımından $\hat{T}(s)=\hat{\gamma}'(s)=\eta_2(s)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\gamma,\ \eta_2-\text{slant helis} &\Leftrightarrow \langle \eta_2,\upsilon\rangle=\cos\varphi \quad (\varphi=\text{sabit } \upsilon=\text{sabit birim vektör})\\
&\Leftrightarrow \langle \hat{T},\upsilon\rangle=\cos\varphi\\
&\Leftrightarrow \hat{\gamma} \text{ genel helistir.}
\end{aligned}
$$

Teorem 3.1.12 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\tilde{\gamma}$, γ yönündeki η_3- doğrultu eğrisi olsun. γ, η_3- slant helistir gerek ve yeter şart $\tilde{\gamma}$ genel helistir.

İspat: γ' nın çatılandırılmış eğrisi $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ olsun. η_3- doğrultu eğrisi tanımından $\tilde{T}(s)=\tilde{\gamma}'(s)=\eta_3(s)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$
\begin{aligned}
\gamma,\ \eta_3-\text{slant helis} &\Leftrightarrow \langle \eta_3,w\rangle=\cos\varphi \quad (\varphi=\text{sabit } w=\text{sabit birim vektör})\\
&\Leftrightarrow \langle \tilde{T},w\rangle=\cos\varphi\\
&\Leftrightarrow \tilde{\gamma} \text{ genel helistir.}
\end{aligned}
$$

Tanım 3.1.13 γ, $\mathbb{R}^4$ de bir çatılandırılmış eğri ve $\{\nu,\eta_1,\eta_2,\eta_3,p,q,r\}$ de γ' nın uyarlanmış çatı elemanları olsun. γ' nın η_3- doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olsun. Eğer $\tilde{\gamma}$ eğrisinin konum vektörü her zaman γ' nın genelleştirilmiş asli normalinin ortogonal tümleyeninde bulunuyorsa, yani $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\tilde{\gamma}=\lambda_1\nu+\lambda_2\eta_2+\lambda_3\eta_3 \tag{3.8}$$

oluyorsa, $\tilde{\gamma}$ eğrisine η_3- rektifiyan eğri denir.

Teorem 3.1.14 $\tilde{\gamma}$, $\mathbb{R}^4$ de $\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_3$ eğriliklerine sahip bir çatılandırılmış eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}$ bir η_3- rektifiyan eğrisine kongurenttir gerek ve yeter şart

$$-\operatorname{sgn}(r)\left(\frac{\operatorname{sgn}(q)c\tilde{k}_3}{\operatorname{sgn}(r)\tilde{k}_2}\right)'+\left(s-\operatorname{sgn}(q)c\int\frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}ds\right)\tilde{k}_1=0. \tag{3.9}$$

dir.

İspat $\tilde{\gamma}$, η_3- rektifiyan eğrisine kongurent olsun. Tanımdan dolayı $\tilde{\gamma},\gamma$ yönündeki η_3- doğrultu eğrisidir. Teorem 3.1.10' dan dolayı $\nu=-\operatorname{sgn}(q)\tilde{B}_2$, $\eta_2=-\operatorname{sgn}(r)\tilde{N}$, $\eta_3=\tilde{T}$ şeklinde elde edilir. Bu eşitlikler (3.8) denkleminde yerine yazılıp her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lambda_3'+\operatorname{sgn}(r)\lambda_2\tilde{k}_1=1,\\
&-\operatorname{sgn}(r)\lambda_2'+\lambda_3\tilde{k}_1=0,\\
&\operatorname{sgn}(q)\lambda_1\tilde{k}_3-\operatorname{sgn}(r)\lambda_2\tilde{k}_2=0,\\
&\operatorname{sgn}(q)\lambda_1'=0.
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlikten $\lambda_1=c=\text{sabit}$ elde edilir. λ_1 değeri üçüncü eşitlikte yerine yazılırsa $\lambda_2=\dfrac{\operatorname{sgn}(q)c\tilde{k}_3}{\operatorname{sgn}(r)\tilde{k}_2}$ elde edilir. λ_2 değeride birinci eşitlikte yerine yazılırsa $\lambda_3=s-\operatorname{sgn}(q)c\int\dfrac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}ds$ edilir. Elde edilen $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ değerileri ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$-\operatorname{sgn}(r)\left(\frac{\operatorname{sgn}(q)c\tilde{k}_3}{\operatorname{sgn}(r)\tilde{k}_2}\right)'+\left(s-\operatorname{sgn}(q)c\int\frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}ds\right)\tilde{k}_1=0$$

eşitliği elde edilir.

Tersine $\tilde{\gamma}$, $\mathbb{R}^4$ te (3.9) denklemini sağlayan çatılandırılmış bir eğri olsun. X vektörü $\tilde{\gamma}$ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları yardımıyla

$$X = \tilde{\gamma} + \operatorname{sgn}(q) c\tilde{B}_2 + \frac{\operatorname{sgn}(q) c\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}\tilde{N} + \left(s - \operatorname{sgn}(q) c \int \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} ds \right)\tilde{T}$$

biçiminde yazılmış herhangi bir vektör olsun. X vektörünün türevi alınırsa $X' = 0$ elde edilir. Buradan X vektörünün sabit vektör olduğunu anlaşılır. Dolayısıyla $\tilde{\gamma}$, bir $\eta_3 -$ rektifiyan eğrisine kongurenttir.

KAYNAKÇA

Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G. (2021). On the Framed Normal Curves in Euclidean $4-$ space. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4*(4), 258-263.

Ates, M., & Akyigit, M. (2023). Framed General Helix and Framed ζ3- Slant Helix in $\mathbb{R}^4$. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta Seria Matematica, 31*(3), 15-26.

Aléssio, O. (2009). Differential Geometry of Intersection Curves in R4 of Three Implicit Surfaces. *Computer Aided Geometric Design, 26*(4), 455-471.

Chen, B. Y. (2003). When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane? *The American Mathematical Monthly, 110*(2), 147-152.

Choi, J. H. ve Kim, Y. H., (2012). Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications Applied Mathematics and Computation, 218: 9116-9124.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri I. Ankara Üniversitesi, Ankara, 1-270.

Honda, S., & M. Takahashi, M. (2016). Framed Curves in the Euclidean Space, Advances in Geometry 16, 265-276.

İlarslan, K., & Nešović, E. (2008). Some Characterizations of Osculating Curves in The Euclidean Spaces. *Demonstratio Mathematica, 41*(4), 931-940.

İlarslan, K., & Nesovic, E. (2008). Some Characterizations of Rectifying Curves in The Euclidean Space $\mathbb{R}^4$. *Turkish Journal of Mathematics, 32*(1), 21-30.

Macit, N., & Düldül, M. (2014). Some New Associated Curves of a Frenet Curve in E^3 and E^4. *Turkish Journal of Mathematics, 38*(6), 1023-1037.

Williams, M. Z. ve Stein, F. M., (1964). A Triple Product of Vectors in Fourspace, *Mathematics Magazine, 37*(4): 230-235.