

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİNİN KİSMİ TOPLAMLARININ  
BÖLÜNEBİLİRLİKLERİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAMAZAN YALÇIN

TEZ DANIŐMANI  
PROF. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2026

10777407

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİNİN KİSMİ TOPLAMLARININ  
BÖLÜNEBİLİRLİKLERİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAMAZAN YALÇIN

TEZ DANIŐMANI  
PROF. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2026

10777407

## BEYAN

Fibonacci ve Benzeri Sayı Dizilerinin Kısmi Toplamlarının Bölünebilirlikleri ve Uygulamaları Üzerine adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.		
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<input type="checkbox"/>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR</b>
X		
<b>Destek alındı ise;</b>		
<b>Destekleyen kurum;</b>		
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)		
2- TÜBİTAK		
Diğer;..... .....		
<b>ETİK KURUL onayı var ise;</b>		
<b>ETİK KURUL karar tarih/sayı:</b>	...../..... .....	

**Ramazan YALÇIN**

../../2026

**İmza**

## ÖN SÖZ

Bu tezin ortaya çıkış sürecinde bilimsel rehberliği, sabrı ve yapıcı eleştirileriyle her aşamada yanımda olan, yüksek lisans tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmanın yürütülmesinde bilgisi, tecrübesi ve önerileriyle beni yönlendirerek bana yol gösteren ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. İlker İNAM'a, en içten teşekkürlerimi sunarım. Her koşulda yanımda olan başta kıymetli eşim Leyla YALÇIN, kızım Beyza YALÇIN ve oğlum Osman Emre YALÇIN 'a ve dostlarıma moral ve sabırları için teşekkür ederim. Onların desteği olmasaydı bu çalışma tamamlanamazdı. Tezimin yazımında bana destek olan Yunus GÜNEŞ'e teşekkür ediyorum.

Son olarak yazım sırasında ve oluşan aksaklıklarda destek veren ve işleri yoluna koymaya gayret gösteren Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü personeline ve lisans hayatım boyunca matematik öğrenimim ve eğitimimde emekleri olan Dumlupınar Üniversitesi'ndeki kıymetli hocalarıma bana kattıkları her şey için teşekkürü bir borç bilirim.

**Ramazan YALÇIN**

**2026**

## ÖZET

### FİBONACCİ VE BENZERİ SAYI DİZİLERİNİN KISMİ TOPLAMLARININ BÖLÜNEBİLİRLİKLERİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde Fibonacci sayılarının temel özellikleri verilmiş ve kısmi toplamları tanımlanmıştır. Bu kısmi toplamların ilginç özellikleri vardır. Örneğin ilk 10 Fibonacci sayısının toplamı tam olarak 7. Fibonacci sayısının 11 katına eşittir. Literatürde yer alan güncel bir makale incelenerek bu tarz bir hesaplamanın hem Fibonacci sayıları hem de diğer sayı dizilerinde yapılıp yapılamayacağı sorusuna cevap aranmıştır. Çalışmanın özgün kısmını oluşturan beşinci ve son bölümünde ise Ramanujan-Brocard benzeri bazı Diophantine denklemlerinin çözümleri bulunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Fibonacci sayıları, Fibonacci sayılarının kısmi toplamları, Ramanujan-Brocard denklemi

## **ABSTRACT**

### **ON THE DIVISIBILITY OF PARTIAL SUMS OF FIBONACCI AND SIMILAR SEQUENCES OF NUMBERS AND THEIR APPLICATIONS**

This study, consisting of five parts, begins with a presentation of the fundamental properties of Fibonacci numbers and the definition of their partial sums. These partial sums possess interesting characteristics. For example, the sum of the first 10 Fibonacci numbers is exactly 11 times the 7th Fibonacci number. A recent article in the literature was examined to explore whether this type of calculation could be applied to both Fibonacci numbers and other number sequences. The fifth and final part of the study, which constitutes the original component, provides solutions to some Diophantine equations similar to the Ramanujan-Brocard equation.

**Keywords:** Fibonacci numbers, partial sums of Fibonacci numbers, Ramanujan-Brocard equation

## İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ.....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT .....	iii
TABLolar LİSTESİ.....	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ: FİBONACCİ SAYILARI VE ÖN HAZIRLIK.....	1
2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ ÇARPIMLARI.....	6
2.1. Kısmi Toplamların Bölünebilirliği .....	11
2.2. Maksimallik .....	13
2.2.1. Tek ve Üçgenel Örüntüler .....	15
3. FİBONACCİ BENZERİ SAYI DİZİLERİ ÜZERİNDE BENZER SONUÇLAR.....	18
3.1. Lucas Sayıları İçin Metot .....	18
4. GENEL LUCAS DİZİLERİ VE DİĞER DİZİLER .....	26
4.1. Jacobsthal Dizisi .....	29
4.2. Pell Sayıları .....	30
4.3. Tribonacci sayıları .....	32
5. BROCARD-RAMANUJAN BENZERİ BİRKAÇ DENKLEM.....	34
KAYNAKÇA .....	38

## TABLolar LİSTESİ

	Sayfa
<b>Tablo 1.1.</b> İlk $n$ Fibonacci sayısının toplamının $m$ . terimi çarpı $z = L_i$ durumu .....	3
<b>Tablo 2.1.</b> $n - 3m$ 'nin değerleri .....	14
<b>Tablo 2.2.</b> $n$ 'nin üçgensel sayı olma durumu .....	15
<b>Tablo 2.3.</b> Tek sayı örüntüsü .....	16
<b>Tablo 2.4.</b> $n$ üçgensel, $m$ tek sayı .....	16
<b>Tablo 3.1.</b> $S_n^L$ 'nin bölünebilirliği .....	19
<b>Tablo 4.1.</b> Pell sayıları.....	31
<b>Tablo 4.2.</b> Tribonacci-benzeri sayı dizileri ve kısmi toplamlar.....	33

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{Z}$  : Tamsayılar kümesi

## 1. GİRİŞ: FİBONACCİ SAYILARI VE ÖN HAZIRLIK

Bu bölümde çalışmanın esas konusunu oluşturan sayı dizilerinden Fibonacci sayıları tanıtılıp, çalışmanın ön hazırlığı yapılacaktır.

### Tanım 1.1.

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

ve  $n > 1$  için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

tekrarlamalı bağlantısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayısı denir. Böylece ilk Fibonacci sayıları

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

şeklindedir.

Fibonacci benzeri sayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

**Tanım 1.2.**  $S_n$  tam sayı dizisini göz önüne alalım. Eğer  $S_n$  sayı dizisi Fibonacci dizisi gibi

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

şeklinde tekrarlamalı bağıntıya sahipse bu durumda  $S_n$ 'e Fibonacci benzeri sayı dizisi denir.

Fibonacci ve benzeri sayı dizilerinin terimlerinin belirli bir modda çalışılması ilgi çekici sonuçlara yol açar. Örneğin; dikkat edilirse Fibonacci sayısının ilk 10 teriminin toplamı mod 11'de 0'a denktir, bu toplam tam olarak  $F_7$ 'nin 11 katına eşit olur. O halde bu sonuç oyunlaştırılıp ilköğretim matematik farkındalığına katkı sağlayabilir. Öte yandan bu sonuç geliştirilerek Fibonacci benzeri sayılara uygulanabilir.

**Tanım 1.3.**  $F_n$   $n$ . Fibonacci sayısı olsun.  $F_1$  den  $F_n$ 'e kadar olan ilk  $n$  Fibonacci sayısının toplamını  $S_n^F$  olarak tanımlayalım.

O halde Fibonacci sayılarının tekrarlanma bağıntısını kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 1.4. (Byrapuram, vd., 2024)**

$$S_n^F = \sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

olur.

**Örnek 1.5.**

$$S_{10}^F = 11 \cdot F_7$$

olur. Gerçekten de

$$S_{10}^F = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 55 = 11 \cdot 13 = 143$$

olur.

Amaca uygun olarak işlemleri zihinden yapabilmek için, ilk  $n$  Fibonacci sayısının toplamını bölen en büyük Fibonacci sayısı bulunmalıdır. Bu bölümde bu amaçlanmaktadır.

Lucas sayıları  $L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  olmak üzere  $n > 1$  için tıpkı Fibonacci dizisi gibi

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

tekrarlamalı bağıntı ile tanımlanır.

Yukarıdaki soruyu yeniden formülize edecek olursak

$$S_n^F = z F_m$$

eşitliği elde edilir. Buradaki  $z$  çarpanı ve  $m$  indisi için bir bilgisayar programı yardımıyla bu değerlerin aslında  $z = L_i$  olduğu (Byrapuram vd, 2024)'te gösterilmiştir.

Dikkat edilirse  $m, z$  ve  $i$  değerlerine  $n$ 'nin bir fonksiyonu gözüyle bakılabilir. Bunu vurgulamak amacıyla bu değerler  $m_n, z_n, i_n$  ile gösterilecektir. Bazı  $n$  değerleri için Tablo 1.1'de değerler verilmiştir.

**Tablo 1.1.** İlk  $n$  Fibonacci sayısının toplamının  $m$ . terimi çarpı  $z = L_i$  durumu

Toplamdaki $n$ elemanlarının sayısı	$m$ indisi	$z$ çarpanı	$z$ 'nin $i$ indisi
1	2	1	1
2	3	1	1
3	3	2	0
4	2	7	4
5	4	4	3
6	5	4	3
7	4	11	5
8	4	18	6
9	6	11	5
10	7	11	5
11	6	29	7
12	6	47	8
13	8	29	7
14	9	29	7
15	8	76	9
16	8	123	10
17	10	76	9
18	11	76	9

$n > 3$ ' den başlamak üzere bu  $m$  ve  $i$  sayılarını kullanarak yeni sayı dizileri oluşturulmuş ve bu sayı dizileri OEIS<sup>1</sup>'de (tamsayıların online ansiklopedisi) sırasıyla A372048 ve A372049 etiketleri ile verilmiştir. Gerçekten de bu sayı dizilerinin bazı terimleri aşağıda sıralanmıştır.

2, 3, 2, 2, 4, 5, 4, 4, ...

ve

1, 1, 0, 4, 3, 3, 5, 6, 5, 5, 7, 8, 7, 9, 10, ...

---

<sup>1</sup> www.oeis.org

olarak verilir.

Bu sayılara dikkat edilirse  $n > 3$  için

$$m_{n+4} = m_{n+1} \text{ ve } i_{n+4} = m_{n+2}$$

özdeşlikleri sağlanır ve bu sonuç (Byrapuram vd, 2024)'de bir teorem olarak verilmiştir.

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında oldukça iyi bilinen

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n$$

özdeşliği mevcuttur.

Öte yandan (Gee, 1996-1997)' e göre aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

$$F_{2n} + (-1)^n = F_{n-1}L_{n+1}$$

$$F_{2n} - (-1)^n = F_{n+1}L_{n-1}$$

$$F_{2n+1} + (-1)^n = F_{n+1}L_n$$

$$F_{2n+1} - (-1)^n = F_nL_{n+1}$$

Üzerinde çalışılan problem Fibonacci sayılarının kısmi toplamları üzerine olduğu için  $n$ 'nin özel durumları için özdeşlikler tekrar yazılacaktır. Yani;

$$F_{4k+2} - 1 = F_{2k}L_{2k+2} = S_{4k}^F$$

$$F_{4k+4} - 1 = F_{2k+3}L_{2k+1} = S_{4k+2}^F$$

$$F_{4k+3} - 1 = F_{2k+2}L_{2k+1} = S_{4k+1}^F$$

$$F_{4k+5} - 1 = F_{2k+2}L_{2k+3} = S_{4k+3}^F$$

Yaklaşık olarak  $n$  Fibonacci sayısının toplamı dikkatlice incelenerek  $\frac{n}{2}$  indisine sahip Fibonacci sayısı ile bölünebildiği görülebilir.

Ancak burada problem bu özellikteki en büyük indisi bulmaktır. Bunu yapabilmek adına ilk olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımlarının özellikleri incelenecektir.

## 2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ ÇARPIMLARI

Fibonacci sayılarının toplamlarının aslında Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımları olduğu görülmüştür. Bu kısımda bir Fibonacci sayısı ile bir Lucas sayısının çarpımının kaç farklı şekilde yazılabilir sorusuna cevap aranacaktır. Daha kesin olarak indisler negatif olmayan tam sayılar olmak üzere  $F_a L_b = F_c L_d$  olacak şekilde tüm  $a, b, c, d$  sayılarını bulmaya çalışacağız. Bunun için aşağıdaki teorem verilecektir.

**Teorem 2.1. (Byrapuram vd., 2024)** İndisler negatif olmayan tam sayılar olmak üzere eğer

$F_a \cdot L_b = F_c \cdot L_d$  ise aşağıdaki önermelerden biri doğrudur.

1.  $a = c$  veya  $b = d$  dir, ki bu durumda  $F_a \cdot L_b = F_a \cdot L_b$  olur.
2.  $a = c = 0$  dir, ki  $F_0 \cdot L_b = F_0 \cdot L_d = 0$  olur.
3.  $a = 1, c = 2$  ve  $b = d$  dir, ki bu durumda  $F_1 \cdot L_b = F_2 = L_b$  olur. ( $F_1 = F_2 = 1$ ) benzer durum  $a = 2, c = 1, b = d$  için de geçerlidir.
4.  $a = b = k$   $c = 2k$  ve  $d = 1$  dir, ki bu durumda  $F_k L_k = F_{2k} L_1 = F_{2k}$  olur.
5.  $(a, b, c, d)$  sıralı dördlüsü  $(1,3,3,0), (2,3,3,0), (3,1,1,0), (3,1,2,0)$  ve  $(3,2,4,0)$  dördlülerinden birisidir.

Burada çarpım 2, 4 veya 6 ise istisnalar mevcuttur. Bu istisnalar tam olarak;

$$F_1 L_0 = F_2 \cdot L_0 = F_3 L_1 = 2, \quad F_1 L_3 = F_2 L_3 = F_3 L_0 = 4 \text{ ve } F_3 L_2 = F_4 L_0 = 6$$

**İspat.** Kanıtın tüm durumları için

$$F_{a+b} = F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b}$$

özdeşliği kullanılacaktır, ki bu özdeşlik  $F_a L_b = F_c L_d$  eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b} = F_{c+d} + (-1)^d F_{c-d}$$

elde edilir. Genellik bozulmadan  $a + b \geq c + d$  olduğunu kabul edebiliriz. İspat 4 aşamada yapılacaktır.

### 1. Durum.

Eğer  $a$  veya  $c$ 'den birisi sıfır ise diğeri de sıfır olur ki, böyle bir durumda teoremdaki 2. durum elde edilir. Böylece ispatın geriye kalan kısmında  $a$  ve  $c$ 'nin pozitif olduğu kabul edilecektir.

#### 1. Durum.

$b = 0$  olsun. Bu durumda

$$2F_a = F_{c+d} + (-1)^d F_{c-d}$$

elde edilir. Yukarıdaki kabul gereği  $b = 0$  olduğundan  $a \geq c + d$  kabulü geçerlidir. Bu ise ancak ve ancak  $c = a$  ve  $d = 0$  olması ile ilgili durumlardır. Böylece yukarıdaki 1.durum elde edilir.

Bundan böyle  $b$ 'nin pozitif olduğu kabul edilecektir.

#### 2. Durum.

$d = 0$  olduğu kabul edilsin, bu durumda  $F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b} = 2F_c$  elde edilir.  $a$  ve  $b$  pozitif olduğundan  $|a - b| \leq a + b - 2$  elde edilir. Bu ise  $c < a + b$  olmasını gerektirir. Böylece 3 alt durum ortaya çıkar. Bunlar

$$c = a + b - 1, c = a + b - 2 \text{ ve } c < a + b - 2$$

şeklindedir.

#### Alt Durum 1.

$c = a + b - 1$  olsun. Bu durumda  $F_{c+1} + (-1)^b F_{a-b} = 2F_c$  elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$(-1)^b F_{a-b} = F_c - F_{c-1} = F_{c-2}$$

elde edilir. Kabul gereği  $c$ ,  $a \pm b$  den farklı işarete sahiptir. O halde

$$|c - 2| \neq |a - b|$$

olur.

O halde  $F_{c-2} = 1$  elde edilir, bu ise  $c - 2$  ve  $|a - b|$  değerlerinin  $\{-1,1,2\}$  kümesinde değiştiğini gösterir.

$c - 2 = 1$  ve  $|a - b| = 2$  olsun. Bu taktirde  $a + b = c + 1 = 2$ , olur ancak  $|a - b| = 2$  olduğundan,  $a$  veya  $b$ ' den birisi sıfır olan ki;

Bu da teoremin 1. ya da 2. durumuna karşılık gelir.

$c - 2 = 1$  ve  $|a - b| = 1$  olsun. Bu durumda  $a + b = c + 1 = 4$  olur ve  $|a - b| = 2$  olduğundan  $a$  veya  $b$  1 ya da 3 olur. Her iki durum göz önüne alınarak tek bir çözüm elde edilir ki bu  $(a, b, c, d) = (1, 3, 3, 0)$  olur. Bu ise teoremin 5. önermesindeki istisnai durumlardan birisidir.

$c - 2 = 2$  ve  $|a - b| = 1$  olsun. Böylece  $a + b = c + 1 = 5$  olsun ve  $|a - b| = 1$  olduğundan  $a$  veya  $b$  2 ya da 3 olacaktır. Her iki durumu göz önüne alınarak tek bir çözüm elde edilir ki bu  $(a, b, c, d) = (3, 2, 4, 0)$  olur. Bu ise teoremin 5. önermesindeki istisnai durumlardan biridir.

**Alt Durum 2.**  $c = a + b - 2$  olduğunu kabul edelim. Böylece  $F_{c+2} \pm F_{|a-b|} = 2F_c$  elde edilir. Bu ifade sadeleştirilir ise

$$-F_{|a-b|} = F_c + (F_c - F_{c+2}) = F_c - F_{c+1} = -F_{c-1}$$

olur.  $c - 1$  ifadesinin 1 veya 2 ile eşit olması durumu hariç  $|a - b|, c - 1$ ' e eşit olmak zorundadır. Ancak  $a + b = c + 2$  olduğundan ve  $a$  ile  $b$  arasındaki toplam ve mutlak fark farklı işaretlere sahip olduğundan  $a$  ve  $b$ ' nin tam sayı olmadığı sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir.

Şimdi  $c - 1, 1$  veya  $2$  olma durumunu göz önüne alalım. Eğer  $c - 1 = 1$  ve  $|a - b| = 2$  ise bu durumda  $a + b = c + 2 = 4$  olur. Böylece  $a$  ve  $b$  1 ya da 3'e eşit olur.

Her iki durum dikkate alındığında tek çözüm  $(3,1,2,0)$  olur ki, bu çözüm teoremin 5. önermesinde yer alan istisnalardan birisidir.

Eğer  $c - 1 = 2$  ve  $|a - b| = 1$  ise bu durumda  $a + b = c + 2 = 5$  olur. Böylece  $a$  ve  $b$  2 ya da 3'e eşit olur. Sonuç olarak teoremin 5. önermesindeki bir diğer istisnai çözüm olan  $(2, 3, 3, 0)$  elde edilir.

### Alt Durum 3.

Dikkat edilirse  $2F_c - (-1)^b F_{a-b}$  değeri  $2F_{a+b-3} + F_{a+b-2} = F_{a+b-3} + F_{a+b-1}$  değerinden büyük değildir. Bu değer ancak  $a + b - 3 = 1$  olduğundan  $F_{a+b}$ 'ye eşit olabilir. Böylece  $c = 1$  ve  $a + b = 4$  değerlerini verir. Bu değerler ise  $F_4 + (-1)^b F_{a-b} = 2F_1$  veya denk olarak  $(-1)^b F_{a-b} = -1$  olur. Buradan çözüm olarak yine istisnalardan biri olarak  $(3, 1, 1, 0)$  elde edilir.

### 3. Durum.

Bundan böyle tüm indislerin pozitif olduğu kabul edilecektir. Bu takdirde

$$|F_{a-b}| \leq F_{a+b-2} \text{ ve } |F_{c-d}| \leq F_{c+d-2}$$

böylece

$$F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b} \geq F_{a+b} - F_{a+b-2} = F_{a+b-1}$$

ve

$$F_{c+d} + (-1)^d F_{c-d} \leq F_{c+d} + F_{c+d-2} \leq F_{c+d+1}$$

olur.

Bu ise ya  $c = 1$  ya da  $d = 2$  veya  $c = 2$  ya da  $d = 1$  olmasını gerektirir.

Bu durumlar ise teoremin 3. önermesindeki değerlere karşılık gelir. Bundan böyle

$$F_{c+d} + F_{c+d-2} < F_{c+d+1}$$

ve böylece

$$F_{a+b-1} \leq F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b} = F_{c+d} + (-1)^d F_{c-d} < F_{c+d+1}$$

Eşitsizliğinin gerektirdikleri, böylece  $a + b - 1 < c + d + 1$  veya buna denk olarak  $a + b < c + d + 2$  olur. Bu son ifade önceki kabul olan  $c + d \leq a + b$  eşitsizliği ile birleştirilerek  $c + d \leq a + b \leq c + d + 1$  olur. İspatın geriye kalan iki alt durum olarak verilecektir.

1. Alt Durum.

$a + b = c + d$  olsun. Yukarıdaki eşitlikte  $F_{a+b} = F_{c+d}$  yerine yazılırsa  $(-1)^b F_{a-b} = (-1)^d F_{c-d}$  olur. Buradan  $F_{|a-b|} = F_{|c-d|}$  elde edilir. Üstelik  $a + b$  ve  $c + d$  aynı işaretli olduğundan  $|a - b|$  ve  $|c - d|$  aynı işarete sahip olur. Böylece  $|a - b| = |c - d|$  olur.  $(a, b)$  ve  $(c, d)$  ikilileri için mutlak fark birbirine eşit olduğundan iki durum söz konusu olur. Bunlar  $a = c$  ve  $b = d$  veya  $a = d$  ve  $b = c$  olur. İlk durum teoremin 1. önermesine karşılık gelir. 2. durum ise

$$(-1)^d F_{c-d} = (-1)^a F_{b-a}$$

olur. Diğer yandan bize  $(-1)^b F_{a-b} = (-1)^d F_{c-d}$  olduğu verilmişti. Buradan hareketle  $(-1)^b F_{a-b} = (-1)^a F_{b-a}$  olduğu elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak  $(-1)^b F_{a-b} = (-1)^a F_{b-a} = (-1)^a (-1)^{b-a+1} F_{a-b} = (-1)^{b+1} F_{a-b}$  elde edilir. Böylece  $a - b = 0$  olur ki,  $a = c = b = d$  olur. Bu ise teoremin 1. önermesine karşılık gelir.

1. Alt Durum.

$a + b = c + d + 1$  olsun. Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$F_{a+b} + (-1)^b F_{a-b} = F_{a+b} + (-1)^d F_{c-d}$$

buradan

$$F_{a+b} - F_{a+b-1} = F_{a+b-2} = (-1)^d F_{c-d} - (-1)^b F_{a-b}$$

elde edilir. Diğer yandan  $|a - b| \leq a + b - 2$  olduğunu biliyoruz. Şimdi  $|a - b| = a + b - 2$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde ya  $a$  ya da  $b$  değeri 1 olmak zorundadır.  $a = 1$  değerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$F_{b-1} = (-1)^d F_{c-d} - (-1)^b F_{1-b} = (-1)^d F_{c-d} + F_{b-1}$$

benzer şekilde  $b = 1$  yerine yazılırsa

$$F_{a-1} = (-1)^d F_{c-d} + F_{a-1}$$

her iki durumda da  $F_{c-d} = 0$  elde edilir. Bu ise  $c = d$  ve  $a = 2c$  olmasını gerektirir. Bu da teoremin 4. durumuna karşılık gelir.

Sırada  $|a - b| < a + b - 2$  durumu ele alınacaktır. O halde  $|c - d| \leq c + d - 2 < a + b - 2$  üstelik  $a - b$  ve  $c - d$  farklı işaretlere sahiptir. Buradan  $|a - b| = a + b - 4$  ve  $|c - d| = a + b - 3 = c + d - 2$  elde edilir. Böylece  $a$  ve  $b$  den biri 2,  $c$  ve  $d$ 'den birisi 1 olur. Ayrıca diğer iki değer birbirine eşit çıkar. Bu dört durum  $(a, b, c, d)$  yerlerine yazılırsa  $(2, b, 1, b)$  teoremin 3. şıkkına karşılık gelir.  $(a, 2, 1, a)$  durumu  $F_a = L_a$  durumuna karşılık gelir, ki imkansızdır. Diğer bir imkânsız durum ise  $(2, b, b, 1)$  ve  $(a, 2, a, 1)$  durumlarıdır ki ilkinde  $L_b = 2F_b$  ikincisinde  $F_a = 2F_a$  durumları vardır. Dikkat edilirse ikinci özdeşlik hiçbir pozitif  $a$  sayısı için doğru olamaz.

Bu ise ispatı bitirir.

## 2.1. Kısmi Toplamların Bölünebilirliği

Dikkat edilir ise kısmi toplamların bir Fibonacci sayısını böldüğü durumlarda genellikle sonuç olarak bir Lucas sayısı elde edilir. Bu durumlar aşağıda açıklanacaktır.  $S_n^F$  ile  $n$  Fibonacci sayısının kısmi toplamı gösterilsin. Biliyoruz ki

$$S_n^F = F_{n+2} - 1$$

olur. Fibonacci sayılarının Binet formülü yardımıyla bu kısmi toplamların yaklaşık olarak  $\frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}$  olduğu görülebilir. Burada  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  'dir. Öte yandan  $F_m$  sayısı  $\frac{\varphi^{m+2}}{\sqrt{5}}$  değerine oldukça çok yakındır. O halde  $\frac{S_n^F}{F_m}$  kesri  $\varphi^{n-m+2}$  yakın olur. Bu ise  $L_{n-m+2}$  değerine yakındır. Bu ise bize Fibonacci sayılarının kısmi toplamları üzerinden Lucas sayıları ile ilişkisini ortaya koyar. Aşağıdaki teoremde  $\frac{S_n^F}{F_m}$  oranının hangi şartlarda Lucas sayısından en fazla 1 birim uzaklıkta olduğunu verir.

**Teorem 2.1.1. (Byrapuram, vd., 2024)** Eğer  $n - 3m \leq -4$  ve  $n \geq 11$  ve  $n - m \geq 0$  ise bu takdirde

$$\left| \frac{F_{n+2} - 1}{F_m} - L_{n-m+2} \right| \leq 1$$

olur.

**İspat.**

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+2} - 1}{F_m} - L_{n-m+2} &= \frac{\frac{\varphi^{n+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m}{\sqrt{5}}} - \left( \varphi^{n-m+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \right) \\
&= \frac{\varphi^{n+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - \sqrt{5}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \varphi^{n-m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{\varphi^{n+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - \sqrt{5} - \varphi^{n+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m \varphi^{n-m+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{-\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - \sqrt{5} + (-1)^m \varphi^{n-2m+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{-\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - \sqrt{5} + \varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - (-1)^m \varphi^{n-3m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{-\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \frac{\sqrt{5}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \frac{\varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + (-1)^m \varphi^{n-3m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2}
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\left| \frac{F_n - 1}{F_m} - L_{n-m+2} \right| \leq \frac{\varphi^{-n-2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \frac{\sqrt{5}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \frac{\varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \varphi^{n-3m+2} + \varphi^{m-n+2}$$

elde edilir.  $n - 3m \leq -4$  ve  $n \geq 11$ ,  $\frac{n+4}{3} \leq m$  ve  $m \geq 5$  elde edilir. Bu değerler teker teker kullanılarak kestirim yapılacaktır.

$m \geq 5$  için  $\frac{1}{\varphi^m - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} < 0,09$  olur.  $n \geq 11$  için  $\varphi^{-n-2} < 0,002$  elde edilir. Üstelik

$\sqrt{5} < 2,24$ ' tür. Üç terim için  $n - 4m + 2 \leq -m - 2$  ve  $m \geq 5$  olduğunu kullanarak

$$n - 4m + 2 \leq -7$$

olur.

Buradan  $\varphi^{-7} < 0,035$  elde edilir. Tüm bu değerler bir araya getirilerek

$$0,09(0,002 + 2,24 + 0,035) < 0,205$$

olur. Teoremin ifadesindeki koşullar kullanılarak ve bu koşullar için elde edilen kestirmeler yukarıdaki kestirmeler ile birleştirilerek

$$\left| \frac{F_{n+2} - 1}{F_m} - L_{n-m+2} \right| \leq 0,205 + 0,382 + 0,382 = 0,969 < 1$$

olur ki bu da istenilen sonuçtur.

**Sonuç 2.1.2. (Byrapuram, vd., 2024)** Eğer  $n - 3m \leq -4$  ve  $n \geq 11$  ve  $n - m \geq 0$  ve  $F_m | F_{n+2} - 1$  ise, o zaman

$$\frac{F_{n+2} - 1}{F_m} = L_{n-m+2}$$

olur.

**İspat.** Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafından tam sayı olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

Teorem 2.1.1 gereği ikisinin arasındaki fark 1'den küçüktür. Bu ise

$$\frac{F_{n+2} - 1}{F_m} = L_{n-m+2}$$

olmasını gerektirir.

## 2.2. Maksimallik

Bu bölümde aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

**Teorem 2.2.1. (Byrapuram, vd., 2024)**  $n = 3$  durumu istisnası hariç  $m_{4k+1} = m_{4k+3} = m_{4k+4} = 2k + 1$  ve  $m_{4k+2} = 2k + 3$  elde edilir. Buna ek olarak  $Z_{4k+1} = L_{2k+1}$ ,  $Z_{4k+3} = L_{2k+3}$  ve  $Z_{4k+4} = L_{2k+4}$  olur.

**İspat.** Bölünebilirlik örüntüsü yukarıdaki eşitliklere karşılık gelir. Eğer  $n = 3$  ise bu durumda  $k = 0$  elde edilir ve böylece genel örüntü kuralı  $S_3^F = 4 = F_2 L_3 = 1 \cdot 4$  sonucunu verir. Diğer tüm durumlardan farklı olarak sıradaki Fibonacci sayısı olan  $F_3$  çarpımındaki  $L_3$  Lucas sayısını böler ve böylece  $S_3^F$  kısmi toplamı daha büyük bir  $F_3$  Fibonacci sayısı ile bölünebilen ve böylece

$S_3^F = 2.2 = 2F_3$  olur böyle ki  $n = 3$  durumundaki istisnayı açıklar. Dikkat edilirse 2 bir Lucas sayısı olduğu için bu son eşitlik  $S_3^F = F_3L_0$  olarak yazılabilir. Pari/GP benzeri bir bilgisayar programı kullanılarak  $n \leq 10$  için  $m_n$  sayısının maksimal olduğu gösterilebilir. Böylece  $n \geq 11$  olduğu kabul edilebilir.

Bundan böyle  $n \geq 11$  olarak kabul edeceğiz.  $F_n | F_{n+2} - 1$  olduğundan  $(n + 2) - m \geq 1$  ve buradan  $n - m \geq -1$  elde edilir. Kolayca görülebilir ki  $n > 1$  için

$$1 < \frac{F_{n+2} - 1}{F_{n+1}} < 2$$

elde edilir. Buradan  $\frac{F_{n+2}-1}{F_{n+1}}$  sayısının bir tam sayı olmadığı sonucuna varılır. O halde  $n - m \geq 0$  dır.

Teorem ifadesinde yer alan  $n$  ve  $m$  değerleri için  $n - 3m$ 'nin değerlerini aşağıdaki tablodaki gibi dikkate alacağız.

**Tablo 2.1**  $n - 3m$ 'nin değerleri

$n$	$m$	$n - 3m$
$4k + 1$	$2k + 2$	$-2k - 5$
$4k + 2$	$2k + 3$	$-2k - 7$
$4k + 3$	$2k + 2$	$-2k - 3$
$4k + 4$	$2k + 2$	$-2k - 2$

Özel olarak  $n \geq 11$  için  $n - 3m \leq -4$  elde edilir. İspatta olmayana ergi metodu kullanılacağından öyle bir  $m'$  tam sayısının bulunabileceğini kabul edeceğiz ki  $m' > m$  olduğunda  $F_{m'} | F_{n+2} - 1$  olur. Böylece  $m'$  mutlaka

$$n - 3m' < n - 3m \leq -4$$

Sonuç 2.1.2. gereğince  $n \geq 11$  için

$$\frac{F_{n+2} - 1}{F_m} = L_{n-m+2} \text{ ve } \frac{F_{n+2} - 1}{F_{m'}} = L_{n-m'+2}$$

elde edilir. Böylece  $F_m L_{n-m+2} = F_{m'} L_{n-m'+2}$  gibi bir eşitlik elde edilirdi.  $m' > m > 1$  ve  $n - m > n - m' \geq 4$  olduğundan Önerme 1.'den  $m = m'$  olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

### 2.2.1. Tek ve Üçgensel Örüntüler

Bu bölümde yukarıdaki tabloda verilen özellikler için bir örüntü elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle Fibonacci sayı toplam formülündeki üçgensel sayı örüntüleri elde edilme çalışılacaktır.

İlk olarak  $n$  sayısının bir üçgensel sayı olduğu kabul edilsin.  $m$  indeksli ve buna karşılık gelen Lucas sayısı için bir formül elde etmek adına Tablo 2.2'deki 2. ve 3. sütunlardan  $\frac{k.(k+1)}{2}$  .inci terimler alınacaktır. İlk değerleri bir arada gösteren tablo aşağıda gösterilmiştir.

**Tablo 2.2**  $n$ ' nin üçgensel sayı olma durumu

Toplamdaki $n$ 'lerin sayısı	$m$ indeksi	$z$ çarpanı	$z$ 'nin $i$ indeksi
1	2	1	1
3	3	2	0
6	5	4	3
10	7	11	5
15	8	76	9
21	12	199	11
28	14	2207	16
36	18	15127	20
45	24	64079	23
55	28	1149851	29

(Byrapuram vd. 2024) elde edilen sonuçlar, OEIS'de yayınlanmış olup Tablo 2.2'de ikinci sütuna karşılık gelen sayı dizisini A372050 etiketi ile ve Lucas sayılarının indislerini içeren 4. sütunu ise A372051 etiketi ile verilmiştir.

İkinci olarak Tablo 2.2'de  $m$  çarpım için 4 periyotlu örüntü bulunmaktadır. Burada 4' ün her bloğunda  $m$  sütununda tam olarak bir tek sayı bulunur. Bu sayı mod 4'de 2 kalanını veren  $n$ 'ye karşılık gelir.

Böylece

$$S_{4k+2}^F = F_{2k+3}L_{2k+1}$$

örüntüsü elde edilir. Tablo 2.3'de bu örüntü verilmiştir.

**Tablo 2.3** Tek sayı örüntüsü

Toplamdaki $n$ 'lerin sayısı	$m$ indeksi	$z$ çarpanı	$z$ 'nin $i$ indeksi
2	3	1	1
6	5	4	3
10	7	11	5
14	9	29	7
18	11	76	9
22	13	199	11
26	15	521	13
30	17	1364	15
34	19	3571	17

Şimdi bu iki örüntüyü bir araya getirelim.  $n > 3$  bir üçgensel sayı ve  $m$  indeksi tek sayı olsun.

Aşağıdaki tabloda verilen  $n$  değerleri mod 4'de 2' ye denk olan ve  $\frac{k.(k+1)}{2}$  şeklinde yazılabilen sayılar için verilmiştir.

**Tablo 2.4**  $n$  üçgensel,  $m$  tek sayı

$n$	$m$	$z$ çarpanı	$i$
6	5	4	3
10	7	11	5
66	35	7881196	33
78	41	141422324	39
190	97	71420983074726546239	95
210	107	8784200221406821330636	105
378	191	3152564691982405848945267213740827495676	189

$m$ 'nin tek sayı olma durumunda bu sonuçlar Fibonacci benzeri sayı dizileri içinde doğru olur. Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde bu durum incelenecektir.  $n = 4k + 2$  ise bu durumda  $m = 2k + 3$  ve  $z = L_{2k+1}$  olur. Böylece  $i$  değerlerinin son sütununun birleşimi sütunun yarısı,  $m$  değerlerinin 2. sütununun ise son sütun +2 olduğu sonucu çıkar. Tablo 2.4'ün son sütununun A372718' de üçgensel sayılar mod 4'de ele alınırsa 8 periyotluk bir dizi elde edilir. Öyle ki bu dizinin ilk 8 terimi

0, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 0

şeklinde olur. O halde  $k$  indisinin mod 4’de 2’ye karşılık gelen değerleri mutlaka mod 8’de 3 ve 4 olmalıdır.

Bu ise Tablo 6’ nın 6 ve 0 olmak üzere iki ardışık üçgensel sayı ile başladığı, ardından bir sonraki 6 üçgensel sayı atladığı ardından iki ardışık üçgensel sayıya eşit olduğu ve bu şekilde devam ettiği anlamına gelir.

### 3.FİBONACCİ BENZERİ SAYI DİZİLERİ ÜZERİNDE BENZER SONUÇLAR

Önceki bölümde de Fibonacci sayı dizisinin toplamları için verilen sonuçlar farklı sayı dizilerine genelleştirilebilir. Bunun için gerekli olan koşul aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem 3.1. (Byrapuram, vd., 2024)** Eğer  $m_{n-1} + 1 = m_n$  ve  $z_n = z_{n-1}$  ise maksimal  $m_n$ 'yi kullanarak Fibonacci sayıları için verilen metot herhangi bir Fibonacci benzeri dizisi için geçerlidir.

**İspat.** Notasyon birliği açısından  $F_{n-1}$  kaydırılmış Fibonacci dizisini dikkate alalım. Bu dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı  $F_{n-1} - 1$  dir. Diğer yandan hipotez gereği;

$$zF_{m_{n-1}} = zF_{m_n-1}$$

Dikkat edilirse  $F_{m_{n-1}}$  yukarıda verilen kaydırılmış Fibonacci dizisinin  $m_n$ . terimidir. Öte yandan hem Fibonacci dizisinin terimleri toplamı hem de kaydırılmış Fibonacci dizisinin terimleri toplamı bunlara karşılık gelen  $m$ . terime aynı  $z$  oranıyla bölünebilir. Bu iki dizi lineer bağımsız olduğundan lineerlik gereği bu özellik herhangi bir Fibonacci benzeri diziyi genişletilebilir.

**Sonuç 3.2. (Byrapuram, vd., 2024)** Maksimal  $m$ 'yi kullanarak Fibonacci sayılarının terimlerinin toplamı için verilen metodun herhangi bir Fibonacci benzeri diziyi genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart  $n = 3$  veya  $n \equiv 2 \pmod{4}$  olmasıdır.

**İspat.** İstenilen sonucun görülmesi için  $m_n - 1 = m_{n-1}$  olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise ancak  $n \equiv 2 \pmod{4}$  olması halinde geçerlidir.

Burada Teorem 3.1 kullanılmıştır.  $n = 3$  durumu ayrıca ele alınmalıdır. Kolayca görülebilir ki Fibonacci sayısının ilk 3 teriminin toplamı her zaman 3. teriminin toplamının 2 katıdır.

#### 3.1. Lucas Sayıları İçin Metot

İlk  $n$  Lucas sayısının toplamının 0. terimi çıkartılarak  $S_n^L$  ile gösterilecektir.

$$S_n^L = \sum_{i=1}^n L_i$$

olur.

Bu toplam  $L_{n+2} - 3$  e eşit olur ve OEIS de A027961 etiketi ile verilmiştir. Bu dizinin ilk terimleri

1, 4, 15, 26, 44, 73, 120, 196, 319, 518, 840, 1361, 2204, 3568, 5775, ...

şeklindedir.

Bu bölümde aşağıdaki soruya cevap aranmaktadır:” $S_n^L = \sum_{i=1}^n L_i$  ile bölünecek şekildeki en büyük  $m$  sayısı nedir?”

Bu soruya cevap vermek adına (Byrapuram, vd., 2024)’de ilk  $n$  değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Tablo 3.1**  $S_n^L$ ’ nin bölünebilirliği

Toplamdaki $n$ ’lerin sayısı	$m$ indeksi	$z$ çarpanı
1	1	1
2	3	1
3	3	2
4	2	5
5	1	26
6	5	4
7	1	73
8	3	30
9	4	28
10	7	11
11	4	74
12	4	120
13	1	1361
14	9	29
15	3	892
16	5	525
17	1	9346
18	11	76
19	1	24473
20	6	2200

$n \equiv 2 \pmod{4}$  olsun. Bu durumda  $S_{4k+2}^L = L_{2k+3}L_{2k+1}$  olduğundan Sonuç 6'nın hipotezi sağlandığı için bu örüntü herhangi bir Fibonacci benzeri sayı dizisi için geçerlidir.  $n = 4k$  için bu toplam  $L_{4k+2} - 3$  olur.  $n$  yerine  $2k + 1$  yazılarak ve

$$L_{2n} + 3(-1)^n = 5F_{n+1}F_{n-1}$$

özdeşliği yardımıyla

$$L_{4k+2} - 3 = 5F_{2k+2}F_{2k} = 5F_{k+1}F_{2k}L_{k+1}$$

elde edilir. O halde bu toplam her zaman  $L_{k+1}$  ile bölünebilir. Üstelik kolayca görülebilir ki her zaman bu toplam 5 ile bölünebilirdir. Çarpmanı 5'e ve  $L_{k+1}$ 'e böldüğümüzde OEIS'de A372225 etiketi ile verilen aşağıdaki dizi elde edilir.

1, 4, 8, 15, 26, 44, 73, 120, 196, 319, 518, 840, 1361, 2204, 3568, 5775, ...

$n$  tek sayı olduğu zaman  $m$  değerlerinin 1, 3 veya 4 olduğu görülür.

Böylece  $m$  değerleri için 24 adımda bir tekrar eden aşağıdaki dizi elde edilir:

1, 3, 1, 1, 4, 4, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 4, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 3, 4, 4, 3, 1.

Bu diziyi  $i$  indeksi 1'den başlamak üzere  $x_i$  ile gösterelim.

$n = 2k - 1$  için ilk Lucas sayısının

$$L_{n+1} - 3 = L_{2k+1} - 3$$

toplamının  $L_{x_k}$  ile bölünebilirliğini göstermek istiyoruz.

**Teorem 3.1.1. (Byrapuram, vd., 2024)**  $\frac{L_{2k+1}-3}{L_{x_k}}$  değeri bir tamsayıdır.

**İspat.** Mod 24'deki tüm olası durumlar taranarak yapılacaktır.  $k$ 'nın mod 24'de 0, 1, 3, 4, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 18 ve 19 değerleri için  $x_k = 1$  ve  $L_1 = 1$  olduğundan sonuç aşıkardır.  $k$ 'nın mod 24'de 2, 8, 11, 17, 20 ve 23 olması halinde  $x_k = 3$  ve  $L_{x_k} = 4$  durumu elde edilir. Dikkat edilire Lucas dizisinin elemanları mod 4' de incelenirse 6 periyotlu bir örüntü elde edilir. Bu örüntünün terimleri ise 2, 1, 3, 0, 3, 3 olur.

Buradan  $n = 2k - 1$  terimin ilk tek sayıdaki teriminin toplamının 4 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şartın  $n \equiv 3 \pmod{6}$  veya buna denk olarak  $k \equiv 2 \pmod{3}$  olduğu görülür.

$k$ 'nin bu durum için verilen tüm değerleri bu özelliktedir.  $k$ 'nin  $\text{mod } 24$ 'deki 5, 6, 13, 14, 21 ve 22 durumları için  $x_k = 4$  ve  $L_{x_k} = 7$  elde edilir. Lucas dizisinin terimleri  $\text{mod } 7$ 'ye göre yazılırsa 16 periyotlu bir örüntü elde edilir ve bu örüntünün terimleri

$$2, 1, 3, 4, 0, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 3, 0, 3, 3, 6$$

şeklinindedir. Buradan  $n = 2k - 1$  için ilk tek sayıda terimin toplamının 7 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şartın  $n \equiv 9$  ve  $11 \pmod{16}$  veya denk olarak  $k \equiv 5$  ve  $6 \pmod{8}$  olduğu görülür  $k$ 'nin bu durumdaki tüm değerleri bu özelliktedir.

Fibonacci sayılarına benzer olarak iki Lucas sayısının çarpımı şeklinde yazılabileceğine dair aşağıdaki teorem verilecektir.

**Teorem 3.1.2. (Byrapuram, vd., 2024)** İndisler negatif olmayan tam sayılar olmak üzere  $L_a L_b = L_c L_d$  olsun. Bu taktirde aşağıdaki durumlardan biri doğrudur.

1.  $a = c$  ve  $b = d$ , ki bu durumda  $L_a L_b = L_a L_b$  olur.
2.  $a = d$  and  $b = c$ , ki bu durumda  $L_a L_b = L_b L_a$  olur.
3.  $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 3), (0, 0, 3, 1), (1, 3, 0, 0)$ , or  $(3, 1, 0, 0)$ , ki buna karşılık gelen eşitlik  $L_0 L_0 = L_1 L_3$ , yani  $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$  dir.

**İspat.**  $L_a$  ve  $L_b$  iki Lucas sayısı olsun. Bu durumda

$$L_{a+b} + (-1)^b L_{a-b} = L_{c+d} + (-1)^d L_{c-d}$$

olur. Bu özdeşlik yeniden düzenlenirse

$$L_{a+b} = L_{c+d} + (-1)^d L_{c-d} - (-1)^b L_{a-b}$$

olur. Genellik bozulmadan  $a \geq b$ ,  $c \geq d$  ve böylece  $a + b \geq c + d$  olduğu kabul edilebilir. İlk olarak  $b \geq 1$ ,  $c + d \leq a + b - 2$  ve  $d \geq 2$  olduğunu kabul edelim. 7. eşitliğin sağ tarafı dikkate alınırsa kabul gereği  $c \geq d \geq 2$  ve böylece  $c + d \geq 4$  ve Lucas sayıları bir terimden itibaren sürekli artan bir dizi olduğundan  $L_{a-b} \leq L_{a+b-2}$  elde edilir. Diğer yandan indisler arasındaki fark ya 0'dır ki bu durumda eşitlik sağlanır. Böylece  $L_{a-b} \leq L_{a+b-2}$  sonucu elde edilir. En az iki farka sahip negatif olmayan indisli herhangi 2 Lucas sayısı diğer Lucas sayısından kesinlikle daha büyüktür.

$$L_{c-d} = L_{(c+d)-2d} < L_{(a+b-2)-2d+2} = L_{a+b-2d} \leq L_{a+b-4}$$

Buradan  $L_{c-d} < L_{a+b-4}$  olduğu sonucuna varılır. O halde

$$\begin{aligned} L_{a+b} &= L_{c+d} + (-1)^d L_{c-d} - (-1)^b L_{a-b} \leq L_{c+d} + L_{c-d} + L_{a-b} \\ &< L_{a+b-2} + L_{a+b-4} + L_{a+b-2} < L_{a+b-1} + L_{a+b-2} = L_{a+b} \end{aligned}$$

olur. Dikkat edilirse bu eşitsizliğin çözümü yoktur. İspatı tamamlamak için geriye kalan  $b < 1, a + b = c + d, a + b = c + d + 1$  ve  $d < 2$  durumları incelenecektir.

1. Durum.  $a + b = c + d$  olsun. Bu durumda  $(-1)^b L_{a-b} = (-1)^d L_{c-d}$  olur. Negatif olmayan indisli Lucas sayıları birbirlerine eşit olmadığından  $a - b = c - d$  elde edilir. Diğer yandan  $a + b = c + d$  ve böylece  $b = d$  ve  $a = c$  olacağından bu durumlar 1. ve 2. Durum'a karşılık gelir. Bundan böyle  $a + b > c + d$  olduğu kabul edilecektir.

2. Durum.  $b = 0$  olsun. Bu durumda  $2L_a = L_{c+d} + (-1)^d L_{c-d}$  olur ki  $c + d$  ve  $c - d$   $a + b$ ' den küçük olduğu için bu durum imkansızdır. Bundan böyle  $a + b > c + d$  ve  $b > 0$  olduğu kabul edilecektir.

3. Durum.  $c, d \leq 1$  olsun. Bu durumda  $L_a L_b = 1, 2$  ve  $4$  olur ki aşikar olmayan çözümde  $(a, b) = (1, 3)$  veya  $(3, 1)$  iken  $(c, d) = (0, 0)$  olur. Bu ise 3. Duruma karşılık gelir.

4. Durum.  $c \geq 2$  ve  $d = 1$  olsun. Bu durumda  $L_a L_b = L_c$  ve  $a + b > c + 1$  olur. Böylece

$L_{a+b} + (-1)^b L_{a-b} = L_c$  ve  $b > 0$  olduğundan işaretler dikkatte alınarak  $a + b > a - b + 1$  elde edilir. Lucas sayılarının büyüme oranına göre daha önce ele aldığımız  $n = 2$  durumu hariç  $n - 1$  den düşük indisli iki Lucas sayısının toplamı olamaz.

5. Durum.  $c \geq 2$  ve  $d = 0$  olsun. O halde  $L_a L_b = 2L_c$  ve  $a + b > c$  olur. Buradan  $L_{a+b} + (-1)^b L_{a-b} = 2L_c$  buradan  $a - b < a + b - 1$  elde edilir. Şimdi  $c < a + b - 2$  durumunu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$L_{a-b} + 2L_c \leq L_{a+b-2} + 2L_{a+b-3} = L_{a+b-1} + L_{a+b-3} < L_{a+b}$$

olur. Bu durum imkansızdır, geriye  $b > 0$  ve  $c = a + b - 2$  veya  $c = a + b - 1$  durumları kalır. Buradan

$$L_{a+b} + (-1)^b L_{a-b} = 2L_{a+b-1} \quad \text{veya} \quad L_{a+b} + (-1)^b L_{a-b} = 2L_{a+b-2}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak bunlara karşılık gelen

$$(-1)^b L_{a-b} = L_{a+b-3} \quad \text{veya} \quad (-1)^b L_{a-b} = -L_{a+b-3}$$

elde edilir. İşaretler dikkate alındığından imkansız olduğu görülür.

Geriye sadece  $a + b = c + d + 1, b > 0$  ve  $d > 1$  durumları kalır.

6.Durum.  $a + b = c + d + 1, b > 0$  ve  $d > 1$  olsun. Eşitlik 7 düzenlendiğinde

$$L_{a+b-2} = (-1)^d L_{c-d} - (-1)^b L_{a-b}$$

elde edilir. Eğer  $b = 1$  ise  $(-1)^d L_{c-d} = 0$  olur ki bu durum imkansızdır.

$b > 1$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde  $a - b \leq a + b - 4$  olur. Üstelik  $c - d \leq a + b - 5$  elde edilir. Buradan aslında imkansız bir durum olan

$$(-1)^d L_{c-d} - (-1)^b L_{a-b} \leq L_{a+b-4} + L_{a+b-5} = L_{a+b-3}$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.3. (Byrapuram, vd., 2024)** Eğer  $n - 3m \leq -4$  ve  $n \geq 11$  ve  $n - m \geq 1$  ise bu takdirde

$$\left| \frac{L_{n+2} - 3}{L_m} - L_{n-m+2} \right| < 1$$

olur.

İspat. Binet formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{L_{n+2} - 3}{L_m} - L_{n-m+2} &= \frac{\varphi^{n+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \left( \varphi^{n-m+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \right) \\ &= \frac{\varphi^{n+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \varphi^{n-m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\ &= \frac{\varphi^{n+2} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3 - \varphi^{n+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m \varphi^{n-m+2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3 - (-1)^m \varphi^{n-2m+2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3 + \varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - (-1)^m \varphi^{n-3m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2} \\
&= \frac{\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+2} - 3 + \varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} - (-1)^m \varphi^{n-3m+2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-m+2}
\end{aligned}$$

buradan

$$\left| \frac{L_{n+2} - 3}{L_m} - L_{n-m+2} \right| \leq \frac{\varphi^{-n-2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \frac{3}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \frac{\varphi^{n-4m+2}}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} + \varphi^{n-3m+2} + \varphi^{m-n-2}$$

Teoremin hipotezinden  $n - 3m \leq -4$  ve  $n \geq 11$  olduğu kullanılarak  $\frac{n+4}{3} \leq m$  ve  $m \geq 5$  elde edilir.

Yukarıdaki terimler için tek tek kestirimlerde bulunacağız.  $m \geq 5$  için

$$\frac{1}{\varphi^m + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^m} < 0.091$$

ve böylece  $n \geq 11$  için  $\varphi^{-n-2} < 0.002$  elde edilir.  $n - 4m + 2 \leq -m - 2$  ve  $m \geq 5$  olduğunda  $n - 4m + 2 \leq 7$  elde edilir. O halde  $\varphi^{-7} < 0.035$  yazılabilir. İlk üç terim bir araya getirilirse

$$0.091(0.002 + 3 + 0.035) < 0.277$$

olur.  $n - 3m \leq -4$  olduğundan  $n - 3m + 2 \leq -2$  olur. O halde  $\varphi^{n-3m+2} \leq \varphi^{-2} < 0.382$  elde edilir.  $n - 3m \geq 1$  koşulu kullanılarak  $\varphi^{m-n-2} \leq \varphi^{-3} < 0.237$  kestirme elde edilir. Tüm kestirimler bir araya getirildiğinde

$$\left| \frac{L_{n+2} - 3}{L_m} - L_{n-m+2} \right| \leq 0.277 + 0.382 + 0.237 = 0.896 < 1$$

İlk  $n$  Lucas sayısının toplamını bölen Lucas sayısının maksimum indisini  $m_n^L$  ile gösterelim. Böylece aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

**Teorem 3.1.4. (Byrapuram, vd., 2024)**  $m_{4k+2}^L = 2k + 3$  olur.

Yukarıdaki teoremin ispatı Teorem 4 ile benzer şekilde verilir.

$n = 4k$  için maksimallığı ispatlamadan önce aşağıdaki teoreme ihtiyaç duymaktayız. İlk olarak teoremin ifadesinde yer alan denklik tanımını verelim  $a$  ve  $b$  herhangi iki reel sayı olsun bu durumda  $a \equiv b$  ancak ve ancak  $a$  ve  $b$ ' nin kesirli kısımları birbirine eşittir.

**Teorem 3.1.5. (Byrapuram, vd., 2024)** Herhangi  $a$  ve  $b$  tam sayısı ve bir  $c$  sabiti için aşağıdaki denklik doğrudur.

$$\frac{c + L_a}{L_b} \equiv \frac{c - (-1)^b L_{2b-a}}{L_b}$$

İspat.  $\frac{c+L_a}{L_b} \equiv \frac{c+L_a}{L_b} - L_{a-b} = \frac{c+L_a-L_bL_{a-b}}{L_b}$  yazılabilir.  $L_nL_m = L_{n+m} + (-1)^nL_{n-m}$  özdeşliği kullanılarak

$$\frac{c + L_a - L_bL_{a-b}}{L_b} = \frac{c + L_a - (L_a + (-1)^b L_{2b-a})}{L_b} = \frac{c - (-1)^b L_{2b-a}}{L_b}$$

**Teorem 3.1.6. (Byrapuram, vd., 2024)**  $m_{4k}^L = k + 1$  olur.

#### 4.GENEL LUCAS DİZİLERİ VE DİĞER DİZİLER

$P$  ve  $Q$  sabit tamsayılar olmak üzere  $U_n(P, Q)$  ve  $V_n(P, Q)$  Lucas dizileri

$$x_n = Px_{n-1} - Qx_{n-2}$$

tekrarlamalı bağıntısını sağlayan tamsayı dizileridir. Üstelik bu sayı dizileri için

$$U_0(P, Q) = 0, U_1(P, Q) = 1, V_0(P, Q) = 2 \text{ ve } V_1(P, Q) = P$$

başlangıç koşullarına sahiptir. Literatürde  $U_n$  dizisine 1. tip Lucas dizisi  $V_n$  dizisine 2. tip Lucas dizisi adı verilir. Kimi zaman  $P$  ve  $Q$  parametreleri ihmal edilip kısaca dizi için  $U_n$  yazılır. Dikkat edilirse  $(P, Q) = (1, -1)$  durumunda Fibonacci benzeri bir durum elde edilir. Bu nedenle Fibonacci benzeri sayı dizileri için verilen metodun diğer Lucas dizilerine genişletilip genişletilmeyeceği diğer bir soru olur.

İlk olarak  $U_n(P, Q)$  nun ilk  $n$  teriminin toplamını hesaplamalıyız. Bu toplamı  $S_n^U$  ile gösterelim. O halde

$$S_n^U = \sum_{i=1}^n U_i(P, Q) = \frac{QU_n - U_{n+1} + 1}{Q - P + 1}$$

olur.  $n$ . terimi  $U_{n-1}(P, Q)$  olan kaydırılmış diziyi dikkate alalım. Bu durumda ilk  $n$  terimin toplamı  $S_{n-1}^U$  olur.

**Teorem 4.1. (Byrapuram, vd., 2024)** Eğer  $S_n^U = U_n z$  ise bu takdirde  $S_{n-1}^U = U_{n-1} z$  ise bu takdirde verilen metot  $U$  ile aynı tekrarlamalı bağıntısına sahip olan tüm sayı dizileri için geçerlidir.

Dikkat edilirse burada  $\frac{QU_n - U_{n+1} + 1}{Q - P + 1}$  ifadesinin bölünebilirliğini incelemek istiyoruz. Bu nedenle ilk olarak sadeleştiği durumları inceleyeceğiz.

İlk akla gelen sadeleştirme paydanın mutlak durumunun 1 olduğu durumdur yani

$$Q - P + 1 = \pm 1$$

durumdur. Bu ise ancak  $Q = P$  veya  $Q = P - 2$  durumunda geçerli olup böyle bir durumda

$$S_n^U = \pm(QU_n - U_{n+1} + 1)$$

elde edilir. Diğer durum ise  $P = 1$  durumu olur ki bu durumda

$$S_n^U = \frac{-U_{n+2} + 1}{Q}$$

olur. Hem  $P = 1$  hemde  $Q - P + 1 = \pm 1$  durumu  $U_n(1, -1)$  ve  $U_n(1, 1)$  için sağlanır. Buradaki ilk dizi Fibonacci dizisidir diyelim. Aşağıda bu koşullarla sağlandığı farklı sayı dizilerine dair örnekler verilecektir.

**Örnek 4.2.**  $U(-1, -1)$  dizisini dikkate alalım. Bu dizinin elemanları Fibonacci sayıları olarak adlandırılır ve OEIS'de A039834 etiketi ile verilmiştir. Diğer yandan  $U_n(-1, -1) = (-1)^{n-1}F_n$  olup. Bu dizinin ilk terimleri;

$$0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, \dots$$

1'den başlamak üzere  $S_n$  kısmi toplamlar dizisi OEIS'de A355020 indisi ile verilen sayı dizisi olup ilk terimleri;

$$1, 0, 2, -1, 4, -4, 9, -12, 22, -33, \dots$$

Dikkat edilirse

$$S_n = (-1)^{n-1}F_{n-1} + 1 = -U_{n-1} + 1$$

özdeşliği doğrudur. Bu dizi Fibonacci sayılarına oldukça benzediği için maksimalite ispatında Fibonacci sayıları için verilen metot kullanılmıştır. Bu dizinin ilk  $n$  teriminin toplamını bölen  $U$  dizisinin toplamı için maksimum indeksli  $m_n^U$  ile göstereceğiz.

**Teorem 4.3. (Byrapuram, vd., 2024)** Maksimum bölünebilirlik indisi

$$m_{4k}^U = m_{4k+2}^U = 2k, m_{4k+1}^U = 2k - 1 \text{ ve } m_{4k+3}^U = 2k + 2$$

olur.

Buna karşılık gelen çarpanlar ise

$$z_{4k}^U = L_{2k-1}, z_{4k+2}^U = L_{2k+1}, z_{4k+1}^U = L_{2k+1} \text{ ve } z_{4k+3}^U = -L_{2k}$$

şeklindedir.

$m$ 'nin 1 er 1 er artığı durumu kontrol edelim. Bu durumda

$$m_{4k+2}^U = 2k = m_{4k+1}^U + 1$$

olduğu görülür. O halde  $n = 4k + 2$  için metot genel diziye genişletilebilir.

**Örnek 4.4.**  $U(1,1)$  dizisi OEIS'de A128834 etiketi ile verilmiş olup bu dizinin terimleri 6 uzunluğunda periyota sahip bir dizidir. İlk terimleri ise

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots$$

Kısmi toplamları ise 1'den başlamak üzere 6 uzunluk periyoda sahip bir dizi olup oeis.org'da A131026 etiketi ile görülebilir. İlk terimleri ise

$$1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, \dots$$

olur. Kısmi toplamlar dizisinin herhangi bir elemanı ile bölünebilir. Bu yüzden  $m$ 'nin en büyük indisi sonsuzdur diyebiliriz. Böyle bir durumda metot geçerli değildir. Genel durumu direkt olarak kontrol etmek gerekir.

1'den başlamak üzere  $a$  ve  $b$  sayıları ile başlayan keyfi bir diziyi göz önüne alalım ve bu dizi aşağıdaki şekilde devam etsin

$$a, b, b - a, -a, -b, -b + a, a, b, \dots$$

dikkat edilirse bu dizinin periyot uzunluğu 6 dır. 1 indisinden başlamak üzere kısmi toplamlar

$$a, a + b, 2b, -a + 2b, -a + b, 0, a, \dots$$

şeklindedir. O halde  $m$ 'nin en büyük indisi sonsuz olmak üzere  $n \equiv 1, 3, 5, 6 \pmod{6}$  durumları için metot her zaman geçerli olur.

**Örnek 4.5.**  $U(3,1)$  dizisi OEIS'de A001906 etiketi ile verilir ve Fibonacci dizisinin ikiye bölünmesi olarak düşünülebilir. Başka bir deyişle  $A001906(n) = F_{2n}$ :

$$0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \dots$$

$S_n$  kısmi toplamlar dizisi

$$S_n = F_{2n+1} - 1$$

olarak tanımlanır ve OEIS’de A027941 ile gösterilir. İlk terimleri ise

$$1, 4, 12, 33, 88, 232, 599, \dots$$

şeklindedir.

Buradan  $S_n = S_{2m-1}^F$  olduğu görülür. Böylece Fibonacci benzeri sayı dizileri için verilen sonuçlar burada da geçerlidir.

**Teorem 4.6. (Byrapuram, vd., 2024)**  $U(3,1)$  sayı dizisi ve herhangi bir  $n > 0$  için  $U_m$ ’nin  $S_n$  kısmi toplamlarını bölen en büyük  $m$  değeri  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ’dir.

Böylece  $n$ ’nin tek olduğu durumda

$$m_{n-1} + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} = m_n$$

olur. Yani  $n$ ’nin tek sayı olması durumunda aynı tekrarlamaya bağıntısına sahip bir genel dizi içinde metot geçerli olur.

#### 4.1. Jacobsthal Dizisi

Jacobsthal sayıları için  $J_0 = 0, J_1 = 1$  ve  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$  tekrarlamaya bağıntısı ile tanımlanır. OEIS’de A001045 ile gösterilir ve ilk terimleri

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, \dots$$

şeklindedir. Jacobsthal sayılarının kısmi toplamlarının dizisi A000975 etiketi ile OEIS’de gösterilmiştir. Bu dizi  $a(0) = 1$  ve  $a(1) = 1$  olmak üzere tekrarlamalı olarak

$$a(2n) = 2a(2n-1) \text{ ve } a(2n+1) = 2a(2n) + 1$$

olarak tanımlanır. Alternatif bir tanım olarak bu dizideki bir sayı ikili sistemde yazıldığında 2’li basamaklar dönüşümü olarak gösterilir:

$$1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, 682, 1365, 2730, 5461, \dots$$

şeklindedir. İlk  $n$  Jacobsthal sayısının toplamı  $S_n^J$  ile gösterilir ve eşitlik 9 yardımıyla aşağıdaki şekilde verilir.

$$S_{2k-1}^J = \sum_{i=1}^{2k-1} J_i = J_{2k} \quad \text{ve} \quad S_{2k}^J = \sum_{i=1}^{2k} J_i = J_{2n+1} - 1 = 2J_{2k}$$

olur.

**Teorem 4.1.1. (Byrapuram, vd., 2024)** Jacobsthal dizisi için maksimum bölünebilirlik indisi

$$m_{2k-1}^J = 2k \text{ ve } m_{2k}^J = 2n$$

iken çarpanlar

$$z_{2k-1}^J = 1 \text{ ve } z_{2k}^J = 2$$

şeklindedir.

**Teorem 4.1.2. (Byrapuram, vd., 2024)** Tüm Jacobsthal benzeri sayı dizileri için ortak metot bulunmamaktadır.

#### 4.2. Pell Sayıları

Pell sayıları  $P_n$  ile gösterilir ve  $P_0 = 0, P_1 = 1$  olmak üzere  $n > 1$  için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır. Dikkat edilirse bu dizi  $U_n(2, -1)$  birinci tip Lucas dizisidir.

Öte yandan OEIS'de A000129 etiketi ile verilir ve ilk terimleri

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots$$

şeklindedir.

Pell sayılarının kısmi toplamları  $S_n^P$  ile gösterilir. A048739 etiketine sahiptir ve ilk terimleri

$$1, 3, 8, 20, 49, 119, 288, 696, 1681, 4059, 9800, 23660, \dots$$

şeklindedir. Kolayca görülebilir ki

$$S_n^P = \frac{P_n + P_{n+1} - 1}{2}$$

$S_n^P$   $P_m$  ile bölünecek şekilde  $m_n^P$  nin en büyük değerlerini veren tablo aşağıda verilecektir.

**Tablo 4.1** Pell sayıları

Toplamdaki $n$ 'lerin sayısı	$m$ indeksi	$z$ çarpanı
1	1	1
2	1	3
3	2	4
4	3	4
5	1	49
6	1	119
7	4	24
8	5	24
9	1	1681
10	1	4059
11	6	140
12	7	140
13	1	57121
14	1	137903
15	8	816
16	9	816
17	1	1940449
18	1	4684659
19	10	4756
20	11	4756

Tablodan ilham alınarak (Byrapuram, vd., 2024)'de aşağıdaki konjektür verilmiştir.

**Konjektür 4.2.1.** (Byrapuram, vd., 2024) Pell dizisi için

$$m_{4k+1}^P = m_{4k+2}^P = 1, m_{4k-1}^P = 2k \text{ ve } m_{4k}^P = 2k + 1$$

olur.

$n \bmod 4$ ' de 0 ya da 1' e denk ise [5] ve [1]' de yer alan aşağıdaki özdeşlikler kullanılır:

$$S_{4k-1}^P = 2P_{2k}^2 \text{ ve } S_{4k}^P = 2P_{2k+1}P_{2k}$$

Bu özellikteki  $n$  sayıları için aşıkâr olmayan bir yöntem elde edilmiş olup aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem 4.2.2. (Byrapuram, vd., 2024)** Pell benzeri  $S_n$  sayı dizisi için 1 indisinden başlamak üzere ilk  $4k$  teriminin toplamı  $(2k + 1)$ . terim ile  $2P_{2k}$ 'nın çarpımıdır.

### 4.3. Tribonacci sayıları

Tribonacci sayıları  $T_n$  ile gösterilir.  $T_0 = T_1 = 0$ ,  $T_2 = 1$  olmak üzere  $n > 2$  için  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$  tekrarlamalı bağıntısı ile tanımlanır. A000073 etiketi ile gösterilir ve ilk terimleri

$$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, \dots$$

şeklindedir.

Başlangıç değerleri değiştirilerek önceki bölüme benzer olarak Tribonacci benzeri sayı dizileri aşağıdaki gibi oluşturulabilir. Tablo 9 ilk 10 terim ve ilk 10 kısmi toplamları vermektedir.

**Tablo 4.2** Tribonacci-benzeri sayı dizileri ve kısmi toplamlar

n indeksi	$n$ . terim	İlk $n$ terimin kısmi toplamı
1	$a$	$a$
2	$b$	$a + b$
3	$c$	$a + b + c$
4	$a + b + c$	$2a + 2b + 2c$
5	$a + 2b + 2c$	$3a + 4b + 4c$
6	$2a + 3b + 4c$	$5a + 7b + 8c$
7	$4a + 6b + 7c$	$9a + 13b + 15c$

n indeksi	$n$ . terim	İlk $n$ terimin kısmi toplamı
8	$7a + 11b + 13c$	$16a + 24b + 28c$
9	$13a + 20b + 24c$	$29a + 44b + 52c$
10	$24a + 37b + 44c$	$53a + 81b + 96c$

Bu tablo dikkatli şekilde incelenirse aşağıdaki 3 gözlem elde edilir:

1. İlk 3 terimin toplamı 4. terim,
2. İlk 4 terimin toplamı 4. terimin 2 katı,
3. İlk 8 terimin toplamı 7. terimin 4 katıdır.

Tribonacci  $n = 3$  için elde edilen bu gözlem herhangi bir  $n$  için genelleştirilebilir. Detaylar için (Byrapuram, vd., 2024)'de bakılabilir.

## 5.BROCARD-RAMANUJAN BENZERİ BİRKAÇ DENKLEM

Sadece tamsayı çözümleri incelenen denklemler sınıfı olarak bilinen Diophantine denklemleri, sayıların aritmetik yapısına ilişkin derin bilgiler sunduğu için sayılar teorisinin en temel ve klasik çalışma alanlarından birini oluşturur. Bu denklemler, tarihsel olarak hem teorik matematikte hem de günlük yaşamdan türeyen problemlerle ilişkili uygulamalarda önemli bir yer tutar. Ayrıca literatürde hâlen çözülememiş birçok problem bulunması, bu alanın canlılığını ve araştırmacılar açısından cazibesini sürdürmesine neden olmaktadır. Son yıllarda Diophantine denklemleri üzerine yapılan çalışmalar artarak devam etmektedir; örneğin (Taştan vd., 2021), (Özkan ve Uysal, 2023), (Yılmaz vd., 2024) ile (Uysal vd., 2023) tarafından ele alınan güncel sonuçlar bu alandaki araştırma yoğunluğunu göstermektedir.

Bu denklemler içinde özel bir yere sahip olan klasik Brocard–Ramanujan problemi şu şekilde ifade edilir:

$$n! + 1 = m^2$$

Bu eşitliği sağlayan  $(n, m)$  ikililerinin son derece nadir olduğu bilinmektedir ve günümüzde yalnızca  $n = 4, 5, 7$  için çözümler tespit edilmiştir. Problem, bir yandan faktöriyel fonksiyonunun hızlı artışını kare sayıların daha yavaş fakat düzenli büyümesiyle karşılaştırmakta, diğer yandan bu iki büyüme türünün hangi noktalarda kesişebileceğini araştırmaktadır. Dolayısıyla Brocard–Ramanujan tipi denklemler, üstel büyüme davranışı gösteren fonksiyonlar ile polinomsal yapıda büyüyen fonksiyonların ortak çözüm yapılarını incelemek açısından büyük ilgi görmektedir.

(Yalçın vd, 2025)'te yer alan Brocard–Ramanujan tipindeki Diophantine denklemlere benzer bir yapı sergileyen olan  $s = 5, 6, 7, \dots$  olmak üzere

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

denklemini ile  $k \neq 1$  bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$m^3 = (m + k)! + m$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümleri ele alınmıştır. İnceleme sürecinde ağırlıklı olarak analitik yöntemler kullanılmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar SageMath ve Wolfram Mathematica yazılımları yardımıyla doğrulanmış; bulunan çözümler ve elde edilen sınır eşitsizlikleri

sembolik hesaplamalarla test edilmiştir. Analizler mümkün olan en genel denklem sınıfları göz önünde bulundurularak yapılmıştır.

**Teorem 5.1.**

$$m^{s+2} = (m + 1)! + m^s$$

denkleminin  $s \geq 5$  için tamsayılarda çözümü yoktur.

**İspat.**  $m^{s+2} - m^s = (m + 1)!$  olduğundan

$$m^s(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$m^{s-1} = (m - 2)!$$

elde edilir. Bu ise

$$m^{s-1} = \Gamma(m - 1)$$

eşitliğini verdiği için  $s = 5, 6, 7, \dots$  için tamsayı çözüm yoktur. Burada dikkat edilirse klasik Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

olarak tanımlanır.

**Sonuç 5.2.**  $m^6 = (m + 1)! + m^4$  eşitliğini sağlayan  $m$  tamsayı kökü yoktur.

**İspat.**

$$m^6 - m^4 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^4(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m^3 = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve  $\Gamma(m - 1) = m^3$  eşitliği sadece  $m = 2, 3, 4$  tamsayıları için sağlanır.

**Sonuç 5.3.**  $m^5 = (m + 1)! + m^3$  eşitliğini sağlayan  $m$  tamsayı kökü yoktur.

**İspat.**

$$m^5 - m^3 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^3(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m^2 = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve  $\Gamma(m - 1) = m^2$  eşitliği sadece  $m_1 \cong 1.43$  ve  $m_2 \cong 6.33$  için sağlanır. Yani bu eşitliğin de tamsayı çözümleri yoktur.

**Sonuç 5.4.**  $m^4 = (m + 1)! + m^2$  eşitliğini sağlayan  $m$  tamsayı kökü yoktur.

**İspat.**

$$m^4 - m^2 = (m + 1)!$$

olarak yazıldığından

$$m^2(m^2 - 1) = (m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

elde edilir. Buradan

$$m = (m - 2)! = \Gamma(m - 1)$$

olur ve  $\Gamma(m - 1) = m$  eşitliği sadece  $m \cong 4.82$  için sağlanır. Yani bu eşitliğin de tamsayı çözümleri yoktur.

**Teorem 5.5.**  $k \neq 1$  bir pozitif tamsayı olsun. Buna göre

$$m^3 = (m + k)! + m$$

eşitliğini sağlayan bir pozitif  $m$  tamsayısı yoktur.

**İspat.** Kabul edelim ki

$$m^3 = (m + k)! + m$$

eşitliğini sağlayan bir  $m$  tamsayısı olsun.  $m^3 = (m + k)! + m$  ifadesi,  $m^3 - m = (m + k)!$  olarak yazılabilir.

Bu eşitlik açıldığında ise

$$m \cdot (m - 1)(m + 1) = (m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)(m + 1)(m)(m - 1)(m - 2)!$$

eşitliği elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$1 = (m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)(m - 2)!$$

eşitliğine ulaşılır. Burada  $(m - 2)!$  ifadesi yalnız bırakılırsa

$$(m - 2)! = \frac{1}{(m + k) + (m + k - 1) \dots (m + 2)} \notin \mathbb{Z}$$

olduğundan bir çelişki elde edilmiş olur. Dolayısıyla  $m^3 = (m + k)! + m$  eşitliğini sağlayan bir pozitif  $m$  tamsayısı yoktur.

## KAYNAKÇA

- Alzer, H., & Luca, F.** (2017). Diophantine equations involving factorials. *Mathematica Bohemica*, 142(2), 181–184.
- Baker, A.** (2022). *Transcendental number theory*. Cambridge University Press.
- Bradie, B.** (2010). Extensions and refinements of some properties of sums involving Pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 22(1), 37–43.
- Byrapuram, N., Ge, A., Ge, S., Khovanova, T., Lee, S. Z., Mandal, R., Redwine, G., Samanta, S., Wu, D., Xu, D., & Zhao, R.** (2024). Fibonacci partial sums tricks. *arXiv preprint arxiv: 2409.01296*.
- Falcón Santana, S., & Díaz-Barrero, J. L.** (2006). Some properties of sums involving Pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 18(1), 33–40.
- Gee, T.** (1996/1997). Letter from Toby Gee. *Mathematical Spectrum*, 29, 68.
- Guy, R.** (2004). *Unsolved problems in number theory* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- Luca, F.** (2000). Equations involving arithmetic functions of factorials. *Divulgaciones Matemáticas*, 8(1), 15–23.
- Nagell, T.** (1961). The diophantine equation  $x^2 + 7 = 2^n$ . *Arkiv för Matematik*, 4(2), 185–187.
- OEIS Foundation Inc.** (2023). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org>
- Özkan, E., & Uysal, M.** (2023). d-Gaussian Fibonacci, d-Gaussian Lucas polynomials, and their matrix representations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 75(4).
- Tastan, M., Özkan, E., & Shannon, A.** (2021). The generalized k-Fibonacci polynomials and generalized k-Lucas polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(2).
- Tijdeman, R.** (1976). On the equation of Catalan. *Acta Arithmetica*, 29, 197–209.
- Uysal, M., İnam, İ., & Özkan, E.** (2022). A short note on the Pell-Lucas–Eisenstein series. *Asian-European Journal of Mathematics*, 15(05), 2250219.
- Yalçın, R. İnam, İ. & Demirkol Özkaya, Z.** (2025). Brocard-Ramanujan benzeri çeşitli denklemler üzerine. *Bartın University International Journal of Natural and Applied Sciences*, 8(1), 178-183.
- Yılmaz, N. Ş., Wloch, A., & Özkan, E.** (2024). Generalization of the Distance Fibonacci sequences. *Axioms*, 13(7), 420.
- 1728 Software Systems.** (2025). Fibonacci Number Trick. <https://www.1728.org/fibonacci.htm>