T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFİYAN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE NUR ŞAVLI

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2022

10483935

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFİYAN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE NUR ŞAVLI

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2022

10483935

BEYAN

“4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Oskülatör ve Rektifiyan Eğriler” adlı yüksek lisans tezi hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2- TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;…………………………………………………… …………</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">………………………………/…………… …………..</td></tr>
</table>

Merve Nur Şavlı

Tarih

İmza

ÖN SÖZ

Bu tezin yazılmasında emeği geçen, desteklerini esirgemeyen, çalışma boyunca her zaman her fırsatta yol gösterici olan ve her zaman olumlu tavrıyla beni destekleyen başta değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ ve Sayın Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT olmak üzere kıymetli hocalarıma, yanımda bulunan değerli arkadaşlarıma ve her zaman benimle olan, kendimi geliştirmem için ellerinden gelen yardımlarını esirgemeyen, hayatıma yön vermemde destek olan saygıdeğer aileme sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum.

Merve Nur Şavlı

2022

ÖZET

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayında temel kavramlara ayrılmıştır. Ayrıca bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında oskülatör ve rektifiyan eğriler hakkında temel tanım ve teoremlere, 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğri tanımına yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış oskülatör eğri tanımlanmıştır. Daha sonra 4-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin çatılandırılmış oskülatör eğri olma koşulları ve bazı karakterizasyonlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış rektifiyan eğri tanımı verilmiştir. Ayrıca 4-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin çatılandırılmış rektifiyan eğri olma koşulları ve bazı karakterizasyonlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oskülatör Eğri, Rektifiyan Eğri, Özel Eğriler, Çatılandırılmış Eğri, Singüler Nokta.

ABSTRACT

FRAMED OSCULATING AND RECTIFYING CURVES IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter is devoted to the basic concepts in Euclidean space. Also in this section, basic definitions and theorems about osculating and rectifying curves in 4-dimensional Euclidean space, the definition of framed curve in 4-dimensional Euclidean space are given. The third and fourth chapters are the original chapters of this thesis. In the third chapter, the framed osculating curve in 4-dimensional Euclidean space, is defined. Then, the conditions of to be framed osculating curve and some characterizations of framed osculating curve are given in 4-dimensional Euclidean space. In the fourth chapter, the framed rectifying curve in 4-dimensional Euclidean space, is defined. Also, the conditions of to be framed rectifying curve and some characterizations of framed rectifying curve are given in 4-dimensional Euclidean space.

Keywords: Osculating Curves, Rectifying Curves, Special Curves, Framed Curves, Singular Points.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^4$	: 4- Boyutlu Öklid Uzayı
$\boldsymbol{V}$	: Vektör Uzayı
$\mathbb{K}$	: Cisim
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\lVert , \rVert$	: Norm
$\boldsymbol{I}$	: Öklid Uzayında Bir Açık Aralık
$\times$	: Vektörel Çarpım
$\boldsymbol{V_i}$	: $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayında $i-$yinci Frenet Vektörü
$\boldsymbol{k_i}$	: $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayında $i-$yinci Frenet Eğriliği
κ, τ	: $\mathbb{R}^3$ Eğrisinin Eğriliği ve Burulması
$\{T, N, B\}$	: $\mathbb{R}^3$ Eğrisinin Frenet Vektörleri
$\{T, N_1, N_2, N_3\}$	: $\mathbb{R}^4$ Eğrisinin Frenet Vektörleri
S^{n-1}	: $(n-1)$-Küre
$\{v, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$	: $\mathbb{R}^4$ Çatılandırılmış Eğrisinin Uyarlanmış Çatısı
γ^{η_1}	: Eğrinin Konum Vektörünün Genelleştirilmiş Asli Normal Bileşeni
α^{N_1}	: Eğrinin Konum Vektörünün Normal Bileşeni

1.GİRİŞ

Eğriler teorisi, klasik diferensiyel geometrinin geniş çalışma alanlarından biridir. Özellikle, özel eğriler yıllarıdır araştırmacılar için önemli bir uygulama alanı olmuştur. Bazı özel eğriler, konum vektörlerinin yattığı alt uzaya göre rektifiyan, oskülatör ve normal eğri olarak tanımlanırlar. Bu tür eğrilerle ilgili farklı uzaylarda, farklı çatılar kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır.

$\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında konum vektörü eğrinin teğet vektörü T ve binormal vektörü B tarafından gerilen düzlemde yatan eğrilere rektifiyan eğri denir. Rektifiyan eğriler ilk kez B.Y. Chen tarafından ele alınmıştır Bir eğrinin konum vektörünün hangi koşullar altında rektifiyan düzlemde yatar sorusundan yola çıkarak rektifiyan eğri tanımı vermiştir (Chen, 2003:147-152). B.Y. Chen'in çalışmasından hareketle Ilarslan ve Nesovic, $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriyi tanımlamış ve özelliklerini incelemiştirler (Ilarslan & Nesovic, 2008: 21-30). Daha sonra, rektifiyan eğrilerle ilgili farklı uzaylarda farklı çatılar kullanılarak bir çok çalışma yapılmıştır (Güngör & Tosun, 2011: 89-100). (Bozkurt & Okuyucu & Ekmekçi, 2013: 819-823). (Erisir & Güngör, 2014: 67-83).

Rektifiyan eğri tanımından yola çıkarak, benzer şekilde oskülatör eğri tanımlanmıştır. $\mathbb{R}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında konum vektörü eğrinin teğet vektörü T ve normal vektörü N tarafından gerilen düzlemde yatan eğrilere oskülatör eğri denir. 2008 yılında K. İlarslan ve E. Nesovic, $\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında oskülatör eğrileri tanımlamış ve özelliklerini incelemiştirler (Ilarslan & Nesovic, 2008: 931-940). Oskülatör eğriler birçok çalışmaya konu olmuştur (Bektaş & Gürses & Yüce, 2016: 65-84). (Gökçelik & Bozkurt & Gök & Ekmekci & Yayli, 2012: 1-13).

Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi $t \in I$ için $\alpha^{'}(t) = 0$ ise t noktasına singüler nokta denir. Bir eğri singüler noktalara sahip ise eğrinin o noktalarda Frenet çatısını oluşturmak mümkün değildir. S. Honda ve M. Takahashi çatılandırılmış eğrileri tanımlamış ve çatılandırılmış eğri ile ilgili temel kavramlar ele almıştır. Singüler noktalı eğrilerin geometrik olarak incelenmenin en kullanışlı yolu çatılandırılmış eğrinin eğriliklerinin kullanılmasıdır. Y. Wang ve arkadaşları $\mathbb{R}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler için tanımlanmış olan Serret-Frenet tipli çatıdan hareketle daha kullanışlı olan uyarlanmış çatıyı tanımladılar (Wang & Pei & Gao. 2019: 2-12).

Bu çalışmadan hareketle Ö.G. Yıldız ve M. Akyiğit, $\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında ki çatılandırılmış eğriler için uyarlanmış çatıyı verdiler (Akyiğit & Yıldız, 2021: 258-263).

Çatılandırılmış eğri kavramı yeni olmasına rağmen literatürde singüler noktalı eğrilerin karakterize edildiği birçok çalışma mevcuttur (Okuyucu & Canbirdi, 2021: 1-14). (Yazıcı & Karakuş & Tosun, 2021: 27-37). (Yazıcı & Karakuş & Tosun, 2021: 1-10).

Bu tez çalışmasında, ilk olarak $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlanan oskülatör eğri ve rektifiyan eğriler ele alınmıştır. Daha sonra $\mathbb{R}^4$ $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler hakkında bilgiler verilmiştir. Bu bilgiler ışığında üçüncü ve dördüncü bölümde çatılandırılmış eğriler için $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış oskülatör eğri ve çatılandırılmış rektifiyan eğriler tanımlanmış ve karakterize edilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir küme ve V, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f: A\times A \to V$ fonksiyonu var ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

1. $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R).$

2. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q)=\alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000: 1).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p=\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$ ve $q=\left(q_1,q_2,...,q_n\right)$ olmak üzere

$$\langle,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\left(p,q\right) \to \langle p,q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ için x vektörünün normu

$$\| x \| = \sqrt{<x,x>}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.4. $3-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ de her $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)$ için vektörel çarpımı

$$x\times y=(x_2y_3-y_2x_3,x_3y_1-y_3x_1,x_1y_2-y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{4} y_i e_i$ ve $z = \sum_{i=1}^{4} z_i e_i$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$x \times y \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır.

Vektörel çarpımın baz özellikleri:

i. x, y ve z vektörleri lineer bağımsız ise $x \times y \times z$ vektörlerine dik bir vektör belirtir.

ii. $x \times y \times z = -y \times x \times z$

iii. x,y ve z vektörleri lineer bağımlı ise vektörel çarpımın sonucu sıfır vektörüdür.

iv. $\lambda(x \times y \times z) = (\lambda x) \times y \times z = x \times (\lambda y) \times z = x \times y \times (\lambda z)$

Tanım 2.1.6. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ de bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014: 39)

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi için

$$\alpha_{\star t}\left(\frac{d}{dx|_t}\right)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve $\alpha^{'}(t)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014: 46).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha^{'}(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir (Hacısalihoğlu 2000:150).

Tanım 2.1.9. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) = 0$ ise t noktasına singüler nokta ve α eğrisine singüler eğri denir.

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\| \alpha'(s) \| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresi ise eğrinin yay-parametresi denir.

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\psi = \left\{ \alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)} \right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için, $\alpha^{(k)} \in Span\{\psi\}$ olmak üzere ψ sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı ve $s \in \alpha$ için $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ye $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir. Her bir V_i, $1 \leq i \leq r$ vektörüne ise $i-$yinci Serret-Frenet vektörü adı verilir.

Tanım 2.1.12. $\alpha \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
& k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \ 1 \leq i < r, \\
& \quad s \rightarrow k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin $i-$yinci eğriliği adı verilir.

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $s \in I$ noktasında Frenet vektörleri $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_n(s)\}$ biçiminde verilsin. α eğrisinin eğrilikleri $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& V_1'(s) = k_1(s) V_2(s), \\
& V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), 1 \leq i < n, \\
& V_n'(s) = -k_{n-1}(s) V_{n-1}(s)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu formüllere Serret-Frenet türev formülleri adı verilir. Serret-Frenet türev formüllerini matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} V_1'(s) \\ V_2'(s) \\ \vdots \\ V_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde de verilebilir (Hacısalihoğlu 2000:155).

Özel Hal: $n=3$ için α eğrisinin Serret-Frenet 3-ayaklısı s yay parametresi olmak üzere

$$T(s)=\alpha'(s)$$
$$N(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$
$$B(s)=T(s)\times N(s)$$

ve Serret-Frenet türev formülleri de

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir (Sabuncuoğlu, 2014: 78).

Özel Hal: $n=4$ için $\alpha : I \to \mathbb{R}^4,\ s \to \alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun ve α eğrisinin Frenet vektörleri

$$T(s)=\alpha'(s)$$
$$N_1(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$
$$N_2(s)=N_3(s)\times T(s)\times N_1(s)$$
$$N_3(s)=\frac{\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)}{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)\|}$$

ve Serret-Frenet türev formülleri de

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N_1'(s) \\ N_2'(s) \\ N_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N_1(s) \\ N_2(s) \\ N_3(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 2.1.14. $\mathbb{R}^3$, Öklid uzayında α bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T,\ N,\ B\}$ olsun. $s \in I$ için,

$span\{T(s), N(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlemi

$span\{T(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlemi

$span\{N(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemi

denir (Sabuncuoğlu, 2014: 78).

Tanım 2.1.15. $\mathbb{R}^4$, Öklid uzayında α bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T,\ N_1,\ N_2,\ N_3\}$ olsun. $s \in I$ için,

$span\{T(s), N_1(s),\ N_3(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör alt uzayı

$span\{T(s), N_2(s),\ N_3(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan alt uzayı

$span\{N_1(s),\ N_2(s),\ N_3(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal alt uzayı

denir.

2.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Oskülatör Eğriler

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında oskülatör eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında konum vektörü N_2 in ortogonal tümleyeninde bulunan eğriye oskülatör eğri denir. Yani $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi oskülatör eğri ise konum vektörü daima

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N_1(s)+\varsigma(s)N_3(s)$$

eşitliğini sağlar (λ,μ ve ς diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.).

Teorem 2.2.2. α, $\mathbb{R}^4$ de k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri olmak üzere α oskülatör eğriye kongurenttir gerek ve yeter koşul,

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{'}\right)^{'}+\frac{k_1k_3}{k_2}=-\frac{1}{c},\ \ c\in\mathbb{R}_0,$$

olmasıdır (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 935).

İspat: Kabul edelim ki α oskülatör eğri ve k_1, k_2 ve k_3 sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α oskülatör eğri olduğundan yer vektörü

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N_1(s)+\varsigma(s)N_3(s) \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) denkleminin tüevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa,

$$T=\left(\lambda^{'}-\mu k_1\right)T+\left(\lambda k_1-\mu^{'}\right)N_1+\left(\mu k_2-\varsigma k_3\right)N_2+\varsigma^{'}N_3$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
&\lambda^{'}-\mu k_1=1,\\
&\lambda k_1-\mu^{'}=0,\\
&\mu k_2-\varsigma k_3=0,\\
&\varsigma^{'}=0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir. (2.2) in son üç eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\lambda(s)=-c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{'},\\
&\mu(s)=c\frac{k_3}{k_2},\\
&\varsigma(s)=c,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilebilir. (2.2) denklemindeki birinci eşitlikten ve (2.3) denkleminden

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = -\frac{1}{c}, \quad c \in \mathbb{R}_0, \tag{2.4}$$

elde edilir.

Tersine, $k_1,\ k_2$ ve k_3 α nın eğrilikleri olsun. X vektör alanı $s \in I$ için

$$X(s) = \alpha(s) + c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' T(s) - c\frac{k_3}{k_2} N_1(s) - cN_3(s),$$

şeklinde verilmiş olsun. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınır ve Serret-Frenet formülleriyle birlikte ve (2.4) denklemi göz önünde bulundurulursa $X'(s) = 0$ elde edilir, bunun anlamı X, sabit bir vektör alanıdır. α , oskülatör bir eğriye kongurenttir.

Teorem 2.2.3. $\alpha,\ \mathbb{R}^4$ de $k_1,\ k_2$ ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı oskülatör eğri olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

i. k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri için

$$\begin{aligned}\frac{k_3(s)}{k_2(s)} &= \left(\frac{1}{c}\int \sin\left(\int k_1(s)\,ds\right)ds + c_1\right)\cos\left(\int k_1(s)\,ds\right) \\ &+ \left(-\frac{1}{c}\int \cos\left(\int k_1(s)\,ds\right)ds + c_2\right)\sin\left(\int k_1(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

eşitliği vardır.

ii. α nın yer vektörünün teğet bileşeni ve normal bileşeni

$$\begin{aligned}\langle \alpha(s), T(s)\rangle &= -c\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)' \frac{1}{k_1(s)}, \\ \langle \alpha(s), N_1(s)\rangle &= c\frac{k_3(s)}{k_2(s)},\end{aligned}$$

biçimindedir.

iii. α nın konum vektörünün ikinci binormal bileşeni sıfırdan farklı sabittir.

Tersine, (i), (ii) ve (iii) önermelerinden biri sağlanırsa α oskülatör eğri veya oskülatör eğriye kongurenttir (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 937).

İspat: α, $\mathbb{R}^4$ de k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı oskülatör eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin yer vektörü (2.4) denklemini sağlar.

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = -\frac{1}{c},\ \ c \in \mathbb{R}_0,$$

$y(s) = \dfrac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $\rho(s) = \dfrac{1}{k_1(s)}$ olmak üzere (2.4) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{ds}\left(\rho(s)\frac{dy}{ds}\right) + \frac{y(s)}{\rho(s)} = -\frac{1}{c(s)},$$

yukarıdaki denklemde $t = \int \dfrac{1}{\rho(s)}$ biçiminde bir değişken değiştirme yapılırsa

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = -\frac{1}{c k_1},$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, $c \in \mathbb{R}_0,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y = \left(\frac{1}{c} + \int \frac{\sin t}{k_1} dt + c_1\right)\cos t + \left(\frac{-1}{c}\int \frac{\cos t}{k_1} dt + c_2\right)\sin t,$$

dir. $y(s) = \dfrac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $dt = k_1 ds$ diferansiyel denklemin çözümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{k_3(s)}{k_2(s)} &= \left(\frac{1}{c}\int \sin\left(\int k_1(s)ds\right)ds + c_1\right)\cos\left(\int k_1(s)ds\right)\\ &+\left(-\frac{1}{c}\int \cos\left(\int k_1(s)ds\right)ds + c_2\right)\sin\left(\int k_1(s)ds\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (i) önermesini ispatlar.

(2.2) ve (2.3) denklemleri göz önünde bulundurulduğunda

$$\alpha(s)=-c\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^{'}T(s)+c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}N_1(s)+cN_3(s)$$

eşitliği kolayca elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha(s),T(s)\rangle=-c\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^{'},\\
&\langle\alpha(s),N_1(s)\rangle=c\frac{k_3(s)}{k_2(s)},\\
&\langle\alpha(s),N_3(s)\rangle=c,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (ii) ve (iii) önermelerini ispatlar.

Tersine, (i) önermesini geçerli olduğunu kabul edelim. O halde k_1, k_2 ve k_3 eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\frac{k_3(s)}{k_2(s)}=&\left(\frac{1}{c}\int\sin\left(\int k_1(s)ds\right)ds+c_1\right)\cos\left(\int k_1(s)ds\right)\\
&+\left(-\frac{1}{c}\int\cos\left(\int k_1(s)ds\right)ds+c_2\right)\sin\left(\int k_1(s)ds\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. $\langle\alpha(s),N_1(s)\rangle=c\dfrac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ifadesinin s ye göre türevi alınarak ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$\langle T(s),N_1(s)\rangle+\langle\alpha(s),-k_1(s)T(s)+k_2(s)N_2(s)\rangle=\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^{'}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar ile

$$-k_1(s)\langle\alpha(s),T(s)\rangle+k_2(s)\langle\alpha(s),N_2(s)\rangle=\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^{'},$$

elde edilir. $k_2(s)\neq 0$ ve

$$\langle \alpha(s), T(s) \rangle = -c\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)'$$

olduğundan $\langle \alpha(s), N_2(s) \rangle = 0$ elde edilir, bunun anlamı α bir oskülatör eğridir. (iii) önermesinin geçerli olduğunu varsayalım. $\langle \alpha(s), N_3(s) \rangle = c$ ifadesinin s ye göre türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$-k_3(s)\langle \alpha(s), N_2(s) \rangle = 0$$

eşitliği elde edilir. $k_3(s)$ eğriliği sıfırdan farklı olduğundan

$$\langle \alpha(s), N_2(s) \rangle = 0$$

olmalıdır ve bu da α eğrisinin oskülatör eğri olduğunu ifade eder.

2.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Rektifiyan Eğriler

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 2.3.1. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında konum vektörü daima asli normal vektör alanı olan N_1 nin ortogonal tümleyenin de bulunan eğriye rektifiyan eğri denir. O halde, bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi rektifiyan eğri ise konum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N_2(s) + \varsigma(s)N_3(s)$$

şeklinde yazılabilir (λ, μ ve ς diferensiyellenebilir fonksiyonlardır).

Teorem 2.3.2. α, $\mathbb{R}^4$ de bir eğri ve k_1, k_2 ve k_3 sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α eğrisinin rektifiyan eğriye kongurent olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{k_1(s)k_3(s)(s+c)}{k_2(s)} + \left(\frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)\left(k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s)\right)}{k_2^2(s)k_3(s)}\right)' = 0$$

olmasıdır. (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 24)

İspat: Kabul edelim ki α rektifiyan eğri ve k_1, k_2 ve k_3 sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α rektifiyan eğri olduğundan yer vektörü

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N_2(s)+\varsigma(s)N_3(s) \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir. (2.5) denkleminin türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$T=\lambda' T+(\lambda k_1-\mu k_2)N_1+(\mu'-\varsigma k_3)N_2+(\mu k_3+\varsigma')N_3$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}&\lambda'=1,\\&\lambda k_1-\mu k_2=0,\\&\mu'-\varsigma k_3=0,\\&\mu k_3+\varsigma'=0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

denklemi elde edilir. (2.6) denklemindeki ilk üç eşitlikten

$$\begin{aligned}&\lambda(s)=s+c,\\&\mu(s)=\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)},\\&\varsigma(s)=\frac{k_1(s)k_2(s)+(s+c)\left(k_1'(s)k_2(s)-k_1(s)k_2'(s)\right)}{k_2^2(s)k_3(s)},\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.6) denklemindeki 4. eşitlikten de

$$\frac{k_1(s)k_3(s)(s+c)}{k_2(s)}+\left(\frac{k_1(s)k_2(s)+(s+c)\left(k_1'(s)k_2(s)-k_1(s)k_2'(s)\right)}{k_2^2(s)k_3(s)}\right)'=0 \tag{2.8}$$

elde edilir. k_1, k_2 ve k_3 α nın eğrilikleri olmak üzere. $\mathbb{R}^4$ de X vektör alanı $\forall s\in I$ için

$$\begin{aligned}X(s)=\alpha(s)-(s+c)T(s)-\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)}N_2(s)\\-\frac{k_1(s)k_2(s)+(s+c)\left(k_1'(s)k_2(s)-k_1(s)k_2'(s)\right)}{k_2^2(s)k_3(s)}N_3(s)\end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınır ve Serret-Frenet formülleriyle birlikte (2.8) denklemi göz önünde bulundurulduğunda $X^{'}(s)=0$ olduğu kolayca görülebilir, bunun anlamı X, sabit bir vektör alanıdır. Yani α , rektifiyan eğriye kongurenttir.

Teorem 2.3.3. α, $\mathbb{R}^4$ de k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. α rektifiyan eğriye kongurent ise

i. $k_1(s)=sabit>0,\ \mathrm{k}_2(s)=sabit\neq 0$ ve $\mathrm{k}_3(s)=\sqrt{\left|-s^2-2cs-2c_1\right|},\ c,\ c_1\in\mathbb{R};$

ii. $k_2(s)=sabit>0,\ \mathrm{k}_3(s)=k_3=sabit\neq 0$ ve $\mathrm{k}_1(s)=\dfrac{c_1}{\left(e^{k_3^2 s}(s+c)\right)}\ c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R}^+;$

iii. $k_1(s)=sabit>0,\ \mathrm{k}_3(s)=k_3=sabit\neq 0$ ve $\mathrm{k}_2(s)=c_1 e^{k_3^2 s}(s+c)\ c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R}^+;$

olmasıdır (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 25).

İspat: Kabul edelim ki α bir rektifiyan eğriye kongurent olsun. $k_1(s)=sabit>0,\ k_2(s)=sabit\neq 0$ ve $k_3(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. (2.8) denkleminden

$$k_3^{'}(s)-k_3^3(s)(s+c)=0,\quad c\in\mathbb{R}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$k_3(s)=\frac{1}{\sqrt{\left|-s^2-2cs-2c_1\right|}},\quad c,\ c_1\in\mathbb{R}$$

dir. (i) ispatlanmış olur.

Benzer şekilde, $k_3(s)=k_3=sabit\neq 0,\ \mathrm{k}_2(s)=sabit\neq 0$ ve $\mathrm{k}_1(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. (2.8) denkleminden

$$k_3^2 k_1(s)(s+c)+\left(k_1(s)(s+c)\right)^{'}=0,\quad c\in\mathbb{R},\ \ k_3\in\mathbb{R}_0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$\mathrm{k}_1(s)=\frac{c_1}{\left(e^{k_3^2 s}(s+c)\right)},\quad c_1\in\mathbb{R}^+$$

dir. Böylece (ii) de ispatlanmış olur.

Son olarak, $k_1(s)=sabit>0,\ \mathrm{k}_3(s)=k_3=sabit\neq 0$ ve $\mathrm{k}_2(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. (2.8) denkleminden,

$$\frac{k_3^2(s+c)}{k_2(s)}+\left(\frac{(s+c)}{k_2(s)}\right)'=0,\quad c\in\mathbb{R},\ \ k_3\in\mathbb{R}_0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$\mathrm{k}_2(s)=c_1 e^{k_3^2 s}(s+c),\ \ c_1\in\mathbb{R}^+$$

dir. Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.4. α, $\mathbb{R}^4$ de $k_1,\ k_2$ ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı rektifiyan eğri olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

i. Uzaklık fonksiyonu $\rho(s)=|\alpha(s)|$,

$$\rho^2(s)=s^2+c_1 s+c_2,\ c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R}_0$$

dir.

ii. Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni

$$\langle\alpha(s),T(s)\rangle=s+c,\ c\in\mathbb{R}$$

biçimindedir.

iii. Eğrinin konum vektörünün normal bileşeni $\alpha^{N_1}(s)$ nın uzunluğu sabit ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv. Eğrinin konum vektörünün birinci binormal bileşeni ve ikinci binormal bileşeni sırasıyla

$$\begin{aligned}\langle\alpha(s),N_2(s)\rangle&=\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)},\\ \langle\alpha(s),N_3(s)\rangle&=\frac{k_1(s)k_2(s)+(s+c)\left(k_1^{'}(s)k_2(s)-k_1(s)k_2^{'}(s)\right)}{k_2^2(s)k_3(s)},\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}\tag{2.9}$$

şeklindedir (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 25).

İspat: Kabul edelim ki α, $\mathbb{R}^4$ de k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı rektifiyan eğri olsun.. $\alpha(s)$ eğrisinin yer vektörü (2.5) denklemini, burada $\lambda(s),\mu(s)$ ve $\varsigma(s)$ fonksiyonlarıda (2.6) deki eşitliklerini sağlar. (2.6) denkleminde üçüncü eşitliği $-\varsigma^{'}(s)$ ve son eşitlik $\mu^{'}(s)$ çarpılıp, elde edilen denklemler toplandığında

$$k_3(s)\left(\mu(s)\mu^{'}(s)+\varsigma(s)\varsigma^{'}(s)\right)=0,$$

elde edilebilir. $k_3\neq 0$ olduğundan

$$\mu(s)\mu^{'}(s)+\varsigma(s)\varsigma^{'}(s)=0,$$

dir. Buradan

$$\mu^2(s)+\varsigma^2(s)=a^2,\quad a\in\mathbb{R}_0^+.\tag{2.10}$$

elde edilir. (2.5) denkleminden,

$$\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=\lambda^2(s)+\mu^2(s)+\varsigma^2(s).$$

(2.7) ve (2.10) denklemlerinden de

$$\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=(s+c)^2+a^2(s).$$

elde edilir. Yani

$$\rho^2(s)=s^2+c_1s+c_2,\ c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R}_0,\tag{2.11}$$

dir. Böylelikle (i) önermesi ispatlanmış olur.

(2.5) ve (2.7) denklemlerinden

$$\langle \alpha(s), T(s) \rangle = s + c,$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylelikle (ii) önermesi ispatlanmış olur.

$\mathbb{R}^4$ de α eğrisinin yer vektörü $\alpha(s) = m(s)T(s) + \alpha^{N_1}(s)$ olarak yazılabilir. Burada $m(s)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha^{N_1}(s)$, yer vektörünün normal bileşenidir. Eğer α rektifiyan eğri ise $\alpha^{N_1}(s) = \mu(s)N_2(s) + \varsigma(s)N_3(s)$ olduğu anlamına gelir ve bu yüzden

$$\langle \alpha^{N_1}(s), \alpha^{N_1}(s) \rangle = \mu^2(s) + \varsigma^2(s)$$

dir. Dahası,

$$\left|\alpha^{N_1}(s)\right| = a, \ a \in \mathbb{R}_0^+$$

dir. $\rho(s)$, sabit olmayan bir fonksiyondur. (iii) önermesi ispatlanmış olur. Son olarak, (2.5) ve (2.7) denklemlerinden (2.9) kolayca elde edilebilir.

Tersine, kabul edelim ki (i) önermesi sağlansın.

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = s^2 + c_1 s + c_2,$$

$c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}_0$ dır. Yukarıdaki eşitliğin s ye göre iki kez türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri uygulanırsa

$$\langle \alpha(s), N_1(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Bu da α nın bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

Eğer (ii) önermesi sağlanıyorsa benzer şekilde α nın rektifiyan eğri olduğu görülebilir. (iii) önermesi sağlanıyor olsun. $\alpha(s) = m(s)T(s) + \alpha^{N_1}(s)$ dır. Burada $m(s)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur ve

$$\langle \alpha^{N_1}(s), \alpha^{N_1}(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - 2\langle \alpha(s), T(s) \rangle m(s) + m^2(s),$$

dır. $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = m(s)$ olduğundan,

$$\left\langle \alpha^{N_1}(s), \alpha^{N_1}(s) \right\rangle = \left\langle \alpha(s), \alpha(s) \right\rangle - \left\langle \alpha(s), T(s) \right\rangle^2$$

dır. Burada $\left\langle \alpha(s), \alpha(s) \right\rangle = \rho^2 \neq sbt$ dir. Yukarıdaki eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$k_1(s)\left\langle \alpha(s), T(s) \right\rangle \left\langle \alpha(s), N_1(s) \right\rangle = 0,$$

elde edilir. Buradan da $\left\langle \alpha(s), N_1(s) \right\rangle = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı da α bir rektifiyan eğri olmasıdır. Kabul edelim ki (iv) önermesi sağlansın. (2.9) denkleminde ki birinci eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa,

$$-k_2(s)\left\langle \alpha(s), N_1(s) \right\rangle + k_3(s)\left\langle \alpha(s), N_3(s) \right\rangle = \left(\frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)} \right)'$$

elde edilir. Buradan da $\left\langle \alpha(s), N_1(s) \right\rangle = 0$ olduğu görülür. Bu da α nın bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 2.3.5. $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi $\rho(t)$ pozitif bir fonksiyon ve $y(t)$ küresel bir eğri olmak üzere $\alpha(t) = \rho(t)\, y(t)$ eşitliğiyle verilsin. α bir rektifiyan eğridir gerek ve yeter koşul

$$\rho(t) = \frac{1}{\cos(t + t_0)}, \quad a \in \mathbb{R}_0, \quad t_0 \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

olmasıdır (Ilarslan ve Nesovic, 2008: 27).

İspat: α eğrisi $\rho(t)$ pozitif bir fonksiyon ve $y(t)$ küresel bir eğri olmak üzere

$$\alpha(t) = \rho(t)\, y(t), \tag{2.12}$$

dir. (2.12) numaralı denklemin t göre türevi alınırsa

$$\alpha'(t) = \rho'(t)\, y(t) + \rho(t)\, y'(t).$$

elde edilir. Dolayısıyla α nın teğet vektörü,

$$T(t)=\frac{\rho'(t)}{v(t)}y(t)+\frac{\rho(t)}{v(t)}y'(t). \tag{2.13}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\left\|\alpha'(t)\right\|=v(t)$ olmak üzere (2.13) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$T'=\left(\frac{\rho'(t)}{v(t)}\right)'y(t)+\left(\frac{2\rho'(t)}{v(t)}-\frac{\rho(t)\rho'(t)\left(\rho(t)+\rho''(t)\right)}{v^3(t)}\right)y'(t)+\left(\frac{\rho(t)}{v(t)}\right)y''(t) \tag{2.14}$$

elde edilir. $Y\in\mathbb{R}^4$,

$$\langle Y,y\rangle=\langle Y,y'\rangle=\langle Y,y\times y'\rangle=0$$

eşitliklerini sağlayan birim bir vektör olmak üzere. $\{y,y',y\times y',Y\}$, $\mathbb{R}^4$ de bir ortonormal çatıdır. y'' nin $\{y,y',y\times y',Y\}$ ortonormal çatısına göre

$$y''=\langle y',y\rangle y+\langle y',y'\rangle y'+\langle y'',y\times y'\rangle y\times y'+\langle y',Y\rangle Y, \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir. $\langle y,y\rangle=\langle y',y'\rangle=1$ olduğundan $\langle y'',y\rangle=-1$ ve $\langle y'',y'\rangle=0$ ve

$$y''=-y+\langle y'',y\times y'\rangle y\times y'+\langle y'',Y\rangle Y, \tag{2.16}$$

dır. (2.16), (2.13) da yazılır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} k_1\varsigma N_1=&\left(\left(\frac{\rho'}{v}\right)'-\frac{\rho}{v}\right)y+\left(\frac{-2\rho'}{v}-\frac{\rho\rho'\left(\rho+\rho''\right)}{v^3}\right)y' \\ &+\frac{\langle y'',y\times y'\rangle}{v}\alpha\times y'+\frac{\rho}{v}\langle y'',Y\rangle Y \end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir. $\langle y,y\rangle=1$ olduğundan $\langle y,y'\rangle=0$ ve bu yüzden $\langle\alpha,y'\rangle=0$ dir. Ayrıca $\langle\alpha,Y\rangle=0$ dır. α rektifiyan eğri olması için $\langle\alpha,N_1\rangle=0$ olması gerekmektedir. (2.17) denkleminin her iki tarafı α ile iç çarpılırsa $\langle\alpha,N_1\rangle=0$ olabilmesi için

$$\left(\frac{\rho'}{v}\right)' - \frac{\rho}{v} = 0,$$

olmalıdır. Bu diferensiyel denklem

$$\rho\rho'' - 2\left(\left(\rho'\right)^2\right) - \rho^2 = 0,$$

denklemine eşittir ve bu denklemin çözümü

$$\rho(t) = \frac{1}{\cos\left(t + t_0\right)},$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Δ_3 kümesi

$$\left\{\mu = \left(\mu_1, \mu_2, \mu_3\right) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid \left\langle \mu_i, \mu_j \right\rangle = \delta_{ij}, i, j = 1,2,3\right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. Δ_3, 6-boyutlu düzgün bir manifolddur. v birim vektörü $v = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$ eşitliğiyle tanımlanabilir. Bu v nin μ_1, μ_2 ve μ_3 e dik olduğu anlamına gelir ve $\det\left(v, \mu_1, \mu_2, \mu_3\right) = 1$ dir (Akyiğit & Yıldız, 2021: 259).

Tanım 2.4.1. $\forall s \in I$ ve $i = 1,2,3$ için $\left\langle \gamma', \mu_i \right\rangle = 0$ ise $\left(\gamma, \mu\right) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer $\left(\gamma, \mu\right)$ bir çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\mu : I \to \Delta_3$ varsa $\gamma : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisine de bir çatılandırılmış baz eğrisi denir (Honda & Takahashi, 2016: 265).

$\left(\gamma, \mu\right) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri ve $v = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$ olsun. O halde $\left(\gamma, \mu\right)$ çatılandırılmış eğrisinin Serret-Frenet tipli türev formülleri

$$\begin{aligned}
\mu_1'(s) &= f(s)\mu_2(s) + g(s)\mu_3(s) + h(s)v(s) \\
\mu_2'(s) &= -f(s)\mu_1(s) + j(s)\mu_3(s) + k(s)v(s) \\
\mu_3'(s) &= -g(s)\mu_1(s) - j(s)\mu_2(s) + l(s)v(s) \\
v'(s) &= -h(s)\mu_1(s) - k(s)\mu_2(s) - l(s)\mu_3(s)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu formüller matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} \mu_1'(s) \\ \mu_2'(s) \\ \mu_3'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & g(s) & h(s) \\ -f(s) & 0 & j(s) & k(s) \\ -g(s) & -j(s) & 0 & l(s) \\ -h(s) & -k(s) & -l(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \\ \mu_3(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca diferensiyellenebilir $\alpha : I \to \mathbb{R}$ dönüşüm vardır öyle ki:

$$\gamma'(s) = \alpha(s) v(s)$$

dir. Burada $f(s),\ g(s),\ h(s),\ j(s),\ k(s)$ ve $l(s)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. $(f, g, h, j, k, l, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $(f(s), g(s), h(s), j(s), k(s), l(s), \alpha(s))$ ye $\gamma(s)$ nın çatılandırılmış eğrilikleri denir. $\alpha(s_0) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul s_0 nın γ nın bir singüler noktası olmasıdır. Singüler noktalarda eğriyi analiz etmek için çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri kullanılabilir (Akyiğit & Yıldız, 2021: 259).

Teorem 2.4.2. (γ, μ) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrilerinin eğrilikleri sırası ile $(f, g, h, j, k, l, \alpha)$ ve $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{\alpha})$ olsun. $(f, g, h, j, k, l, \alpha)$ ve $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{\alpha})$ eğrilikleri çakışık ise (γ, μ) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu})$ çatılandırılmış eğriler kongurenttirler (Honda & Takahashi, 2016: 265).

$(\gamma, \mu) : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış bir eğri ve eğrilikleri $f(s), g(s), h(s), j(s), k(s), l(s), \alpha(s)$ olsun. Euler açılarını kullanarak, ve $\theta,\ \varphi,\ \psi$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Delta_3$,

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi sin\psi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\sin\theta \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir. Basit hesaplamalar ile

$$\tilde{v} = \eta_1 \times \eta_2 \times \eta_3 = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = v$$

olduğu kolayca görülebilir. $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğridir. $\theta,$ φ ve ψ (Euler açı) düzgün fonksiyonları için

$$\frac{\tan\psi}{\cos\theta} = l\sin\varphi - k\cos\varphi,$$
$$h = \cot\theta\left(l\cos\varphi + k\sin\varphi\right)$$

denklemleri sağlansın, bu durumda $(v,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$, (γ,η) boyunca uyarlanmış bir çatı oluşturur ve uyarlanmış çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} v'(s) \\ \eta_1'(s) \\ \eta_2'(s) \\ \eta_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p(s) & 0 & 0 \\ -p(s) & 0 & q(s) & 0 \\ 0 & -q(s) & 0 & r(s) \\ 0 & 0 & -r(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \\ \eta_3(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. $v,$ $\eta_1,$ η_2 ve η_3 vektörleri sırasıyla genelleştirilmiştir teğet vektörü, genelleştirilmiş asli normal vektörü, genelleştirilmiş binormal vektörü ve genelleştirilmiş ikinci binormal vektörü olarak adlandırılır. Burada $\left(p(s),q(s),r(s)\right)$ düzgün fonksiyonları $\gamma(s)$ in çatılandırılmış eğrilikleri olarak adlandırılır. Eğrinin çatılandırılmış eğrilikleri $\left(p(s),q(s),r(s)\right)$ ile açıları arasındaki ilişki,

$$p = -h\sec\theta\sec\psi,$$
$$q = -\left(j - \varphi'\right)\sin\theta - \psi',$$
$$r = \frac{-\cos\theta}{\cos\psi}\left(j - \varphi'\right),$$

şeklindedir, burada

$$f = -\sin\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right),$$
$$g = -\cos\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right),$$
$$j = r\frac{\cos\psi}{\cos\theta},$$

dir (Akyiğit & Yıldız, 2021: 260).

3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ OSKÜLATÖR EĞRİLER

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış oskülatör eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 3.1. $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Eğer γ nın yer vektörü λ, μ ve ς diferensiyellenebilir fonksiyonları için,

$$\gamma(s)=\lambda(s)\nu(s)+\mu(s)\eta_1(s)+\varsigma(s)\eta_3(s)$$

şartını sağlıyorsa γ bir çatılandırılmış oskülatör eğri olarak adlandırılır.

Teorem 3.2. $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$, $\mathbb{R}^4$ de p,q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı olmak üzere γ çatılandırılmış oskülatör eğriye kongurenttir gerek ve yeter koşul

$$\left(-c\frac{\left(r'(s)q(s)-q'(s)r(s)\right)}{q^2(s)p(s)}\right)'-cp(s)\frac{r(s)}{q(s)}=\alpha(s)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki γ çatılandırılmış oskülatör eğri ve p, q ve r sıfırdan farklı çatılandırılmış eğrilikleri olsun. γ oskülatör eğri olduğundan yer vektörü

$$\gamma(s)=\lambda(s)\nu(s)+\mu(s)\eta_1(s)+\varsigma(s)\eta_3(s) \tag{3.1}$$

şeklindedir. (3.1) denkleminin türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\alpha(s)\nu(s)=&\left(\lambda'(s)-p(s)\mu(s)\right)\nu(s)+\left(\lambda(s)p(s)+\mu'(s)\right)\eta_1(s)\\&+\left(\mu(s)q(s)-\varsigma(s)r(s)\right)\eta_2(s)+\varsigma'(s)\eta_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}&\lambda'(s)-p(s)\mu(s)=\alpha(s)\\&\lambda(s)p(s)+\mu'(s)=0\\&\mu(s)q(s)-\varsigma(s)r(s)=0\\&\varsigma'(s)=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) in son üç eşitliğinden

$$\begin{aligned}\lambda(s)&=-c\left(\frac{r(s)}{q(s)}\right)'\frac{1}{p(s)}\\ \mu(s)&=c\frac{r(s)}{q(s)}\\ \varsigma(s)&=c\end{aligned}\tag{3.3}$$

ve (3.2) denklemindeki birinci eşitlikten ve (3.3) denklemlerinden

$$\left(-c\frac{\left(r'(s)q(s)-q'(s)r(s)\right)}{q^2(s)p(s)}\right)'-cp(s)\frac{r(s)}{q(s)}=\alpha(s)\tag{3.4}$$

elde edilir.

Tersine, p, q ve r, γ nın çatılandırılmış eğrilikleri olsun. $\mathbb{R}^4$ de bir X vektör alanı $\forall s\in I$ için

$$X(s)=\gamma(s)-\left(-c\frac{\left(r'(s)q(s)-q'(s)r(s)\right)}{q^2(s)p(s)}\right)v(s)-c\frac{r(s)}{q(s)}\eta_1(s)-c\eta_3(s)$$

şeklinde verilmiş olsun. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri birlikte ve (3.4) denklemi göz önünde bulundurulursa $X'(s)=0$ elde edilir, bunun anlamı X, sabit bir vektör alanıdır. Yani γ, çatılandırılmış oskülatör eğriye kongurenttir.

Teorem 3.3. γ, $\mathbb{R}^4$ de p, q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı çatılandırılmış oskülatör eğri olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

i. p,q ve r çatılandırılmış eğrilikleri için

$$\begin{aligned}\frac{r(s)}{q(s)}=&\left(\frac{\alpha(s)}{c}\int\sin\left(\int p(s)ds\right)ds+c_1\right)\cos\left(\int p(s)ds\right)\\ &+\left(-\frac{\alpha(s)}{c}\int\cos\left(\int p(s)ds\right)ds+c_2\right)\sin\left(\int p(s)ds\right)\end{aligned}$$

eşitliği vardır.

ii. γ nın yer vektörünün teğet bileşeni ve normal bileşeni

$$\langle \gamma(s), v(s) \rangle = -c \left(\frac{r(s)}{q(s)} \right)' \frac{1}{p(s)}$$

$$\langle \gamma(s), \eta_1(s) \rangle = c \frac{r(s)}{q(s)}$$

biçimindedir.

iii. γ konum vektörünün ikinci binormal bileşeni sıfırdan farklı sabittir.

Tersine, (i), (ii) ve (iii) önermelerinden biri sağlanırsa γ çatılandırılmış oskülatör eğri veya çatılandırılmış oskülatör eğriye kongurenttir

İspat: γ, $\mathbb{R}^4$ de p, q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı çatılandırılmış oskülatör eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin yer vektörü (3.4) denklemini sağlar.

$$\left(\frac{1}{p(s)} \left(\frac{r(s)}{q(s)} \right)' \right)' + \frac{p(s) r(s)}{q(s)} = -\frac{\alpha(s)}{c(s)}$$

$y(s) = \dfrac{r(s)}{q(s)}$ ve $\theta(s) = \dfrac{1}{p(s)}$ olacak biçimde (3.4) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{ds}\left(\theta(s) \frac{dy}{ds} \right) + \frac{y(s)}{\theta(s)} = -\frac{\alpha(s)}{c(s)}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $t = \int \dfrac{1}{\rho(s)}$ biçiminde bir değişken değiştirme yapılırsa

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = -\frac{\alpha}{cp}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y = \left(c_1 + \int \frac{\alpha(t)}{cp(t)} \sin t dt \right) \cos t + \left(c_2 - \int \frac{\alpha(t)}{cp(t)} \cos t dt \right) \sin t$$

dir. $y(s)=\dfrac{r(s)}{q(s)}$ ve $dt=p(s)ds$ diferansiyel denklemin çözümünde yerine yazılırsa

$$\frac{r(s)}{q(s)}=\left(\frac{\alpha(s)}{c}\int\sin\left(\int p(s)ds\right)ds+c_1\right)\cos\left(\int p(s)ds\right)$$
$$+\left(-\frac{\alpha(s)}{c}\int\cos\left(\int p(s)ds\right)ds+c_2\right)\sin\left(\int p(s)ds\right)$$

elde edilir. Bu da (i) önermesini ispatlar.

(3.1) ve (3.3) denklemleri göz önünde bulundurulduğunda,

$$\gamma(s)=-c\left(\frac{r(s)}{q(s)}\right)'\frac{1}{p(s)}v(s)+c\frac{r(s)}{q(s)}\eta_1(s)+c\eta_3(s)$$

eşitliği kolayca elde edilir. Buradan da

$$\left\langle\gamma(s),v(s)\right\rangle=-c\left(\frac{r(s)}{q(s)}\right)'\frac{1}{p(s)},$$
$$\left\langle\gamma(s),\eta_1(s)\right\rangle=c\frac{r(s)}{q(s)}$$
ve
$$\left\langle\gamma(s),\eta_3(s)\right\rangle=c$$

elde edilir. Bu da (ii) ve (iii) önermelerini ispatlar.

Tersine, (i) önermesini geçerli olduğunu kabul edelim. O halde p, q ve r eğrilik fonksiyonları

$$\frac{r(s)}{q(s)}=\left(\frac{\alpha(s)}{c}\int\sin\left(\int p(s)ds\right)ds+c_1\right)\cos\left(\int p(s)ds\right)$$
$$+\left(-\frac{\alpha(s)}{c}\int\cos\left(\int p(s)ds\right)ds+c_2\right)\sin\left(\int p(s)ds\right)$$

eşitliğini sağlar. $\left\langle\gamma(s),\eta_1(s)\right\rangle=c\dfrac{r(s)}{q(s)}$ ifadesinin s ye göre türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$\langle \alpha(s)v(s),\eta_1(s)\rangle+\langle \gamma(s),-p(s)v(s)+q(s)\eta_2(s)\rangle=\left(c\frac{r(s)}{q(s)}\right)'$$

elde edilir. Basit hesaplamalar ile

$$-p(s)\langle \gamma(s),v(s)\rangle+q(s)\langle \gamma(s),\eta_2(s)\rangle=\left(c\frac{r(s)}{q(s)}\right)',$$

elde edilir. $q(s)\neq 0$ ve

$$\langle \gamma(s),v(s)\rangle=-c\frac{1}{p(s)}\left(\frac{r(s)}{q(s)}\right)'$$

olduğundan $\langle \gamma(s),\eta_2(s)\rangle=0$ elde edilir, bunun anlamı γ çatılandırılmış oskülatör eğridir.

(iii) önermesinin geçerli olduğunu varsayalım. $\langle \gamma(s),\eta_3(s)\rangle=c$ ifadesinin s ye göre türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$-r(s)\langle \gamma(s),\eta_2(s)\rangle=0$$

eşitliği elde edilir. $r(s)$ çatılandırılmış eğriliği sıfırdan farklı olduğundan

$$\langle \gamma(s),\eta_2(s)\rangle=0$$

olmalıdır ve γ çatılandırılmış oskülatör eğri olduğunu ifade eder.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış rektifiyan eğrilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 4.1. $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Eğer γ nın yer vektörü λ, μ ve ς diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma(s) = \lambda(s)v(s) + \mu(s)\eta_2(s) + \varsigma(s)\eta_3(s)$$

şeklinde yazılabilirse γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğri denir.

Teorem 4.2. $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri ve p, q ve r sıfırdan farklı çatılandırılmış eğrilikleri olsun. $\gamma(s)$ çatılandırılmış rektifiyan eğriye kongurent olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\beta(s)p(s)r(s)}{q(s)} + \left(\frac{\beta'(s)p(s) + \beta(s)p'(s)}{q^2(s)r(s)}\right)' = 0$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğri ve p, q ve r sıfırdan farklı çatılandırılmış eğrilikleri olsun. γ çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğundan yer vektörü

$$\gamma(s) = \lambda(s)v(s) + \mu(s)\eta_2(s) + \varsigma(s)\eta_3(s) \tag{4.1}$$

şeklindedir. (4.1) denkleminin türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha(s)v(s) = {} & \lambda'(s)v(s) + \left(\lambda(s)p(s) - \mu(s)q(s)\right)\eta_1(s) + \left(\mu'(s) - p(s)r(s)\right)\eta_2(s) \\ & + \left(\mu(s)r(s) + p'(s)\right)\eta_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} &\alpha(s)=\lambda^{'}(s), \\ &\lambda(s)p(s)-\mu(s)q(s)=0, \\ &\mu^{'}(s)-p(s)r(s)=0, \\ &\mu(s)r(s)+p^{'}(s)=0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklemleri elde edilir. (4.2) denklemindeki ilk üç eşitlikten

$$\begin{aligned} &\lambda(s)=\int\alpha(s)ds=\beta(s), \\ &\mu(s)=\frac{\beta(s)-p(s)}{q(s)}, \\ &\varsigma(s)=\frac{\mu^{'}(s)}{r(s)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) denklemindeki 4. eşitlikten de

$$\frac{\beta(s)p(s)r(s)}{q(s)}+\left(\frac{\beta^{'}(s)p(s)+\beta(s)p^{'}(s)}{q^{2}(s)r(s)}\right)^{'}=0 \tag{4.4}$$

elde edilir. p,q ve r, γ nın çatılandırılmış eğrilikleri olmak üzere. X, $\mathbb{R}^4$ de bir vektör alanı olmak üzere $\forall s\in I$ için

$$X(s)=\gamma(s)-\beta(s)v(s)-\frac{\beta(s)p(s)}{q(s)}\eta_2(s)-\frac{\beta^{'}(s)p(s)+\beta(s)p^{'}(s)}{q^{2}(s)r(s)}\eta_3(s)$$

şeklinde verilmiş olsun. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri birlikte (4.4) denklemi göz önünde bulundurulduğunda $X^{'}(s)=0$ olduğu kolayca görülebilir bunun anlamı X, sabit bir vektör alanıdır. Yani $\gamma(s)$, çatılandırılmış rektifiyan eğriye kongurenttir.

Teorem 4.3. γ, $\mathbb{R}^4$ de p,q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri olsun. γ çatılandırılmış rektifiyan eğriye kongurent ise

i. $p(s)=sbt>0,\ q(s)\neq sbt,\ r(s)=sbt\neq 0,\ \beta(s)=sbt\neq 0,\ \left(\alpha(s)=sbt=0\right)$

$$q(s)=c_2\sec\left(r(s)(c_1+s)\right)$$

ii. $p(s) \neq sbt,\ q(s) = sbt \neq 0,\ r(s) = sbt \neq 0,\ \beta(s) = sbt \neq 0,\ \left(\alpha(s) = sbt = 0\right)$

$$p(s) = c_1 \cos\left(r(s)\right) + c_2 \sin\left(r(s)\right)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğriye kongurent olsun. $p(s) = sbt > 0,$ $q(s) \neq sbt$, $r(s) = sbt \neq 0$, $\beta(s) = sbt \neq 0$ $\left(\alpha(s) = sbt = 0\right)$ fonksiyon olsun. (4.4) denkleminden

$$q^2(s) r^2(s) - q(s) q^{''}(s) + 2\left(q^{'}(s)\right)^2 = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$q(s) = c_2 \sec\left(r(s)(c_1 + s)\right) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. (i) ispatlanmış olur.

Benzer şekilde, $p(s) \neq sbt$, $q(s) = sbt \neq 0$, $r(s) = sbt \neq 0$, $\beta(s) = sbt \neq 0$ $\left(\alpha(s) = sbt = 0\right)$ fonksiyon olsun. (4.4) denkleminden

$$p(s) r^2(s) + p^{'}(s) = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$p(s) = c_1 \cos\left(r(s)\right) + c_2 \sin\left(r(s)\right) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. Böylece (ii) de ispatlanmış olur. Bu teoremden yararlanarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.5. $p(s) = sbt > 0$, $q(s) = sbt \neq 0$, $\beta(s) = sbt \neq 0$ $\left(\alpha(s) = sbt = 0\right)$ ve $r(s) \neq sbt$ fonksiyon olsun. (4.3) den

$$\frac{\beta(s)\, p(s) r(s)}{q(s)}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin sağlanması için $\beta(s)\, p(s) r(s) = 0$ olmalıdır böyle bir durum mümkün değildir. Çelişki elde edilir.

Teorem 4.6. γ, $\mathbb{R}^4$ de p,q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı bir çatılandırılmış rektifiyan eğri olsun.. Aşağıdaki önermeler denktir.

i. Uzaklık fonksiyonu $\delta(s)=|\gamma(s)|$

$$\delta^2(s)=\beta^2(s)+a^2(s) \tag{4.5}$$

dir.

ii. Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni

$$\langle\gamma(s),v(s)\rangle=\beta(s)$$

biçimindedir.

iii. Eğrinin konum vektörünün genelleştirilmiş asli normal bileşeni $\gamma^{\eta_1}(s)$ olmak üzere $\gamma^{\eta_1}(s)$ nın uzunluğu sabit ve $\delta(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv. Eğrinin konum vektörünün genelleştirilmiş birinci binormal bileşeni ve ikinci binormal bileşeni sırasıyla

$$\langle\gamma(s),\eta_2(s)\rangle=\frac{\beta(s)p(s)}{q(s)}, \tag{4.6}$$

$$\langle\gamma(s),\eta_3(s)\rangle=\frac{\beta^{'}(s)p(s)+\beta(s)p^{'}(s)}{q^2(s)r(s)} \tag{4.7}$$

şeklindedir.

İspat: Kabul edelim ki γ, $\mathbb{R}^4$ de p,q ve r çatılandırılmış eğrilikleri sıfırdan farklı bir çatılandırılmış rektifiyan eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin yer vektörü (4.1) denklemini, burada $\lambda(s),\mu(s)$ ve $\varsigma(s)$ fonksiyonlarıda (4.2) deki eşitliklerini sağlar. (4.2) denkleminde üçüncü eşitliği $\mu(s)$ ve son eşitlik $\varsigma(s)$ çarpılıp, elde edilen denklemler taraf tarafa toplandığında

$$\mu^{'}(s)\mu(s)+\varsigma(s)\varsigma^{'}(s)=0 \tag{4.8}$$

elde edilir. Buradan

$$\mu^2(s)+\varsigma^2(s)=a^2, \quad a\in\mathbb{R}_0^+ \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.1) denkleminden,

$$\langle\gamma(s),\gamma(s)\rangle=\lambda^2(s)+\mu^2(s)+\varsigma^2(s)$$

(4.3) ve (4.9) denklemlerinden de

$$\langle\gamma(s),\gamma(s)\rangle=\beta^2(s)+a^2(s)$$

elde edilir. Yani

$$\delta^2(s)=\beta^2(s)+a^2(s) \tag{4.10}$$

dir. Böylelikle (i) önermesi ispatlanmış olur.

(4.1) ve (4.3) denklemlerinden

$$\langle\gamma(s),v(s)\rangle=\beta(s)$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylelikle (ii) önermesi ispatlanmış olur.

$\mathbb{R}^4$ de γ eğrisinin yer vektörü $\gamma(s)=m(s)v(s)+\gamma^{\eta_1}(s)$ olarak yazılabilir. Burada $m(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\gamma^{\eta_1}(s)$ yer vektörünün normal bileşenidir. Eğer γ çatılandırılmış rektifiyan eğri ise $\gamma^{\eta_1}(s)=\mu(s)\eta_2(s)+\varsigma(s)\eta_3(s)$ olduğu anlamına gelir ve bu yüzden

$$\langle\gamma^{\eta_1}(s),\gamma^{\eta_1}(s)\rangle=\mu^2(s)+\varsigma^2(s)$$

dir. Dahası,

$$\sqrt{\langle\gamma^{\eta_1}(s),\gamma^{\eta_1}(s)\rangle}=\left|\gamma^{\eta_1}(s)\right|=a \quad a\in\mathbb{R}_0^+ \tag{4.11}$$

dir. $\delta(s)$, sabit olmayan bir fonksiyondur. (iii) önermesi ispatlanır. Son olarak, (4.1) ve (4.3) denklemlerinden (4.6) ve (4.7) denklemleri kolayca elde edilebilir.

Tersine, kabul edelim ki (i) önermesi sağlansın. (4.5) denkleminin s ye göre iki kez türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle \gamma(s), \eta_1(s) \right\rangle = 0,$$

elde edilir. Bu da γ nın bir çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

Eğer (ii) önermesi sağlanıyorsa benzer şekilde γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğu görülebilir. (iii) önermesi sağlanıyorsa $\gamma(s) = m(s)v(s) + \gamma^{\eta_1}(s)$ olsun. Burada $m(s)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur ve

$$\left\langle \gamma^{\eta_1}(s), \gamma^{\eta_1}(s) \right\rangle = \left\langle \gamma(s), \gamma(s) \right\rangle - 2\left\langle \gamma(s), v(s) \right\rangle m(s) + m^2(s),$$

dır. $\left\langle \gamma(s), v(s) \right\rangle = m(s)$ olduğundan,

$$\left\langle \gamma^{\eta_1}(s), \gamma^{\eta_1}(s) \right\rangle = \left\langle \gamma(s), \gamma(s) \right\rangle - \left\langle \gamma(s), v(s) \right\rangle^2$$

dır. Burada $\left\langle \gamma(s), \gamma(s) \right\rangle = \delta^2 \neq sbt$ dir. Yukarıdaki eşitliğin s ye göre türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$p(s)\left\langle \gamma(s), v(s) \right\rangle \left\langle \gamma(s), \eta_1(s) \right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da $\left\langle \gamma(s), \eta_1(s) \right\rangle = 0$ dır ve bu anlamı γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğridir. Kabul edelim ki (iv) önermesi sağlansın. (4.6) denkleminin s ye göre türevi alınır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa,

$$p(s)\left\langle \gamma(s), \eta_1(s) \right\rangle + r(s)\left\langle \gamma(s), \eta_3(s) \right\rangle = \left(\frac{\beta(s)\, p(s)}{q(s)} \right)'$$

elde edilir. $\left\langle \gamma(s), \eta_1(s) \right\rangle = 0$ olduğu görülür. Bu da γ nın bir çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 4.7. $\gamma : I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ eğrisi $\rho(t)$ pozitif bir fonksiyon ve $y(t)$ küresel bir eğri olmak üzere $\gamma(t) = \rho(t)\, y(t)$ eşitliğiyle verilsin. γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğridir gerek ve yeter koşul

$$\rho(t)=\frac{1}{c_1\sin(t)-c_2\cos(t)}$$

olmasıdır.

İspat: γ eğrisi $\rho(t)$ pozitif bir fonksiyon ve $y(t)$ küresel bir eğri olmak üzere

$$\gamma(t)=\rho(t)y(t) \tag{4.10}$$

dir. (4.10) numaralı denklemin t göre türevi alınırsa

$$\gamma'(t)=\rho'(t)y(t)+\rho(t)y'(t).$$

elde edilir. Dolayısıyla γ nın teğet vektörü,

$$\alpha(t)v(t)=\rho'(t)y(t)+\rho(t)y'(t) \tag{4.11}$$

şeklinde verilebilir. (4.11) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha'(t)v(t)+\alpha(t)v'(t)=&\left(\rho'(t)\right)'y(t)\\&+\left(2\rho'(t)-\rho(t)\rho'(t)\left(\rho(t)+\rho''(t)\right)y'(t)+\rho(t)y''(t)\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. $Y\in\mathbb{R}^4$,

$$\langle Y,y\rangle=\langle Y,y'\rangle=\langle Y,y\times y'\rangle=0$$

eşitliklerini sağlayan birim bir vektör olmak üzere $\{y,y',y\times y',Y\}$, $\mathbb{R}^4$ de bir ortonormal çatıdır. y'' nin $\{y,y',y\times y',Y\}$ ortonormal çatısına göre

$$y'=\langle y',y\rangle y+\langle y',y'\rangle y'+\langle y'',y\times y'\rangle y\times y'+\langle y',Y\rangle Y \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir. $\langle y,y\rangle=\langle y',y'\rangle=1$ olduğundan $\langle y'',y\rangle=-1$ ve $\langle y'',y'\rangle=0$ ve

$$y''=-y+\langle y'',y\times y'\rangle y\times y'+\langle y'',Y\rangle Y \tag{4.14}$$

(4.14), (4.12) da yazılır ve uyarlanmış çatının türev formülleri kullanılırsa

$$\alpha' v + \rho\eta_1 = \left(\left(\rho'\right)' - \rho\right) y + \left(-2\rho' - \rho\rho'\left(\rho + \rho''\right)\right) y' + \left\langle y'', y \times y'\right\rangle \gamma \times y' + \rho\left\langle y'', Y\right\rangle Y \quad (4.15)$$

elde edilir. $\langle y, y\rangle = 1$ olduğundan $\langle y, y'\rangle = 0$ ve bu yüzden $\langle \gamma, y'\rangle = 0$ dir. Ayrıca $\langle \gamma, Y\rangle = 0$ dır. γ çatılandırılmış rektifiyan eğri olması için $\langle \gamma, \eta_1\rangle = 0$ olması gerekmektedir. (4.15) denkleminin her iki tarafı γ ile iç çarpılırsa $\langle \gamma, \eta_1\rangle = 0$ olabilmesi için

$$\frac{\rho\rho'\left(\rho'\rho'' + \rho\rho'\right)}{\sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}\sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}} = \rho\rho'' - \rho^2$$

olmasıdır. Bu diferensiyel denklem

$$2\left(\left(\rho'\right)^2\right) - \rho\rho'' + \rho^2 = 0$$

denklemine eşittir ve bu denklemin çözümü

$$\rho(t) = \frac{1}{c_1 \sin(t) - c_2 \cos(t)}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKÇA

Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G. (2021). On the Framed Normal Curves in Euclidean 4-space.*Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, *4*(4), 258-263.

Bektaş, Ö., Gürses, N., & Yüce, S. (2016). Quaternionic osculating curves in euclidean and semi-euclidean space. *journal of dynamical systems and geometric theories*, *14*(1), 65-84.

Bozkurt, Z., Gök, I., Okuyucu, O. Z., & Ekmekci, F. N. (2013). Characterizations of rectifying, normal and osculating curves in three dimensional compact Lie groups. *Life Science Journal*, *10*(3), 819-823.

Chen, B. Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?.*The American mathematical monthly*, *110*(2), 147-152.

Erisir, T., & Gungor, M. A. (2014). Some characterızatıons of quaternıonıc rectıfyıng curves ın the semı-euclıdean space 𝔼 2 4. *honam mathematical journal*, *36*(1), 67-83.

Gökçelik, F., Bozkurt, Z., Gök, I., Ekmekci, F. N., & Yayli, Y. (2012). Parallel transport frame in 4-dimensional Euclidean space. *arXiv preprint arXiv: 1207. 2999*.

Gungor, M. A., & Tosun, M. (2011). Some characterizations of quaternionic rectifying curves. *Differential Geometry--Dynamical Systems*.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri I. *Ankara Üniversitesi, Ankara,* 1-270.

Honda, S., & M. Takahashi, M. (2016). Framed curves in the Euclidean space, *Advances in Geometry 16*, 265-276.

İlarslan, K., & Nešović, E. (2008). Some characterizations of osculating curves in the Euclidean spaces. *Demonstratio Mathematica*, *41*(4), 931-940.

İlarslan, K., & Nesovic, E. (2008). Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$.*Turkish Journal of Mathematics*, *32*(1), 21-30.

Okuyucu, O. Z., & Canbirdi, M. (2021). Framed slant helices in Euclidean 3-space. *Advances in Difference Equations*, *2021*(1), 1-14.

Sabuncuoğlu, A. (2014). Diferensiyel Geometri V. *Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,* 1-514.

Wang, Y., Pei, D., & Gao, R. (2019). Generic Properties of Framed Rectifying Curves, *Mathematics* 7(1), 37.

Yazıcı, B. D., Karakuş, S. Ö., & Tosun, M. (2021). On the classification of framed rectifying curves in Euclidean space.*Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

Yazici, B. D., Karakus, S. O., & Tosun, M. (2021). Framed normal curves in Euclidean space. *Tbilisi Math. J*, 27-37.