T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Q-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALİME TAŞER

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2022

10473333

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Q-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALİME TAŞER

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2022

10473333

BEYAN

"Q-Chlodowsky Operatörleri İçin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yaklaşım"adlı yüksek lisansta yeterlik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="2">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR |</td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR | X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td>Desteğin Türü</td><td>Proje Numarası</td></tr>
<tr><td>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2-TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td>Diğer;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td>ETİK KURUL karar tarih/ sayı:</td><td>........................../ ....</td></tr>
</table>

Öğrenci Adı ve Soyadı
Halime TAŞER
Tarih
...../...../ 2022
İmza

ÖN SÖZ

Bu tezin oluşmasında ve yazılmasında her zaman yanımda olan, engin bilgilerini benimle paylaşıp enerjisiyle beni motive eden, yüksek lisans eğitim hayatım boyunca yanımda hissettiğim ve bundan sonraki hayatımda mutlaka olmasını istediğim, çok sevdiğim değerli danışman hocam Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Sayın Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM'e en içten saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Sayın Doç. Dr. Emre TAŞ'a, bu tezin oluşmasına ışık tutan Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Harun KARSLI'ya ve yüksek lisans eğitim hayatım boyunca ders aldığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'ndaki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Beni her daim yüreklendirip, her zaman yanımda olan canım eşim Atıl TAŞER'e ve canım oğlum Deniz Burak TAŞER'e, çok sevdiğim arkadaşım Hülya TOPAL'a ve tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

Halime TAŞER
...../...../ 2022

ÖZET

Q-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılarak, pozitif lineer operatörler, süreklilik modülü ve q-analizin temel tanımlarına ve iyi bilinen teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, q-Chlodowsky operatörleri tanımlanmıştır ve klasik yakınsaklıkla elde edilen bazı yaklaşım sonuçları verilmiştir. Esas itibariyle orijinal sonuçlarımız dördüncü bölümde yer almaktadır. Bu bölümde, q-analiz ile tanımlanan Chlodowsky operatörlerinin daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiş, yakınsaklık oranı elde edilmiş ve bu orijinal sonuçlara ilişkin bir örneğe yer verilmiştir. Son bölümde, elde edilen orijinal sonuçların değerlendirmesi yapılmıştır ve literatüre katkısından bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Q-Analiz, Chlodowsky Operatörleri, Yaklaşım Teorisi, Kuvvet Serisi Metodu, İstatistiksel Yakınsaklık.

ABSTRACT

APPROXIMATION FOR Q-CHLODOWSKY OPERATORS VIA STATISTICAL CONVERGENCE WITH RESPECT TO POWER SERIES METHOD

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, by recalling the concepts of statistical convergence and statistical convergence with respect to power series method, basic definitions, theorems and well known results which we need throughout the thesis, also definitions of linear positive operators, modulus of continuity and q-analysis and some of their important properties are given. In the third chapter, q-Chlodowsky operators are defined, some approximation properties of these operators are examined and some approximation results obtained with classical convergence are given. The original results of this thesis are included in the fourth chapter. In this chapter, the approximation properties of Chlodowsky operators defined by q-analysis are examined with the use of statistical convergence with respect to power series method which is not included by previously known methods, the rate of convergence is obtained and an example to these original results is given. In the last chapter, the original results obtained in during the thesis are evaluated and its contribution to the literature is mentioned.

Keywords: Q-Calculus, Chlodowsky Operators, Approximation Theory, Power Series Method, Statistical Convergence.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_\mathbf{0}$	:	Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\lvert\mathbf{E}\rvert$	:	E kümesinin kardinalitesi
$\delta(\mathbf{E})$	:	E kümesinin yoğunluğu
$\delta_{\mathbf{P_p}}(\mathbf{E})$	:	E kümesinin P_p-yoğunluğu
$\mathbf{st}-\lim\mathbf{x}$	:	x dizisinin istatistiksel limiti
$\mathbf{st}_{\mathbf{P_p}}-\lim\mathbf{x}$	:	x dizisinin P_p-istatistiksel limiti
$\mathbf{L_n}(\cdot;\cdot)$	:	Pozitif lineer operatör dizisi
$\mathbf{B_n}(\cdot;\cdot)$	:	Bernstein operatörleri dizisi
$\mathbf{B_{n,q}}(\cdot;\cdot)$	:	Q-Bernstein operatörleri dizisi
$\mathbf{C_n}(\cdot;\cdot)$	:	Chlodowsky operatörleri dizisi
$\mathbf{C_{n,q}}(\cdot;\cdot)$	:	Q-Chlodowsky operatörleri dizisi
$\mathbf{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$	:	$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{B}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$	:	$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\omega(\mathbf{f},\delta)$	:	Süreklilik modülü
$\rightrightarrows$	:	Düzgün yakınsaklık
$[\mathbf{n}]_\mathbf{q}$	:	q-tamsayısı
$\lVert\cdot\rVert_\mathbf{X}$	:	X uzayında norm

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, verilen uzaydaki bir fonksiyona aynı uzaya ait daha iyi özellikleri olan ve daha kullanışlı fonksiyonlarla yaklaşımı inceler ve bu teoride, pozitif lineer operatörler etkili bir yere sahiptir. Yaklaşım teorisinin gelişimine bakacak olursak, Alman matematikçi K. Weierstrass'ın 1885 yılında sunduğu, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona cebirsel ve trigonometrik polinomlarla yaklaşıma ilişkin teoremi ve ispatı kilit noktasıdır (Weierstrass, 1885: Giriş). Birçok matematikçi uzun ve karmaşık olan bu ispat yerine, daha basit ve takibi kolay bir ispat vermeyi amaç edinmiştir. Bu kapsamda, 1912 yılında S. N. Bernstein, $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli f fonksiyonlarına yaklaşmayı sağlayan ve Bernstein polinomları olarak adlandırılan

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

polinomları tanımlamıştır (Bernstein, 1912: 1-2). Matematiğin olasılık ve sayılar teorisi alanlarında da önemli uygulamalara sahip olan Bernstein polinomları, Weierstrass'ın teoreminin daha kısa ve kolayca anlaşılabilir bir ispatının verilmesini sağlamıştır (Lorentz, 1953). Dolayısıyla yaklaşım teorisinde de etkileri başlamıştır.

1937 yılında ise Chlodowsky tarafından $0 \leq x \leq b_n$, (b_n) pozitif artan dizi,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

olmak üzere

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k},\ n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

tanımlanarak Bernstein polinomları $[0,\infty)$ aralığı üzerinde genelleştirilmiştir (Chlodowsky, 1937: 381).

Bernstein-Chlodowsky operatörleri olarak adlandırılan bu operatör dizisinin yaklaşım özellikleri çalışılırken

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartını göz önünde bulundurmak oldukça önemlidir. Daha sonra 1953 yılında P. P. Korovkin tarafından bu polinomlar yerine pozitif lineer operatörler kullanılarak, yaklaşım teorisinde güçlü ve kullanışlı Korovkin tipi yaklaşım sonuçları elde edilmiştir (Korovkin, 1953: 961).

Son zamanlarda klasik analiz yardımıyla elde edilen ve elde edilemeyen bazı sonuçlar q-analiz ile de çalışılmıştır. Burada q-analizin $q=1$ durumunda klasik analiz ile çakıştığını, dolayısıyla, klasik analizi genelleştiren sonuçlar elde etmeyi sağladığını söylemekte fayda vardır. Ayrıca q-analiz matematik ve fizik bilimleri arasında köprü görevi görerek disiplinlerarası çalışmaya imkan sağlamaktadır. Tüm bunlar dikkate alındığında q-analiz yardımıyla Bernstein ve Chlodowsky operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B_{n,q}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x), \tag{1.3}$$

ve $0 \le x \le b_n$, (b_n) pozitif artan dizi,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

olmak üzere

$$C_{n,q}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \tag{1.4}$$

(Phillips, 1997), (Karslı ve Gupta, 2008). Ayrıca (b_n) dizisi üzerine koyulan uygun şartlarla q-Chlodowsky ve q-Bernstein operatörleri ile iterasyonlarının özellikleri incelenmiştir (Oruç ve Tuncer, 2002), (Ostravska, 2003), (Ostravska, 2006), (Wang, 2007).

Tabi ki bu yaklaşım teoremlerinde kullanılan limit, operatörlerin klasik limitidir. Klasik limit mevcut değil iken, yani klasik Korovkin tipi yaklaşımda pozitif lineer operatör dizisi birim operatöre yakınsamaz iken, yine de yaklaşımdan söz etmek mümkündür. Bu noktada, amacı ıraksak bir diziye (ya da seriye) limit karşılık getirmek olan toplanabilme teorisinden söz etmekte fayda vardır. Bir dizinin yakınsak olmadığı durumda sonsuz matrisler, istatistiksel yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, ideal yakınsaklık kullanılarak diziye limit karşılık getirilebilir. Iraksak seriler ve toplanabilme teorisi olarak adlandırılan bu teori ile yaklaşım teorisini birleştiren ilk çalışma 2002 yılında A. D. Gadjiev ve C. Orhan tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Korovkin teoreminde kullanılan klasik yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık alınarak Korovkin teoremi geliştirilmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002). 2019 yılında ise M. Ünver ve C. Orhan tarafından $x=(x_j)$ reel terimli dizi, P_p regüler kuvvet serisi metodu,

$$E_\varepsilon=\{j\in\mathbb{N}_0 : |x_j-\ell|\ge\varepsilon\} \text{ ve } p(t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$$

olmak üzere, her $\varepsilon>0$ için

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon)=0$$

ise, yani her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{0<t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{j\in E_\varepsilon} p_j t^j = 0 \tag{1.5}$$

sağlanacak biçimde bir ℓ sayısı varsa, $x = (x_j)$ dizisi ℓ sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır denilerek kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır ve bu limit

$$st_{P_p} - \lim x = \ell$$

olarak gösterilmiştir (Ünver ve Orhan, 2019: 537). Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığın birbirini gerektirmediğine dair örnekler verilmiştir (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

Şimdiye kadar birçok matematikçi Korovkin teoremini farklı fonksiyon uzaylarında da çalışmıştır. Bunun yanı sıra, istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, toplam süreçleri, ideal yakınsaklık alınarak da birçok Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilmiştir (Atlıhan ve Orhan, 2008), (Atlıhan vd., 2017), (Duman ve Orhan, 2004), (Gadjiev ve Orhan, 2002), (Özgüç ve Taş, 2016), (Taş vd., 2018). Tüm bu metotların amacı klasik anlamda yakınsak olmayan; yani ıraksak bir diziye ya da seriye limit karşılık getirmek olup, klasik yaklaşım teorisinin gelişiminde rolü büyüktür.

Bu tezin amacı, H. Karslı ve V. Gupta tarafından tanımlanan q-Chlodowsky operatörlerinin klasik yakınsaklık yardımıyla elde edilen sonuçlarını genişletmektir (Karslı ve Gupta, 2008). Bu sonuçları, klasik limit mevcut olmadığında kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla geliştirebilmek yine de mümkün olacaktır.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi metodu, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır. Ayrıca, yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan pozitif lineer operatörler ve hata tahmininde kullanılan süreklilik modülü ve özellikleri verilecektir. Son olarak günümüzde klasik analiz yerine aktif olarak kullanılan q-analizden ve ihtiyaç duyulacak temel özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1. Yoğunluk

Bu kısımda, $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $E \subseteq \mathbb{N}_0$ olmak üzere, E kümesinin yoğunluğu tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1.

$$\delta(E) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{j \leq n : j \in E\}| \tag{2.1}$$

limitine, mevcut olması durumunda, E kümesinin yoğunluğu denir (Niven vd., 1980: 473). Burada $|E|$ ile E kümesinin kardinalitesi gösterilmektedir.

Örnek 2.1.2. Doğal sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesi sıfır yoğunluklu olduğu gibi,

$$\{1, 4, 9, \ldots, j^2, \ldots\}$$

kümesi de sıfır yoğunlukludur.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı tanıtılarak, klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiden söz edilecektir.

Tanım 2.2.1. $x = (x_j)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$E_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(E_\varepsilon) = 0$$

ise, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{j \leq n : |x_j - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.2}$$

sağlanacak biçimde bir ℓ sayısı varsa, $x = (x_j)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim x = \ell$$

ya da

$$x_j \to \ell(st)$$

olarak gösterilir (Fast, 1951: 241), (Fridy, 1985: 302), (Salat, 1980: 139).

Örnek 2.2.2. $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_j = \begin{cases} 1 & , \quad j = m^2 \\ 0 & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_j) dizisini inceleyelim.
Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{j \leq n : |x_j - 0| \geq \varepsilon\} \subset \{j \leq n : x_j \neq 0\}$$

ve

$$|\{j \leq n : |x_j| \geq \varepsilon\}| \leq |\{j \leq n : x_j \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|\{j \leq n : |x_j| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|\{j \leq n : x_j \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sqrt{n} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$E_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - 0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(E_\varepsilon) = 0$$

olup, $x = (x_j)$ dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsak olacaktır.

Örnek 2.2.3. $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_j = \begin{cases} \sqrt{j} & , \quad j = m^2 \\ 3 & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_j) dizisini inceleyelim.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{j \leq n : |x_j - 3| \geq \varepsilon\}| \leq |\{j \leq n : x_j \neq 3\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|\{j \leq n : |x_j - 3| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|\{j \leq n : x_j \neq 3\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sqrt{n} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$E_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - 3| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(E_\varepsilon) = 0$$

olup, $x = (x_j)$ dizisi 3 sayısına istatistiksel yakınsak olacaktır.

Bu iki örnekten anlaşılacağı üzere, sınırlı ıraksak diziler istatistiksel yakınsak olabileceği gibi, sınırsız ıraksak diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir. Burada akla klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusu gelebilir. Yakınsak olan bir dizinin aynı zamanda istatistiksel yakınsak olacağı açıktır. Yani, klasik yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirmektedir. Ancak buradaki örneklerden de görüleceği üzere, istatistiksel yakınsaklık klasik yakınsaklığı gerektirmemektedir.

2.3. Kuvvet Serisi Metodu

Bu kısımda kuvvet serisi metodu ve bir dizinin kuvvet serisi anlamında yakınsak olması tanıtılacaktır. Ayrıca, klasik anlamda yakınsaklık ile kuvvet serisi anlamında yakınsaklık arasındaki ilişkiden bir örnekle söz edilecektir.

Tanım 2.3.1. (p_j) negatif olmayan reel terimli bir dizi ve $p_0 > 0$ olmak üzere,

$$p(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j \tag{2.3}$$

ifadesine kuvvet serisi denir. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı R ve $0 < R \leq \infty$ olmak üzere kuvvet serisi metodunun ve $x = (x_j)$ dizisi için kuvvet serisi anlamında yakınsaklığın tanımını verelim:

$$C_p := \left\{ f : (-R,R) \to \mathbb{R} \mid \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} f(t) \quad mevcut \right\}$$

ve

$$C_{P_p} := \left\{ x = (x_j) \mid p_x(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j x_j \quad \text{yakınsaklık yarıçapı} \geq R \quad ve \quad p_x \in C_p \right\}$$

olsun.

$P_p - \lim : C_{P_p} \to \mathbb{R}$ (kısaca P_p) olmak üzere

$$P_p - \lim x = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j x_j \tag{2.4}$$

ifadesine kuvvet serisi metodu ve $x = (x_j)$ dizisine de P_p-yakınsaktır denir (Boos, 2000: 152), (Kratz ve Stadtmüller, 1989: 362).

Klasik anlamda yakınsak bir dizi aynı zamanda P_p-yakınsak oluyorsa ve limit değeri korunuyorsa P_p kuvvet serisi metodu regülerdir denir (Boos, 2000: 160).

Şimdi P_p kuvvet serisi metodunun regülerliğini karakterize eden teoremi hatırlatalım:

Teorem 2.3.1. P_p kuvvet serisi metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart her $j \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{t\to R^-} \frac{p_j t^j}{p(t)} = 0 \tag{2.5}$$

olmasıdır (Boos, 2000: 160).

Kuvvet serisi metodu Abel ve Borel gibi iyi bilinen pek çok toplanabilme metotlarını içermektedir. Gerçekten de,

i. eğer $p_j = 1,\ j \in \mathbb{N}_0$ ise $R = 1$ ve $p(t) = \dfrac{1}{1-t},\ t \in (-1,1)$ olup P_p kuvvet serisi metodu Abel metoduyla çakışmaktadır,

ii. eğer $p_j = \dfrac{1}{j!},\ j \in \mathbb{N}_0$ ise $R = \infty$ ve $p(t) = e^t,\ t \in \mathbb{R}$ olup P_p kuvvet serisi metodu Borel metoduyla çakışmaktadır.

Diğer taraftan kuvvet serisi metodu klasik yakınsaklıktan daha etkilidir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 2.3.2. $x = (x_j)$ dizisi $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$ şeklinde tanımlansın.

$$p_j = \frac{1}{j!},\ j \in \mathbb{N}_0$$

olmak üzere $R=\infty$, $p(t)=e^t$ ile tanımlanan kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım. Açıkça

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_jt^j}{j!} =&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{2j}}{(2j)!}\\ =&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\\ =&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

olup $x=(x_j)$ dizisi $\frac{1}{2}$ sayısına P_p-yakınsaktır.
$x=(x_j)$ dizisinin klasik anlamda ya da istatistiksel anlamda yakınsak olmadığı açıktır.

2.4. Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacaktır. Ayrıca, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve klasik yakınsaklık arasındaki ilişkiden söz edilecektir.

Tanım 2.4.1. P_p regüler kuvvet serisi metodu ve $E\subset\mathbb{N}_0$ olsun.
Eğer

$$\delta_{P_p}(E)=\lim_{0<t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{j\in E}p_jt^j \tag{2.6}$$

limiti mevcutsa, $\delta_{P_p}(E)$ sayısına E kümesinin P_p-yoğunluğu denir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).
E kümesinin P_p-yoğunluğu için $0\leq\delta_{P_p}(E)\leq 1$ olduğu açıktır.

Örnek 2.4.2. Aşağıdaki (p_j) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım:
$m\in\mathbb{N}_0$ için

$$p_j=\begin{cases}1 \ , & j=2m\\ 0 \ , & j=2m+1\end{cases}$$

$E=\{1,3,5,\ldots\}\subset\mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\delta(E)=\frac{1}{2}$$

dir. $\delta_{P_p}(E)$ ise

$$\begin{aligned}\delta_{P_p}(E)=&\lim_{0<t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{j\in E}p_jt^j\\ =&\lim_{0<t\to R^-}\frac{1}{p(t)}.0\\ =&0\end{aligned}$$

olur.

Bu örnekten anlaşılacağı üzere, E kümesinin yoğunluğu ile E kümesinin P_p-yoğunluğunun birbirine eşit olması gerekmemektedir.

Tanım 2.4.3. $x = (x_j)$ reel terimli dizi ve P_p regüler kuvvet serisi metodu olsun.

$$E_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon) = 0$$

ise, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j\in E_\varepsilon} p_j t^j = 0 \tag{2.7}$$

sağlanacak biçimde bir ℓ sayısı varsa, $x = (x_j)$ dizisi ℓ sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_{P_p} - \lim x = \ell$$

olarak gösterilir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

Örnek 2.4.4. Aşağıdaki (p_j) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_j = \begin{cases} 1 & , \quad j = m^2 \\ 0 & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

ve $x = (x_j)$ dizisi

$$x_j = \begin{cases} 0 & , \quad j = m^2 \\ j & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

olsun.
$x = (x_j)$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığı açıktır. Ancak her $\varepsilon > 0$ için

$$E_\varepsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - 0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon) = 0$$

olup, $x = (x_j)$ dizisi 0 sayısına P_p-istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 2.4.5. Aşağıdaki (p_j) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_j = \begin{cases} 1 & , \quad j = m^2 \\ 0 & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

ve $x = (x_j)$ dizisi

$$x_j = \begin{cases} j & , \quad j = m^2 \\ 0 & , \quad j \neq m^2 \end{cases}$$

olsun.
Bu durumda $x = (x_j)$ dizisinin 0 sayısına istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Ancak $x = (x_j)$ dizisi P_p-istatistiksel yakınsak değildir.

Bu örneklerden görüleceği üzere istatistiksel yakınsaklık ile P_p-istatistiksel yakınsaklık birbirini gerektirmemektedir (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

2.5. Pozitif Lineer Operatörler

Bu kısımda pozitif lineer operatörlere ilişkin bazı temel tanım ve özellikler verilecektir. Ayrıca iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.5.1. X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere X uzayından alınan herhangi f fonksiyonuna Y uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren L kuralı varsa o taktirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durumda $g(x) = L(f;x)$ gösterimi kullanılır.

Eğer, X lineer bir uzay ise L operatörünün lineerliğini tanımlayabiliriz.

Tanım 2.5.2. X ve Y reel fonksiyonların iki uzayı olmak üzere her $f, g \in X$ ve α_1, α_2 keyfi reel sabitleri için

$$L(\alpha_1 f + \alpha_2 g; x) = \alpha_1 L(f;x) + \alpha_2 L(g;x) \tag{2.8}$$

gerçekleniyorsa $L : X \to Y$ dönüşümüne lineer operatör denir.

Ayrıca eğer $f \geq 0$ olması $Lf \geq 0$ olmasını gerektiriyorsa, L dönüşümüne pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

Bu tanımdan görülüyor ki L lineer operatörü için $L(0;x) = 0$ sağlanır.

Önerme 2.5.3. $L : X \to Y$ pozitif lineer operatör olsun.

- $f \leq g$ olacak biçimde her $f, g \in X$ için $Lf \leq Lg$ (monotonluk),
- her $f \in X$ için $|Lf| \leq L|f|$

gerçeklenir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

Tanım 2.5.4. X ve Y normlu uzaylar ve $L : X \to Y$ lineer bir operatör olmak üzere her $f \in X$ için

$$\|Lf\|_Y \leq H\|f\|_X \tag{2.9}$$

sağlanacak biçimde reel bir H sayısı varsa L operatörü sınırlı operatör denir. Ayrıca L operatörünün normu

$$\|L\| = \sup_{f \in X, f \neq \theta} \frac{\|Lf\|_Y}{\|f\|_X} \tag{2.10}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995: 12), (Kreyzig, 2007: 91-92).

Şimdi bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsaklığı için gerek ve yeter şart veren bir sonucu hatırlatacağız. Bu sonuç birbirinden bağımsız olarak, 1951 yılında Popoviciu , 1952 yılında H. Bohman ve 1953 yılında P. P. Korovkin tarafından elde edilmiştir ve literatürde 'Bohman-Korovkin Teoremi' olarak bilinmektedir (Bohman, 1952: 45), (Korovkin, 1953: 961), (Popoviciu, 1951: 1-4).

Teorem 2.5.1. $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $[a,b]$ üzerinde $e_j(t) = t^j$ olmak üzere

$$L_n(e_j(t);x) \rightrightarrows e_j(x), j = 0,1,2$$

ise her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ üzerinde

$$L_n(f(t);x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir.

Burada $C[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli, reel değerli tüm fonksiyonların uzayı gösterilmiştir.

Örnek 2.5.5. $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, reel değerli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomlar dizisi 1912 yılında Bernstein tarafından

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1] \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bernstein, 1912: 1). $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatörleri, pozitif ve lineer operatörlerdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} B_n(1;x) &= 1, \\ B_n(t;x) &= x, \\ B_n(t^2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

olup $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatörler dizisinin Teorem 2.5.1 i gerçeklediği açıktır.

2.6. Süreklilik Modülü

Bu kısımda hata tahmininde önemli bir yere sahip olan süreklilik modülü tanıtılacaktır ve bazı özellikleri verilecektir. Süreklilik modülü sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir. Ancak süreklilik modülünün en önemli özellikleri düzgün sürekli fonksiyonlar için geçerli olanlarıdır (Altomare ve Campiti, 1994: 266), (Korovkin, 1953: 963).

Tanım 2.6.1. f, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sınırlı bir fonksiyon olmak üzere, keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f,\delta) = \omega_f([a,b],\delta) = \sup_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(x)-f(y)| \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan $\omega(f,\delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$\omega(f,\delta)$ sayısı f fonksiyonunun düzgün sürekliliği tanımında δ ile gelen ε sayısının bir ölçümüdür. Hatta tam olarak δ sayısının bir fonksiyonu şeklinde $\varepsilon = \omega_f(\delta)$ yazılabilir ve aşağıdakiler gerçeklenir:

1. Her $x \neq y$, $x,y \in [a,b]$ için $|f(x)-f(y)| \leq \omega(f,|x-y|)$.

2. Eğer $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$ gerçeklenir.

3. f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega(f,\delta) = 0$ olmasıdır.

4. f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı ve $\delta > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,n\delta) \leq n\omega(f,\delta)$ olur. Ayrıca her $\lambda > 0$ için $\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta)$ gerçeklenir.

2.7. Q-Analizin Temel Özellikleri

Bu kısımda matematik ve fizik bilimleri arasında köprü görevini gören q-analiz tanıtılacaktır ve ihtiyaç duyulan özellikleri verilecektir.

Tanım 2.7.1. $q > 0$ ve q bir reel sayı ve i negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$[i]_q = \begin{cases} (1-q^i)/(1-q), & q \neq 1, \\ i, & q = 1, \end{cases} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanan tamsayıya q-tamsayısı denir.

$[i]_q$ sayısının faktöriyeli,

$$[i]_q! = \begin{cases} [i]_q[i-1]_q \cdots [1]_q, & i = 1,2,\ldots, \\ 1, & i = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

ve $n \geq k \geq 0$ iken q-binom katsayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \tag{2.15}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca binom katsayıları aşağıdaki özellikleri de sağlamaktadır:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \tag{2.16}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \tag{2.17}$$

(Kac ve Cheung, 2002: 13, 18).

Örnek 2.7.2. Bernstein polinomlarının q-genelleştirmesi Phillips tarafından her pozitif n tamsayısı için,

$$f_k = f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

olmak üzere

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

ya da

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Phillips, 1997: 511). Bu ifadede $q = 1$ için, klasik Bernstein polinomlarının elde edileceği açıktır. Ayrıca q-Bernstein polinomları, q-farklar yardımıyla da ifade edilerek Phillips tarafından aşağıdaki teorem elde edilmiştir:

Teorem 2.7.1. $j = 0,1,2$ olmak üzere $B_{n,q}(t^j;x)$ için

$$\begin{aligned} B_{n,q}(1;x) &= 1, \\ B_{n,q}(t;x) &= x, \\ B_{n,q}(t^2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \end{aligned}$$

gerçeklenir (Phillips, 1997: 513).

3. Q-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Bernstein operatörlerinin q-analiz yardımıyla tanımlanan Chlodowsky varyasyonunun yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Q-Chlodowsky Operatörlerinin Bazı Temel Özellikleri

Öncelikle Chlodowsky tarafından 1937 yılında sınırsız bir küme üzerinde tanımlanan Bernstein-Chlodowsky operatörlerini hatırlatalım (Chlodowsky, 1937: 381) :
$0 \le x \le b_n$, (b_n) pozitif artan dizi,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

olmak üzere

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k},\ n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradaki düşünce ile $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli f fonksiyonu için q-analiz yardımıyla

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)p_{k,n,q}(x),$$

$$p_{k,n,q}(x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

ya da

$$p_{k,n,q}(x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n-k}$$

olarak tanımlanan q-Bernstein operatörleri;

$0 \le x \le b_n$, (b_n) pozitif artan dizi ve

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

olmak üzere

$$C_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \tag{3.2}$$

şeklinde genişletilmiştir. Bu operatörler q-Bernstein operatörlerinin q-Chlodowsky varyasyonu olarak adlandırılır. Bunun yanı sıra, q-Bernstein operatörlerinin farklı açılardan da detaylıca çalışıldığını belirtmekte fayda vardır (Oruç ve Tuncer, 2002), (Ostravska, 2003), (Ostravska, 2006), (Wang, 2007).

$C_{n,q}(f;x)$ operatörlerinin $0<q\leq 1$ için pozitif ve lineer olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Yani;

$f(x)\geq 0$, $x\in[0,b_n]$ ve b_n pozitif terimli artan bir dizi, aynı zamanda $0<q\leq 1$ iken

$$C_{n,q}(f;x)\geq 0 \tag{3.3}$$

olup, operatör pozitiftir ve α_1, α_2 keyfi reel sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_{n,q}(\alpha_1 f+\alpha_2 g;x) &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha_1 f+\alpha_2 g)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha_1 f)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{n}(\alpha_2 g)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \alpha_1 C_{n,q}(f;x)+\alpha_2 C_{n,q}(g;x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

olup, operatör lineerdir.

Dolayısıyla Bohman-Korovkin teoremi kullanılarak bazı yakınsaklık sonuçlarını araştırmak mümkündür. Bu sebeple, bu çalışma boyunca q sayıları için $0<q\leq 1$ aralığı kullanılacaktır.

Lemma 3.1.1. $j=0,1,2$ olmak üzere $C_{n,q}(t^j;x)$ için

$$\begin{aligned} C_{n,q}(1;x) &= 1, \\ C_{n,q}(t;x) &= x, \\ C_{n,q}(t^2;x) &= x^2+\frac{x(b_n-x)}{[n]_q} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

İspat. Gerçekten de;

$j=0$ için

$$
\begin{aligned}
C_{n,q}(1;x) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= \left[\frac{x}{b_n} + \left(1-\frac{x}{b_n}\right)\right]_q^n \\
&= [1]_q \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

$j=1$ için

$$
\begin{aligned}
C_{n,q}(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= b_n \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= b_n \frac{x}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= x \left[\frac{x}{b_n} + \left(1-\frac{x}{b_n}\right)\right]_q^{n-1} \\
&= x[1]_q \\
&= x,
\end{aligned}
$$

ve $j=2$ için

$$
\begin{aligned}
C_{n,q}(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}b_n\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{{[k]_q}^2}{{[n]_q}^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{{[k]_q}^2}{{[n]_q}^2} \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&+ {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= \frac{q{b_n}^2[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=2}^{n} [k-1]_q \frac{[n-2]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&+ \frac{{b_n}^2}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k} \\
&= \frac{q{b_n}^2[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{[n-2]_q!}{[k]_q![n-k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-2} \\
&+ \frac{{b_n}^2}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-1} \\
&= \frac{q{b_n}^2[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-2} \\
&+ \frac{{b_n}^2}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^1 \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-1} \\
&= \frac{q{b_n}^2[n-1]_q}{[n]_q} \left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-2} \\
&+ \frac{{b_n}^2}{[n]_q} \frac{x}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-k-1} \\
&= \frac{q{b_n}^2[n-1]_q}{[n]_q} \left(\frac{x^2}{{b_n}^2}\right) \left[\frac{x}{b_n}+\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\right]_q^{n-2} + \frac{{b_n}^2}{[n]_q}\frac{x}{b_n} \left[\frac{x}{b_n}+\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\right]_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q}x^2 + \frac{b_n x}{[n]_q}$$
$$= \frac{q[n-1]_q + [1]_q - [1]_q}{[n]_q}x^2 + \frac{b_n x}{[n]_q}$$
$$= \frac{[n]_q x^2 - x^2 + b_n x}{[n]_q}$$
$$= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_q}$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Operatörün lineerliği ve Lemma 3.1.1 kullanılarak aşağıdaki ifadeler kolaylıkla elde edilir:

$$C_{n,q}\left((t-x);x\right) = 0, \tag{3.5}$$

$$C_{n,q}\left((t-x)^2;x\right) = \frac{x(b_n - x)}{[n]_q}. \tag{3.6}$$

Ancak burada $0 < q < 1$ ve $n \to \infty$ olmak üzere

$$[n]_q \to \frac{1}{1-q}$$

olduğu dikkate alınırsa $C_{n,q}(t^2;x)$ ve $C_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)$ ifadelerinin $n \to \infty$ için sırasıyla x^2 ve 0 fonksiyonlarına yakınsamadığı görülür. Klasik Chlodowsky operatörleri için de $C_n(t^2;x)$ ve $C_n\left((t-x)^2;x\right)$ ifadelerinin $n \to \infty$ için sırasıyla x^2 ve 0 fonksiyonlarına yakınsamadığı iyi bilinmektedir.

Bu durumun birincisi q tamsayılarından, ikincisi ise (b_n) dizisinden olmak üzere iki sebebi vardır. Dolayısıyla yaklaşım özelliklerini incelemek için bu zorlukların ortadan kaldırılması gerekmektedir.

q tamsayılarından doğan zorluk iki şekilde ortadan kaldırılabilmektedir. Birinci yol, q sayısını 1 seçmektir. Ancak bu durumda tanımladığımız operatör klasik Chlodowsky operatörü olacaktır.

Bu sebeple q sayısı yerine, aşağıdaki koşulları sağlayan q_n dizisi alınarak bu zorluk aşılacaktır:

- $0 < q_n < 1$,
- $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, ve
- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$.

İkinci zorluk ise $[0,\infty)$ aralığının keyfi kapalı sınırlı alt aralığı üzerinde noktasal ve düzgün yakınsaklıklar çalışılarak aşılacaktır.

3.2. Q-Chlodowsky Operatörlerinin Bazı Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda q-Chlodowsky operatörleri için H. Karslı ve V. Gupta tarafından elde edilen bazı yaklaşım sonuçları verilecektir (Karslı ve Gupta, 2008: 223):

Teorem 3.2.1. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ için

$$C_{n,q_n}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n{}^s \frac{x}{b_n}\right), \qquad 0 \le x \le b_n$$

operatörleri, A pozitif reel sabit olmak üzere $[0,A]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat. Bohman-Korovkin teoremi gereğince q-Chlodowsky operatörlerinin pozitifliği ve lineerliği kullanılarak

i. $C_{n,q_n}(1;x) \rightrightarrows 1$

ii. $C_{n,q_n}(t;x) \rightrightarrows x$

iii. $C_{n,q_n}(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.1.1 yardımıyla (i), (ii) ve

$$C_{n,q_n}(t^2;x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}$$

olup, $x \in [0,A]$ olduğundan

$$\left|C_{n,q_n}(t^2;x)-x^2\right| = \frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}} \to 0, (n \to \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin hipotezleri altında

$$C_{n,q_n}(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

gerçeklenir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.2. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ise

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned}
|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} - f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-f(x)\right]\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\omega\left(f, \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right|\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \omega\left(f, \frac{\delta\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right|}{\delta}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right|}{\delta}\right) \omega(f,\delta) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \omega(f,\delta) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(f,\delta)}{\delta} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&= \omega(f,\delta) \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&+ \frac{\omega(f,\delta)}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} = \left(\frac{x}{b_n} + \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)\right)_{q_n}^{n} = 1
$$

olduğu kullanılarak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&\qquad \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right|\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}$$

$$\leq\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{1/2}$$

$$=\left\{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}\right\}^{1/2}$$

bulunur. Buradan

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)|\leq\omega(f,\delta)+\frac{\omega(f,\delta)}{\delta}\left\{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}\right\}^{1/2}$$

olup, eğer

$$\delta=\left\{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}\right\}^{1/2}$$

seçilirse

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)|\leq 2\omega(f,\delta)=2\omega\left(f,\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

olacaktır. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Bu ifadede eşitsizliğin sağ tarafının ıraksak olabileceği kolaylıkla görülür. Örneğin,

$$x=\frac{b_n}{2}\quad ve\quad \delta=\frac{{b_n}^2}{4[n]_{q_n}}$$

için $n\to\infty$ iken $\delta\to 0$ ifadesini garanti edemeyiz.

Yine de bu teoremi dikkate alarak noktasal yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.3. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0<q_n<1$,

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,b_n)$ ve x_0 sabit olmak üzere

$$|C_{n,q_n}(f;x_0) - f(x_0)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x_0 b_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. x_0 sabit olmak üzere, x_0 için

$$\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{x_0 b_n}{[n]_{q_n}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, süreklilik modülünün monotonluk özelliği kullanılarak yani

$$\delta_2 = \frac{x_0 b_n}{[n]_{q_n}}$$

alınarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.4. A, Teorem 3.2.1 ifade edilirken kullanılan sayı olmak üzere,
(q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ise, yeterince büyük n sayıları için

$$\|C_{n,q_n}f - f\|_{C[0,b_n]} \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 3.2.2 gereğince

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir ve Teorem 3.2.1 ifade edilirken kullanılan A için

$$\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}$$

olup, süreklilik modülünün monotonluk özelliği kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Şimdi Peetre-K fonksiyonelini hatırlatalım:

Tanım 3.2.1. $f \in C[a,b]$ ve $\delta > 0$ olmak üzere Peetre-K fonksiyoneli

$$K(f,\delta) := \inf_{g \in C^2[a,b]} \{\|f-g\|_{C[a,b]} + \delta \|g\|_{C^2[a,b]}\} \tag{3.7}$$

ile tanımlanır. Burada

$$C^2[a,b] = \{f \in C[a,b] : f', f'' \in C[a,b]\}, \tag{3.8}$$

ve norm ise

$$\|g\|_{C^2[a,b]} := \|g\|_{C[a,b]} + \|g'\|_{C[a,b]} + \|g''\|_{C[a,b]} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.5. q keyfi bir tamsayı olsun. Bu durumda $g \in C^2[0,b_n]$ için

$$|C_{n,q}(g;x) - g(x)| \leq \frac{x(b_n - x)}{2[n]_q} \|g\|_{C^2[0,b_n]}$$

gerçeklenir.

İspat. Taylor formülünün integral kalan terimli formunu kullanarak

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-v) g''(v) dv$$

ya da

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \int_0^{t-x} (t-x-u) g''(x+u) du$$

yazabiliriz.

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_0^{t-x} (t-x-u) g''(x+u) du$$

eşitliğine q-Chlodowsky operatörünü uygularsak

$$C_{n,q}[g(t)-g(x)] = C_{n,q}\left[g'(x)(t-x)\right] + C_{n,q}\left[\int_0^{t-x} (t-x-u) g''(x+u) du\right]$$

yazarız ve

$$
\begin{aligned}
C_{n,q}(g;x) - g(x) =& g'(x)C_{n,q}(t-x;x) + C_{n,q}\left(\int_0^{t-x}(t-x-u)g''(x+u)du;x\right) \\
|C_{n,q}(g;x) - g(x)| =& \left|g'(x)C_{n,q}(t-x;x) + C_{n,q}\left(\int_0^{t-x}(t-x-u)g''(x+u)du;x\right)\right| \\
\leq& \left|g'(x)C_{n,q}(t-x;x)\right| + \left|C_{n,q}\left(\int_0^{t-x}(t-x-u)g''(x+u)du;x\right)\right| \\
\leq& \|g'\|_{C[0,b_n]}\left|C_{n,q}(t-x;x)\right| + \|g''\|_{C[0,b_n]}\left|C_{n,q}\left(\int_0^{t-x}(t-x-u)du;x\right)\right|
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada

$$
\int_0^{t-x}(t-x-u)du = \frac{(t-x)^2}{2}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
|C_{n,q}(g;x) - g(x)| \leq& \|g'\|_{C[0,b_n]}\left|C_{n,q}(t-x;x)\right| + \|g''\|_{C[0,b_n]}\left|C_{n,q}\left(\frac{(t-x)^2}{2};x\right)\right| \\
\leq& \|g''\|_{C[0,b_n]}\frac{x(b_n-x)}{2[n]_q} \\
\leq& \frac{x(b_n-x)}{2[n]_q}\|g\|_{C^2[0,b_n]}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki teoremlerin ispatında kullanılan yöntem ile kendi orijinal sonuçlarımızı elde ederken takip edeceğimiz yöntem aynıdır. Dolayısıyla bu teoremleri ispatsız olarak ifade etmekte bir sakınca yoktur.

Teorem 3.2.6. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$
\lim_{n\to\infty} q_n = 1
$$

ve

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0
$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ve $A > 0$ sabiti için

$$
\|C_{n,q_n}(f) - f\|_{C[0,b_n]} \leq 2K\left(f, \frac{Ab_n}{2[n]_{q_n}}\right)
$$

gerçeklenir.

Şimdi Lipschitz sınıfını hatırlatalım:

Tanım 3.2.2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve her $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma>0$ iken

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^{\gamma} \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlayan $M>0$ sabiti varsa bu durumda f fonksiyonu γ. dereceden Lipschitz süreklidir denir ve

$$f\in Lip_M(\gamma,\mathbb{R})$$

şeklinde yazılır.

Teorem 3.2.7. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0<q_n<1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$$

olsun. Bu durumda $f\in Lip_M[0,b_n]$ ve $x\in[0,A],\ A>0$ sabiti için

$$\|C_{n,q_n}(f)-f\|_{C[0,b_n]}\leq M\left\{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

gerçeklenir.

Teorem 3.2.8. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0<q_n<1$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu sürekli türeve sahip ve $[0,A]$ aralığında $f'(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f',\delta)$ ise

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)|\leq N\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\,\omega\left(f',\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

4. Q-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

Yaklaşım teorisi ile toplanabilme teorisini birleştiren ilk çalışma A. D. Gadjiev ve C. Orhan tarafından 2002 yılında yapılmıştır ve aktif olarak çalışılan bir teori haline gelmiştir. Bu teoremler, klasik analiz ile verilmiş olup zamanla önemli hale gelen q-analiz yardımıyla çalışılmıştır (Phillips, 1997), (Karslı ve Gupta, 2008).

Bu bölümde kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık metodu kullanılarak q-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

4.1. Pozitif Lineer Operatörler İçin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yaklaşım

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık, P_p-istatistiksel yakınsaklık ve Korovkin tipi yaklaşımı birleştiren teoremler hatırlatılacaktır.

Teorem 4.1.1. (L_n) pozitif lineer operatör dizisi olsun.

$$L_n : C[a,b] \to B[a,b]$$

olmak üzere, eğer $j = 0,1,2$ için $e_j(t) = t^j$ olmak üzere,

$$st - \lim \|L_n e_j - e_j\|_{B[a,b]} = 0 \tag{4.1}$$

ise her $f \in C[a,b]$ için

$$st - \lim \| L_n f - f \|_{B[a,b]} = 0 \tag{4.2}$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Orhan, 2002: 131).

Teorem 4.1.2. P_p regüler kuvvet serisi metodu ve (L_n) pozitif lineer operatör dizisi olsun.

$$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$$

ve $j = 0,1,2$ için $e_j(t) = t^j$ olmak üzere,

$$st_{P_p} - \lim \|L_n e_j - e_j\| = 0 \tag{4.3}$$

ise her $f \in C[a,b]$ için

$$st_{P_p} - \lim \| L_n f - f \| = 0 \tag{4.4}$$

gerçeklenir (Ünver ve Orhan, 2019: 544).

Yukarıdaki iki teorem için kullanılan ispat tekniği aynı olup, sadece ikinci teoremin ispatını vermek yeterli olacaktır.

İspat. Keyfi $f \in C[a,b]$ alalım. f kapalı aralıkta sürekli olduğu için aynı zamanda düzgün sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki $|t-x| \leq \delta$ olacak biçimde $t,x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Ayrıca, f fonksiyonu sınırlı olup $\|f\| \leq M$ olacak biçimde $M > 0$ sayısı vardır ve

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M, \ -\infty < t,x < \infty$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $t,x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

gerçeklenir. L_n operatörlerinin pozitifliği, lineerliği ve monotonluğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x) - f(x)| &= |L_n(f(t) - f(x) + f(x);x) - f(x)| \\
&= |L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)| \\
&\leq |L_n(f(t) - f(x);x)| + |f(x)||L_n(1;x) - 1| \\
&\leq |L_n(f(t) - f(x);x)| + M|L_n(1;x) - 1| \\
&\leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) + M|L_n(1;x) - 1| \\
&= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n(t^2 - 2tx + x^2;x) + M|L_n(1;x) - 1| \\
&= \varepsilon + \varepsilon(L_n(1;x) - 1) \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\right] + M|L_n(1;x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M)|L_n(1;x) - 1| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - x^2 - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1)\right] \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M)|L_n(1;x) - 1| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}\left[|L_n(t^2;x) - x^2| + 2c|L_n(t;x) - x| + c^2|L_n(1;x) - 1|\right]
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon + (\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2})|L_n(1;x) - 1|$$
$$+ \frac{4Mc^2}{\delta^2}|L_n(t;x) - x| + \frac{2M}{\delta^2}|L_n(t^2;x) - x^2|$$

elde edilir. Buradan $t, x \in [a, b]$ olmak üzere maksimum alınırsa ve

$$H = \max\left\{\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc^2}{\delta^2}\right\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\|L_n f - f\| \leqslant H\left[\|L_n e_0 - e_0\| + \|L_n e_1 - e_1\| + \|L_n e_2 - e_2\|\right]$$

gerçeklenir. Keyfi $\varepsilon' > 0$ için

$$E_{\varepsilon'} =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^{2} \|L_n e_j - e_j\| \geq \frac{\varepsilon'}{H}\right\}$$

yani

$$E_{\varepsilon'} =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n e_0 - e_0\| + \|L_n e_1 - e_1\| + \|L_n e_2 - e_2\| \geq \frac{\varepsilon'}{H}\right\}$$

olarak tanımlansın.

$$\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \| L_n f - f \| \geq \varepsilon'\right\} \subset E_{\varepsilon'}$$

olacağı açıktır. Ayrıca $j = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$E_j =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n e_j - e_j\| \geq \frac{\varepsilon'}{3H}\right\}$$

yani

$$E_0 =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n e_0 - e_0\| \geq \frac{\varepsilon'}{3H}\right\},$$
$$E_1 =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n e_1 - e_1\| \geq \frac{\varepsilon'}{3H}\right\},$$
$$E_2 =: \left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n e_2 - e_2\| \geq \frac{\varepsilon'}{3H}\right\},$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla

$$E_{\varepsilon'} \subset E_0 \cup E_1 \cup E_2$$

olup

$$0 \leq \delta_{P_p}\left(\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n f - f\| \geq \varepsilon'\right\}\right) \leq \sum_{j=0}^{2} \delta_{P_p}(E_j)$$

gerçeklenir ve hipotezler altında

$$\delta_{P_p}\left(\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \|L_n f - f\| \geq \varepsilon'\right\}\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

4.2. Q-Chlodowsky Operatörleri İçin Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda q-Chlodowsky operatörleri için kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde ettiğimiz yaklaşım sonuçları verilecektir. Burada $n = 0$ için $C_{n,q}(f;x)$ operatörünün $f(x)$ olarak tanımlandığını belirtmekte fayda vardır.

Teorem 4.2.1. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ise, A pozitif reel sayı olmak üzere

$$st_{P_p} - \lim \|C_{n,q_n} f - f\|_{C[0,A]} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.1.2 gereğince q-Chlodowsky operatörlerinin pozitifliği ve lineerliği kullanılarak

i. $st_{P_p} - \lim \|C_{n,q_n} 1 - 1\|_{C[0,A]} = 0$

ii. $st_{P_p} - \lim \|C_{n,q_n} t - x\|_{C[0,A]} = 0$

iii. $st_{P_p} - \lim \|C_{n,q_n} t^2 - x^2\|_{C[0,A]} = 0$

olduğunu göstermek yeterlidir.
Operatörün tanımı dikkate alınırsa (i) ve (ii) nin gerçeklendiği açıktır. (iii) için,

$$C_{n,q_n}(t^2;x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}$$

olup, $x \in [0,A]$ olduğundan

$$\left|C_{n,q_n}(t^2;x) - x^2\right| \leq \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}} \to 0, (n \to \infty)$$

elde edilir ve teoremin hipotezleri altında ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.2. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ise

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 3.2.2 ispatındaki yöntem kullanılarak $0 < q_n < 1$ olacak biçimde (q_n) reel sayı dizisi için

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

şartları sağlandığından

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Bu teorem yardımıyla aşağıdaki sonucumuzu kolaylıkla elde edebiliriz.

Teorem 4.2.3. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0, b_n]$, x_0 sabit ve $x_0 \in [0, b_n]$ için

$$|C_{n,q_n}(f; x_0) - f(x_0)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x_0 b_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. Herhangi bir x_0 noktası için aşağıdaki eşitsizlik daima doğrudur:

$$\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{x_0 b_n}{[n]_{q_n}}.$$

Teorem 4.2.2 yardımıyla ve süreklilik modülünün monotonluk özelliği de kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.4. A, Teorem 4.2.1 ifade edilirken kullanılan sayı olmak üzere,

(q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda yeterince büyük n sayıları ve $f \in C[0, \infty)$ için

$$\|C_{n,q_n} f - f\|_{C[0,b_n]} \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{A b_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.2.3 gereğince

$$|C_{n,q_n}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir ve Teorem 4.2.1 ifade edilirken kullanılan A sayısı için

$$\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}$$

olup, süreklilik modülünün monotonluk özelliği kullanılarak ispat tamamlanır. ■

(Taş vd., 2013: 1152)'de Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin Stancu tipinin q-analogu, $0 \leq \alpha \leq \beta$, α ve β pozitif tamsayılar iken; $0 \leq x \leq b_n$, (b_n) pozitif artan bir dizi ve

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

olmak üzere,

$$C_{n,q}^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q+[\alpha]_q}{[n]_q+[\beta]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$\alpha = \beta = 0$ alındığında Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin Stancu tipinin q-analogu ile q-Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin çakışacağı açıktır. (Taş vd., 2013: 1153)'de q-Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin Stancu tipi için aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 4.2.5. $j = 0,1,2$ olmak üzere $C_{n,q}^{\alpha,\beta}(t^j;x)$ için

$$\begin{aligned}
C_{n,q}^{\alpha,\beta}(1;x) =& 1, \\
C_{n,q}^{\alpha,\beta}(t;x) =& \frac{[n]_q}{[n]_q+[\beta]_q}x + \frac{[\alpha]_q}{[n]_q+[\beta]_q}b_n, \\
C_{n,q}^{\alpha,\beta}(t^2;x) =& \frac{[n]_q{}^2}{\left([n]_q+[\beta]_q\right)^2}\left(x^2+\frac{x(b_n-x)}{[n]_q}\right) + \frac{2[\alpha]_q[n]_q}{\left([n]_q+[\beta]_q\right)^2}b_n x + \frac{[\alpha]_q{}^2}{\left([n]_q+[\beta]_q\right)^2}b_n{}^2
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

$$0 < q_n < 1,$$

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

şartları sağlandığında, P_p-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla q-Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin Stancu tipi için benzer sonuçları elde edebiliriz.

Teorem 4.2.6. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in C[0,\infty)$ ve $A > 0$ sabiti için

$$\|C_{n,q_n}(f) - f\|_{C[0,b_n]} \leq 2K\left(f, \frac{Ab_n}{2[n]_{q_n}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. H. Karslı ve V. Gupta'nın çalışmasında

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq \|f-g\|_{C[0,b_n]}|C_{n,q_n}(1;x)| + \|f-g\|_{C[0,b_n]} + |C_{n,q_n}(g;x) - g(x)|$$

ve

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\|f-g\|_{C[0,b_n]} + \frac{x(b_n - x)}{2[n]_q}\|g\|_{C^2[0,b_n]}$$

olduğunu biliyoruz (Karslı ve Gupta, 2008: 225). Böylece

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\|f-g\|_{C[0,b_n]} + \frac{Ab_n}{2[n]_{q_n}}\|g\|_{C^2[0,b_n]}$$

gerçeklenir. $g \in C^2[0,b_n]$ üzerinden infimum alınırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.7. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda $f \in Lip_M[0,b_n]$ ve $x \in [0,A],\ A > 0$ sabiti için

$$\|C_{n,q_n}(f) - f\|_{C[0,b_n]} \leq M\left\{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

gerçeklenir.

İspat. Kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
\left|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}-f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-f(x)\right]\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&\leq M\sum_{k=0}^{n}\left|\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-x\right|^{\alpha}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Ayrıca

$$
p_1=\frac{2}{\alpha} \;\; ve \;\; p_2=\frac{2}{2-\alpha}
$$

alınırsa

$$
\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1
$$

olup

$$
\begin{aligned}
\left|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right| \leq M\sum_{k=0}^{n}&\left\{\left|\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-x\right|^{2}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&.\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz.

Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| \leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-x\right|^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{\dfrac{2-\alpha}{2}}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}=1$$

olduğundan

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| \leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-x\right|^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}\right\}^{\dfrac{\alpha}{2}}$$

buluruz. $g \in C^2[0,b_n]$ ise

$$|C_{n,q}(g;x)-g(x)| \leq \frac{x(b_n-x)}{2[n]_q}\|g\|_{C^2[0,b_n]}$$

eşitsizliğini de kullanırsak,

$$|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| \leq M\left\{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}\right\}^{\dfrac{\alpha}{2}}$$

elde ederiz. Buradan $0<q_n<1$,

$$st_{P_p}-\lim q_n=1$$

ve

$$st_{P_p}-\lim\frac{b_n}{[n]_{q_n}}=0,$$

ve her $x\in[0,A]$ için

$$\|C_{n,q_n}(f)-f\|_{C[0,b_n]} \leq M\left\{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}\right\}^{\dfrac{\alpha}{2}}$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.8. (q_n) bir reel sayı dizisi, $0 < q_n < 1$,

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

ve

$$st_{P_p} - \lim \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu sürekli türeve sahip ve $[0,A]$ aralığında $f'(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f',\delta)$ ise

$$|C_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq N\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\,\omega\left(f',\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat. μ, x ve $\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n$ arasında bir nokta olmak üzere, ortalama değer teoremi gereğince

$$f'(\mu) = \frac{f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right) - f(x)}{\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right) - f(x) &= \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right) f'(\mu) \\ &= \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right) f'(x) + \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right)(f'(\mu) - f'(x)) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} C_{n,q_n}(f;x) - f(x) &= f'(x)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\ &+ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n - x\right)(f'(\mu) - f'(x))\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte

$$
\begin{aligned}
f'(x)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&= f'(x)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&- f'(x)x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&= f'(x).x-f'(x).x=0
\end{aligned}
$$

yani

$$
f'(x)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}=0
$$

olur.

$$
|\mu-x|\leq\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right|
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| &\leq \omega(f',\delta)\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&+\frac{\omega(f',\delta)}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&=: \omega(f',\delta)T_1+T_2
\end{aligned}
$$

gerçeklenir.

$$
T_1:=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}
$$

ve

$$
T_2:=\frac{\omega(f',\delta)}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k}
$$

olmak üzere, T_1 için

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} = \left[\frac{x}{b_n} + \left(1-\frac{x}{b_n}\right)\right]_{q_n}^{n} = 1$$

olduğunu kullanırsak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \\
&\qquad \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right| \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2} \\
&\qquad \leq \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \right\}^{1/2} \\
&\qquad \leq \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}} \\
&\qquad \leq \sqrt{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $x \in [0,A]$ ve

$$\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}} \leq \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}$$

olduğundan T_2 için

$$\frac{\omega(f',\delta)}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n - x\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)_{q_n}^{n-k} \leq \frac{\omega(f',\delta)}{\delta} \frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}$$

yazabiliriz.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| &\leq \omega(f',\delta)\sqrt{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}}+\frac{\omega(f',\delta)}{\delta}\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}} \\
&\leq \omega(f',\delta)\left\{\sqrt{\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}}+\frac{1}{\delta}\frac{Ab_n}{[n]_{q_n}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Eğer

$$
\delta=\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}
$$

olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
|C_{n,q_n}(f;x)-f(x)| &\leq \omega\left(f',\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right)\left\{\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}+A\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right\} \\
&\leq \omega\left(f',\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right)\left\{(\sqrt{A}+A)\sqrt{\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}\right\}
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanır. ■

Şimdi bu sonuçlarımızı destekleyecek bir örnek verelim.

Örnek 4.2.1. Aşağıdaki (p_n) dizisi ile tanımlanan P_p kuvvet serisi metodunu göz önüne alalım: $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$
p_n=\begin{cases} 1 \quad , & n=2m \\ 0 \quad , & n=2m+1 \end{cases}
$$

ve ayrıca (q_n) dizisi

$$
q_n=\begin{cases} 0 \quad , & n=2m+1 \\ 1-\dfrac{1}{n} \quad , & n=2m \end{cases}
$$

olsun.

P_p kuvvet serisi metodunun regüler olduğu açıktır. (q_n) dizisinin istatistiksel yakınsak ya da klasik anlamda yakınsak olmadığı kolaylıkla görülebilir.

Ancak her $\varepsilon>0$ için

$$
E_\varepsilon=\{n\in\mathbb{N}_0 : |q_n-1|\geq\varepsilon\}
$$

olmak üzere

$$\delta_{P_p}(E_\varepsilon) = 0$$

olup

$$st_{P_p} - \lim q_n = 1$$

olur. (q_n) dizisi 1 sayısına kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaktır.

Örnekte aldığımız (q_n) dizisi

- H. Karsli ve V. Gupta'nın, "Some approximation properties of q-Chlodowsky operators" isimli çalışmasında elde edilen sonuçların şartlarını ve
- E.Taş, C. Orhan ve T. Yurdakadim'in "The Stancu-Chlodowsky operators based on q-Calculus" isimli çalışmasında elde edilen sonuçların şartlarını

karşılamamaktadır. (q_n) dizisi klasik anlamda yakınsak ve istatistiksel yakınsak olmadığı halde, P_p-istatistiksel yakınsak yani kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla bizim sonuçlarımız kullanılarak q-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özelliklerinden yine de söz etmek mümkündür.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla q-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin araştırılması amaçlanmıştır. Bunun için, öncelikle klasik Korovkin teoremi, kuvvet serisi metodu, istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık hatırlatılmıştır. Sonra yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan Bernstein operatörleri ve $[0,\infty)$ aralığına genelleştirilmesi olan Chlodowsky operatörleri tanıtılmıştır. Son zamanlarda aktif olarak kullanılan, matematik ve fizik bilimleri arasında köprü görevi gören ve $q = 1$ durumunda klasik analiz ile çakışan q-analize ilişkin temel kavramlar hatırlatılmıştır. Bernstein ve Chlodowsky operatörleri q-analizle tanımlanarak, q-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli kullanılarak yakınsaklık oranı elde edilmiştir. Ayrıca pozitif lineer operatör dizileri için klasik yakınsaklık yerine, istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık alınarak elde edilen Korovkin tipi teoremler hatırlatılmıştır. Son olarak, amacımız doğrultusunda kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla q-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca yakınsaklık oranı, süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli ile hesaplanmıştır. Bir örnek verilerek bilinen sonuçların kullanılamayacağı görülmüştür, dolayısıyla ispatladığımız teoremlerimizin etkili bir kullanım alanına sahip olacağı gösterilmiştir.

Sonuç olarak, klasik limit mevcut değil iken, yine de toplanabilme metotları kullanılarak yaklaşımdan söz etmemizi sağlayan bu teoremler literatür için ilgi çekicidir. Ayrıca klasik analiz kullanılarak elde edilen ve elde edilemeyen sonuçları q-analiz yardımıyla incelemek disiplinlerarası çalışma bağlamında faydalı olacaktır. Bu çalışma konusu ile ilgilenen okuyuculara toplanabilme metotları kullanılarak q-analiz yardımıyla verilebilecek yaklaşım teoremleri öneri niteliğindedir.

KAYNAKÇA

Altomare, F., & Campiti, M. (1994). Korovkin type approximation theory and its applications. *De Gruyter Studies in Mathematics*, Walter de Gruyter&Co., *17*, Berlin.

Atlıhan, Ö. G., & Orhan, C. (2008). Summation process of positive linear operators. *Computers and Mathematics with Applications*, *56*, 1188-1195.

Atlıhan, Ö. G., & Ünver, M., & Duman, O. (2017). Korovkin theorems on weighted spaces: revisited. *Periodica Mathematica Hungarica, 75*, 201-209.

Bernstein, S. N. (1912). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee. *Communications of the Kharkov Mathematical Society, 13*, 1-2.

Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat., 2*, 43-56.

Boos, J. (2000). *Classical and Modern Methods in Summability.* Oxford University Press, Oxford.

Chlodowsky, I. (1937). Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. *Compositio Mathematica, 4*, 380-393.

Duman, O., & Orhan, C. (2004). Statistical approximation by positive linear operators. *Studia Mathematica, 161*, 187-197.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum, 2 (3/4*), 241–244.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis, 5*, 301–313.

Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32*, 129-137.

Hacısalihoğlu, H. I., & Hacıyev, A. I. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı.* A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Kac, V., & Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus.* Universitext Springer.

Karsli, H., & Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q-Chlodowsky operators. *Applied Mathematics and Computation, 195*, 220-229.

Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii nauk SSSR, 90*, 961-964.

Kratz, W., & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p-summability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 139*, 362-371.

Kreyzig, E. (2007). *Introductory to functional analysis with applications.* John Wiley, New York.

Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein Polynomials.* University of Toronto Press, Toronto.

Niven, I., & Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1980). *An introduction to the theory of numbers.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Oruç, H., & Tuncer, N. (2002). On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory, 117*, 301-313.

Ostrovska, S. (2003). q-Bernstein polynomials and their iterates. *Journal of Approximation Theory, 123*, 232-255.

Ostrovska, S. (2006). On the improvement analytic properties under the limit q-Bernstein operator. *Journal of Approximation Theory, 138*, 37-53.

Özgüç, İ., & Taş, E. (2016). A Korovkin-type approximation theorem and power series method. *Results in Mathematics, 69 (3/4)*, 497-504.

Phillips, G. M. (1997). Bernstein polynomials based on the q-integers. *Annals of Numerical Mathematics, 4*, 511-518.

Popoviciu, T. (1950). Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. *Lucrarile Sesiunii Gen. Şt. Acad. Române*, 2-12.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mat.Slovaca., 30 (2)*, 139-150.

Taş, E., & Orhan, C., & Yurdakadim, T. (2013). The Stancu-Chlodowsky operators based on q-Calculus. *AIP Conf. Proc., 1558*, 1152-1155.

Taş, E., & Yurdakadim, T., & Atlıhan, Ö. G. (2018). Korovkin type approximation theorems in weighted spaces via power series method. *Operators and Matrices, 12*, 529-535.

Ünver, M., & Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory. *Numer. Func. Anal. Opt., 40 (5)*, 535-547.

Wang, H. (2007). Voronovskaja-type formulas and saturation of convergence for q-Bernstein polynomials for $0 < q < 1$. *J. Approx. Theory, 145*, 182-195.

Weierstrass, K. G. (1885). *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veranderlichen.* Sitzungsber, Akad., Berlin.