ANADOLU ÜNİVERSİTESİ **BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

KUATERNİYONİK NORMAL EĞRİLER

Bahar DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2018

Ref. No: 10195846

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

KUATERNİYONİK NORMAL EĞRİLER

Bahar DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2018

ANADOLU UNIVERSITY **BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY**

Graduate School of Sciences

Department of Mathematics

QUATERNIONIC NORMAL CURVES

Bahar DOĞAN

Master's Thesis

Thesis Advisor

Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BILECIK, 2018

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 23/05/2018 tarih ve 29 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21/06/2018 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Bahar DOĞAN'ın, "Kuaterniyonik Normal Eğriler" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka Ö. KARAKUŞ

ÜYE: Prof. Dr. Murat TOSUN

ÜYE: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…….. tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın oluşmasında her daim yanımda olan, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, yardım ve tecrübelerini benden esirgemeyerek daima yol gösteren danışman hocam saygıdeğer Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ' a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans çalışmalarım boyunca yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca hayatım boyunca desteklerini her zaman hissettiğim, beni büyük bir sabır ve sevgiyle destekleyen, cesaretlendiren aileme ve Mehmet Şükrü YAZICI' ya teşekkürlerimi sunarım.

Bahar DOĞAN

ÖZET

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci kısımda Öklid uzayı ve Lorentz uzayı için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü kısımda 3-boyutlu Öklid uzayı ve 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik normal eğriler çalışılmıştır. Sırasıyla E^3 ve E^4 de kuaterniyonik bir eğrinin kuaterniyonik normal eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Son bölümde 4-boyutlu yarı-Öklid uzayı E_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik normal eğriler çalışılmıştır. Ayrıca, yarı-reel kuaterniyonik normal eğrilerin eğrilik fonksiyonları bakımından bazı karakterizasyonları verilmiştir. E_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik bir eğrinin yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Anahtar kelimeler

Normal eğriler; Reel ve yarı-reel kuaterniyonlar; Kuaterniyonik eğriler; Konum vektörü

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter "Introduction" part has been presented. In the second chapter, terms definitions and theorems which are necessary for Öklid space and Lorentz space are given. In the third part, quaternionic normal curves are studied in Euclidean 3-space and four dimensional Euclidean 4-space. The necessary and sufficient conditions are given for a quaternionic curve to be a quaternionic normal curves in E^3 and E^4 respectively. In the final chapter, semi-real quaternionic normal curves are studied in four dimensional semi-Euclidean space E_2^4. Moreover, some characterizations of semi-real quaternionic normal curves are given in terms of their curvature functions. The necessary and sufficient conditions are given for a semi-real quaternionic curve to be a semi-real quaternionic normal curves in E_2^4.

Keywords

Normal curves; real and semi-real quaternions; quaternionic curves; position vector.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu reel iç çarpım uzayı
E^n	: $n-$ boyutlu Öklid uzayı
E_1^3	: $3-$ boyutlu Minkowski uzayı
E_2^4	: $4-$ boyutlu yarı-Öklidyen uzay
V	:Vektör uzayı
I	:Öklid uzayında bir açık aralık
$\langle , \rangle$	:İç çarpım
$\Vert , \Vert$	:Norm
V_i	: E^n Öklid uzayında $i-$ yinci Frenet vektörü
k_i	: E^n Öklid uzayında $i-$ yinci Frenet eğriliği
$g(v,v)$	: Minkowski uzayında iç çarpım
$\wedge_L$	:Minkowski uzayında vektörel çarpım
q	:Herhangi bir kuaterniyon
$\mathbb{Q}$	:Kuaterniyonlar cümlesi
S_q	: q kuaterniyonunun skaler kısmı
V_q	: q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\bar{q}$	: q kuaterniyonunun eşleniği
$\Vert q \Vert$	: q kuaterniyonunun normu

S_0	: q_0 birim kuaterniyonunun ekseni
$h(,)$	:Kuaterniyonik iç çarpım
$\mathbb{Q}_v$	: Yarı-reel Kuaterniyonlar cümlesi
γq	:Yarı-reel bir kuaterniyonunun eşleniği
S_1^3	: E_2^4 yarı-Öklidyen uzayda pseudo-küre
H_0^3	: E_2^4 yarı-Öklidyen uzayda pseudo-hiperbolik küre
C_3^3	: E_2^4 yarı-Öklidyen uzayda ışık konisi
$\{t, n_1, n_2\}$	: Uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Frenet vektörleri
$\{T, N_1, N_2, N_3\}$	:Kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\{k, K, (r-K)\}$	:Kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$\{T, N, B_1, B_2\}$	:Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\{k, K, (r-\varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K)\}$	:Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Kuaterniyonlar teorisi kompleks sayıların genişlemesi olan bir sayı sistemidir. İlk tanım 1843' de İranlı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından (1805-1865) yapılmıştır. Kuaterniyonlar bir skaler ve bir vektörün toplamı olarak yazılabilir. Kuaterniyonlar sıralı dört sayının 4 birime eşlik etmesiyle tanımlanan, cebirin ilginç bir formudur. Bu elemanlar doğal sayılara benzer bir yol ile tek bir birim olarak toplanabilir veya çarpılabilir. Ayrıca q_1 ve q_2 kuaterniyon iken, q_1q_2 sayısının q_2q_1 sayısına eşit olması gerekli değildir. Matematiksel olarak kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Kuaterniyonlar mekanik ve kinematik gibi çeşitli alanlarda, kuantum mekaniği ve kimyada grup temsilinde önemli bir rol oynarlar. Diğer yandan da ortogonal ve birim simetri gruplarda dönme dönüşümü ile bağlantılıdırlar. Kuaterniyonlar uzayda sonlu dönmeyi temsil etme imkânı sağlarlar.

E^3 ve E^4 de kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri Bharathi ve Nagaraj tarafından verilmiştir. Daha sonra Çöken ve Tuna E_2^4 yarı-Öklidyen uzayında kuaterniyonik bir eğri için Serret-Frenet formüllerini tanımlamışlardır. Ayrıca Çöken ve Tuna kuaterniyonik eğriler için kuaterniyonik eğimli eğriler ve harmonik eğrilikleri tanımlamışlardır. E^4 Öklid uzayında ise Hacısalihoğlu, Gök, Okuyucu ve Kahraman kuaterniyonik B_2-slant helisini karakterize etmişlerdir ve Okuyucu tarafından E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik Mannheim eğrilerini çalışılmıştır.

Chen E^3 Öklid uzayında normal eğrileri konum vektörü her zaman normal düzleminde yatan eğriler olarak tanımlamıştır. Benzer olarak, E_1^3 Minkowski uzayında timelike normal eğriler normal düzlemde her zaman sabit bir nokta içeren eğriler olarak tanımlamıştır. Bundan dolayı bu gibi eğrilerin konum vektörleri her zaman normal düzlemde yatarlar. Özel olarak, timelike normal eğriler E_1^3 Minkowski uzayında pseudo kürede yatarlar. Ayrıca, normal eğriler eğri teorisi için ilginç sonuçları olan küresel eğriler ile aynı karakterizasyona sahiptir. Son zamanlarda İlarslan, E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike normal eğrilerin bazı karakterizasyonlarını çalışmıştır. Ayrıca İlarslan ve Nesovic Minkowski-spacetime uzayında spacelike ve timelike normal eğrileri araştırmışlardır.

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu E^3 Öklidyen uzayı ve 4-boyutlu E^4 Öklidyen uzayında kuaterniyonik normal eğriler tanımlanmıştır. Ayrıca 4-boyutlu yarı-Öklidyen uzayı E_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik normal eğriler tanımlanmıştır. Kuaterniyonik normal eğriler ve yarı-reel kuaterniyonik normal eğrilerin eğrilik fonksiyonları bakımından bazı karakterizasyonları açıklanmıştır. Sırasıyla E^3 ve E^4 de kuaterniyonik bir eğrinin kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Benzer olarak E_2^4 yarı -Öklidyen uzayında bir yarı-reel kuaterniyonik eğrinin yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu kısımda E^n, n-boyutlu Öklid uzayında temel tanım ve teoremler verilecektir. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı standart Öklid uzayı anlamında fark edilmesi için E^n ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1. A bir reel afin uzay ve V, A ile birleşen bir vektör uzayı olsun. V de bir iç çarpım,

$$\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1,...,x_n) \\ y = (y_1,...,y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı olarak tanımlandığında A afin uzayına n-boyutlu bir Öklid uzayı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. E^n n-boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\|\,,\|$ V vektör uzayında bir norm olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to d(x,y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. E^n n-boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\|\,,\|$ V vektör uzayında bir norm olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to d(x,y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\|$$

ile tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.4. E^n n-boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\overrightarrow{xy}$ vektörü ile $\overrightarrow{yz}$ vektörü arasındaki açının ölçüsü,

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{xy} \right\| \left\| \overrightarrow{yz} \right\|}$$

ile hesaplanan θ reel sayısıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5. E^n de sıralı bir $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ nokta $n+1$-lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ sistemine E^n de bir dik çatı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. E^n deki $E_0, E_1, ..., E_n$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.7. E^n n-boyutlu Öklid uzayı ve $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{I} &\to E^n \\ s &\to \alpha(s) = (\alpha_1(s), ..., \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir ise α ya E^n n-boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri denir ve M ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.8. E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$h = \alpha^{-1} \circ \beta : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.9. E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha(t) \in M$ için,

$$\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\alpha'(t)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt},...,\frac{d\alpha_n}{dt}\right)_t$$

dır. $(\alpha(t),\alpha'(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t\in \mathrm{I}$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10. $\alpha:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t\in \mathrm{I}$ için $\alpha'(t)\neq 0$ ise α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.11. $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned}\|\alpha'\|:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}\\ t\rightarrow\|\alpha'\|(t)=\|\alpha'(t)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.12. M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s\in \mathrm{I}$ için $\|\alpha'(s)\|=1$ ise M eğrisi (I,α)'ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s\in \mathrm{I}$ parametresine yay-parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.13. $\alpha:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}^n$ eğrisinin $t_0,t\in \mathrm{I}$ olmak üzere t_0 dan t ye yay uzunluğu fonksiyonu $f:t\rightarrow f(t)$ olduğuna göre,

$$f(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(u)\|du$$

değerine yay uzunluğu denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.14. $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi=\{\alpha',\alpha'',...,\alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^k$, $k>r$ için;

$\alpha^k \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $V_1, V_2, , , V_r$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ vektörüne Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.15. E^3 Öklid uzayında M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in \mathrm{I}$ yay-parametresi olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
T &= \alpha' \\
N &= \frac{1}{\|\alpha''\|}\alpha'' \\
B &= T \times N
\end{aligned}
$$

olan $\{T(s), N(s), B(s)\}$ sistemine $\alpha(s)$ noktasındaki, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.16. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.17. Birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere, $\tau : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.1. Birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ise,

$$
\begin{aligned}
T' &= \kappa N \\
N' &= -\kappa T + \tau B \\
B' &= -\tau N
\end{aligned}
$$

dir.

Bu teoremde elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri denir. Bu formülleri Frenet 1847 de bulmuş, 1852 de yayınlamıştır. Ondan habersiz olarak Serret, 1851 yılında hesaplamıştır. Bundan dolayı bazen bu formüllere Frenet-Serret formülleri de denir.

Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ters simetrik bir matristir (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ herhangi bir eğrinin Frenet vektör alanları T, N, B ile eğrilik ve burulması κ ve τ ile gösterildiğine göre,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \qquad\qquad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$
$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \qquad \text{ve}$$
$$N = B \times T \qquad\qquad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ herhangi bir eğrinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması k, τ olsun. $\|\alpha'\| = \nu$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} T' &= \nu k N \\ N' &= \nu(-kT + \tau B) \\ B' &= -\nu \tau N \end{aligned}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.18. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem denir.

$\{T(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem denir.

$\{N(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.4. $\alpha:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin eğriliği sıfır ise $\alpha(\mathrm{I})$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrunun alt cümlesidir. Karşıt olarak $\alpha(\mathrm{I})$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrunun alt cümlesi ise α eğrisinin eğriliği sıfırdır (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.5. $\alpha:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemsel ise $\tau=0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki oskülatör düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemidir. Karşıt olarak $\tau=0$ ise $\alpha:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemseldir (Sabuncuoğlu, 2014).

Verilen bu temel kavramlar E^n uzayına genişletilirse,

Tanım 2.1.19. $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in\mathrm{I}$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i &: I\to\mathbb{R} \\ s &\to k_i(s)=\left\langle V_i'(s),V_{i+1}(s)\right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s\in\mathrm{I}$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki M eğrisinin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Teorem 2.1.6. $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in\mathrm{I}$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ ise,

i. $V_1'(s)=k_1(s)V_2(s)$

ii. $V_i'(s)=-k_{i-1}(s)V_{i-1}(s)+k_i(s)V_{i+1}(s)\ ,\ 1<i<r$

iii. $V_r'(s)=-k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.20. $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s\in\mathrm{I}$ ya karşılık gelen $\alpha(s)\in M$ noktasında M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$H : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$$
$$s \to H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, M nin s noktasındaki $1-$inci harmonik eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda 3-boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. E_1^3 Minkowski 3-uzayında E_1^3 uzayının bir dik koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) olarak alınırsa,

$$g = -dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}$$

ile tanımlanan metrikle beraber 3-boyutlu Öklid uzayıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir vektörün normu,

$$\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. E_1^3 Minkowski 3-uzayında $v, w \in E_1^3 - \{0\}$ vektörleri için $g(v,w) = 0$ ise v ve w vektörleri ortogonal iki vektör olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. E_1^3 Minkowski 3-uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olmak üzere x ve y nin vektörel çarpımı,

$$x \wedge_L y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_3 y_2 - x_2 y_3,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

olarak tanımlıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. $v \in E_1^3 - \{0\}$ vektörü için,

i. $g(v,v) > 0$ ise v spacelike vektör

ii. $g(v,v) < 0$ ise v timelike vektör

iii. $g(v,v) = 0$ $v \neq 0$ ise v null (lightlike) vektör denir.

Ayrıca $v = 0$ ise v spacelike vektör olur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6. E_1^3 Minkowski 3-uzayında α keyfi bir eğri olsun. Hız vektörü α' sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) olursa α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) eğri olarak isimlendirilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7. E_1^3 Minkowski 3-uzayında α bir eğri olsun. α' hız vektörü için,

i. $g(\alpha',\alpha') = 1$ ise α eğrisine birim hızlı spacelike eğri,

ii. $g(\alpha',\alpha') = -1$ ise α eğrisine birim hızlı timelike eğri,

iii. $g(\alpha',\alpha') = 0$ ise α eğrisine null (lightlike) eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8. E_1^3 Minkowski 3-uzayında $\vec{a} \in E_1^3$ timelike bir vektör olsun. Eğer bu vektörün ilk bileşeni sırasıyla pozitif ya da negatif ise $\vec{a} \in E_1^3$ vektörü sırasıyla future pointing timelike vektör ya da past pointing timelike vektör olarak adlandırılır (Önder ve Uğurlu, 2009).

Tanım 2.2.9. i) Hiperbolik açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ E_1^3 Minkowski 3-uzayında iki timelike future pointing (ya da past pointing) vektör olsun. O zaman $g(a,b) = -\|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O'Neill, 1983).

ii) Merkezi açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir timelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a,b) = \|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki merkezi açı denir (Ratcliffe, 1994).

iii) Spacelike açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir spacelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a,b)=\|a\|\|b\|\cos\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir (Ratcliffe, 1994).

iv) Lorentzian timelike açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında $\vec{a}$ spacelike bir vektör ve $\vec{b}$ timelike bir vektör olsun. O zaman $g(a,b)=\|a\|\|b\|\sinh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açıya $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.10. E_1^3 Minkowski 3-uzayında spacelike eğrinin asli normal vektörü,

$$N=0$$

ise bu eğriye pseudo-null eğrisi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E_1^3$ birim hızlı non-null (spacelike veya timelike) bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli Frenet çatısı $\{T,N,B\}$ olsun.

i. α bir spacelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T,N)=g(N,B)=g(T,B)=0\,,$$

$$g(T,T)=1, \quad g(N,N)=\varepsilon=\mp 1, \quad g(B,B)=-\varepsilon$$

olarak verilir. κ ve τ, α spacelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır. Ayrıca ε, α spacelike eğrisinin türünü belirler. $\varepsilon=1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ spacelike asli normali ve $\vec{B}$ timelike binormali olan bir eğridir. Eğer $\varepsilon=-1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ timelike asli normali ve $\vec{B}$ spacelike binormali olan bir eğridir (O'Neill, 1983).

ii. α bir timelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T,N)=g(N,B)=g(T,B)=0\,,$$

$$g(T,T)=-1, \quad g(N,N)=g(B,B)=1$$

dır. κ ve τ, α timelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.12. $\alpha:\mathrm{I}\rightarrow E_1^3$ birim hızlı null veya pseudo null bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli Frenet çatısı $\{T,N,B\}$ olsun.

i. α bir null eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa=0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa=1$ dır. Burada,

$$g(T,T)=g(B,B)=g(T,N)=g(N,B)=0$$

$$g(N,N)=g(T,B)=1$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$T\wedge_L N=-T,\; N\wedge_L B=-B,\; B\wedge_L T=-N$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave, 1995).

ii. α bir pseudo-null eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa = 0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa = 1$ dır. Burada,

$$g(N,N) = g(B,B) = g(T,N) = g(T,B) = 0$$

$$g(T,T) = g(N,B) = 1$$

dır. Dolayısıyla,

$$T \wedge_L N = N,\ N \wedge_L B = T,\ B \wedge_L T = B$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave, 1995).

2.3. Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.3.1. Reel bir kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Bu birimler,

i. $\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = -1$

ii. $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

iii. $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

özelliklerine sahiptir. Dolayısıyla bir kuaterniyon,

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, q kuaterniyonunu S_q ile gösterilen skaler kısım ve V_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere,

$$S_q = d,\ V_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3,$$
$$q = S_q + V_q$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.2. Reel kuaterniyonlar cümlesi $\mathbb{Q}$ üzerinde toplama işlemi,

$$\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(q_1, q_2) \to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

ile

$$S_{q_1 \oplus q_2} = S_{q_1} + S_{q_2},\ \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} \oplus \vec{V}_{q_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve + işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir. V_{q_1}, V_{q_2} de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(\mathbb{Q}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsünden başka bir şey değildir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.3.

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan dış işlem $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *ve* $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için,

i. $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$

ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$

iii. $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

iv. $1 \odot q = q$

dır. O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı $\mathbb{Q}$ ile göstereceğiz (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.4.

$$\times : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}$$
$$(q_1,q_2)\rightarrow q_1\times q_2$$

işlemi ,

x	$+1$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$+1$	$+1$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{e_1}$	-1	$\vec{e_3}$	$\overrightarrow{-e_2}$
$\vec{e_2}$	$\vec{e_2}$	$\overrightarrow{-e_3}$	-1	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$\overrightarrow{-e_1}$	-1

ile tanımlanır. Buna göre,

$$q_1\times q_2=(d_1+a_1\vec{e_1}+b_1\vec{e_2}+c_1\vec{e_3})\times(d_2+a_2\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+c_2\vec{e_3})$$
$$\begin{aligned} q_1\times q_2 &= d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\\ &+(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)\vec{e_1}\\ &+(d_1b_2+b_1d_2+c_1a_2-a_1c_2)\vec{e_2}\\ &+(d_1c_2+c_1d_2+a_1b_2-b_1a_2)\vec{e_3}\end{aligned}$$

elde edilir ve ifade düzenlendiğinde,

$$p\times q=S_pS_q-\langle V_p,V_q\rangle+S_pV_q+S_qV_p+V_q\wedge V_q$$

elde edilir. Böylece kuaterniyon çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolaylıkla görülür.

- **i.** İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur.
- **ii.** Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- **iii.** Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle, $\{\mathbb{Q},\oplus,\mathbb{R},+,.,\odot,\times\}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.5. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı,

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \ ve\ \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.6.

$$\begin{aligned} K : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ q &\to K(q) = K_q \end{aligned}$$

işlemi $\forall q = S_q + \vec{V}_q \in Q$ için $K_q = S_q - \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q nun eşleniği denir. $\vec{V}_{K_q} = -\vec{V}_q$ olduğundan,

$$q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Burada $K_q = \bar{q}$ şeklinde de gösterilir. Bundan sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.3.7. $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\to N(q) = N_q = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $N(q)$ fonksiyonuna $q \in Q$ kuaterniyonunun normu denir. Üstelik

$$N_q = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

pozitif bir reel sayısıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Burada $N_q = \|q\|$ şeklinde de gösterilir. Daha sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.3.8.

$$(q)^{-1}:\mathbb{Q}-\{0\}\rightarrow\mathbb{Q}-\{0\}$$
$$q \quad \rightarrow q^{-1}=\frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $q\times q^{-1}=q^{-1}\times q=1$ elde edilir. $q\neq 0$ olmak üzere $\forall q\in\mathbb{Q}$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması $\mathbb{Q}$ cebirini bir bölüm cebiri yapar. Böylece $\mathbb{Q}$ da bölme işlemini tanımlamak mümkün olur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.9. $q\neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpım işlemi iki türlüdür ve dolayısıyla p yi q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$r_1=p\times q^{-1}$$
$$r_2=q^{-1}\times p$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna p nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır. Dolayısıyla $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.10. Normu bir olan bir kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanmışı,

$$q_0=\frac{q}{\|q\|}=\frac{d+a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

olarak ifade edilebilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu $q_0=\cos\theta+\vec{S_0}\sin\theta$ formunda yazılabilir. Burada,

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

dır ve $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ olduğu zaman,

$$\vec{S}_0 = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.11. $a,b \in \mathbb{Q}$ için genel bir kuaterniyon ifadesinde $d_1 = d_2 = 0$ alınırsa $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3$ ve $\vec{b} = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3$ şeklinde iki vektör elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Bu ise bir kuaterniyondur. Vektör cebirinde, $\vec{a},\vec{b}$ vektörlerinin iç çarpımını $<\vec{a},\vec{b}>$ ve vektörel çarpımını da $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ile gösterdiğimize göre,

$$<\vec{a},\vec{b}> = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dır. Buna göre bu kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -<\vec{a},\vec{b}> + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

formunda yazılabilir. O halde iki vektörün kuaterniyon çarpımı öyle bir kuaterniyondur ki bu kuaterniyonun skaler kısmı ve vektörel kısmı sırasıyla,

$$S(\vec{a}\times\vec{b}) = -<\vec{a},\vec{b}> \text{ ve } \mathrm{V}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\wedge\vec{b}$$

şeklindedir. Ayrıca iki vektör dik iseler kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur; iki vektör paralel iseler kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skaler (iç) çarpımının ters işaretlisine eşittir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.12. $p,q\in\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları verilsin.

$$\begin{aligned} &h:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R} \\ &\quad (p,q)\to h(p,q)=\frac{1}{2}\left(p\times\bar{q}+q\times\bar{p}\right) \end{aligned}$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyon iç çarpımı denir. h fonksiyonu reel değerli, simetrik ve bilineerdir. Dolayısıyla iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Burada $\times$ kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

O halde bir kuaterniyonun normu bu tanımla beraber karakterize edilebilir.

Tanım 2.3.13. Bir $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonun normu,

$$\|q\|^2 = h(q,q) = q\times\bar{q}$$

sağlayan $\|q\|$ reel sayısı ile ifade edilebilir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

Tanım 2.3.14. Bir $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonu,

$$q+\bar{q}=0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir uzay kuaterniyon denir. Uzay kuaterniyonların cümlesi 3-boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ e izomorftur. $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonu için,

$$q-\bar{q}=0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir temporal kuaterniyon denir. Genel olarak, $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}\left(q + \bar{q}\right) + \frac{1}{2}\left(q - \bar{q}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

2.4. Yarı-reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.4.1. Bir yarı-reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olan dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada $+1$ reel birim olup, diğer üç birim ise,

(123) permütasyonu (ijk) ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ iken,

i. $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = -\varepsilon \vec{e}_i, \; 1 \le i \le 3$

ii. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon \vec{e}_i \, \varepsilon \vec{e}_j \, \varepsilon \vec{e}_k, \; (E_1^{\,3})$

iii. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\varepsilon \vec{e}_i \, \varepsilon \vec{e}_j \, \varepsilon \vec{e}_k, \; (E_2^{\,4})$

dır. Buna göre bir q yarı-reel kuaterniyonu, q nun sırasıyla skaler ve vektör kısımları $S_q = d$ ve $V_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ olmak üzere,

$$q = S_q + V_q$$

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

formunda yazılır. Burada,

$$\varepsilon \vec{e}_i = \begin{cases} -1, & \vec{e}_i \; timelike \\ 1, & \vec{e}_i \; spacelike \end{cases}$$

dır. Bundan sonra yarı-reel kuaterniyonların cümlesi,

$$\mathbb{Q}_v = \begin{Bmatrix} q \mid q = d + a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}_1^3, \ h(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = \mid \varepsilon(\vec{e_i}) \mid, \ 1 \le i \le 3 \end{Bmatrix}$$

ile gösterilecektir (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.2. Her $p,q \in \mathbb{Q}_v$ için iki yarı-reel kuaterniyonun çarpımı E_1^3 de sırasıyla $\langle , \rangle_L$ ve $\wedge_L$ skaler ve vektörel çarpım olmak üzere,

$$p \times_L q = S_p S_q + \langle V_p, V_q \rangle_L + S_p V_q + S_q V_p + V_p \wedge_L V_q$$

olarak tanımlıdır (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.3. $q \in \mathbb{Q}_v$ kuaterniyonun eşleniği αq ile gösterilir ve

$$\alpha q = S_q - V_q = d - a\vec{e_1} - b\vec{e_2} - c\vec{e_3}$$

ile tanımlıdır ve bu h formunun tanımlanmasına yardım eder (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.4. $p,q \in \mathbb{Q}_v$ için,

$$\begin{aligned} &h : \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v \to \mathbb{R} \\ &h(p,q) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha q}\left(p \times_L \alpha q\right) + \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha p}\left(q \times_L \alpha p\right)\right], \ E_1^3 \\ &h(p,q) = \frac{1}{2}\left[-\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha q}\left(p \times_L \alpha q\right) - \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha p}\left(q \times_L \alpha p\right)\right], \ E_2^4 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna yarı-reel kuaterniyon iç çarpımı denir. Bu reel değerli h fonksiyonu anti simetrik ve bilineerlik özelliğine sahiptir. Burada $\times_L$ yarı-reel kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.5 $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonun normu,

$$\|q\|^2 = |h(q,q)| = |\varepsilon q(q \times_L \alpha q)|$$

şeklinde tanımlı olan $\|q\|$ reel sayısına denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.6. $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu için $q + \alpha q = 0$ ise q ya bir yarı-reel uzaysal kuaterniyon denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.7. $p, q \in \mathbb{Q}_v$ için,

$$h(p,q) = 0$$

ise p ve q yarı-reel kuaterniyonlarına h-ortogonaldir denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.4.8. $q \in \mathbb{Q}_v$ yarı-reel kuaterniyonu için,

$$\|q\|^2 = 1$$

ise q ya bir yarı-reel birim kuaterniyon denir (Tuna, 2002).

Tanım2.4.9. Bir yarı-reel kuaterniyon $I_q = q \times_L \alpha q = \alpha q \times_L q$ olmak üzere sırasıyla $I_q < 0,\ I_q > 0,\ I_q = 0$ ise spacelike, timelike veya lightlike yarı-reel kuaterniyon olarak adlandırılır (Özdemir ve Ergin, 2006).

Tanım 2.4.10. E_1^3 Minkowski uzayında herhangi bir spacelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike olur fakat herhangi bir timelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike ya da timelike olabilir. Yarı-reel kuaterniyonların kutupsal biçimleri aşağıdaki sınıflandırmalar ile verilmektedir:

i. E_1^3 de her spacelike kuaterniyon,

$\sinh\theta = \dfrac{q_1}{N_q}$, $\cosh\theta = \dfrac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon}_0 = \dfrac{q_2 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$ bir spacelike birim vektör iken,

$$q = N_q \left(\sinh\theta + \vec{\varepsilon}_0 \cosh\theta \right)$$

formunda yazılabilir.

ii. E_1^3 de spacelike vektör kısmıyla birlikte her timelike kuaterniyon $\vec{\varepsilon}_0 \times_L \vec{\varepsilon}_0 = 1$ için,

$\cosh\theta = \dfrac{q_1}{N_q}$, $\sinh\theta = \dfrac{\sqrt{-q_2^{\,2} + q_3^{\,2} + q_4^{\,2}}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon_0} = \dfrac{q_2 \vec{e_1} + q_3 \vec{e_2} + q_4 \vec{e_3}}{\sqrt{-q_2^{\,2} + q_3^{\,2} + q_4^{\,2}}}$ bir spacelike birim vektör iken,

$$q = N_q \left(\cosh\theta + \vec{\varepsilon_0} \sinh\theta \right)$$

formunda yazılabilir.

iii. E_1^3 de timelike vektör kısmıyla birlikte her timelike kuaterniyon $\vec{\varepsilon_0} \times_L \vec{\varepsilon_0} = -1$ için,

$\cos\theta = \dfrac{q_1}{N_q}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{q_2^{\,2} - q_3^{\,2} - q_4^{\,2}}}{N_q}$ ve $\vec{\varepsilon_0} = \dfrac{q_2 \vec{e_1} + q_3 \vec{e_2} + q_4 \vec{e_3}}{\sqrt{q_2^{\,2} - q_3^{\,2} - q_4^{\,2}}}$ bir timelike birim vektör iken,

$$q = N_q \left(\cos\theta + \vec{\varepsilon_0} \sin\theta \right)$$

formunda yazılabilir (Özdemir ve Ergin, 2006).

Tanım 2.4.11. Her birim kuaterniyon $\vec{\varepsilon_0} \times_L \vec{\varepsilon_0} = -1$ denklemini sağlayan $\vec{\varepsilon_0}$ birim vektörü için,

$$q_0 = \left(\cos\theta + \vec{\varepsilon_0} \sin\theta \right)$$

formunda yazılabilir ve $\vec{\varepsilon_0}$ vektörüne q_0 kuaterniyonunun ekseni denir (Özdemir ve Ergin, 2006).

Tanım 2.4.12. E_2^4 de hiper-kuadrikler sırasıyla,

$$S_1^3(m,r) = \{x \in E_2^4 : h(x-m, x-m) = r^2\}$$
$$H_0^3(m,r) = \{x \in E_2^4 : h(x-m, x-m) = -r^2\}$$
$$C_3^3(m,r) = \{x \in E_2^4 : h(x-m, x-m) = 0\}$$

pseudo-küre, pseudo-hiperbolik ve ışık konisi olarak tanımlıdır (İlarslan ve Nesovic, 2009).

3. 3-BOYUTLU VE 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK NORMAL EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

3.1. Uzaysal Kuaterniyonik Normal Eğriler

Tanım 3.1.1. Reel kuaterniyonlar cümlesinde $s \in \mathrm{I} = [0,1]$ için,

$$\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$
$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(s) e_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

olarak tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

Teorem 3.1.1. E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, kuaterniyonların uzayı, $\{\gamma \in Q,\ \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ şeklindedir. $\mathbb{R}$ reel doğrusunda $I = [0,1]$ bir aralık olsun ve $s \in I$ parametresi, tüm s ler için $\|t(s)\| = 1$ birim uzunluğu, $\gamma'(s) = t$ seçimi ile;

$$\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \gamma(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(s) e_i,\ (1 \leq i \leq 3)$$

olur. Burada $t' \times \bar{t} + t \times \bar{t'} = 0$ koşulu vardır.

Son denklemde t', t ye dik ve $t' \times \bar{t}$ bir uzaysal kuaterniyondur. $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ γ kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet üç-yüzlüsü olsun.

Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned}
t'(s) &= k(s)\,\mathrm{n}_1(s) \\
n_1'(s) &= -k(s)t(s) + r(s)n_2(s) \\
n_2'(s) &= -r(s)n_1(s)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada t birim teğet, n_1 birim esas normal, n_2 birim binormal vektör alanı, k esas eğrilik ve r, γ kuaterniyonik eğrisinin burulmasıdır (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

Tanım 3.1.2. $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için konum vektörü her zaman normal düzlemde yatan eğrilere normal eğriler denir. E^3 de γ normal eğrisinin konum vektörü λ ve μ keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlar iken

$$\gamma(s) = \lambda(s)n_1(s) + \mu(s)n_2(s)$$

denklemini sağlarlar (İlarslan, 2005).

Uzaysal kuaterniyonik normal eğrilerin bazı temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1.2. $s \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R},\ k(s) > 0,\ r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3de $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik normal eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir.

i) $k(s)$ ve $r(s)$ eğrilikleri,

$$\frac{1}{k(s)} = c_1 \cos \int r(s)ds \ + c_2 \sin \int r(s)ds \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

denklemini sağlarlar.

ii) Sırasıyla**;**

$$h(\gamma(s), n_1) = -c_1 \cos \int r(s)ds \ - c_2 \sin \int r(s)ds$$
$$h(\gamma(s), \mathrm{n}_2) = \mathrm{c}_1 \sin \int r(s)ds \ - c_2 \cos \int r(s)ds$$

verilen kuaterniyonik eğrinin konum vektörünün, esas normali ve binormal kısmıdır.

Diğer taraftan, eğer $s \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ için $k(s) > 0,\ r(s) \neq 0$ eğrilikleri ile E^3de $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik eğrisi için (i) ve (ii) ifadelerinden birisi varsa, γ bir uzaysal kuaterniyonik normal eğriye eşittir.

İspat: s yay uzunluğu parametresi iken, E^3de γ (s) birim hızlı uzaysal kuaterniyonik normal bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\gamma(s) = \lambda(s)n_1(s) + \mu(s)n_2(s) \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1) denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\gamma'(s) = \lambda'(s)n_1(s) + \ (s)n_1'(s) + \mu'(s)\mathrm{n}_2(s) + \ (s)n_2'(s) \\
&t = \lambda' n_1 + \lambda(-kt + rn_2) + \mu' n_2 + \mu(-rn_1) \\
&t = (\lambda' - r\mu)n_1 + (\lambda r + \mu')n_2 + (-k\lambda)t
\end{aligned}
$$

bulunur. Her iki tarafta katsayı eşitliğine göre,

$$-k\lambda = 1, \quad \lambda' - r\mu = 0, \quad r\lambda + \mu' = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) denklemleri çözülürse,

$$\lambda(s) = -\frac{1}{k(s)}, \ \mu \ s \ = -\frac{1}{r \ s}\left(\frac{1}{k(s)}\right)' \tag{3.3}$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$\gamma(s) = -\frac{1}{k(s)}n_1(s) - \frac{1}{r(s)}\left(\frac{1}{k(s)}\right)' n_2(s) \tag{3.4}$$

elde edilir.

$\mathrm{r}\lambda + \mu' = 0$ ve (3.3) ifadesi kullanılarak,

$$-\frac{r}{k} + \left(-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{k}\right)'\right)' = 0$$

denklemi bulunur ve denklem düzenlendiğinde,

$$\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]' + \frac{r}{k} = 0 \tag{3.5}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

$y(s)=\dfrac{1}{k}$ ve $p(s)=\dfrac{1}{r}$ eşitlikleri (3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left[p(s)y'(s)\right]'+\frac{y(s)}{p(s)}=0$$

elde edilir ve $t=\int\dfrac{1}{p(s)}ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü; $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ iken,

$y=c_1\cos t+c_2\sin t$ dır. Buradan;

$$\frac{1}{k(s)}=c_1\cos(\int r(s)ds)+c_2\sin(\int r(s)ds)$$

(3.6)

dır. Buradan (i) ifadesi elde edilmiş olur. Daha sonra (3.3) ve (3.4) denklemlerinde (3.6) ifadesi yerine yazılarak,

$$\lambda=-(c_1\cos(\int r(s)ds)+c_2\sin(\int r(s)ds))$$

bulunur. (3.3) ve $\mu(s)=-\dfrac{1}{r(s)}\left(\dfrac{1}{k(s)}\right)'$ denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&=-\frac{1}{r(s)}\frac{d}{ds}(c_1\cos\int r(s)ds+c_2\sin\int r(s)ds)\\
&=-\frac{1}{r(s)}(-c_1\sin\int r(s)ds)r(s)+(c_2\cos\int r(s)ds)r(s)), \quad r(s)\neq 0\\
&=c_1\sin\int r(s)ds-c_2\cos\int r(s)ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\mu(s)=c_1\sin(\int r(s)ds)-c_2\cos(\int r(s)ds)$$

şeklinde elde edilir. Buradan en genel haliyle,

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= -(c_1 \cos(\int r(s)ds) + c_2 \sin(\int r(s)ds))n_1(s) \\ &+(c_1 \sin(\int r(s)ds) - c_2 \cos(\int r(s)ds))n_2(s)\end{aligned} \tag{3.7}$$

dır.

Daha sonra (3.7) denkleminde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$h(\gamma,\gamma) = c_1^{\,2} + c_2^{\,2} \tag{3.8}$$

$$h(\gamma(s), n_1) = -c_1 \cos \int r(s)ds \; - c_2 \sin \int r(s)ds \tag{3.9}$$

$$h(\gamma(s), n_2) = c_1 \sin \int r(s)ds \; - c_2 \cos \int r(s)ds \tag{3.10}$$

elde edilir. O halde (ii) ifadesi de ispatlanmış olur. Tersine, (i) ifadesini kabul edelim;

$$\frac{1}{k(s)} = c_1 \cos(\int r(s)ds) + c_2 \sin(\int r(s)ds) \tag{3.11}$$

dır. (3.11) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa,

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)' = -c_1(\sin \int r(s)ds)r(s) + c_2(\cos \int r(s)ds)r(s)$$

$$\frac{1}{r(s)}\left(\frac{1}{k(s)}\right)' = -c_1(\sin \int r(s)ds) + c_2(\cos \int r(s)ds)$$

elde edilir ve tekrar s ye göre türev alınırsa,

$$\left[\frac{1}{r(s)}\left(\frac{1}{k(s)}\right)'\right]' = -c_1(\cos \int r(s)ds)r(s) - c_2(\sin \int r(s)ds)r(s)$$

$$= -r(s)(c_1(\cos \int r(s)ds) + c_2(\sin \int r(s)ds))$$

$$\left[\frac{1}{r(s)}\left(\frac{1}{k(s)}\right)'\right]' = -r(s)\left(\frac{1}{k(s)}\right)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]' = -\frac{r}{k} \tag{3.12}$$

bulunur. (3.12) denklemi ile Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}\left[\gamma(s) + \frac{1}{k}n_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{k}\right)' n_2\right] = 0$$

olur. Böylece, γ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik normal bir eğriye eşit olduğu görülür. Ayrıca (ii) ifadesini kabul edelim. (3.8) denklemi elde edilir. (3.8) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$h(\gamma(s), t) = 0$$

bulunur. Böylece γ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik bir normal eğri olduğu görülür.

Teorem 3.1.3. $s \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R},\ k(s) > 0,\ r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3 de $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik eğrisinin S^2 birim küresinde yatması için gerek ve yeter koşul;

$$\frac{1}{k} = \pm\sqrt{b^2 - c^2}\cos(\int r(s)ds) + c\sin(\int r(s)ds) \quad c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+ \tag{3.13}$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

İspat: İlk olarak eğri S^2 birim küresinde yatsın. O halde $h(\gamma,\gamma) = b^2,\ b \in \mathbb{R}^+$ dır. $h(\gamma,\gamma) = b^2,\ b \in \mathbb{R}^+$ ifadesi (3.8) denkleminde yerine yazılırsa, $c_1 = \pm\sqrt{b^2 - c^2}$ elde edilir. (3.6) denklemi ve $c_1 = \pm\sqrt{b^2 - c^2}$ denklemi kullanılarak (3.13) denklemi elde edilir.

Tersine (3.13) denklemini kabul edelim. Daha sonra (3.13) denkleminin s ye göre türevi alınırsa $b \in \mathbb{R}^{+}$ için $h(\gamma,\gamma) = b^2$ elde edilir. Bu ise γ eğrisinin S^2 birim küresinde yattığını gösterir.

3.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Kuaterniyonik Normal Eğriler

Tanım 3.2.1. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar cümlesinde $s \in \mathrm{I} = [0,1]$ için,

$$\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$
$$s \to \beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(s) e_i, \quad 1 \le i \le 4, \quad (\mathrm{e}_4 = 1)$$

olarak tanımlanan eğriye kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

Teorem 3.2.1. E^4 dört boyutlu Öklid uzayında,

$$\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$
$$s \to \beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(s) e_i,\ e_4 = 1$$

fonksiyonu ile tanımlanan β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki hız vektörü $T = \beta'(s) = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i'(s) e_i$ dır ve E^4 dört boyutlu Öklid uzayında, diferansiyellenebilir bir eğrinin Frenet vektörleri, $\{T, N, B, E\}$ olsun. Buna göre Frenet formülleri,

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \mathrm{K} N(s) \\
N'(s) &= -\mathrm{K} T(s) + k B(s) \\
B'(s) &= -k N(s) + (r - K) E(s) \\
E'(s) &= -(r - K) B
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ile verilir. Burada;

$$\begin{aligned}
N &= t \times T \\
B &= n_1 \times T \\
E &= n_2 \times T \\
K &= \left\| T'(\mathrm{s}) \right\|
\end{aligned}$$

dır. E^3 de γ eğrisi aracılığıyla, bir β eğrisi için Frenet formülleri açıklanmıştır. Ayrıca β ve γ eğrilerinin eğrilikleri arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, β eğrisinin burulmasının γ eğrisinin asli eğriliği olduğu ile açıklanır. Ek olarak, β eğrisinin bitorsiyonu $(r-K)$ dır. Burada, β eğrisinin asli eğriliği K ve γ eğrisinin burulması r dır. Bu ilişkiler kuaterniyonlar için tek türlü belirlidir.

Tanım 3.2.2. Konum vektörü her zaman normal düzlemde yatan eğrilere **normal eğriler** denir. E^4 de β normal eğrisinin konum vektörü, λ, μ ve ν keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\beta(s) = \lambda(s)\,\mathrm{N(s)} + \mu(\mathrm{s})B(s) + \nu(s)E(\mathrm{s})$$

biçiminde yazılırlar (İlarslan ve Nesovic, 2009)

Durum 3.2.1. $\beta = \beta(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik normal eğrisi tamamıyla $\mathbb{Q}$ da yatsın. O halde, konum vektörü,

$$\beta(s) = \lambda(s)\,\mathrm{N(s)} + \mu(\mathrm{s})B(s) + \nu(s)E(\mathrm{s}) \tag{3.14}$$

denklemini sağlar. (3.14) denklemin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$T = -K\lambda T + (\lambda' - k\mu)\mathrm{N} + \ k\lambda + \mu' - (r-K)v\ \ B + \ (r-K)\mu + \nu'\ \ E$$

olur. Buradan,

$$-K\lambda = 1, \quad \lambda' - k\mu = 0, \quad k\lambda + \mu' - (r-K)\nu = 0, \quad (r-K)\mu + \nu' = 0 \tag{3.15}$$

elde edilir. İlk üç denklemden,

$$\lambda(s) = -\frac{1}{K(s)}$$
$$\mu(s) = -\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' \qquad (3.16)$$
$$\nu(s) = -\frac{1}{r(s)-K(s)}\left[\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]$$

bulunur. (3.16) bağıntısı (3.14) denkleminde yerine yazılırsa, β kuaterniyonik normal eğrisinin konum vektörü,

$$\beta(s) = -\frac{1}{k(s)}N - \frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' B - \frac{1}{r(s)-K(s)}\left[\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]E \quad (3.17)$$

eşitliği ile verilir.

Bu ifadelerle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.2. β bir birim hızlı kuaterniyonik eğrisi tamamen $\mathbb{Q}$ da yatsın. β eğrisinin bir kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşul,

$$-\left(\frac{r(s)-K(s)}{k(s)}\right)\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left[\frac{1}{r(s)-K(s)}\left(\frac{k(s)}{K(s)} + \frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]' \qquad (3.18)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: β bir kuaterniyonik normal eğri olsun. Bu durumda

$$(r-K)\mu + \nu' = 0$$

denkleminde (3.2.4) değerleri yerine yazılarak,

$$-\left(\frac{r(s)-K(s)}{k(s)}\right)\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left[\frac{1}{r(s)-K(s)}\left(\frac{k(s)}{K(s)}+\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]'$$

denklemi elde edilir. Tersine, (3.18) bağıntısını kabul edelim. $m \in \mathbb{Q}$ vektörü,

$$m(s)=\beta(s)+\frac{1}{K(s)}N+\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B+\frac{1}{r(s)-K(s)}\left[\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]E$$

(3.19)

olsun. (3.19) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$m'(s)=T+\left(\frac{1}{K(s)}\right)'N+\left(\frac{1}{K(s)}\right)N'+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'B+\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B'$$
$$+\left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right)\right)'E+\frac{1}{r-K}\left(\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right)E'$$

elde edilir ve Frenet formülleri uygulanırsa,

$$m'(s)=\frac{r(s)-K(s)}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'E+\left(\frac{1}{r(s)-K(s)}\right)\left[\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]'E$$

elde edilir. (3.18) bağıntısı kullanılarak,

$$m'(s)=0$$

bulunur. Dolayısıyla m bir sabit vektör iken, β eğrisinin bir kuaterniyonik normal eğri olduğu görülür.

Teorem 3.2.3. β bir birim hızlı kuaterniyonik eğrisi tamamıyla $\mathbb{Q}$ da yatsın. Eğer β bir kuaterniyonik normal eğri ise,

i) β konum vektörünün sırasıyla birinci ve ikinci normal bileşenleri;

$$h(\beta,N)=-\frac{1}{K(s)}$$
$$h(\beta,B)=-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'$$

ile verilir.

ii) β konum vektörünün sırasıyla ikinci ve üçüncü normal bileşenleri;

$$h(\beta,B)=-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'$$
$$h(\beta,E)=-\frac{1}{(r(s)-K(s))}\left[\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]$$

ile verilir.

Tersine, β birim hızlı kuaterniyonik eğrisi tamamen $\mathbb{Q}$ da yatsın. Bu durumda (*i*) ve (*ii*) ifadelerinden biri varsa β kuaterniyonik normal eğridir.

İspat: β kuaterniyonik normal eğri ise, (3.17) bağıntısının *(i)* ve *(ii)* ifadelerini sağladığı görülür. Tersine,

(i) ifadesini kabul edelim. $h(\beta,N)=-\dfrac{1}{K(s)}$ denkleminde s ye göre türev alınırsa,

$$h(T,N)+h(\beta,N')=-\left(\frac{1}{K}\right)'$$

olur ve $N'=-KT+kB$ yerine yazılırsa,

$$h(\beta,-KT+kB)=-\left(\frac{1}{K}\right)'$$

$$-Kh(\beta,T)+kh(\beta,B)=-\left(\frac{1}{K}\right)', \quad h(\beta,B)=-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'$$

$$-Kh(\beta,T)-k\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'=-\left(\frac{1}{K}\right)'$$

elde edilir. Buradan $-K.h(\beta,T)=0$ bulunur. $K\neq 0$ olduğundan $h(\beta,\mathrm{T})=0$ olmalıdır. O halde β bir kuaterniyonik normal eğridir. Eğer *(ii)* ifadesi kabul edilirse,

$$h(\beta,E)=-\frac{1}{(r(s)-K(s))}\left[\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]$$

elde edilir ve s ye göre türevi alınırsa,

$$h(T,E)+h(\beta,E')=-\left(\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right)', \quad h(T,E)=0$$

$$-(r-K)h(\beta,B)=-\left(\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right)', \quad h(\beta,B)=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'$$

$$(r-K)\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'=-\left(\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right)'$$

elde edilir. Teorem 3.2 ye göre β bir kuaterniyonik normal eğridir.

Teorem 3.2.4. β birim hızlı kuaterniyonik eğrisi tamamen $\mathbb{Q}$ da yatsın. β nın kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter şart β nın $\mathbb{Q}$ da S^3 küresinde yatması gerekir.

İspat: β bir kuaterniyonik normal eğri olsun. Teorem 3.2.2 kullanılarak,

$$-\frac{(r-K)}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'=\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]'$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı $2\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]$ ile çarpılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{gathered}2\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}\right)'+2\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'+\\ 2\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\left(\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]'\right)=0\end{gathered} \tag{3.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.20) denklemi,

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)^2+\left(\frac{1}{r-K}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right)^2=c,\ c\in\mathbb{R} \tag{3.21}$$

denkleminin diferansiyellenmiş halidir. Kabulden dolayı β kuaterniyonik eğrisi normal eğriye eşit olduğundan (3.19) ve (3.21) denklemleri kullanılarak,

$$\beta-m=-\frac{1}{K}N-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'B-\frac{1}{r-K}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]E$$

$$h(\beta-m,\beta-m)=\left(\frac{1}{K}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)^2+\left(\frac{1}{r-K}\left[\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right)^2=c$$

elde edilir. Buradan $h(\beta-m,\ \beta-m)=c$ olduğu görülür. Sonuç olarak β, $\mathbb{Q}$ da S^3 küresinde yatar.

Tersine β, $\mathbb{Q}$ da bir S^3 küresinde yatsın. O halde $m \in \mathbb{Q}$ sabit vektör iken $h(\beta - m, \beta - m) = c$, $c \in \mathbb{R}$ dır. $h(\beta - m, \beta - m) = c$ denkleminin s ye göre türevi alınırsa $h(\beta - m, T) = 0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla β bir kuaterniyonik normal eğridir.

Tanım 3.2.3. $\mathbb{Q}$ da keyfi bir β eğrisi sabit eğrilik fonksiyonunu içerirse bir $W-$eğri ya da bir helis olarak adlandırılır (Petrovic ve Sucurovic, 2002).

Aşağıdaki teorem kuaterniyonik normal eğriler üzerinden $\mathbb{Q}$ da kuaterniyonik $W-$eğrisinin karakterizasyonlarını göstermektedir.

Teorem 3.2.5. Her birim hızlı tamamıyla $\mathbb{Q}$ da yatan kuaterniyonik $W-$eğrisi, bir kuaterniyonik normal eğriye eşittir.

İspat: $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $K(s) = c_1$, $k(s) = c_2$, $(r - K)(s) = c_3$ olduğunu kabul edelim. Eğrilik fonksiyonlarının sabit olduğu göz önüne alınarak ve Teorem 3.2.2 kullanılarak,

$$m(s) = \beta(s) + \frac{1}{K(s)}N + \frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' B + \frac{1}{(r(s) - K(s))}\left[\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right] E$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$m' = \beta' + \frac{1}{K}N' + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)' B' + \frac{1}{(r-K)}\left[\frac{k}{K} + \left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right] E$$

$$m' = T - \frac{1}{K}KT + \frac{1}{K}k\,B - \left(\frac{(r-K)}{(r-K)}\right)\frac{k}{K}B = 0$$

$$m' = 0$$

bulunur. O halde β bir kuaterniyonik normal eğriye eşittir.

Önerme 3.2.1. Birim hızlı $\mathbb{Q}$ da yatan β eğrisinin bir kuaterniyonik normal eğriye eşit olması için gerek ve yeter koşul diferansiyellenebilir $f(s)$ fonksiyonu için,

$$
\begin{aligned}
f(s)(r(s)-K(s)) &= \frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \\
f'(s) &= -\frac{(r(s)-K(s))}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)'
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.6. β, $\mathbb{Q}$ da bir birim hızlı kuaterniyonik eğri olsun. β eğrisinin kuaterniyonik normal eğriye eşit olması için gerek ve yeter koşul $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ sabitleri ve $\theta(\mathrm{s}) = \int_0^s (r(s)-K(s))ds$ için,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' &= \left(a_0 + \int \frac{k(s)}{K(s)} \cos\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} \right) \cos\theta(\mathrm{s}) \\
&\quad + \left(b_0 + \int \frac{k(s)}{K(s)} \sin\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} \right) \sin\theta(\mathrm{s})
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

olmasıdır.

İspat: β kuaterniyonik normal eğri olsun. Önerme 3.2.1'e göre $f(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır, öyle ki (3.22) denklemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\theta(\mathrm{s}) &= \int_0^s (r(s)-K(s))ds \\
a(s) &= -\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \cos\theta(s) + f(s)\sin\theta(s) - \int \frac{k(s)}{K(s)} \cos\theta(s)ds \\
b(s) &= -\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \sin\theta(s) - f(s)\cos\theta(s) - \int \frac{k(s)}{K(s)} \sin\theta(s)ds
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

ile tanımlı $\theta(s)$, $a(s)$ ve $b(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun (3.25) denklemi yardımıyla,

$$\theta^{'}(s) = (r(s) - K(s))$$

ve

$$a'(s) = \left(-\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \cos\theta(s) + \frac{r(s)-K(s)}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \sin\theta(s) - \frac{r(s)-K(s)}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \sin\theta(s)$$
$$+\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s) + \left(\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \cos\theta(s) - \frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)$$

$$a'(s) = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$b'(s) = \left(-\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \sin\theta(s) - \left(\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \cos\theta(s) \right)(r(s)-K(s)) + \frac{r(s)-K(s)}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \cos\theta(s)$$
$$+\frac{1}{r(s)-K(s)} \left[\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \right] \sin\theta(s)(r(s)-K(s)) - \frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)$$

$$b'(s) = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$a(s) = a_0, \quad b(s) = b_0, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R} \tag{3.25}$$

dır. (3.24) denkleminin ikinci ve üçüncü denklemleri sırasıyla $\cos\theta(s)$ ve $\sin\theta(s)$ ile çarpılırsa,

$$a_0 \cos\theta(s) = -\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \cos^2\theta(s) + f(s)\sin\theta(s)\cos\theta(s) - \left(\int \frac{k(s)}{K(s)} \cos\theta(s) ds \right) \cos\theta(s)$$
$$b_0 \sin\theta(s) = -\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \sin^2\theta(s) - f(s)\sin\theta(s)\cos\theta(s) - \left(\int \frac{k(s)}{K(s)} \sin\theta(s) ds \right) \sin\theta(s)$$

elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa toplanırsa,

$$a_0\cos\theta(s)+b_0\sin\theta(s)=-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'(\cos^2\theta(s)+\sin^2\theta(s))$$
$$-\left(\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)-\left(\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)$$

olur. Denklem düzenlenirse,

$$-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'=\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right)\cos\theta(\mathrm{s})$$
$$+\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right)\sin\theta(\mathrm{s})$$

denklemi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tersine, $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ sabitleri için (3.23) denklemi sağlansın. (3.23) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$\left(-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'=\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)\cos\theta(s)-\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)\theta'(s)+\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)\sin\theta(s)$$
$$\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)\theta'(s)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$\left(-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'=\frac{k(s)}{K(s)}(\cos^2\theta(s)+\sin^2\theta(s))-\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)(r(s)-K(s))+$$
$$\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)(r(s)-K(s))$$

elde edilir. Buradan,

$$-\frac{k(s)}{K(s)}-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'=(r(s)-K(s))\begin{bmatrix}-\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right)\sin\theta(s)\\+\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)\end{bmatrix}\tag{3.26}$$

bulunur. $f(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu;

$$f(s)=\frac{1}{(r(s)-K(s))}\left[\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right] \tag{3.27}$$

ile tanımlı idi. Daha sonra (3.26) ve (3.27) denklemleri kullanılarak,

$$f(s)=\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)-\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\cos\theta(s) \tag{3.28}$$

bulunur. (3.28) ve (3.23) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}f'(s)=&\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)\sin\theta(s)+\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)(r(s)-K(s))-\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)\sin\theta(s)\\&-\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)(r(s)-K(s))\end{aligned}$$

elde edilir ve düzenlenerek,

$$f'(s)=(r(s)-K(s))\left[\left(a_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\cos\theta(s)ds\right)\cos\theta(s)-\left(b_0+\int\frac{k(s)}{K(s)}\sin\theta(s)ds\right)\sin\theta(s)\right]$$

bulunur. O halde,

$$f'(s)=-\frac{(r(s)-K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'$$

elde edilir. Buradan Önerme 3.2.1 gösterir ki β bir kuaterniyonik normal eğriye eşittir.

4. E_2^4 YARI ÖKLİDYEN UZAYINDA KUATERNİYONİK NORMAL EĞRİLER

Bu kısımda dört boyutlu E_2^4 Öklidyen uzayı, birim yarı reel kuaterniyonların uzayı ile tanımlanacaktır. İlk olarak E_1^3 uzayındaki γ kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı ve Frenet formülleri kullanılarak E_2^4 uzayındaki kuaterniyonik eğriler için formüller elde edilecektir.

Tanım 4.1. E_1^3, 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonların uzayı $\{\gamma \in Q_v \ \gamma + \alpha\gamma = 0\}$ olsun. $\mathrm{I} = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to Q_v$$
$$s \to \gamma(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(s) e_i$$

C^∞ eğrisi verilsin. $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet üç ayaklısı $t(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i'(s) e_i$, $n_1(s)$, $n_2(s)$ ve eğrilikler de $k(s), r(s)$ olmak üzere, γ eğrisi boyunca t, n_1 ve n_2 nin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} t' &= \varepsilon_n k n \\ n' &= \varepsilon_t \ r \varepsilon_t \varepsilon_n b - kt \\ b' &= -\varepsilon_b r n \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$h(t,t) = \varepsilon_t, \ \ h(n,n) = \varepsilon_n, \ \ h(b,b) = \varepsilon_b$$

dır (Tuna, 2002).

Teorem 4.1. E_2^4 uzayında bir $\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to Q$ eğrisi $\beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(s) e_i$, $e_4 = 1$ şeklinde tanımlı olsun. s parametresi, $T = \beta'(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i'(s) e_i$ ile tanımlanan bir büyüklük olsun. E_2^4 yarı-Öklid uzayında diferansiyellenebilir eğrilerin Frenet vektörleri

$\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. β eğrisinin tanjant vektörü $T(s)$ ve $K = \varepsilon_N \left\| T'(s) \right\|$ iken Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} T'(s) &= \varepsilon_N K N(s) \\ N'(s) &= -\varepsilon_t \varepsilon_N K T(s) + \varepsilon_n k B_1(s) \\ B_1'(s) &= -\varepsilon_t k N(s) + \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) B_2(s) \\ B_2'(s) &= -\varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) B_1(s) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindedir.

$\mathbb{R}^3$ de bir γ eğrisi için Frenet formülleri kullanılarak, β eğrisi için Frenet formülleri elde edilmiştir. Ayrıca β ve γ eğrilerinin eğrilikleri arasında ilişkiler vardır. Bu ilişkiler, γ eğrisinin asli eğriliğinin β eğrisinin torsiyonu olmasıyla açıklanabilir. Ayrıca, β eğrisinin asli eğriliği K ve γ eğrisinin torsiyonu r iken, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K)$ β eğrisinin bitorsiyonudur. Bu ilişkiler kuaterniyonik eğriler için tek türlü belirlidir.

Bu kısımda her bir s için $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) \neq 0$ üçüncü eğriliğiyle birlikte yarı-reel kuaterniyonik normal eğriler karakterize edilecektir.

Durum 4.1. $\beta = \beta(s)$ bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik normal eğrisi tamamıyla $\mathbb{Q}_v$ de yatsın. O halde β eğrisinin konum vektörü,

$$\beta(s) = \lambda(s)\,\mathrm{N}(s) + \mu(s)\,\mathrm{B}_1(s) + \nu(s)\,\mathrm{B}_2(s) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır. (4.2) denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} T = {} & \lambda' N + \lambda(-\varepsilon_t \varepsilon_N K T + \varepsilon_n k B_1) + \mu' B_1 + \mu(-\varepsilon_t k N + \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) B_2) \\ & + \nu' B_2 + \nu(-\varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K)) B_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_t \varepsilon_N K \lambda = 1, \\ & \lambda' - \varepsilon_t k \mu = 0, \\ & \varepsilon_n k \lambda + \mu' - \varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) \nu = 0, \\ & \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K) \mu + \nu' = 0. \end{aligned}$$

olur. İlk üç denklem kullanılarak,

$$\lambda(s) = -\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}$$
$$\mu(s) = -\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' \tag{4.4}$$
$$\nu(s) = -\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]$$

elde edilir. (4.4) bağıntısı (4.2) denkleminde yerine yazılırsa, β yarı-reel kuaterniyonik normal eğrisinin konum vektörü,

$$\beta(s) = -\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}N - \frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' B_1 - \frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right] B_2$$

elde edilir.

Teorem 4.2. β bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik eğrisi tamamıyla $\mathbb{Q}_v$ de yatsın. β eğrisinin bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşul,

$$-\frac{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left[\frac{\varepsilon_b\varepsilon_n}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\right]' \tag{4.5}$$

olmasıdır.

İspat: β bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olsun. O halde,

$$\varepsilon_n(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))\mu + \nu' = 0 \tag{4.6}$$

dır. (4.6) denkleminde μ ve ν fonksiyonları yerine yazılırsa,

$$-\frac{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left[\frac{\varepsilon_b\varepsilon_n}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\right]'$$

elde edilir. Tersine (4.5) denklemini kabul edelim. $m \in \mathbb{Q}_v$ vektör

$$m(s)=\beta(s)+\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}N+\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B_1+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]B_2 \quad (4.7)$$

olsun. (4.7) denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} m'(s) &= T+\varepsilon_t\varepsilon_N\left(\frac{1}{K(s)}\right)'N+\left(\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}\right)(-\varepsilon_t\varepsilon_N KT+\varepsilon_n kB_1)+\left(\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'B_1 \\ &+\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'(-\varepsilon_t kN+\varepsilon_n(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))B_2) \\ &+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]'B_2 \\ &+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right](-\varepsilon_b(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)))B_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan denklem tekrar düzenlenirse,

$$m'(s)=\frac{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B_2+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_n}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]'B_2$$

olur. (4.5) bağıntısı kullanılarak,

$$m'(s)=0$$

bulunur. Dolayısıyla m sabit bir vektördür. Sonuç olarak β yarı-reel kuaterniyonik normal eğridir.

Teorem 4.3. β bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik eğrisi tamamıyla $\mathbb{Q}_v$ de yatsın. Eğer β yarı-reel kuaterniyonik normal eğri ise aşağıdaki ifadeleri sağlar:

i) β konum vektörünün sırasıyla asli normal ve ilk binormal bileşenleri;

$$h(\beta, N) = -\frac{\varepsilon_t}{K(s)}$$

$$h(\beta, B_1) = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)'$$

ile verilir.

ii) β konum vektörünün sırasıyla ilk binormal ve ikinci binormal bileşenleri;

$$h(\beta, B_1) = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)'$$

$$h(\beta, B_2) = -\frac{\varepsilon_T \varepsilon_N}{r(s) - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K(s)} \left[\varepsilon_t \varepsilon_n \frac{k(s)}{K(s)} + \left(\frac{1}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)' \right)' \right]$$

ile verilir. Tersine, β bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik eğrisi tamamıyla Q_v de yatsın. Eğer ***(i)*** ve ***(ii)*** ifadelerinden biri sağlanırsa, β bir normal eğridir.

İspat: β yarı-reel kuaterniyonik normal eğri ise (4.2) bağıntısı kullanılarak *(i)* ve *(ii)* ifadeleri sağlanır.

Tersine, *(i)* şıkkının varlığını kabul edelim:

$h(\beta, N) = -\frac{\varepsilon_t}{K(s)}$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa,

$$h(T, N) + h(\beta, -\varepsilon_t \varepsilon_N K T + \varepsilon_n k B_1) = -\varepsilon_t \left(\frac{1}{K(s)} \right)', \quad h(T, N) = 0$$

$$-\varepsilon_t \varepsilon_N K h(\beta, T) + \varepsilon_n k h(\beta, B_1) = -\varepsilon_t \left(\frac{1}{K(s)} \right)'$$

elde edilir. $h(\beta, B_1) = -\frac{\varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N}{k(s)} \left(\frac{1}{K(s)} \right)'$ ifadesi denklemde yerine yazılırsa,

$$-\varepsilon_t\varepsilon_N Kh(\beta,T)+\varepsilon_n k\left(-\frac{\varepsilon_n\varepsilon_T\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)=-\varepsilon_t\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}$$

$$-\varepsilon_t\varepsilon_N Kh(\beta,T)-\varepsilon_T\varepsilon_N\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}=-\varepsilon_t\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}$$

$$-\varepsilon_t\varepsilon_N Kh(\beta,T)=0$$

elde edilir. $K\neq 0$ olduğundan $h(\beta,T)=0$ dır. O halde β bir normal bir eğridir.

(ii) şıkkının varlığını kabul edelim:

$$h(\beta,B_2)=-\frac{\varepsilon_T\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\right]$$

denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri uygulanırsa,

$$h(T,B_2)+h(\beta,-\varepsilon_b(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)B_1)=\left[-\frac{\varepsilon_T\varepsilon_N}{r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\right]\right]^{'}$$

$$-\varepsilon_b(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)h(\beta,B_1)=\left[-\frac{\varepsilon_T\varepsilon_N}{r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\right]\right]^{'}$$

elde edilir. Denklem düzenlenir ve $h(\beta,B_1)=-\frac{\varepsilon_n\varepsilon_T\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$-\varepsilon_b(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)\left(\frac{-\varepsilon_n\varepsilon_T\varepsilon_N}{k(s)}\right)\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}=\left[-\frac{\varepsilon_T\varepsilon_N}{r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\right]\right]^{'}$$

elde edilir ve denklem tekrar düzenlenirse,

$$-\frac{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}=\left[\frac{\varepsilon_n\varepsilon_b}{r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\right]\right]^{'}$$

elde edilir. O halde β bir normal eğridir.

Teorem 4.4. β tamamıyla $\mathbb{Q}_v$ de yatan, bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik eğri olsun. β eğrisinin bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşul, β eğrisinin $\mathbb{Q}_v$ de bir hiperkuadratikte yatması gerekir.

İspat: β yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olsun. Teorem 4.1.2 ye göre,

$$-\frac{(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left[\frac{\varepsilon_n\varepsilon_b}{r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\right]'$$

eşitliği vardır. Eşitliğin her iki tarafı $2\dfrac{\varepsilon_n\varepsilon_T}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\dfrac{k(s)}{K(s)}+\left(\dfrac{1}{k(s)}\left(\dfrac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]$ ile çarpılırsa,

$$2\frac{\varepsilon_N}{K}\left(\frac{1}{K}\right)'+2\frac{\varepsilon_n\varepsilon_T}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'$$

$$+2\frac{\varepsilon_b\varepsilon_T}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\left(\frac{1}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\right)'=0$$

elde edilir ve elde edilen denklem,

$$\varepsilon_N\left(\frac{1}{K}\right)^2+\varepsilon_n\varepsilon_t\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)^2+\left(\left[\frac{1}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right]\right)^2=r,\ r\in\mathbb{R} \qquad (4.8)$$

denkleminin diferansiyellenmiş halidir. β kuaterniyonik normal eğri olduğundan dolayı,

$$\beta-m=-\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}N-\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B_1-\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]B_2$$

yazılabilir ve,

$$h(\beta-m,\beta-m)=\left(\frac{1}{K}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)^2+\left(\left[\frac{1}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k}{K}+\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'\right)'\right]\right]\right)^2$$

bulunur. (4.8) ifadesine göre,

$$h(\beta-m,\ \beta-m)=r$$

elde edilir. Sonuç olarak β $\mathbb{Q}_v$ de bir hiperkürede yatar. Tersine, β, $\mathbb{Q}_v$ de bir hiperkürede yatsın. O halde $m\in\mathbb{Q}_v$ sabit vektör iken,

$$h(\beta-m,\ \beta-m)=r,\ \ r\in\mathbb{R} \tag{4.9}$$

dır. (4.9) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$h(\beta-m,\ T)=0$$

elde edilir. Dolayısıyla, β kuaterniyonik eğrisi bir normal eğridir.

Q_v de keyfi bir β eğrisinin eğrilik fonksiyonları sabit ise bu eğri $W-$eğrisi olarak tanımlanmıştı. Aşağıdaki teorem yarı-reel kuaterniyonik normal eğriler bakımından Q_v de yarı-reel kuaterniyonik $W-$eğrisinin karakterizasyonlarını verecektir.

Teorem 4.5. Her birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik tamamıyla Q_v de yatan bir $W-$ eğrisi yarı-reel kuaterniyonik normal eğriye eşittir.

İspat: β kuaterniyonik bir $W-$eğri olsun. Dolayısıyla, $W-$eğri tanımından , $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}-\{0\}$ iken $K(s)=C_1,\ k(s)=C_2,\ (r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)(s)=C_3$ eğrilik fonksiyonları için,

$$m(s)=\beta(s)+\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K(s)}N+\frac{\varepsilon_N}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'B_1+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]B_2$$

olmak üzere ve eğriliklerin sabit olduğu göz önüne alınıp, s ye göre türev alınır, Frenet formülleri uygulanırsa,

$$m'(s)=T+\frac{\varepsilon_t\varepsilon_N}{K}(-\varepsilon_t\varepsilon_N KT+\varepsilon_n kB_1)+\varepsilon_N\frac{1}{k}\left(\frac{1}{K}\right)'(-\varepsilon_t kN+\varepsilon_n(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K))B_2$$
$$+\frac{\varepsilon_b\varepsilon_N}{(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k}{K}\right](-\varepsilon_b)(r-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K)B_1$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$m'(s)=0$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 4.1.2 ye göre β bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğridir.

Önerme 4.1. Bir birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik tamamıyla Q_v de yatan β eğrisinin yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşul diferansiyellenebilir bir $f(s)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}&f(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))=\varepsilon_t\varepsilon_N\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)',\\&f'(s)=-\varepsilon_n\varepsilon_b\frac{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\end{aligned}\tag{4.8}$$

olmasıdır.

Önerme 4.1.1 in yanı sıra aşağıdaki teorem, Q_v de yarı-reel kuaterniyonik eğrinin yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşulları verecektir.

Teorem 4.6. β, spacelike asli normali ile spacelike yarı-reel uzaysal kuaterniyonik eğrilerden oluşan Frenet formüllerine sahip bir birim hızlı Q_v de yatan bir yarı-reel kuaterniyonik eğri olsun. β eğrisinin yarı-reel kuaterniyonik normal eğri olması için gerek ve yeter koşul, $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ sabitleri için;

$$\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' = \left(a_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \cosh\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right)\cosh\theta(\mathrm{s}) - \left(b_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \sinh\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right)\sinh\theta(\mathrm{s}) \quad (4.9)$$

olmasıdır. Burada,

$$\theta(s) = \int_0^s (r(s) - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K(s))ds$$

dır.

İspat: β bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğrisi Önerme 4.1.1.ye göre $f(s)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon için (4.8) bağıntısını sağlar. Ayrıca β, spacelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğri olduğundan $\varepsilon_b = -1$ dır.

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_0^s (r(s) - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K(s))ds \\
a(s) &= -\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' \cosh\theta(\mathrm{s}) + f(s)\sinh\theta(\mathrm{s}) - \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \cosh\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} \qquad (4.10) \\
b(s) &= -\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)' \sinh\theta(\mathrm{s}) + f(s)\cosh\theta(\mathrm{s}) - \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \sinh\theta(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}
\end{aligned}$$

ile tanımlı θ, a, b diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. (4.8) denklemi kullanılarak,

$$\theta'(s) = (r(s) - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N K(s))$$

elde edilir ve

$$a'(s)=-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\cosh\theta(s)-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)\sinh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$+\varepsilon_n\frac{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\sinh\theta(s)$$
$$+\frac{1}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\cosh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$-\varepsilon_t\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)$$

elde edilir.

$$b'(s)=-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\sinh\theta(s)-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)\cosh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$-\varepsilon_n\frac{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\cosh\theta(s)$$
$$-\frac{1}{r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}\left[\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)'\right]\sinh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$-\varepsilon_t\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)$$

elde edilir. $\varepsilon_t=1,\ \varepsilon_n=1,\ \varepsilon_b=-1$ olduğu göz önüne alınırsa, $a'(s)=0$ ve $b'(s)=0$ elde edilir. O halde $a(s)=a_0,\ b(s)=b_0$ ve $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ dir. (4.10) denkleminin ikinci ve üçüncü denklemleri sırasıyla $\cosh\theta(s)$ ve $-\sinh\theta(s)$ ile çarpılırsa,

$$a_0.\cosh\theta(s)=-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)\cos^2 h\theta(s)+f(s).\sinh\theta(s).\cosh\theta(s)-\left(\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)$$
$$-b_0.\sinh\theta(s)=\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'\right)\sin^2 h\theta(s)-f(s).\cosh\theta(s).\sinh\theta(s)+\left(\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)$$

elde edilir. $\cos^2 h\theta(s)-\sin^2 h\theta(s)=1$ olduğu göz önüne alınarak ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$a_0\cosh\theta(s)-\mathrm{b}_0\sinh\theta(s)=-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}(\cos^2 h\theta(s)-\sin^2 h\theta(s))+\left(-\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)$$
$$\left(+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)$$

bulunur. Denklem düzenlenirse,

$$-\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}=\left(a_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)-\left(\mathrm{b}_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)$$

elde edilir. Tersine, $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ sabitleri için (4.9) ifadesini kabul edelim. (4.9) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}=\left(\varepsilon_t\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)\right)\cosh\theta(s)+\left(a_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$-\left(\varepsilon_t\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)\right)\sinh\theta(s)-\left(\mathrm{b}_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$-\varepsilon_t\frac{k(s)}{K(s)}-\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}=(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))\begin{bmatrix}\left(a_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)\\-\left(\mathrm{b}_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)\end{bmatrix}\quad(4.11)$$

bulunur.

$$f(s)(r(s)-\varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))=\varepsilon_t\varepsilon_n\frac{k(s)}{K(s)}+\left(\frac{1}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)^{'}\right)^{'}\quad(4.12)$$

ile tanımlı idi. O halde (4.11) ve (4.12) denklemleri kullanılarak,

$$f(s)=-\left(a_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\cosh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)+\left(\mathrm{b}_0+\varepsilon_t\int\frac{k(s)}{K(s)}\sinh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)\quad(4.13)$$

elde edilir. (4.13) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$f'(s) = -\left(\varepsilon_t \frac{k(s)}{K(s)} \cosh\theta(s)\sinh\theta(s)\right) - \left(a_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \cosh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s)(r(s) - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$
$$\left(\varepsilon_t \frac{k(s)}{K(s)} \sinh\theta(s)\cosh\theta(s)\right) + \left(\mathrm{b}_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \sinh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s)(r(s) - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))$$

Olur ve denklem düzenlenirse,

$$f'(s) = (r(s) - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s))\begin{bmatrix} -\left(a_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \cosh\theta(s)ds\right)\cosh\theta(s) \\ +\left(\mathrm{b}_0 + \varepsilon_t \int \frac{k(s)}{K(s)} \sinh\theta(s)ds\right)\sinh\theta(s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca (4.9) bağıntısı kullanılırsa,

$$f'(s) = -\varepsilon_n\varepsilon_b \frac{r(s) - \varepsilon_t\varepsilon_T\varepsilon_N K(s)}{k(s)}\left(\frac{1}{K(s)}\right)'$$

elde edilir. Bu durumda Önerme 4.1.1 e göre β bir yarı-reel kuaterniyonik normal eğridir.

KAYNAKLAR

Bharathi, K and Nagaraj, M, “Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae”, ***Indian J. Pure Appl. Math,*** 16: 741-756(1985).

Chen, B. Y, “When does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in its Rectifying Plane?”, ***Amer. Math. Mounthly,*** 110: 147-152(2003).

Çöken, A. C and Tuna, “On the Quaternionic Inclined Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4”, ***Appl. Math. Comput,*** 155: 373-389(2004).

Gök, I. Okuyucu, O. Z. Kahraman, F and Hacısalihoğlu, H. H “On the Quaternionic B_2 Slant Helices in the Euclidean Space E^4”, ***Adv. Appl. Clifford Algebras,*** 21: 707-719(2011).

Hacısalihoğlu, H. H. “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, ***Gazi Üniversitesi Yayınları,*** 1983.

Hacısalihoğlu, H. H. “Diferansiyel Geometri”, ***Ankara Üniversitesi,*** 2000.

Hamilton, W. R. “Elements of Quaternions”, ***Chelsea***, New York, 1899.

İlarslan, K. “Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E_1^3”, ***Turkish J Math,*** 29: 53-63 (2005).

İlarslan, K. and Nesovic, E. “Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3 ” ***Indian J. pure appl. Math***. 35(7):881-888 (2004).

İlarslan, K. and Nesovic, E. “Spacelike and Timelike Normal Curves in Minkowski Space-Time”, ***Publ. Inst. Math. Belgrade,*** 85(99): 111-118 (2009).

Kahraman, F. Gök, İ. and Hacısalihoğlu, H. H. “On the Quaternionic B_2 Slant Helices in the Semi-Euclidean Space E_2^4”, ***Appl. Math. Comput,*** 218: 6391-6400(2012).

Karakuş, Ö. S, and Gündoğan, H. “Dual Split Quaternions and Screw Motion in 3-Dimensional Lorentzian Space”, ***Adv. Appl. Clifford Algebras,*** 21(1): 193-202 (2011).

O.Neill, B. “Semi-Riemannian geometry with applications to relativity”, ***Academic Press,*** New York, 1983.

Okuyucu, O. Z, “Characterizations of the Quaternionic Mannheim Curves in Euclidean space”, ***International J. Math. Combin,*** 2: 44-53 (2013).

Önder, M. and Uğurlu, H.H. “Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces”, ***Ain Shams Engineering Journal***, 4: 507–513 (2013).

Özdemir, M. And Ergin, A.A. “Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space”, ***Journal of Geometry and Physics,*** 56: 322–336 (2006).

Petrovic-Torgasev, M. and Sucurovic, E. “W-curves in Minkowski space-time”, **Novi *Sad J. Math,*** 32: 55-65 (2002).

Ratcliffe, J. “Foundations of Hyperbolic Manifolds”, ***Springer-Verlag,*** New York 1994.

Sabuncuoğlu, A. “Diferansiyel Geometri”, ***Nobel Yayınları,*** Ankara, 2004.

Tuna, A. “Serret Frenet Formulae for Quaternionic Curves in Semi Euclidean Space”, Master Thesis, ***Süleyman Demirel University Graduate School of Natural and Applied Science Department of Mathematics,*** Isparta, Turkey, 2002.

Walrave, J. “Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral thesis” ***Leuven, K.U. Faculty of Science,*** Leuven (1995).

Ward, J. P. “Quaternions and Cayley Numbers”, ***Kluwer Academic Publishers,*** Boston/London, 1997.

Yıldız, Ö.G. and Karakuş, Ö. S, “On the Quaternionic Normal Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4”, ***International J.Math. Combin,*** 3: 68-76(2016).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Bahar DOĞAN

Doğum Yeri ve Tarihi : BİLECİK 11.12.1993

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Sakarya Üniversitesi-MATEMATİK-2015

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İş Deneyimi

Stajlar : Serdivan Anadolu Lisesi / SAKARYA

Çalıştığı Kurumlar : Mor Mavi Eğitim Kurumları / BİLECİK

:Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi-Araştırma Görevlisi

İletişim

Adres : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü

E-Posta Adresi : bahar.dogan@bilecik.edu.tr

Akademik Çalışmaları

– Some Characterizations of Quaternionic Normal Curves
15th International Geometry Symposium(03.07.2017-06.07.2017)
YILDIZ ÖNDER GÖKMEN, DOĞAN BAHAR, ÖZKALDI KARAKUŞ SIDDIKA

Yabancı Dil Bilgisi: Okuma: İyi, Yazma: Orta, Anlama: İyi

Tarih:2018