

ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

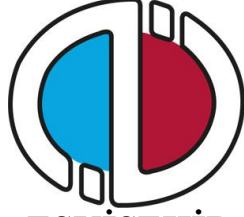
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN ELASTİK
OLMAYAN AKIŞI ÜZERİNE

Ahu Funda YILDIZ
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

BİLECİK, 2019
Ref. No: 10285126



ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

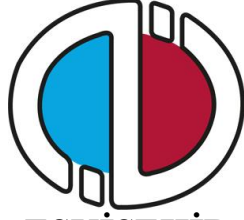
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

**YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN ELASTİK
OLMAYAN AKIŞI ÜZERİNE**

Ahu Funda YILDIZ
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

BİLECİK, 2019



**ESKİŞEHİR
ANADOLU UNIVERSITY**



**BİLECİK
SEYH EDEBALI UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

**ON THE INEXTENSIBLE FLOW OF SEMI-REAL
QUATERNIONIC CURVES**

**Ahu Funda YILDIZ
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Osman Zeki OKUYUCU**

BİLECİK, 2019



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 12/07/2019 tarih ve 37/09 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 05/08/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ahu Funda YILDIZ'ın "Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğrilerin Elastik Olmayan Akışı Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

JÜRİ BAŞKANI : Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Şirin AKTAY

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/...../..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aőamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'ya minnet ve őükranlarımı sunarım. Yüksek lisans çalıőmalarım boyunca yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Bilecik şeyh Edebalı Üniversitesi öğretim elemanlarına teőekkürü bir borç bilirim.

Çalıőmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme ve sevgili eőim Dr. Öğr. Üyesi Önder Gökmen YILDIZ'a en derin duygularla teşekkür ederim.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

.../.../2019

Ahu Funda YILDIZ

KUATERNİYONİK EĞRİLER ÜZERİNE

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde Öklid uzayı ve yarı-Öklid uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca, reel kuaterniyonlar kümesi ve yarı-reel kuaterniyonlar kümesinde temel kavramlar tanıtılmış ve eğri tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında eğrinin elastik olmayan akışı incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde reel kuaterniyonik eğri için akış tanımlanmış ve elastik olmama koşulu incelenmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde yarı-reel kuaterniyonik eğri için akış tanımlanmış ve elastik olmama koşulu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon; Elastik Olmayan Eğri Akışı; Evolüsyon; Reel Kuaterniyonik Eğri; Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğri.

ON THE QUATERNIONIC CURVES

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts in the Euclidean and semi Euclidean space are introduced. Moreover, reel quaternion set and semi-reel quaternion set are introduced and defination of quaternionic curve is given.

In the third chapter, inextensibe flow of cırve in 3-dimensional Euclidean space and 3-dimensional Minkowski space is examined. Moreover, flow of real quaternionic curve is defined and conditions for an inextensibility is examined.

The fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, flow of semi-real quaternionic curve is defined. The necessary and sufficient conditions for inextensible flow are expressed. Finally evolution equations of curvature are given.

Key Words: Quaternion; Inextensible Curve Flow; Evolution; Real Quaternionic Curve; Semi Real Quaternionic Curve.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
TEŞEKKÜR
BEYANNAME
ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
İÇİNDEKİLER	III
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	IV
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler	3
2.2. Yarı-Öklid Uzayı ve Eğriler	8
2.3. Reel Kuaterniyonlar.	11
2.4. Kuaterniyonik Eğriler	17
2.5. Yarı-Reel Kuaterniyonlar	18
2.6. Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğriler	21
3. ELASTİK OLMAYAN EĞRİ AKIŞI	23
3.1. Öklid Uzayında Elastik Olmayan Eğri Akışı	23
3.2. Minkowski Uzayında Elastik Olmayan Eğri Akışı	25
3.3. Elastik Olmayan Kuaterniyonik Eğri Akışı.....	27
4. ELASTİK OLMAYAN YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI.....	30
KAYNAKLAR	40
ÖZ GEÇMİŞ.....

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

- \mathbb{E}^n : n -Boyutlu Öklid Uzayı
 $T_{\mathbb{E}^n}(P)$: \mathbb{E}^n in P Noktasındaki Tanjant Uzayı
 $\chi(\mathbb{E}^n)$: \mathbb{E}^n deki Vektör Alanlarının Kümesi
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: İç Çarpım Fonksiyonu
 $\| \cdot \|$: Norm Fonksiyonu
 \wedge : Vektörel Çarpım
 d : Metrik
 h : Parametre Değişim Fonksiyonu
 k_i : i -yinci Eğrilik Fonksiyonu
 V_i : i -yinci Frenet Vektörü
 k_i : i -yinci Eğrilik Fonksiyonu
 κ : \mathbb{E}^3 de bir eğrinin eğriliği (birinci eğriliği)
 τ : \mathbb{E}^3 de bir eğrinin torsiyonu (burulması), (ikinci eğriliği)
 T : Teğet Vektör Alanı
 N : Normal Vektör Alanı
 B : Binormal Vektör Alanı
 \mathbb{Q} : Reel Kuaterniyonların Kümesi
 \mathbb{Q}_v : Yarı-Reel Kuaterniyonların Kümesi

1. GİRİŞ

Bir eğrinin veya yüzeyin evolüsyonu (zamana göre değişimi) eğrinin veya yüzeyin akışına denk gelmektedir. O halde bir eğrideki değişim eğrinin akışı yardımıyla incelenebilir. Eğriler teorisinin fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte birçok uygulaması olmakla birlikte bunların çoğunda dış etkenler göz ardı edilmiştir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda ise alışla gelmişin dışında zaman parametresi yani dış etkenler aktif rol oynamaktadır. Bu da eğrilerin zamana göre değişimini yani eğri akışını önemli kılmaktadır. Eğri akışının doğal olarak fizikte ve mühendislikte uygulaması oldukça fazladır. Elastik olmayan eğri hareketleri görüntü işleme, animasyonların yapımında ve yapısal mekanikte oldukça fazla kullanılmaktadır. Bütün bu uygulamalar eğrilerin zamana göre değişimlerini (evolüsyon) içerir.

Eğrilerin eğrilik vektör alanlarını, yani ivme vektörleri boyunca zamana göre değişimlerini, çalışmak için Gage ve Hamilton (Gage, 1984; Gage ve Hamilton 1986)'te yeni metotlar bulmuşlar ve Grayson (Grayson, 1987) ise ısı denklemini kullanarak kapalı düzlemsel eğrilerin bir çembere dönüşümünü kanıtlamıştır. Ayrıca, Gage (Gage, 1986)'da alanı koruyan düzlemsel eğri değişimini (evolüsyon), Kwon (Kwon ve Park, 1999; Kwon vd, 2005)'de, 3-boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin elastik olmayan hareketlerini, Tandoğan (Tandoğan, 2009)'da 3-boyutlu Minkowski uzayında eğrilerin elastik olmayan hareketlerini incelemiştir. Körpınar ve Baş 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin elastik olmayan hareketlerini incelemiştir (Körpınar ve Baş, 2016).

Kuaterniyonlar 1843 yılında Willian Rowan Hamilton tarafından keşfedilmiştir. Hamilton kompleks sayılardan daha kapsamlı bir sayı sistemi ararken 4-boyutlu sayı sistemi olan kuaterniyonları bulmuştur. A. Carley, K. Clifford ve J.J. Sylvester gibi matematikçiler kuaterniyonlar cebirinin gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. R. Kaya ve Ş. Koçak kuaterniyonlar cebirine katkıda bulunan Türk matematikçilerdir. Bharathi ve Nagaraj 3-boyutlu ve 4-boyutlu uzaylarda kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerini vermişlerdir. Daha sonra Çöken ve Tuna yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerini vermişlerdir.

Bu tez çalışmasında 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında elastik olmayan yarı-reel kuaterniyonik eğri hareketleri ele alınmıştır. Bir eğri akışının elastik olup olmamasıyla

ilgili kořullar incelenmiştir. Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin eğrilikleri ile ilgili evolüsyon denklemleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda temel oluşturan esaslara yer verilecektir.

2.1. Öklid Uzayı ve Eğriler

Bu kısımda n -boyutlu Öklid uzayı ve bu uzayda eğriler ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır. Sonrasında, özel olarak $n=3$ alındığında elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir küme A ve \mathfrak{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı V olmak üzere; $\forall P, Q, R \in A$ için

$$\begin{aligned} f: A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

dönüşümü

$$\text{i. } \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, R) = f(P, Q) + f(Q, R),$$

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{v} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{v}$ olacak şekilde bir tek Q noktası vardır, afin aksiyomlarını sağlıyorsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay A olsun. $P \in A$, $\vec{v} \in V$ için (P, \vec{v}) ikilisine A afin uzayında bir tanjant vektör denir ve \vec{v}_p ile gösterilir. $P \in A$ noktasında ki tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ bir reel vektör uzayıdır, bu uzaya tanjant uzayı denir (Yüce, 2017).

Tanım 2.1.3. $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$

olmak üzere

$$\begin{aligned} X: \mathbb{E}^n &\rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) \\ P &\rightarrow X_p \end{aligned}$$

dönüşümüne \mathbb{E}^n de bir vektör alanı denir ve \mathbb{E}^n deki vektör alanlarının kümesi $\chi(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir. $\chi(\mathbb{E}^n)$ vektör alanlarının kümesi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzaya vektör alanlarının uzayı denir (Yüce, 2017).

Tanım 2.1.4. V kümesi, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall u, v \in V$ için V de bir

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

iç çarpım (skaler çarpım) fonksiyonu tanımlanabilirse, bu fonksiyon ile beraber V vektör uzayına bir iç çarpım uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5. V , n -boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir A afin uzayına. Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. \mathbb{E}^n uzayında $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona Öklid iç çarpımı denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.7. $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm, $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$ sayısına da \vec{x} vektörünün normudur denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.8. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^n$ için

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

eşitliği ile tanımlı $d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, \mathbb{E}^n uzayında bir metriktir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.1.9. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^3$ için

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

eşitliği ile tanımlı $\wedge: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ fonksiyonuna vektörel çarpım denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.10. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $\alpha(t) \subseteq \mathbb{E}^n$ kümesine \mathbb{E}^n de bir eğri denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.11. α , \mathbb{E}^n de bir eğri olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet (hız) vektörü denir (Shifrin, 2011).

Tanım 2.1.12. $I \subseteq \mathbb{R}$ de tanımlı bir eğri α ve J açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon $h: J \rightarrow I$ ise

$$\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow I$$

bileşke fonksiyonu bir diferansiyellenebilir eğridir ve β ya h ile α nın yeniden parametrisasyonu denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.13. \mathbb{E}^n de bir s parametresiyle verilmiş bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.14. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan bir eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoglu, 2000).

Teorem 2.1.1. \mathbb{E}^n de regüler her eğri, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilirdir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.15. \mathbb{E}^n , n -boyutlu Öklid uzayında, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir diferansiyellenebilir eğri olmak üzere, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olsun. ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklısı ve $\forall t \in I$ için $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ye ise α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir V_i , $1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.16. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir birim hızlı eğri olmak üzere, $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i : I &\rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu, 2000).

Teorem 2.1.2. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir birim hızlı eğri olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s), \\ &\vdots \\ V_i'(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r, \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Özel Hal: $n = 3$ özel halinde (2.1) deki eşitliklerden

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada, 1-inci eğrilik olan $k_1(s) = \kappa(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-nci eğrilik olan $k_2(s) = \tau(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla da bilinir (Hacısalıhoğlu, 2000).

3-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{E}^3 de verilen bir eğrinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları eğrinin birim hızlı olması veya olmaması durumuna göre aşağıdaki teoremler yardımıyla hesaplanabilir.

Teorem 2.1.3. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları için;

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s), \\ N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} \kappa(s) = \|\alpha''(s)\| \\ \tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha''(s)\|^2} \end{cases} \tag{2.2}$$

dir (Yüce, 2017).

Teorem 2.1.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir regüler eğri olsun. α eğrisinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları için;

$$\begin{cases} T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \\ N(s) = B(s) \wedge T(s) \\ B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \\ \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

dir (Yüce, 2017).

2.2. Yarı-Öklid Uzayı ve Eğriler

Tanım 2.2.1. V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form g olsun. g simetrik bi-lineer formu eğer,

- i. $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise pozitif tanımlı,
- ii. $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise negatif tanımlı,
- iii. $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise yarı-pozitif tanımlı,
- iv. $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise yarı-negatif tanımlı,
- v. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ olduğunda $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise non-dejenere değilse dejeneredir,

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. V , n -boyutlu bir vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bi-lineer form olsun. W da V nin bir alt uzayı ve g nin W ya kısıtlanmış hali $g|_W$ olmak üzere,

$$g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bi-lineer formun indeksi denir. g nin indeksi $0 \leq p \leq n$ olmak üzere p ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. \mathbb{R}^n n-boyutlu standart reel vektör uzayı ve $0 \leq p \leq n$ olmak üzere g non-dejenere, simetrik bi-lineer formu

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = -\sum_{i=1}^p u_i v_i + \sum_{i=p+1}^n u_i v_i$$

biçiminde tanımlıysa, \mathbb{R}^n ye yarı-Öklid uzayı denir ve \mathbb{R}_p^n ile gösterilir. Eğer $p=1$ ve $n \geq 2$ ise \mathbb{R}_1^n uzayı n -boyutlu Minkowski uzayı adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $v \in \mathbb{R}_p^n$ olmak üzere

- i. $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise \vec{v} vektörüne spacelike vektör,
- ii. $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise \vec{v} vektörüne timelike vektör,
- iii. $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ ise \vec{v} vektörüne null vektör,

denir (O'Neill, 1983)

Tanım 2.2.5. $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}_p^n$ olmak üzere $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ise \vec{u} ile \vec{v} vektörlerine ortogonal vektörler denir ve $\vec{u} \perp \vec{v}$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6. $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}_p^n$ olmak üzere

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|g(\vec{v}, \vec{v})|}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|: \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir normdur ve $\|\vec{v}\|$ sayısına \vec{v} vektörünün normu denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.1. \mathbb{R}_p^n yarı-Öklid uzayı her zaman ortonormal bir baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, \mathbb{R}_p^n uzayının ortonormal bir bazı olsun. $g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \varepsilon_{i-1}$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}_p^n$ vektörü;

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1} g(\vec{v}, \vec{e}_i) \vec{e}_i$$

şeklinde tek türlü belirlidir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8. \mathbb{R}_p^n yarı-Öklid uzayı ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_p^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ olmak üzere;

- i. $g(V_1, V_1) = \varepsilon_0 > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- ii. $g(V_1, V_1) = \varepsilon_0 < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- iii. $g(V_1, V_1) = \varepsilon_0 = 0$ ise α eğrisine lightlike eğri

denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.2. \mathbb{R}_p^n yarı-Öklid uzay ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_p^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve $g(V_i, V_i) = \varepsilon_{i-1}$ olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{aligned} V_1' &= k_1 V_2, \\ V_i' &= -\varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-1} k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \quad 1 < i < n, \\ V_n' &= -\varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} k_{n-1} V_{n-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

biçimindedir. Burada k_i , i -yinci eğrilik fonksiyonudur (İlarıslan, 2002).

Özel Hal: $n=3$, $p=1$ özel halinde; eğer eğrimiz timelike normalli spacelike eğri ise (2.4) denkleminde

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

eğer eğrimiz spacelike normalli timelike eğri ise (2.4) denkleminde

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

eğer eğrimiz spacelike binormalli timelike eğri ise (2.4) denkleminde

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, 1-inci eğrilik olan $k_1(s) = \kappa(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s) = \tau(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir (İlarslan, 2002).

2.3. Reel Kuaterniyonlar

Bir reel kuaterniyon $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime sıralı dört reel sayının eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada $+1$ bir reel sayı olmak üzere diğer üç birim için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

- i. $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = -1$,
- ii. $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$,
- iii. $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$.

Böylece bir reel kuaterniyon bileşenleri $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ şeklinde ifade edilebilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Bu durumda S_q skaler kısmı, \vec{V}_q vektörel kısmı göstermek üzere bir reel q kuaterniyonu $q = S_q + \vec{V}_q$ biçiminde yazılabilir. Reel kuaterniyonların kümesi genel olarak \mathbb{Q} ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.1. $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}$, $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}$ herhangi iki reel kuaterniyonunun toplamı $S_{q_1 \oplus q_2} = S_{q_1} + S_{q_2}$ ve $\vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \oplus: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.2. $q = S_q + \vec{V}_q$ herhangi bir reel kuaterniyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir skaler ile bir reel kuaterniyonun çarpımı

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklindedir (Hacısalihoglu, 1983).

Yukarıda tanımlanan skaler ile çarpma (dış işlem) işlemi $\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q, q_1, q_2$ reel kuaterniyonları için

- i. $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2$,
- ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$,
- iii. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$,
- iv. $1 \odot q = q$

dir. Böylece, $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.3. $d_1, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ için $q_1 = d_1 + a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3$ ve $d_2, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ için $q_2 = d_2 + a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3$ gibi iki reel kuaterniyonun çarpımı

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ &\quad + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{e}_1 \\ &\quad + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - a_1 c_2) \vec{e}_2 \\ &\quad + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer $q_1 = S_{q_1} + \overrightarrow{V_{q_1}}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \overrightarrow{V_{q_2}}$ şeklinde ifade edilir ise

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle \overrightarrow{V_{q_1}}, \overrightarrow{V_{q_2}} \rangle + S_{q_1} \overrightarrow{V_{q_2}} + S_{q_2} \overrightarrow{V_{q_1}} + \overrightarrow{V_{q_1}} \wedge \overrightarrow{V_{q_2}}$$

dir. Ayrıca kuaterniyon çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- i. İki kuaterniyonun çarpımı yine bir kuaterniyondur.
- ii. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- iii. Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Böylece

$$\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$$

sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.4. $q_1 = S_{q_1} + \overrightarrow{V_{q_1}}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \overrightarrow{V_{q_2}}$ herhangi iki reel kuaterniyon olsun. İki reel kuaterniyon için eşitlik bağıntısı

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \overrightarrow{V_{q_1}} = \overrightarrow{V_{q_2}}$$

biçimindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.5. $q_1 = S_{q_1} + \overrightarrow{V_{q_1}}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \overrightarrow{V_{q_2}}$ herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= S_{q_1 - q_2} - \overrightarrow{V_{q_1 - q_2}} \\ &= (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\overrightarrow{V_{q_1}} - \overrightarrow{V_{q_2}}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.6. $q = S_q + \vec{V}_q$ herhangi bir reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ q &\rightarrow K_q = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} \gamma(q_1 + q_2 + \dots + q_n) &= \gamma q_1 + \gamma q_2 + \dots + \gamma q_n, \\ \gamma(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) &= \gamma q_n + \gamma q_{n-1} + \dots + \gamma q_1 \end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.7. $q = S_q + \vec{V}_q$ herhangi bir reel kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} N: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ q &\rightarrow N(q) = N_q = q \times K_q = K_q \times q \end{aligned}$$

veya $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ ise

$$N_q = q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

ile tanımlanır.

$$\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q} \text{ için}$$

$$N(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = N_{q_1} N_{q_2} \dots N_{q_n}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.8. Sıfırdan farklı herhangi q kuaterniyonunun inversi

$$\begin{aligned} (\)^{-1}: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{\gamma_q}{N_q} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ için

$$(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times q_{n-1}^{-1} \times \dots \times q_1^{-1}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.9. q sıfırdan farklı bir reel kuaterniyon olmak üzere p reel kuaterniyonunu q kuaterniyonu ile bölmek demek p yi q^{-1} ile çarpmak demektir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür ve dolayısıyla p yi q ile iki türlü bölmek gerekir. r_1 kuaterniyonu p nin q ile sağdan, r_2 kuaterniyonu p nin q ile soldan bölümü olmak üzere

$$\begin{aligned} r_1 &= p \times q^{-1}, \\ r_2 &= q^{-1} \times p. \end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Genel olarak r_1 ve r_2 farklı olduğundan $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılmaz.

Tanım 2.3.10. Normu bir olan bir reel kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanmış

$$q_0 = \frac{q}{N_q} = \frac{d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilebilir ve q_0 birim kuaterniyonu $\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$,

$$\sin \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \text{ olmak üzere;}$$

$$q_0 = \cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta$$

şeklinde yazılabilir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$\vec{S}_0 = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.11. Herhangi iki reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere

$$h: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \gamma q_2 + q_2 \times \gamma q_1)$$

reel değerli, simetrik, bilinear h fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

Tanım 2.3.12. Herhangi iki reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere $h(q_1, q_2) = 0$ ise q_1 ve q_2 kuaterniyonlarına h -ortogonaldır denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.13. Herhangi bir q reel kuaterniyonu için

$$q + \gamma q = 0$$

oluyorsa q reel kuaterniyonuna uzaysal kuaterniyon denir. Uzaysal kuaterniyonların kümesi \mathbb{R}^3 uzayına izomorftur. Dolayısıyla, herhangi iki q_1 ve q_2 uzaysal kuaterniyonunun kuaterniyon çarpımı

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2$$

şeklinde olup, bu çarpım uzaysal kuaterniyonların birbirine dik olmaları durumunda vektörel çarpımlarına, birbirine paralel olmaları durumunda ise iç çarpımlarının ters işaretlisine eşittir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.4. Kuaterniyonik Eğriler

Tanım 2.4.1. \mathbb{E}^3 , üç boyutlu Öklid uzayı, uzaysal kuaterniyonların uzayı $\{q \in \mathbb{Q} : q + \gamma q = 0\}$ ile tanımlansın. $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) \vec{e}_i \end{aligned}$$

ile tanımlanan diferansiyellenebilir α eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharatti ve Nagaraj, 1987).

Teorem 2.4.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $\{k, r\}$ ve Frenet çatısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & r(s) \\ 0 & -r(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Bharatti ve Nagaraj, 1987).

Tanım 2.4.2. \mathbb{E}^4 , dört boyutlu Öklid uzayı, birim reel kuaterniyonların uzayı ile tanımlansın. $I = [0,1]$ reel sayıların birim alt aralığı olmak üzere

$$\begin{aligned} \beta: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ s &\rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) \vec{e}_i \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir β eğrisine reel kuaterniyonik eğri denir (Bharatti ve Nagaraj, 1987).

Teorem 2.4.2. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ birim hızlı reel kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $\{K, k, r - K\}$ ve Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere Frenet Formülleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Bharatti ve Nagaraj, 1987).

2.5. Yarı-Reel Kuaterniyonlar

Bir yarı-reel kuaterniyon $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime sıralı dört reel sayının eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada $+1$ bir reel sayı olmak üzere diğer üç birim için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

- i. $\vec{e}_i \times_L \vec{e}_i = -\varepsilon_{e_i}$,
- ii. $\vec{e}_i \times_L \vec{e}_j = \varepsilon_{e_i} \varepsilon_{e_j} \vec{e}_k, (\mathbb{R}_1^3)$,
- iii. $\vec{e}_i \times_L \vec{e}_j = -\varepsilon_{e_i} \varepsilon_{e_j} \vec{e}_k, (\mathbb{R}_2^4)$.

Eğer $\varepsilon_{e_i} = 1$ ise e_i spacelike, eğer $\varepsilon_{e_i} = -1$ ise e_i timelikedir. Böylece bir yarı-reel kuaterniyon, bileşenleri $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ şeklinde ifade edilebilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu yarı-reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Bu durumda S_q skaler kısmı, \vec{V}_q vektörel kısmı göstermek üzere bir yarı-reel q kuaterniyonu $q = S_q + \vec{V}_q$ biçiminde yazılabilir. Yarı-reel kuaterniyonların kümesi genel olarak \mathbb{Q}_v ile gösterilir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.1. $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}, q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2} \in \mathbb{Q}_v$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. \mathbb{Q}_v üzerinde sırasıyla, toplama (iç işlem) ve skaler ile çarpma (dış işlem) işlemleri

$$\begin{aligned} \oplus: \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_v &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, $\{\mathbb{Q}_v, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.2. $d_1, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ için $q_1 = d_1 + a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3$ ve $d_2, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ için $q_2 = d_2 + a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3$ gibi iki yarı-reel kuaterniyonun çarpımı

$$\begin{aligned} q_1 \times_L q_2 &= d_1 d_2 - (\varepsilon_{e_1} a_1 a_2 + \varepsilon_{e_2} b_1 b_2 + \varepsilon_{e_3} c_1 c_2) \\ &\quad + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + \varepsilon_{e_2} \varepsilon_{e_3} (b_1 c_2 - c_1 b_2)) \vec{e}_1 \\ &\quad + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + \varepsilon_{e_1} \varepsilon_{e_3} (c_1 a_2 - a_1 c_2)) \vec{e}_2 \\ &\quad + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + \varepsilon_{e_1} \varepsilon_{e_2} (a_1 b_2 - b_1 a_2)) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}$ şeklinde ifade edilir ise

$$q_1 \times_L q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle \vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2} \rangle_L + S_{q_1} \vec{V}_{q_2} + S_{q_2} \vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_1} \wedge_L \vec{V}_{q_2}$$

dir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.3. $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}$ herhangi iki yarı-reel kuaterniyon olsun. İki yarı-reel kuaterniyon için eşitlik bağıntısı

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

biçimindedir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.4. $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}$ herhangi iki yarı-reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= S_{q_1 - q_2} - \vec{V}_{q_1 - q_2} \\ &= (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.5. $q = S_q + \vec{V}_q$ herhangi bir yarı-reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\begin{aligned} \mathbf{K}: \mathbb{Q}_v &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ q &\rightarrow \mathbf{K}(q) = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.6. $q = S_q + \vec{V}_q$ herhangi bir yarı-reel kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} \mathbf{N}: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ q &\rightarrow \mathbf{N}(q) = N_q = |q \times_L \mathbf{K}_q| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır ve \mathbf{K}_q ile gösterilir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.7. Herhangi iki yarı-reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere

$$\begin{aligned} h: \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ (q_1, q_2) &\rightarrow h(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{q_1} \varepsilon_{\mathbf{K}_{q_2}} (q_1 \times_L \mathbf{K}_{q_2}) + \varepsilon_{q_2} \varepsilon_{\mathbf{K}_{q_1}} (q_2 \times_L \mathbf{K}_{q_1}) \right) \end{aligned}$$

reel değerli, simetrik, bilinear h fonksiyonuna yarı-reel kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.8. Herhangi iki yarı-reel kuaterniyon q_1 ve q_2 olmak üzere $h(q_1, q_2) = 0$ ise q_1 ve q_2 yarı-reel kuaterniyonlarına h -ortogonaldır denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.9. Herhangi bir q yarı-reel kuaterniyonu için

$$N_q = 1$$

ise q ya bir yarı-reel birim kuaterniyon denir (Tuna, 2002).

Tanım 2.5.10. Herhangi bir q yarı-reel kuaterniyonu için

$$q + Kq = 0$$

oluyorsa q yarı-reel kuaterniyonuna uzaysal yarı-reel kuaterniyon denir. Uzaysal yarı-reel kuaterniyonların kümesi \mathbb{R}_1^3 uzayına izomorftur. Dolayısıyla, herhangi iki q_1 ve q_2 uzaysal yarı-reel kuaterniyonunun kuaterniyon çarpımı

$$q_1 \times_L q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle_L + q_1 \wedge_L q_2$$

şeklinde olup, bu çarpım uzaysal yarı-reel kuaterniyonların birbirine dik olmaları durumunda vektörel çarpımlarına, birbirine paralel olmaları durumunda ise iç çarpımlarının ters işaretlisine eşittir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.6. Yarı-Reel Kuaterniyonik Eğriler

Tanım 2.6.1. \mathbb{E}_1^3 yarı-Öklid uzayı, uzaysal yarı-reel kuaterniyonların uzayı $\{q \in \mathbb{Q}_v : q + Kq = 0\}$ ile tanımlansın. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) \vec{e}_i \end{aligned}$$

ile tanımlanan diferansiyellenebilir α eğrisine uzaysal yarı-reel kuaterniyonik eğri denir (Tuna, 2002).

Teorem 2.6.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_v$ birim hızlı uzaysal yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $\{k, r\}$ ve Frenet çatısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_n k(s) & 0 \\ -\varepsilon_t k(s) & 0 & \varepsilon_n r(s) \\ 0 & -\varepsilon_b r(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $h(t,t) = \varepsilon_t$, $h(n,n) = \varepsilon_n$ ve $h(b,b) = \varepsilon_b$ dir (Tuna, 2002).

Tanım 2.6.2. \mathbb{E}_2^4 , dört boyutlu yarı-Öklid uzayı, yarı-reel kuaterniyonların uzayı ile tanımlansın. $I = [0,1]$ reel sayıların birim alt aralığı olmak üzere

$$\begin{aligned} \beta: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ s &\rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) \vec{e}_i \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir β eğrisine yarı-reel kuaterniyonik eğri denir (Tuna, 2002).

Teorem 2.6.2. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_v$ birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri $\{\kappa, k, (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\}$ ve Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olmak üzere Frenet Formülleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B_1'(s) \\ B_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_N \kappa & 0 & 0 \\ -\varepsilon_t \varepsilon_N \kappa & 0 & \varepsilon_n k & 0 \\ 0 & -\varepsilon_t k & 0 & \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_b (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada $h(T,T) = \varepsilon_T$, $h(N,N) = \varepsilon_N$, $h(B_1,B_1) = \varepsilon_n \varepsilon_T$, $h(B_2,B_2) = \varepsilon_b \varepsilon_T$ ve $\varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N = 1$ dir (Tuna, 2002).

3. ELASTİK OLMAYAN EĞRİ AKIŞI

3.1 Öklid Uzayında Elastik Olmayan Eğri Akışı

\mathbb{E}^3 , 3–boyutlu Öklid uzayında yay uzunluğu l olan diferansiyellenebilir bir eğri α olsun. t zaman (evolüsyon) parametresi olmak üzere α eğrisinin 1–parametrelili bir ailesi

$$\begin{aligned} \alpha : (0, l) \times [0, w] &\rightarrow E^3 \\ (u, t) &\rightarrow \alpha(u, t) \end{aligned}$$

dir. α eğrisinin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| du$$

eşitliğiyle verilir. $\alpha(u)$ eğrisinin hızı $v = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\|$ ve yay-parametresi s olmak üzere u

ve s parametrelerine göre kısmi türevler arasındaki ilişki

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.1. $\alpha(u, t)$, \mathbb{E}^3 de bir eğri ve α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve f_i ler skaler hız fonksiyonu olmak üzere α eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = f_1 T + f_2 N + f_3 B$$

biçiminde tanımlıdır (Kwon vd., 2005).

$\alpha(u, t)$ eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

olmak üzere eğrinin herhangi bir değişime (sıkışma, esneme vb) sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in (0, l)$$

şartını sağlaması gerekir (Kwon vd., 2005).

Tanım 3.1.2. \mathbb{E}^3 de bir eğri evolüsyonu $\alpha(u, t)$ ve $\alpha(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| = 0$$

ise akışa elastik olmayan akış denir (Kwon vd., 2005).

Teorem 3.1.1. $\alpha(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ elastik değildir gerek ve yeter şart $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$ dır (Kwon vd., 2005).

Teorem 3.1.2. \mathbb{E}^3 de bir eğri evolüsyonu $\alpha(u, t)$ olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ nin zaman parametresine göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) N + \left(-f_2 \tau + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) B, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= - \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) T + \lambda B, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(f_2 \tau - \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) T - \lambda N, \end{aligned}$$

$\lambda = \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, B \right\rangle$ dir (Kwon vd., 2005).

Teorem 3.1.3. $\alpha(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ elastik olmasın, o halde aşağıdaki eşitlikler mevcuttur;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} (f_1 \kappa) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau + f_3 \frac{\partial \tau}{\partial s} - f_2 \tau^2, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \kappa \left(f_2 \tau - \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial s}, \\ \kappa \lambda &= -\tau \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) - \frac{\partial}{\partial s} (f_2 \tau) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}\end{aligned}$$

(Kwon vd., 2005).

3.2 Minkowski Uzayında Elastik Olmayan Eğri Akışı

\mathbb{E}_1^3 , 3–boyutlu Minkowski uzayında yay uzunluğu l olan diferansiyellenebilir bir eğri α olsun. α eğrisinin 1–parametrelili bir ailesi

$$\begin{aligned}\alpha : (0, l) \times [0, w) &\rightarrow E_1^3 \\ (u, t) &\rightarrow \alpha(u, t)\end{aligned}$$

olsun. Burada u eğrimizin parametresi, t ise zaman (evolüsyon) parametresidir. α eğrisinin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| du$$

eşitliğiyle verilir. $v = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\|$ dersek s yay-parametresi olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$ eşitliği vardır.

Tanım 3.2.1. $\alpha(u, t)$ 3–boyutlu Minkowski uzayında bir eğri ve α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = f_1 T + f_2 N + f_3 B$$

biçiminde tanımlıdır. Burada f_i ler skaler hız fonksiyonudur (Tandoğan, 2009).

$\alpha(u, t)$ eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

olmak üzere eğrinin herhangi bir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in (0, l)$$

şartını sağlaması gerekir

Tanım 3.2.2. \mathbb{E}_1^3 de bir eğri evolüsyonu $\alpha(u, t)$ ve $\alpha(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| = 0$$

ise akışa elastik olmayan akış denir (Tandoğan, 2009).

Teorem 3.2.1. \mathbb{E}_1^3 de $\alpha(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = -f_2 \kappa \text{ dır (Tandoğan, 2009).}$$

Teorem 3.2.2. \mathbb{E}_1^3 de bir eğri evolüsyonu $\alpha(u, t)$ ve α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\{T, N, B\}$ nin zaman parametresine göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) N + \left(-f_2 \tau + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) B, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) T + \delta B, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(-f_2 \tau + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) T - \delta N, \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $\delta = \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, B \right\rangle$ dır (Tandoğan, 2009).

Teorem 3.2.3. \mathbb{E}_1^3 de $\alpha(u, t)$ nin $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ akışı elastik olmasın, o halde aşağıdaki eşitlikler mevcuttur;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(f_1 \kappa) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(f_3 \tau) - f_2 \tau^2 + \tau \frac{\partial f_3}{\partial s}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \kappa \left(-f_2 \tau + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right) - \frac{\partial \delta}{\partial s}, \\ \kappa \delta &= -\tau \left(f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau \right) - \frac{\partial}{\partial s}(f_2 \tau) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}\end{aligned}$$

(Tandoğan, 2009).

3.3. Elastik Olmayan Kuaterniyonik Eğri Akışı

β, \mathbb{E}^4 de diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri olmak üzere β eğrisinin 1-parametrelili diferansiyellenebilir bir ailesi

$$\begin{aligned}\beta: (0, l) \times [0, w) &\rightarrow \mathbb{E}^4 \\ (u, t) &\rightarrow \beta(u, t)\end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada u eğrimizin parametresi, t ise zaman (evolüsyon) parametresidir. β kuaterniyonik eğrisinin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_0^u v du$$

eşitliğiyle verilir, burada $v = \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\|$ dur. s yay-parametresi olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$ dur.

Tanım 3.3.1. β, \mathbb{E}^4 de diferansiyellenebilir kuaterniyonik bir eğri ve β kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. β eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = g_1 T + g_2 N + g_3 B_1 + g_4 B_2$$

biçiminde tanımlıdır. Burada g_i ler skaler hız fonksiyonudur (Körpınar ve Baş, 2016).

$\beta(u, t)$ kuaterniyonik eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

dur. β nın herhangi bir değişime sahip olmaması için sağlanması gereken şart

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in (0, l)$$

dir .

Tanım 3.3.2. \mathbb{E}^4 de kuaterniyonik bir eğri evolüsyonu $\beta(u, t)$ ve $\beta(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. β eğrisinin u parametresine göre hızının t parametresine göre değişimi sıfır, yani

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\| = 0$$

ise $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışına elastik olmayan kuaterniyonik eğri akışı denir.

Teorem 3.3.1. \mathbb{E}^4 de $\beta(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = g_2 \kappa \text{ dır (Körpınar ve Baş, 2016).}$$

Teorem 3.3.2. \mathbb{E}^4 de kuaterniyonik bir $\beta(u, t)$ eğri evolüsyonu $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı ile verilmiş olsun. $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının evolüsyon denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - g_3 k \right) N + \left(g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (r - \kappa) \right) B_1 + \left(g_3 (r - \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) B_2, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= - \left(g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - g_3 k \right) T + \eta_1 B_1 + \eta_2 B_2, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= - \left(g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - g_4 (r - \kappa) \right) T - \eta_1 N + \eta_3 B_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} &= - \left(g_3 (r - \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) T - \eta_2 N - \eta_3 B_1\end{aligned}$$

şeklindedir, burada $\eta_1 = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right)$, $\eta_2 = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right)$, $\eta_3 = h\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right)$ dir (Körpınar ve Baş, 2016).

Teorem 3.3.3. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik olmayan bir akış olsun. Eğriliklerin evölüsyon denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} (g_1 \kappa) + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} k - g_3 \frac{\partial k}{\partial s} - g_2 k^2 + g_4 k (r - \kappa), \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= g_2 \kappa k + \frac{\partial g_3}{\partial s} k - g_4 \kappa (r - \kappa) + \frac{\partial \eta_1}{\partial s} - (r - \kappa) \eta_2, \\ \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial t} &= k \eta_2 + \frac{\partial \eta_3}{\partial s}\end{aligned}$$

biçimindedir (Körpınar ve Baş, 2016).

Teorem 3.3.3 den kalan eşitlikler yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.1.

$$\begin{aligned}\kappa \eta_1 &= g_1 \kappa k + 2 \frac{\partial g_2}{\partial s} k - g_3 k^2 + g_2 \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial f_4}{\partial s} (r - \kappa) - f_4 \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial s} - f_3 (r - \kappa)^2, \\ \kappa \eta_2 &= g_2 k (r - \kappa) + 2 \frac{\partial g_3}{\partial s} (r - \kappa) - g_4 (r - \kappa)^2 + g_3 \frac{\partial (r - \kappa)}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2}, \\ (r - \kappa) \eta_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial s} - k \eta_3 &= -g_3 \kappa (r - \kappa) - \frac{\partial g_4}{\partial s} \kappa.\end{aligned}$$

4 ELASTİK OLMAYAN YARI-REEL KUATERNİYONİK EĞRİ AKIŞI

β, \mathbb{E}_2^4 de diferansiyellenebilir yarı-reel kuaterniyonik bir eğri olsun., β eğrisinin parametresi u , zaman (evolüsyon) parametresi t olmak üzere β eğrisinin 1-parametrelili diferansiyellenebilir bir ailesi

$$\begin{aligned} \beta: (0, l) \times [0, w] &\rightarrow \mathbb{E}_2^4 \\ (u, t) &\rightarrow \beta(u, t) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. β yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_0^u v du$$

şeklinde tanımlıdır. $\beta(u)$ yarı-reel kuaterniyonik eğrinin hız fonksiyonu $v = \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\|$ ve yay-parametresi s olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.1)$$

dur.

Tanım 4.1. β, \mathbb{E}_2^4 de diferansiyellenebilir yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve β yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. $g_j, 1 \leq j \leq 4$ ler skaler hız fonksiyonu olmak üzere β eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = g_1 T + g_2 N + g_3 B_1 + g_4 B_2$$

biçiminde tanımlıdır.

$\beta(u, t)$ yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin yay uzunluğu varyasyonu

$$s(u, t) = \int_0^u v du$$

biçimde tanımlıdır. β nın herhangi bir değişime sahip olmaması için sağlanması gereken şart

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in (0, l) \quad (4.2)$$

olmasıdır.

Tanım 4.2. \mathbb{E}_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri evolüsyonu $\beta(u, t)$ ve $\beta(u, t)$ nin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. Eğer β eğrisinin u parametresine göre hızının t parametresine göre değişimi, yani

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \right\| = 0$$

ise $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışına elastik olmayan yarı-reel kuaterniyonik eğri akışı denir.

Önerme 4.1. $\beta(u)$, \mathbb{E}_2^4 de diferansiyellenebilir yarı-reel kuaterniyonik bir eğri olsun. β yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin hız fonksiyonunun evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_T \frac{\partial g_1}{\partial t} - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N v \kappa g_2 \quad (4.3)$$

biçimindedir.

İspat. $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$ ye göre kısmi türevlerin değişmeli olduğu göz önünde bulundurularak

$$v^2 = h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \text{ nin } t \text{ ye göre türevi alınır}$$

$$\begin{aligned}
2v \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \\
&= 2h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right) \\
&= 2h \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} (g_1 T + g_2 N + g_3 B_1 + g_4 B_2) \right) \\
&= 2v \left(\varepsilon_T \frac{\partial g_1}{\partial t} - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N v \kappa g_2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_T \frac{\partial g_1}{\partial t} - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N v \kappa g_2$$

elde edilir.

Teorem 4.1. $\beta(u, t)$, \mathbb{E}_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri olsun. $\beta(u, t)$ nin akışı

$\frac{\partial \beta}{\partial t}$ elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = \varepsilon_i \varepsilon_N \kappa g_2$$

dır.

İspat. Kabul edelim ki yarı-reel kuaterniyonik eğrinin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ elastik olmasın. (4.2)

ve (4.3) denklemlerinden

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = \int_0^u \left(\varepsilon_T \frac{\partial g_1}{\partial t} - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N v \kappa g_2 \right) du = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \varepsilon_i \varepsilon_N v \kappa g_2$$

olmalıdır. (4.1) denklemini göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa g_2$$

dir. Tersine

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = \varepsilon_t \varepsilon_N \kappa g_2$$

alınırsa akışın elastik olmadığı gösterilebilir.

Teorem 4.2. $\beta(u, t)$, \mathbb{E}_2^4 de yarı-reel kuaterniyonik bir eğri ve $\beta(u, t)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. $\eta_1 = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right)$, $\eta_2 = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right)$ ve $\eta_3 = h\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right)$ olmak üzere $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının evolüsyon denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\varepsilon_N g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - \varepsilon_t g_3 k \right) N + \left(\varepsilon_n g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) B_1 \\ &\quad + \left(\varepsilon_n g_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) B_2, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= - \left(\varepsilon_T g_1 \kappa + \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial s} - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 k \right) T + \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_1 B_1 + \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_2 B_2, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= - \left(g_2 k + \varepsilon_n \frac{\partial g_3}{\partial s} - \varepsilon_n \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) T - \varepsilon_N \eta_1 N + \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_3 B_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} &= - \left(\varepsilon_n \varepsilon_b g_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_b \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) T - \varepsilon_N \eta_2 N - \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_3 B_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir.

İspat. $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$ ye göre kısmi türevlerin değişmeli olduğu göz önünde bulundurulup,

T nin t ye göre türevi alınır

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (g_1 T + g_2 N + g_3 B_1 + g_4 B_2)$$

elde edilir. (2.4) Frenet türev formülleri ve (3.6) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\varepsilon_N g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - \varepsilon_t g_3 k \right) N + \left(\varepsilon_n g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) B_1 \\ &\quad + \left(\varepsilon_n g_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) B_2, \end{aligned}$$

elde edilir. $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının ortogonal olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, N) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N\right) + h\left(T, \frac{\partial N}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_N \left(\varepsilon_N g_1 \kappa + \frac{\partial g_2}{\partial s} - \varepsilon_t g_3 k \right) + h\left(T, \frac{\partial N}{\partial t}\right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, B_1) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_1\right) + h\left(T, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_n \varepsilon_T \left(\varepsilon_n g_2 k + \frac{\partial g_3}{\partial s} - \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) + h\left(T, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(T, B_2) = h\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_2\right) + h\left(T, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_T \left(\varepsilon_n g_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \frac{\partial g_4}{\partial s} \right) + h\left(T, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(N, B_1) = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) + h\left(N, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_1 + h\left(N, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(N, B_2) = h\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) + h\left(N, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_2 + h\left(N, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} h(B_1, B_2) = h\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) + h\left(B_1, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_3 + h\left(B_1, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da N, B_1 ve B_2 ye ait evolüsyon denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= -\left(\varepsilon_T g_1 \kappa + \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial s} - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 k\right) T + \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_1 B_1 + \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_2 B_2, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= -\left(g_2 k + \varepsilon_n \frac{\partial g_3}{\partial s} - \varepsilon_n \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\right) T - \varepsilon_N \eta_1 N + \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_3 B_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} &= -\left(\varepsilon_n \varepsilon_b g_3 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_b \frac{\partial g_4}{\partial s}\right) T - \varepsilon_N \eta_2 N - \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_3 B_1\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3. $\beta(u, t)$ yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \varepsilon_i \varepsilon_N g_2 \kappa^2 + g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \varepsilon_N \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} - 2\varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial s} k - \varepsilon_i \varepsilon_N g_3 \frac{\partial k}{\partial s} \\ &\quad - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N g_2 k^2 + \varepsilon_i \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\end{aligned}$$

dır.

İspat. (2.4) ve (4.4) denklemleri kullanılarak $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$ kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \left(-\varepsilon_i g_2 \kappa^2 - \varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa + \varepsilon_N g_3 \kappa k \right) T \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} \varepsilon_i g_2 \kappa^2 + \varepsilon_N g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} - 2\varepsilon_i \frac{\partial g_3}{\partial s} k \\ -\varepsilon_i g_3 \frac{\partial k}{\partial s} - \varepsilon_i \varepsilon_n g_2 k^2 + \varepsilon_i \varepsilon_b g_4 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \end{array} \right) N \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} \varepsilon_n \varepsilon_N g_1 \kappa k + 2\varepsilon_n \frac{\partial g_2}{\partial s} k - \varepsilon_i \varepsilon_n g_3 k^2 + \varepsilon_n g_2 \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} \\ -2\varepsilon_b \frac{\partial g_4}{\partial s} (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_b g_4 \frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} - \varepsilon_n \varepsilon_b g_3 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)^2 \end{array} \right) B_1 \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} g_2 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + 2\varepsilon_n \frac{\partial g_3}{\partial s} (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \\ -\varepsilon_n \varepsilon_b g_4 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)^2 + \varepsilon_n g_3 \frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} + \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2} \end{array} \right) B_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_N \kappa N) = \varepsilon_N \frac{\partial \kappa}{\partial t} N + \varepsilon_N \kappa \frac{\partial N}{\partial t} \\ &= \left(-\varepsilon_T \varepsilon_N g_1 \kappa^2 - \varepsilon_T \frac{\partial g_2}{\partial s} \kappa + \varepsilon_i \varepsilon_T g_3 \kappa k\right) T \\ &\quad + \varepsilon_N \frac{\partial \kappa}{\partial t} N + \varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N \eta_1 \kappa B_1 + \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N \eta_2 \kappa B_2\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$ eşitliği göz önünde bulundurulursa N nin bileşeninden

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \varepsilon_i \varepsilon_N g_2 \kappa^2 + g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \varepsilon_N \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} - 2\varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial s} k - \varepsilon_i \varepsilon_N g_3 \frac{\partial k}{\partial s} \\ &\quad - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N g_2 k^2 + \varepsilon_i \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$ eşitliğinden kalanlar göz önünde bulundurulursa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$ eşitliğinden kalanlar göz önünde bulundurulursa aşağıdaki denklemler

$$\begin{aligned}\kappa \eta_1 &= \varepsilon_T g_1 \kappa k + 2\varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial s} k - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 \kappa^2 + \varepsilon_T \varepsilon_N g_2 \frac{\partial k}{\partial s} + \varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial^2 g_3}{\partial s^2} \\ &\quad - 2\varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_4}{\partial s} (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N g_4 \frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} \\ &\quad - \varepsilon_b \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)^2 \\ \kappa \eta_2 &= \varepsilon_i \varepsilon_b g_2 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + 2\varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_b \frac{\partial g_3}{\partial s} (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_i \varepsilon_n g_4 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)^2 \\ &\quad + \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_b g_3 \frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} + \varepsilon_i \varepsilon_b \frac{\partial^2 g_4}{\partial s^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4. $\beta(u, t)$ yarı-reel kuarterniyonik eğrisinin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & \varepsilon_i \varepsilon_N g_2 \kappa k + \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial S} \kappa - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_N \frac{\partial \eta_1}{\partial S} \\ & - \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_2 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \end{aligned}$$

dır.

İspat. (2.4) ve (4.4) denklemleri kullanılarak $\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N}{\partial S} \right)$ kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right) = & \left(-\varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N g_2 \kappa^2 - \varepsilon_T g_1 \frac{\partial \kappa}{\partial S} - \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial^2 g_2}{\partial S^2} + \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial S} k + \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 \frac{\partial k}{\partial S} \right) T \\ & + \left(-\varepsilon_T \varepsilon_N g_1 \kappa^2 - \varepsilon_T \frac{\partial g_2}{\partial S} \kappa + \varepsilon_i \varepsilon_T g_3 \kappa k - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_1 k \right) N \\ & + \left(\varepsilon_n \varepsilon_T \frac{\partial \eta_1}{\partial S} - \varepsilon_T \eta_2 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) B_1 \\ & + \left(\begin{array}{c} \varepsilon_T (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \eta_1 \\ \varepsilon_b \varepsilon_T \frac{\partial \eta_1}{\partial S} \end{array} \right) B_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N}{\partial S} \right) = & \frac{\partial}{\partial t} (-\varepsilon_i \varepsilon_N \kappa T + \varepsilon_n k B_1) \\ = & \left(-\varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \varepsilon_n g_2 k^2 - \frac{\partial g_3}{\partial S} k + \varepsilon_b g_4 k (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) T \\ & + \left(-\varepsilon_i g_1 \kappa^2 - \varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial S} \kappa + \varepsilon_N g_3 \kappa k - \varepsilon_n \varepsilon_N \eta_1 k \right) N \\ & + \left(-\varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N g_2 \kappa k - \varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial S} \kappa + \varepsilon_i \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_n \frac{\partial k}{\partial t} \right) B_1 \\ & + \left(-\varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N g_3 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_i \varepsilon_N \frac{\partial g_4}{\partial S} \kappa + \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_3 k \right) B_2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)$ eşitliği göz önünde bulundurulursa B_1 in bileşeninden

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= \varepsilon_i \varepsilon_N g_2 \kappa k + \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) + \varepsilon_T \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \\ &\quad - \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_2 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2. $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)$ eşitliğinden kalanlar göz önünde bulundurulursa

$$(r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \eta_1 = -\varepsilon_b \frac{\partial \eta_2}{\partial s} - \varepsilon_i \varepsilon_n \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_4}{\partial s} \kappa + \varepsilon_n \varepsilon_b \eta_3 k$$

elde edilir.

Teorem 4.5. $\beta(u, t)$ yarı-reel kuaterniyonik eğrisinin akışı $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ olsun. $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ akışı elastik değil ise

$$\frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial t} = \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_N \eta_2 k + \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \frac{\partial \eta_3}{\partial s}$$

dır.

İspat. (2.4) ve (4.4) denklemleri kullanılarak $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)$ kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\right) &= \left(\begin{array}{l} -\frac{\partial g_2}{\partial s} k - g_2 \frac{\partial k}{\partial s} - \varepsilon_n \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2} + \varepsilon_n \varepsilon_b \frac{\partial g_4}{\partial s} (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \\ + \varepsilon_n \varepsilon_b g_4 \frac{\partial (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} + \varepsilon_i \eta_1 \kappa \end{array} \right) T \\ &\quad + \left(-\varepsilon_N g_2 \kappa k - \varepsilon_n \varepsilon_N \frac{\partial g_3}{\partial s} \kappa + \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_N g_4 \kappa (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) - \varepsilon_N \frac{\partial \eta_1}{\partial s} \right) N \\ &\quad + \left(-\varepsilon_n \varepsilon_N \eta_1 k - \varepsilon_T \eta_3 (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) B_1 + \left(\varepsilon_b \varepsilon_T \frac{\partial \eta_3}{\partial s} \right) B_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_1}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon_t k N + \varepsilon_n (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) B_2 \right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \varepsilon_t \varepsilon_T g_1 \kappa k + \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \frac{\partial g_2}{\partial s} k - \varepsilon_T \varepsilon_N g_3 k^2 \\ -\varepsilon_b g_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)^2 - \varepsilon_n \varepsilon_b \frac{\partial g_4}{\partial s} (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \end{array} \right) T \\
&+ \left(-\varepsilon_t \frac{\partial k}{\partial s} - \varepsilon_n \varepsilon_N \eta_2 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) N \\
&+ \left(-\varepsilon_t \varepsilon_n \varepsilon_T \eta_1 k - \varepsilon_T \eta_3 (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa) \right) B_1 \\
&+ \left(-\varepsilon_t \varepsilon_b \varepsilon_T \eta_2 k + \varepsilon_n \frac{\partial (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial s} \right) B_2
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_1}{\partial s} \right)$ eşitliği göz önünde bulundurulursa B_1 in

bileşeninden

$$\frac{\partial (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_N \kappa)}{\partial t} = \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_N \eta_2 k + \varepsilon_n \varepsilon_b \varepsilon_T \frac{\partial \eta_3}{\partial s}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- Bharathi, K., & Nagaraj, M. (1987). Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae.. *Indian J. Pure Appl. Math*, 16: 741-756.
- Çöken, A. C. & Tuna, A. (2004). On the Quaternionic Inclined Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4 . *Appl. Math. Comput*, 155, 373-389.
- Gage, M. E. (1984). Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones mathematicae*, 76(2), 357-364.
- Gage, M. On an area-preserving evolution equation for plane curves. *Nonlinear Problems in Geometry* (Mobile, Ala., 1985), 51–62. *Contemp. Math*, 51.
- Gage, M., & Hamilton, R. S. (1986). The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23(1), 69-96.
- Grayson, M. A. (1987). The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential geometry*, 26(2), 285-314.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983) *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 335.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri I*. Ankara Üniversitesi, Ankara, 270.
- Hamilton, W. R. (1899). *Elements of Quaternions*. Chelsea, New York, 568.
- İlarslan, K. (2002). *Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki bazı özel eğriler*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Turkey.
- Körpınar, T., & Baş, S. (2016). Characterization of Quaternionic Curves by Inextensible Flows. *Prespacetime Journal*, 7(12), 1680-1684.
- Kwon, D., Park, F. C., & Chi, D. P. (2005). Inextensible flows of curves and developable surface. *Applied Mathematics Letters*. 18(10), 1156-1162.
- Kwon, D. Y., & Park, F. C. (1999). Evolution of inelastic plane curves. *Applied Mathematic Letters*, 12(6), 115-119.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 468.
- O'Neill, B. (1997). *Elementary Differential Geometry Second Edition*, Academic Press, New York, 482.
- Okuyucu, O. Z. (2013). Characterizations of the Quaternionic Mannheim Curves in Euclidean space. *International J. Math. Combin*, 2, 44-53.
- Özdemir, M., & Ergin, A.A. (2006) Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56, 322–336.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Ratcliffe, J. (1994) *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 793.
- Sabuncuoğlu, A. (2017). Diferansiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara, 522.
- Shifrin, T. (2011). *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*, Preliminary Version, Fall, 125 p. University of Georgia, Athens, Georgia, 30602.
- Tandoğan, F. (2009). *Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketler*. Y. Lisans Tezi, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Tuna, A. (2002). *Yarı Öklid uzaylarda kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri*. Y. Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, Turkey.
- Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*. Doctoral thesis, Leuven, K.U. Faculty of Science, Leuven.
- Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers, Boston-London.
- Yıldız, A. F., Okuyucu, O. Z., & Yıldız, Ö. G., (2017). Inextensible flow of a semi-real quaternionic curve in semi-euclidean space \mathbb{R}^4_2 . *Communications series A1 mathematics & statistics*, 67(1), 341-350.
- Yıldız, Ö.G., & Anigören, Ö. (2017) On the Evolution of Quaternionic Curves in Euclidean 4-space. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*, Şanlıurfa, Türkiye, 778-779.
- Yıldız, Ö.G., & Karakuş, Ö. S. (2016). On the Quaternionic Normal Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4 . *International J.Math. Combin*, 3, 68-76.
- Yüce, S. (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi, İstanbul, Türkiye, 557.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ahu Funda Yıldız
Doğum Yeri ve Tarihi : Ordu, 17.02.1989



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Sakarya Üniversitesi- Matematik (2011)
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Bilecik İbn-i Sina Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi / Bilecik

İletişim

Adres : Bilecik İbn-i Sina Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi
E-Posta Adresi : ahufundataran@gmail.com

Akademik Çalışmaları

- YILDIZ AHU FUNDA, OKUYUCU OSMAN ZEKİ, YILDIZ ÖNDER GÖKMEN (2018). Inextensible Flow of a Semi-Real Quaternionic Curve in Semi-Euclidean Space R_4^2 . Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 67(1), 323-332., Doi: 10.1501/Commua1_0000000854.
- YILDIZ AHU FUNDA, OKUYUCU OSMAN ZEKİ, YILDIZ ÖNDER GÖKMEN (2017). On Inextensible Flow of a Semi-Real Quaternionic Curve in R_4^2 . 15th International Geometry Symposium (Özet Bildiri/Poster)

Tarih:05/08/2019