T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BENZERLİK KAVRAMI VE METRİKLERLE İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA GÜDER

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2025

10694677

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BENZERLİK KAVRAMI VE METRİKLERLE İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA GÜDER

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2025

10694677

BEYAN

"Benzerlik Kavramı Ve Metriklerle İlişkisi adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="2">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR |</td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR | X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td>Desteğin Türü</td><td>Proje Numarası</td></tr>
<tr><td>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2-TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td>Diğer;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL onayı var
ise;</td></tr>
<tr><td>ETİK KURUL karar tarih/
sayı:</td><td>........................../
....................</td></tr>
</table>

Öğrenci Adı ve Soyadı
Esra GÜDER
Tarih
...../...../ 2025
İmza

ÖN SÖZ

Tez çalışmam boyunca sunduğu rehberlik, bilgi ve tecrübesiyle yol gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen tez danışmanım çok değerli Sayın Doç. Dr. Mehmet SOLGUN’a çok teşekkür ederim. Tez sürecimde her zaman sorularıma yardımcı olan, desteğini ve emeğini esirgemeyen, her zaman danışabileceğimi hissettiren çok değerli Sayın Doç. Dr. Kemal TAŞKÖPRÜ hocama çok teşekkür ederim. Benden hiçbir zaman desteğini eksik etmeyen, her zaman yanımda olduklarını bildiğim aileme çok teşekkür ederim. Bu zorlu süreçte destek olan, motive eden, karşılaştığım her zorlukta yardımcı olmaya çalışan arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Esra Güder
2025

ÖZET

BENZERLİK KAVRAMI VE METRİKLERLE İLİŞKİSİ

Bu çalışmada metrik uzaylar, kısmi metrik uzaylar, quasi metrik uzaylar ve benzerlik metrik uzayların aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır. İlk olarak metrik uzay, kısmi metrik uzay ve quasi metrik uzay ile ilgili genel tanımlar, kavramlara yer verilmiş olup, bu yapılarla ilgili örnekler verilmiştir. Sonraki bölümde bu yapıların birbirleriyle ilişkisi incelenmiştir. Dördüncü bölümde benzerlik metrik uzayın tanımı ele alınarak bu uzaylar ile ilgili kavramlara ve çeşitli örneklere yer verilmiştir. Son bölümde ise benzerlik metrik uzayının quasi metrik ve kısmi metrik ile aralarındaki ilişki ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlara yönelik bazı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik, Quasi Metrik, Kısmi Metrik, Benzerlik Metriği.

ABSTRACT

THE NOTION OF SIMILARITY AND RELATIONS WITH OTHER METRICS

In this study, the relations between metric, partial metric, quasi metric and similarity metric is investigated. First, the basic notions and definitions of metric, partial metric and quasi metric are studied. Also, explicit examples of these structures are given. In the next section, the relations between these metrics examined. Then, the notion of similarity metric function and its properties are studied. In the last section, which is also the main section of this study, the relations between similarity metric and other metrics are evaluated. Moreover, we focused to construct one metric from each other and state theorems about these construction. Also, some examples of the results obtained are given.

Keywords: Metric, Quasi Metric, Partial Metric, Similarity Metric.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\boldsymbol{\omega}$	:	Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{d}$	:	Klasik metrik
$\boldsymbol{p}$	:	Kısmi metrik
$\boldsymbol{d_p}$	:	Kısmi metrikten elde edilen klasik metrik
$\boldsymbol{p_d}$	:	Klasik metrikten elde edilen kısmi metrik
$\boldsymbol{q_p}$	:	Kısmi metrikten elde edilen quasi metrik
$\boldsymbol{q}$	:	Quasi metrik
$\leq_q$	:	Quasi metrik uzayda kısmi sıralama bağıntısı
$\boldsymbol{s}$	:	Benzerlik metriği
$\boldsymbol{q_s}$	:	Benzerlik metriğinden elde edilen quasi metrik
$\boldsymbol{s_q}$	:	Quasi metrikten elde edilen benzerlik metriği
$\boldsymbol{p_s}$	:	Benzerlik metriğinden elde edilen kısmi metrik
$\boldsymbol{s_p}$	:	Kısmi metrikten elde edilen benzerlik metriği

1. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı ilk kez Fransız matematikçi Maurice Frechet (1906) tarafından doktora tezinde incelenmiştir (Fréchet, 1906). Kısmi metrik kavramı ise Matthews tarafından 1992 yılında tanımlanmıştır. Metrik ve kısmi metrik aksiyomlarına bakacak olursak

$$p_2(u = w \Leftrightarrow p(u,w) = p(u,u) = p(w,w)) \text{ ve } p_1(p(u,u) \leq p(u,w))$$

aksiyomlarından $p(u,w) = 0$ ise $u = w$ dir. Ancak $u = w$ iken $p(u,w) = 0$ olmak zorunda değildir (Matthews, 1994). O halde her metrik bir kısmi metriktir ancak bunun tersi doğru değildir. Metrik uzaylarda elde edilmiş olan birçok teorem ve sonuç kısmi metrik uzaylara genelleştirilmiştir. Kısmi metrik uzaylar bilgisayar bilimlerinde ve matematiğin birçok alanında kullanılan bir konu olmuştur. Quasi metrik kavramı ise 1931 yılında W. A. Wilson tarafından tanımlanmıştır (Wilson, 1931). Quasi metrik uzaylar metrik uzayların bir genellemesidir ve metrik uzaylardaki simetri aksiyomunu sağlamazlar. Dolayısıyla her metrik uzay bir quasi metrik uzaydır. Quasi metrik uzaylar matematik ve uygulamalı matematiğin yanısıra malzeme bilimi, biyoloji gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Nesneleri karşılaştırmanın en yaygın yollarından biri uzaklık ölçüsü olduğundan, nesnelerin benzerliğini yorumlamak da genel olarak uzaklık ile ilişkilidir. Benzerlik sadece uzaklığa bağlı değil aynı zamanda ortak özelliklerin miktarına da bağlı olabilir. Metrik uzayların aksine verilen iki elemanın ortak özellikleri arttıkça benzerlik fonksiyonunun değeri artmaktadır (Chen vd., 2009). Fizik, istatistik, psikoloji gibi birçok alanda benzerlik kavramı ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Örneğin biyolojide iki DNA dizisinin benzerliğini karşılaştırmada, siber güvenlikte bir ağın trafiğini incelerken bir tehdit varlığının var olup olmadığını anlayabilmek için ağdaki paketleri, referans paketleriyle karşılaştırabilmek ya da veri madenciliğinde niteliklerin önemini değerlendirmede benzerlik kavramı kullanılmaktadır. Benzerlik fonksiyonunun ilk aksiyomatik tanımı Chen, Ma ve Zhang tarafından Benzerlik Metriği ve Mesafe Metriği Üzerine adlı makalelerinde tanımlanmıştır (Chen vd., 2009). Yakın zamanda Ondrej Rozinek tarafından bu tanım kullanılarak benzerlik ve uzaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir (Rozinek ve Mares, 2021).

Bu tezin amacı metrik, quasi metrik, kısmi metrik ve benzerlik metriğinin özelliklerini açıklayarak birbirleri arasındaki ilişkiyi incelemektir. Tezin ikinci bölümünde bazı temel kavramlar ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde metrik uzaylar, kısmi metrik uzaylar ve quasi metrik uzaylar arasındaki ilişkiler ve literatürde yapılan bazı çalışmalar ve örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde benzerlik metriğinin aksiyomatik tanımına ve çeşitli örneklere yer verilmiştir. Son bölümde ise benzerlik metriğinin diğer metrik yapılarla arasındaki bağlantılar ele alınmış olup, bir yapıdan diğerinin elde edilebilmesi üzerine çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlarla ilgili somut örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu kısmında çalışmamızda kullanılacak tanım ve temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $u, w, z \in X$ için ;

$d_1)$ $d(u,w) \geq 0$

$d_2)$ $d(u,w) = 0 \Leftrightarrow u = w$

$d_3)$ $d(u,w) = d(w,u)$

$d_4)$ $d(u,z) \leq d(u,w) + d(w,z)$

aksiyomlarını sağlıyor ise d fonksiyonu X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. Her u, w reel sayısı için

$$d(u,w) = |w - u|$$

ile tanımlanan d fonksiyonunun bir metrik olduğu görülebilir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği denir (Yıldız, 2005).

Örnek 2.3. $X \neq \emptyset$ olmak üzere ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ve her u, w reel sayısı için

$$d(u,w) = \begin{cases} 1 & \mathrm{u \neq w} \\ 0 & \mathrm{u = w} \end{cases}$$

ile tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (Yıldız, 2005).

Örnek 2.4. $X = \mathbb{N}$ boş kümeden farklı bir küme ve $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $u, w \in \mathbb{N}$ için

$$d(u,w) = |\frac{1}{u} - \frac{1}{w}|$$

ile tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{N}$ üzerinde bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Örnek 2.5. $\mathbb{C}[0,1] = \{u | u : [0,1] \to \mathbb{R}, u \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde

$$d(u,w) = \int_0^1 |u(t) - w(t)| dt$$

$t \in [0,1]$ ile tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Örnek 2.6. $\mathbb{C}[0,1] = \{u | u : [0,1] \to \mathbb{R}, u \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde

$$d(u,w) = \max_{t\in[0,1]} |u(t) - w(t)| dt$$

$t \in [0,1]$ ile tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Tanım 2.7. (X,d) bir metrik uzay olsun. $w \in X$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olsun.

1) $B_d(w,r) = \{u \in X | d(u,w) < \varepsilon\}$

2) $B_d(w,r) = \{u \in X | d(u,w) \leq \varepsilon\}$

kümelerine sırasıyla w merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Yıldız, 2005).

Tanım 2.8. X boş kümeden farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde tanımlanan bir $\leq$ bağıntısı, her u,w,z elemanı için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı ve $(X,\leq)$ ikilisi de kısmi sıralı küme olarak tanımlanır.

1) $u \leq u$

2) $u \leq w$ ve $w \leq u$ ise $u = w$

3) $u \leq w$ ve $w \leq z$ ise $u \leq z$ (Matthews, 1994).

Tanım 2.9. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere her $u,w \in X$ için

$$d(u,w) \geq \omega(u) - \omega(w)$$

olacak şekilde bir $\omega : X \to \mathbb{R}^+$ ağırlık fonksiyonu var ise d fonksiyonuna X üzerinde ağırlıklı metrik, (X,d,ω) üçlüsüne de ağırlıklı metrik uzay denir (Matthews, 1992).

Tanım 2.10. $X \neq \emptyset$ ve $q : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $u,w,z \in X$ için

q_1) $q(u,w) \geq 0$

q_2) $q(u,w) = q(w,u) = 0 \Leftrightarrow u = w$

q_3) $q(u,z) \leq q(u,w) + q(w,z)$

özelliklerini sağlıyor ise, q fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir quasi metrik, (X,q) ikilisine de bir quasi metrik uzay denir. q nun eşlenik quasi metriği yine bir quasi metrik olan her $u,w \in X$ için

$$q^*(u,w) = q(w,u) \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Örnek 2.11. $X = [0,\infty)$ ve $q(u,w) = max\{0, w-u\}$ ile tanımlanan q fonksiyonu quasi metriktir (Campión vd., 2018).

Gerçekten de q fonksiyonunun $q_1 - q_3$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$q_1)$ $q \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

$q_2)$ Her $u,w \in X$ için $q(w,u) = q(u,w) = 0$ olsun. Bu durumda
$q(u,w) = 0 = max\{w-u, 0\} \Rightarrow w-u = 0$ olup $w = u$ olur. Benzer şekilde
$q(w,u) = 0 = max\{u-w, 0\}$ ise $u-w = 0$ olup $u = w$ olur. Şimdi $u = w$ olsun.
$max\{0, w-w\} = 0$ ve $max\{0, u-u\} = 0$ olduğundan $q(w,u) = q(u,w) = 0$ dır.

$q_3)$

$$\begin{aligned} q(u,z) &= max\{u-z, 0\} \\ &= max\{u-w+w-z, 0+0\} \\ &\leq max\{u-w, 0\} + max\{w-z, 0\} \\ &= q(u,w) + q(w,z). \end{aligned}$$

Aksiyomlar sağlandığından q fonksiyonu bir quasi metriktir.

Örnek 2.12. $X = \mathbb{R}$ ve $q : X \times X \to [0,\infty)$ verilsin. $\beta > 0$ olmak üzere

$$q(u,w) = \begin{cases} \beta(u-w) & \text{u > w} \\ w-u & \text{u} \leq \text{w} \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon bir quasi metriktir (Collins ve Zimmer, 2007).

Gerçekten de q fonksiyonunun $q_1 - q_3$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$q_1)$ q nun tanımından açıktır.

$q_2)$ Her $u,w \in X$ için $q(u,w) = 0$ ise $u \leq w$ ve $q(w,u) = 0 \Rightarrow w \leq u$ dir. O halde $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. $u \leq w \Rightarrow w-u = w-w = 0$ dır. Dolayısıyla $q(u,w) = q(w,u)$ olur.

$q_3)$ $u \leq w$ olsun. Bu durumda
$u \leq w \leq z \Rightarrow z-u \leq w-u+z-w$
$z \leq u \leq w \Rightarrow \beta(u-z) \leq w-u+\beta(w-z)$
$u \leq z \leq w \Rightarrow z-u \leq w-u+\beta(w-z)$ olur.
$w < u$ olsun. O halde
$z < w < u \Rightarrow \beta(u-z) \leq \beta(u-w)+\beta(w-z)$
$w < z < u \Rightarrow \beta(u-z) \leq \beta(u-w)+(z-w)$
$w < u < z \Rightarrow z-u \leq \beta(u-w)+z-u$ olur.

Verilen eşitsizliklerin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla q fonksiyonu quasi metriktir.

Örnek 2.13. $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verilsin.

$$q(u,w) = \begin{cases} e^w - e^u & \text{w} \geq \text{u} \\ e^{-w} - e^{-u} & \text{w} < \text{u} \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir quasi metriktir (Collins ve Zimmer, 2007).

Örnek 2.14. $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verilsin.

$$q(u,w) = \begin{cases} w - u & \text{w} \geq \text{u} \\ 1 & \text{w} < \text{u} \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir quasi metriktir (Collins ve Zimmer, 2007).

Tanım 2.15. (X,q) quasi metrik uzayı verilsin. Bir $\omega : X \to \mathbb{R}$ (ağırlık) fonksiyonu

$$\omega(u) + q(u,w) = \omega(w) + q(w,u) \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlıyorsa q fonksiyonuna (ağırlıklı) quasi metrik denir. Özel olarak eğer $\omega(X) \subset [0,\infty)$ ise o zaman q fonksiyonu pozitif (ağırlıklı) quasi metrik olarak adlandırılır (Künzi, 2001) (Künzi ve Vajner, 1994) (Wilson, 1931) (Campión vd., 2018).

Örnek 2.16. $X = \mathbb{R}^+$ ve her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(u) = u$ olmak üzere her $u,w \in \mathbb{R}^+$ için

$$q(u,w) = \begin{cases} 0 & w < u \\ w - u & w \geq u \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir ağırlıklı quasi metriktir (Künzi ve Vajner, 1994).

İspat. İlk olarak quasi metrik $(q_1 - q_3)$ aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

q_1) q fonksiyonunun tanımı gereği açıktır.

q_2) $w \geq u$ ise $q(u,w) = w - u \geq 0$ olur. $w < u$ ise $q(u,w) = 0$ olur. Dolayısıyla $u = w$ olur.
$u = w$ olsun. $w \geq u$ ise $u = w$ olduğundan $w - u = w - w = 0$ ve $q(u,w) = 0$ dır.
$w < u$ ise $q(u,w) = 0$ dır.
$w \geq u$ ise $q(u,w) = w - u$ ve $q(w,u) = u - w$ dolayısıyla $q(u,w) = q(w,u)$dir.
$w < u$ ise $q(u,w) = 0$ ve $q(w,u) = 0$ dolayısıyla $q(u,w) = q(w,u)$

q_3) $q(u,z) = 0 \Rightarrow q(u,z) \leq q(u,w) + q(w,z)$ olur. Bu durumda $z < u, w < u$ ve $z < w$ olur.
$w \geq u$ ise $q(u,z) > q(u,w) + q(w,z)$ olsun.
$z - u > w - u + z - w$ yani bir çelişki elde edilir. O halde $q(u,z) \leq q(u,w) + q(w,z)$ dir.

Daha sonra ağırlıklı quasi metrik olması için gerekli aksiyomları inceleyelim:

ω_{q_1}) Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(u) = u \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $\omega(u) \geq 0$ dır.

ω_{q_2}) $w \geq u$ ise $\omega(u) + w - u = \omega(w) + w - u$ olduğundan $\omega(u) = \omega(w)$ dir.
$w < u$ ise $\omega(u) + 0 = \omega(w) + 0$ olduğundan $\omega(u) = \omega(w)$ olur.

■

Örnek 2.17. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u,w) = u$ olan

$$q((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = \frac{\sqrt{(u_1-u_2)^2 + (w_1-w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$$

fonksiyonu ağırlıklı quasi metriktir (Künzi ve Vajner, 1994).

Uyarı 2.18. Görülebilir ki her metrik ağırlıklı quasi metriktir (Vitolo, 1999). Ancak her quasi metrik bir ağırlıklı quasi metrik belirtmek zorunda değildir (Matthews, 1994).

Örnek 2.19. $X = \{u,w,z\}$ kümesi için,

$$q(u,w) = 0, q(w,u) = 2, q(u,z) = 1, q(z,u) = 1, q(w,z) = 3,$$
$$q(z,w) = 0, q(u,u) = q(w,w) = q(z,z) = 0$$

ile tanımlanan $q : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu bir quasi metriktir. Fakat ağırlıklı değildir. Kabul edelim ki $\omega : X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu q için bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda (2.2) eşitliği göz önüne alındığında
$\omega(u) = \omega(z), \omega(w) + 3 = \omega(z)$ ve $\omega(w) + 2$ bulunur. Bu denklem sisteminin çözümü olmadığından ω bir ağırlık fonksiyonu olamaz.

Önerme 2.20. (X,q) quasi metrik uzayı ağırlıklıdır ancak ve ancak her $u,w,z \in X$ için

$$q(u,w) + q(w,z) + q(z,u) = q(u,z) + q(z,w) + q(w,u)$$

ve her $t \in X$ için $T_t = \{q(t,u) - q(u,t) | u \in X\}$ kümesinin alttan sınırlı olmasıdır (Vitolo, 1999).

Tanım 2.21. (X,q) bir quasi metrik uzay olsun. $u \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

1) $B_q(u,\varepsilon) = \{w \in X : q(u,w) < \varepsilon\}$

2) $B_q[u,\varepsilon] = \{w \in X : q(u,w) \leq \varepsilon\}$

ile tanımlanan kümelere sırasıyla u merkezli ε yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Matthews, 1994).

Önerme 2.22. Bir (X,q) quasi metrik uzayında her u,w elemanı için

$$q(u,w)=0 \Leftrightarrow u \leq_q w$$

ile tanımlanan $\leq_q$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Matthews, 1994).

İspat.

1) $q(u,u)=0$ olduğundan $u \leq_q u$ olduğu açıktır.

2) $u \leq_q w$ ve $w \leq_q u$ olsun. Bu durumda $q(u,w)=0$ ve $q(w,u)=0$ olup $u=w$ dir.

3) $q(u,w)=0$ ve $q(w,z)=0$ ise $q(u,w) \leq q(u,z)+q(w,z)$
$0 \leq q(u,z)+0$ olduğundan $q(u,z)=0$ elde edilir. Yani, $u \leq_q w$ ve $w \leq_q z$ ise $u \leq_q z$ dir.

■

Tanım 2.23. $X \neq \emptyset$ ve $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $u,w,z \in X$ için

p_1) $p(u,u) \leq p(u,w)$

p_2) $u=w \Leftrightarrow p(u,u)=p(u,w)=p(w,w)$

p_3) $p(u,w)=p(w,u)$

p_4) $p(u,z) \leq p(u,w)+p(w,z)-p(w,w)$

özelliklerini sağlıyor ise p fonksiyonuna X kümesinde bir kısmi metrik ve (X,p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir (Matthews, 1994).

Uyarı 2.24. Her metrik bir kısmi metriktir ancak tersi her zaman doğru değildir (Matthews, 1994).

Gerçektende d fonksiyonu X üzerinde bir metrik olmak üzere;

p_1) $d(u,u)=0 \leq d(u,w)$ olduğu görülür.

p_2) $u=w$ olsun. O halde $d(u,u)=0, d(u,w)=0, d(w,w)=0$ dır. Buradan $d(u,u)=d(u,w)=d(w,w)$ sağlanır. Aksine $d(u,u)=0, d(u,w)=0, d(w,w)=0$ ise $u=w$ dir.

p_3) $d(u,w)=d(w,u)$ olduğu görülür.

p_4) $d(z,z)=0$ olduğundan $d(u,z) \leq d(u,w)+d(w,z)-d(w,w)$ olduğu görülür.

Eğer $p(u,w) = 0$ ise p_1, p_2 aksiyomlarından $u = w$ elde edilir. Ancak $u = w$ ise $p(u,w) = 0$ olmak zorunda değildir. Çünkü $u = w$ ise $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olup, sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

Örnek 2.25. Her $u,w \in \mathbb{R}^+$ için $p(u,w) = max\{u,w\}$ ile tanımlanan $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir (O'Neill, 1995).
Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

p_1) $p(u,u) = max\{u,u\} = u \leq max\{u,w\} = p(u,w)$ dir.

p_2) $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olsun. $max\{u,u\} = max\{u,w\} = max\{w,w\}$ olur. Dolayısıyla $u = w$ olur. $u = w$ ise $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olduğu görülür.

p_3) $p(u,w) = max\{u,w\} = max\{w,u\} = p(w,u)$ olduğundan p_3 aksiyomu sağlanır.

p_4) $p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ olduğunu gösterelim. u,w,z nin birbirine göre durumlarını ele alalım. Öncelikle $u \leq w \leq z$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
p(u,z) = max\{u,z\} &\leq max\{u,w\} + max\{w,z\} - max\{w,w\} \\
&= p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer durumlarda da p_4 aksiyomunun sağlandığı benzer şekilde görülebilir. O halde p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.26. Her $u,w \in \mathbb{R}^-$ için $p(u,w) = -min\{u,w\}$ şeklinde tanımlanan $p : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}^-$ üzerinde bir kısmi metriktir (O'Neill, 1995).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

p_1) min $\{u,w\} \geq u$ olduğundan $-u \leq -min\{u,w\}$ dir. O halde
$p(u,u) = -u \leq -min\{u,w\} = p(u,w)$ dir.

p_2) $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olsun. $-u = -w$ olduğundan $u = w$ elde edilir.
$u = w$ ise $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olduğu açıktır.

p_3) $p(u,w) = -\min\{u,w\} = -min\{w,u\} = p(w,u)$ olduğundan p_3 aksiyomu sağlanır.

p_4) $p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ olduğunu gösterelim. u,w,z nin birbirine göre durumlarını ele alalım. Öncelikle $u \leq w \leq z$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
p(u,z) = -min\{u,z\} &\leq -min\{u,w\} - min\{w,z\} + min\{w,w\} \\
&= p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)
\end{aligned}
$$

olmaktadır. Diğer durumlarda da p_4 aksiyomunun sağlandığı benzer şekilde görülebilir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.27. $X = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi üzerinde

$$p(u,w) = \begin{cases} max\{u,w\}, & \{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset \\ |u-w| & \{u,w\} \subset [0,1] \end{cases}$$

ile beraber (X,p) bir kısmi metrik uzaydır (Chi vd., 2012).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$p_1)$ $\{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u,u) = max\{u,u\} = u \leq max\{u,w\} = p(u,w)$ olur ve $\{u,w\} \subset [0,1] \Rightarrow p(u,u) = |u-u| = 0 \leq |u-w| = p(u,w)$ elde edilir.

$p_2)$ $u = w$ olsun. $\{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olur. $\{u,w\} \subset [0,1] \Rightarrow p(u,u) = p(u,w) = p(w,w) \Rightarrow |u-u| = 0$ dır. $\{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u,u) = u$ ve $p(w,w) = w$ dir. Buradan $u = w$ olur. $\{u,w\} \subset [0,1] \Rightarrow p(u,u) = |u-u| = 0, p(w,w) = |w-w| = 0$ ve $p(u,w) = |u-w| = 0$ olur. Dolayısıyla $u = w$ dir.

$p_3)$ $\{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u,w) = max\{u,w\} = max\{w,u\} = p(w,u)$ dir. $\{u,w\} \subset [0,1] \Rightarrow p(u,w) = |u-w| = |w-u| = p(w,u)$ elde edilir.

$p_4)$ $\{u,w\} \cap [2,3] \neq \emptyset$ ise

$$\begin{aligned} max\{u,z\} &\leq max\{u,w\} + max\{w,z\} - max\{w,w\} \\ &= p(u,w) + p(w,z) + -p(w,w) \end{aligned}$$

olur. $\{u,w\} \subset [0,1]$ ise

$$\begin{aligned} p(u,z) = |u-z| &= |u-z+w-w| \\ &= |u-w+w-z| \\ &\leq |u-w| + |w-z| \\ &= |u-w| + |w-z| - |w,w| \\ &= p(u,w) + p(w,z) - p(w,w) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.28. $X = \mathbb{R}$ ve her u,w için $p(u,w) = e^{max\{u,w\}}$ ile verilsin. (X,p) bir kısmi metrik uzaydır.

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$p_1)$ $max\{u,u\} \leq max\{u,w\}$ dir. Buradan $e^{max\{u,u\}} \leq e^{max\{u,w\}} \Rightarrow p(u,u) \leq p(u,w)$ dir.

$p_2)$ $u = w$ ise
$e^{max\{u,u\}} = e^u$

$e^{max\{u,w\}} = e^u$

$e^{max\{w,w\}} = e^w = e^u$ dir. O halde $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ dir. $p(u,u) = p(u,w) = p(w,w)$ olsun. Bu durumda

$e^{max\{u,u\}} = e^{max\{u,w\}} = e^{max\{w,w\}}$

$e^u = e^{max\{u,w\}} = e^w$

$u = max\{u,w\} = w$

$u = w$ dir.

p_3) $e^{max\{u,w\}} = p(u,w) = e^{max\{w,u\}} = p(w,u)$ olur.

p_4) $max\{u,z\} \leq max\{u,w\} + max\{w,z\} - max\{w,w\}$ olmak üzere $e^{max\{u,z\}} \leq e^{max\{u,w\}} + e^{max\{w,z\}} - e^{max\{w,w\}}$ olur. Bu durumda $p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ olur.

O halde p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.29. $X = \{[k,l] : k,l \in \mathbb{R}, k \leq l\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

p([k, l], [m, n]) = max{l, n} - min{k,m}

ile tanımlanan p fonksiyonu bir kısmi metriktir (Karapınar ve Yüksel, 2011).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

p_1) $p([k,l], p[k,l]) = max\{l,l\} - max\{k,k\} = l - k \leq max\{k,l\} - min\{m,n\} = p([k,l], p[m,n])$ olur.

p_2) $[k,l] = [m,n]$ olsun.

$p([k,l],[k,l]) = max\{l,l\} - min\{k,k\} = l - k$

$p([k,l],[m,n]) = max\{l,n\} - min\{k,m\} = l - k$

$p([m,n],[m,n]) = max\{n,n\} - min\{m,m\} = n - m = l - k$ olur. Yani $p([k,l],[k,l]) = p([k,l],[m,n]) = p([m,n],[m,n])$ olur.

$p([k,l],[k,l]) = p([k,l],[m,n]) = p([m,n],[m,n])$ ise $l - k = p([k,l],[m,n]) = n - m$ olur. Buradan $[k,l] = [m,n]$ elde edilir.

p_3) $p([k,l],[m,n]) = max\{l,n\} - min\{k,m\} = max\{n,l\} - min\{m,k\} = p([m,n],[k,l])$

p_4)

$$\begin{aligned}
p([k,l],[m,n]) &= max\{l,n\} - min\{k,m\} \\
&= max\{l+f-f, n+f-f\} - min\{k+e-e, m+e-e\} \\
&\leq max\{l,f\} + max\{f,n\} - max\{f,f\} - min\{k,e\} - min\{e,m\} + min\{e,e\} \\
&= max\{l,f\} - min\{k,e\} + max\{f,n\} - min\{e,m\} - (max\{f,f\} - min\{e,e\} \\
&= p([k,l],[e,f] + p([e,f],[m,n]) - p([e,f],[e,f]).
\end{aligned}$$

Aksiyomlar sağlandığından p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Tanım 2.30. (X,p) bir kısmi metrik uzay, $w \in X$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

1) $B_p(w,\varepsilon) = \{u \in X | p(u,w) < \varepsilon\}$,

2) $B_p[w,\varepsilon] = \{u \in X | p(u,w) \leq \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümelere sırasıyla w merkezli ε yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Matthews, 1992).

Önerme 2.31. Bir (X,p) kısmi metrik uzayında $p : X \times X \to \mathbb{R}$ ve $\leq_p \subset X \times X$ olmak üzere her u,w elemanı için

$$u \leq_p w \Leftrightarrow p(u,u) = p(u,w)$$

ile tanımlanan $\leq_p$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Matthews, 1994).

İspat.

1) Her $u \in X$ için $p(u,u) = p(u,u)$ olduğundan $u \leq_p u$ olduğu açıktır.

2) $u \leq_p w$ ve $w \leq_p u$ olsun. p_3 aksiyomundan $p(u,w) = p(w,u) = p(w,w)$ ve p_2 aksiyomundan $u = w$ olduğu görülür.

3) $u \leq_p w$ ve $w \leq_p z$ olsun. Bu durumda $p(u,u) = p(u,w)$ ve $p(w,w) = p(w,z)$ olur. p_4 aksiyomundan $p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ dir. Buradan $p(u,z) \leq p(u,u)$ olur. p_1 aksiyomundan $p(u,z) = p(u,u)$ yani $u \leq_p z$ dir.

■

3. METRİK, KISMİ METRİK VE QUASİ METRİK ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Tezin bu bölümünde metrik, kısmi metrik, ve quasi metrik yapıların arasındaki ilişkiye yer verilmiştir.

Önerme 3.1. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve her $u,w \in X$ için

$$d_p(u,w) = 2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u) = p(u,u)$ olan d_p fonksiyonu X üzerinde bir ağırlıklı metriktir (Matthews, 1994).

İspat.

$d_1)$ p_1 ve p_2 aksiyomlarından $p(u,u) \leq p(u,w)$ ve $p(w,w) = p(u,u)$ dir. Yani $d_p(u,w) \geq 0$ dır.

$d_2)$ $d(u,w) = 0$ olsun. Bu durumda
$d_p(u,w) = 0 \Rightarrow 2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) = 0$
$\Rightarrow 2p(u,w) = p(u,u) + p(w,w)$
$\Rightarrow 2p(u,w) = p(u,u) + p(u,u) \wedge 2p(u,w) = p(w,w) + p(w,w)$
$\Rightarrow 2p(u,w) = 2p(u,u) \wedge 2p(u,w) = 2p(w,w)$
$\Rightarrow p(u,w) = p(u,u) = p(w,w)$
$\Rightarrow u = w$ elde edilir. Tersine $u = w$ olduğunu kabul edelim ve $d(u,w) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_p(u,w) &= 2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) \\ &= 2p(u,w) - p(u,w) - p(u,w) \\ &= 2p(u,w) - 2p(u,w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

$d_3)$ $d(u,w) = d(w,u)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_p(u,w) &= 2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) \\ &= 2p(w,u) - p(w,w) - p(u,u) \\ &= d(w,u) \end{aligned}$$

olur.

$d_4)$ $d(u,z) \leq d(u,w) + d(w,z)$ olduğunu gösterelim.
$2p(u,z) - p(u,u) - p(z,z) \leq 2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) + 2p(w,z) - p(w,w) - p(z,z)$

olup $2p(u,z) \leq 2p(u,w) + 2p(w,z) - 2p(w,w)$ dir. Böylece $p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ eşitsizliği elde edilir.

O halde her $u,w,z \in X$ için d_1, d_2, d_3, d_4 aksiyomlarını sağlandığından (X,d) bir metrik uzaydır. Şimdi ağırlıklı metrik için gerekli aksiyomları sağlatalım.

ω_{d_1}) $\omega(u) = u \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $\omega(u) \geq 0$ olur.

ω_{d_2}) $2p(u,w) - p(u,u) - p(w,w) \geq p(u,u) - p(w,w)$ dir. Buradan $p(u,w) \geq p(u,u)$ yani $d(u,w) \geq \omega(u) - \omega(w)$ dir.

■

Örnek 3.2. $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ve $p(u,w) = max\{u,w\}$ ile tanımlanan kısmi metrikten üretilen

$$d_p(u,w) = 2max\{u,w\} - u - w$$

fonksiyonu Önerme 3.1 gereği bir metriktir.

d_1) $2max\{u,w\} - u - w \geq 0$ olduğu açıktır.

d_2) $u = w$ ise $2max\{u,u\} - u - u = 0$ ve $2max\{w,w\} - w - w = 0$ dır. Tersine $d(u,w) = 0$ olsun. $2max\{u,w\} - u - w = 0$ ise $u = w$ dir.

d_3) $2max\{u,w\} - u - w = 2max\{w,u\} - w - u$ yani $d(u,w) = d(w,u)$ olur.

d_4) Kabul edelim ki $d(u,w) > d(u,z) + d(w,z)$ olsun. Bunun sonucunda $2max\{u,w\} - u - w > 2max\{u,z\} - u - z + 2max\{w,z\} - w - z$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $d(u,w) \leq d(u,z) + d(w,z)$ olur.

Önerme 3.3. (X,d,ω) bir ağırlıklı metrik uzay olsun.

$$p_d(u,w) = \frac{d(u,w) + \omega(u) + \omega(w)}{2}$$

ile tanımlanan $p_d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

İspat.

p_1) $\frac{d(u,u)+\omega(u)+\omega(u)}{2} \leq \frac{d(u,w)+\omega(u)+\omega(w)}{2} \Rightarrow p(u,u) \leq p(u,w)$ olduğu görülür.

p_2) $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olsun.
$$\frac{d(u,u) + 2\omega(u)}{2} = \frac{d(w,w) + 2\omega(w)}{2} = \frac{d(u,w) + \omega(u) + \omega(w)}{2}$$
$d(u,u) + 2\omega(u) = d(w,w) + 2\omega(w) = d(u,w) + \omega(u) + \omega(w)$. O halde $u = w$ dir. Tersine $u = w$ ise $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olduğu görülür.

$p_3)$ $p(u,w) = \dfrac{d(u,w)+\omega(u)+\omega(w)}{2} = \dfrac{d(w,u)+\omega(w)+\omega(u)}{2} = p(w,u)$

$p_4)$ $\dfrac{d(u,z)+\omega(u)+\omega(z)}{2} \leq \dfrac{d(u,w)+\omega(u)+\omega(w)}{2} + \dfrac{d(w,z)+\omega(w)+\omega(z)}{2} - \frac{d(w,w)-2\omega(w)}{2}$

$d(u,z) + \omega(u) + \omega(z) \leq d(u,w) + \omega(u) + \omega(w) + d(w,z) + \omega(w) + \omega(z) - d(w,w) - 2\omega(w)$

$d(u,z) \leq d(u,w) + d(w,z) - d(w,w)$

■

Verilen aksiyomlar sağlandığından p_d bir kısmi metriktir.

Önerme 3.4. (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $u,w \in X$ için

$$q_p(u,w) = p(u,w) - p(u,u) \tag{3.2}$$

ile tanımlanan $q_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir quasi metriktir. $u \in X$ için $\omega(u) = p(u,u)$ alındığında q_p fonksiyonu X üzerinde ağırlıklı quasi metriktir (Matthews, 1994).

İspat. İlk olarak q_p nin bir quasi metrik olduğunu gösterelim.

$q_1)$ p_1 aksiyomundan $p(u,u) \leq p(u,w)$ dir. Bu durumda $0 \leq q_p(u,w)$ dir.

$q_2)$ $u = w$ ise $q_p(u,u) = p(u,u) - p(u,u) = 0$ ve $p(w,w) - p(w,w) = 0$ olur.
$q_p(u,w) = p(u,w) - p(u,u) = 0$ olduğundan $p(u,w) = p(u,u)$ dır. Ayrıca $q_p(w,u) = p(w,u) - p(w,w) = 0$ ve $p(w,u) = p(w,w)$ dır. O halde $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ dır. Yani $u = w$ dir.

$q_3)$ $p(u,z) - p(u,u) \leq p(u,w) - p(u,u) + p(w,z) - p(w,w)$
$p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w)$ olur.
Daha sonra ağırlıklı quasi metrik aksiyomlarını inceleyelim.

$\omega_{q_1})$ $\omega(u) \geq 0$ olduğundan ω_{q_1} aksiyomu görülür.

$\omega_{q_2})$ $p(u,u) + p(u,w) - p(u,u) = p(w,w) + p(w,u) - p(w,w)$

$p(u,w) = p(w,u)$. Dolayısıyla $\omega(u) - \omega(w) = q_p(w,u) - q_p(u,w)$ dir.

O halde q_p fonksiyonu bir ağırlıklı quasi metriktir. ■

Örnek 3.5. $p : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ ve $p(u,w) = -min\{u,w\}$ ile tanımlanan kısmi metrikten üretilen $q_p = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$q_p(u,w) = p(u,w) - p(u,u) = -min\{u,w\} + u$$

fonksiyonu Önerme 3.4 gereği bir quasi metriktir. Gerçekten de $q_1 - q_3$ koşullarının sağlandığı aşağıdaki şekilde görülür.

q_1) $q(u,w) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

q_2) $q(u,w) = q(w,u) = 0$ olsun. Bu durumda $q(u,w) = -min\{u,w\} + u = 0$ ve $q(w,u) = -min\{w,u\} + w = 0$ olduğundan $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. Bu durumda $-min\{u,w\} + u = 0$ dır. Yani $q(u,w) = q(w,u) = 0$ dır.

q_3) Kabul edelim ki $q(u,z) > q(u,w) + q(w,z)$ olsun. Bunun sonucunda $-min\{u,z\} + u > -min\{u,w\} + u - min\{w,z\} + w$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $q(u,z) \leq q(u,w) + q(w,z)$ olur.

Önerme 3.6. (X,q,ω) bir ağırlıklı quasi metrik ve her $u,w \in X$ için

$$p_q(u,w) = q(u,w) + \omega(u)$$

ile tanımlanan $p_q : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

İspat.

p_1) q_1 aksiyomundan $0 \leq q(u,w)$ dir. $\omega(u) \leq q(u,w) + \omega(u)$ olur. Yani $p(u,u) \leq p(u,w)$ dir.

p_2) $u = w$ ise $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olduğu görülür. Tersine $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olsun. q_1 aksiyomundan $\omega(u) = q(u,w) + \omega(u) = \omega(w)$dir. Buradan w_q tanımından $\omega(u) = q(u,w) + \omega(u) = q(w,u) + \omega(w) = \omega(w)$ dir. O halde $q(u,w) = q(w,u) = 0$ dır. q_2 aksiyomundan $u = w$ elde edilir.

p_3) w_q tanımından $q(u,w) + \omega(u) = q(w,u) + \omega(w)$ dir. Yani $p(u,w) = p(w,u)$ olur.

p_4) q_2 ve q_3 aksiyomlarından

$$\begin{aligned} q(u,z) &\leq q(u,w) + q(w,z) dir. \\ q(u,z) + \omega(u) &\leq q(u,w) + \omega(u) + q(w,z) + \omega(y) - \omega(y) \\ p(u,z) &\leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla p_q fonksiyonu bir kısmi metriktir. ■

Örnek 3.7. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u,w) = u$ olan $q((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = \dfrac{\sqrt{(u_1-u_2)^2+(w_1-w_2)^2}+u_2-u_1}{2}$ ağırlıklı quasi metrikten üretilen

$$p_q(u,w) = p_q((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = u_1 + \frac{\sqrt{(u_1-u_2)^2+(w_1-w_2)^2}+u_2-u_1}{2}$$

fonksiyonu Önerme 3.6 gereği bir kısmi metriktir.

Önerme 3.8. (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $u,w \in X$ için

$$d_p(u,w) = max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\}$$

ile tanımlanan $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (Chi vd., 2012).

İspat.

d_1) p_1 ve p_2 aksiyomlarından $p(u,u) \leq p(u,w) \Rightarrow p(u,u)-p(u,w) \geq 0$ ve $p(w,w) \leq p(u,w) \Rightarrow p(u,w)-p(w,w) \geq 0$ olup $d_p(u,w) = max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\} \geq 0$ elde edilir.

d_2) $u = w$ olsun. Bu durumda $d_p(u,w) = max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\}$'dir. Dolayısıyla $max\{0,0\} = 0$ olur. Aksine $d_p(u,w) = 0$ olsun. Buradan $d_p(u,w) = max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\} = 0$'dir. $p(u,w)-p(u,u) = 0$ ise $p(u,w) = p(u,u)$ ve $p(u,w)-p(w,w) = 0$ ise $p(u,w) = p(w,w)$ olur. Yani $u = w$ dir.

d_3) p_3 aksiyomundan

$$\begin{aligned} d_p(u,w) &= max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\} \\ &= max\{p(w,u)-p(w,w), p(w,u)-p(w,w)\} \\ &= d_p(w,u) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

d_4) p_4 aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned} d(u,z) &= max\{p(u,z)-p(u,u), p(u,z)-p(z,z)\} \\ &\leq max\{p(u,w)+p(w,z)-p(w,w)-p(u,u), p(u,w)+p(w,z)-p(w,w)-p(z,z)\} \\ &= max\{p(u,w)-p(u,u), p(u,w)-p(w,w)\} + max\{p(w,z)-p(w,w), p(w,z)-p(z,z)\} \\ &= p(u,w)+p(w,z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla d_p fonksiyonu bir metriktir. ■

4. BENZERLİK METRİĞİ

Bu bölümde benzerlik metrik uzay kavramı verilerek metrik uzay ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonraki bölümde ise benzerlik metrik uzayının quasi metrik uzay ve kısmi metrik uzay ile arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 4.1. X boştan farklı bir küme ve $s : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $u, w, z \in X$ için

s_1) $s(u,w) = s(w,u)$

s_2) $s(u,u) \geq 0$

s_3) $s(u,w) \leq s(u,u)$

s_4) $s(u,w) + s(w,z) \leq s(u,z) + s(w,w)$

s_5) $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w) \Leftrightarrow u = w$

aksiyomları sağlanıyor ise s fonksiyonuna X üzerinde bir benzerlik metriği ve (X,s) bir benzerlik uzayı denir. Verilen tanıma bakarak şunu söyleyebiliriz metrik uzayların aksine iki eleman birbirine benzedikçe $s(u,w)$ değeri büyür. Ayrıca her $u, w \in X$ için $|s(u,w)| \leq 1$ ise s (normalize) benzerlik metriği denir (Chen vd., 2009).

Önerme 4.2. $s_1(u,w) \geq 0$ ve $s_2(u,w) \geq 0$ iki benzerlik metriği verilsin. $s_1(u,w) + s_2(u,w)$ bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

İspat. $s_1(u,w)$ ve $s_2(u,w)$ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan aşağıdaki aksiyomları sağlar:

s_1) $s_1(u,w) + s_2(u,w) = s_1(w,u) + s_2(w,u)$ yani $s_1(u,w) = s_1(w,u)$ ve $s_2(u,w) = s_2(w,u)$ olur.

s_2) s_1 ve s_2 benzerlik metriği olduğundan ve s_2 aksiyomundan $s(u,u) \geq 0$ vardır. O halde $s_1(u,u) + s_2(u,u) \geq 0$ olduğu açıktır.

s_3) $s_1(u,w)$ ve $s_2(u,w)$ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan $s_1(u,w) \leq s_1(u,u)$ ve $s_2(u,w) \leq s_2(u,u)$ olur. Buradan iki eşitsizlik toplandığında s_3 aksiyomunun sağlandığı açıktır.

s_4) $s_1(u,w)$ ve $s_2(u,w)$ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan $s_1(u,w) + s_1(w,z) \leq s_1(u,z) + s_1(w,w)$ ve $s_2(u,w) + s_2(w,z) \leq s_2(u,z) + s_2(w,w)$ olur. Buradan iki eşitsizlik toplandığında s_4 aksiyomunun sağlandığı açıktır.

s_5) $u = w$ ise $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğu görülür. $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olsun. Bu durumda $s_1(u,u) + s_2(u,u) = s_1(w,w) + s_2(w,w) = s_1(u,w) + s_2(u,w)$ olduğundan $u = w$ olur.

■

Örnek 4.3. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A,B \in X$ için

$$s(A,B) = |A \cap B|$$

ile tanımlı $s : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de s fonksiyonunun $s_1 - s_5$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

s_1) $|A \cap B| = |B \cap A|$ olduğundan s_1 aksiyomunun sağlandığı açıktır.

s_2) Her A için $|A| \geq 0$ olduğundan s_2 aksiyomunun görülür.

s_3) $A \cap B \subset A$ olup, $|A \cap B| \leq |A|$ olduğu görülür.

s_4) s_4 aksiyomunun sağlandığı bir Venn şeması yardımıyla görülür.

s_5) $A = B$ ise $s(A,A) = s(B,B) = s(A,B)$ olduğu açıktır. $s(A,A) = s(B,B) = s(A,B)$ olsun. Bu durumda $|A| = |B| = |A \cap B|$ olduğundan $A = B$ olur.

Dolayısıyla s fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Örnek 4.4. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A,B \in X$ için

$$s(A,B) = \frac{|A \cap B|}{max\{|A|,|B|\}}$$

ile tanımlı $s : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Örnek 4.5. İstatistikten bilinen Jaccard indeksi X kümesinden alınan sonlu A ve B kümeleri arasındaki benzerliği ölçer ve

$$J(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

ile gösterilir. Bu X üzerinde bir benzerlik metriği ve (X,J) bir benzerlik uzayıdır (Chen vd., 2009) (Rozinek ve Mares, 2021).

Ayrıca yapılan çalışmalarda benzerlik ve uzaklık birbiri ile ilişkilendirilmiştir (Elzinga, 2014) (Chen vd., 2009). Örneğin (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $u,w \in X$ ve sabit bir $t \in X$ için

$$s(u,w) = d(u,t) + d(w,t) - d(u,w)$$

fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.
Benzerlik metriği ve metrik (uzaklık) arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.6. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere her $u,w \in X$ için $d(u,w) \leq 1$ ise d fonksiyonuna (normalize) metrik denir (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

Önerme 4.7. d fonksiyonu (normalize) uzaklık metriği ise, 1 - d (normalize) benzerlik metriğidir. Eğer s fonksiyonu, $s(u,w) \geq 0$ ve $s(u,u) = 1$ olan (normalize) benzerlik metriği ise $1-s$ (normalize) metriktir (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

İspat. İlk olarak $s = 1-d$ nin bir normalize benzerlik metriği olduğunu gösterelim.

s_1) $1-d(u,w) = 1-d(w,u)$ yani $s(u,w) = s(w,u)$ olur.

s_2) $1-d(u,u) \geq 0$ olduğu açıktır.

s_3) $d(u,w) \geq d(u,u)$ olduğundan ;
$-d(u,w) \leq -d(u,u)$
$1-d(u,w) \leq 1-d(u,u)$ elde edilir.

s_4) $d(u,w)+d(w,z) \geq d(u,z)+d(w,w)$ olsun.
$-d(u,w)-d(w,z) \leq -d(u,z)-d(w,w)$
$1-d(u,w)+1-d(w,z) \leq 1-d(u,z)+1-d(w,w)$

s_5) $u = w$ ise $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğu açıktır. Tersine $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olsun. Bu durumda $1-d(u,u) = 1-d(w,w) = 1-d(u,w)$ olduğundan $u = w$ dir. Şimdi (normalize) benzerlik metriği olması için gerekli aksiyomumuzu gösterelim ve bunuda s^* olarak tanımlayalım.
$s^* = s(u,w) \leq 1$
$d(u,w) \leq 1$
$-d(u,w) \geq -1$
$1-d(u,w) \geq 0$
$1 \geq d(u,w)$.

Aksiyomların sağlandığı görülür. Dolayısıyla bir normalize benzerlik metriğidir.
Şimdi $d = 1-s$ fonksiyonunun (normalize) metrik olduğunu gösterelim.

d_1) $1-s(u,w) \geq 0$ s fonksiyonun tanımından açıktır.

d_2) $1-s(u,w) = 0$ ise $u = w$ dir. Tersine $u = w$ ise $1-s(u,u) = 0$ dır.

d_3) $1-s(u,w) = 1-s(w,u)$ yani $s(u,w) = s(w,u)$ olur.

d_4) $s(w,w)+s(u,z) \geq s(u,w)+s(w,z)$
$-s(w,w)-s(u,z) \leq -s(u,w)-s(w,z)$ olur.
$1-s(u,z) \leq 1-s(u,w)+1-s(w,z)$ elde edilir.

Şimdi (normalize) metrik olması için gerekli aksiyomumuzu gösterelim ve bunu da d^* olarak tanımlayalım.

$d^* = d(u,w) \leq 1$

$s(u,w) \leq 1$

$-s(u,w) \geq -1$

$1 - s(u,w) \geq 0$

$1 \geq s(u,w)$

Aksiyomların sağlandığı görülür. Dolayısıyla bir normalize metriktir. ■

Önerme 4.8. (X,s) bir benzerlik metrik uzayı olmak üzere her $u,w \in X$ için

$$d_s(u,w) = \frac{s(u,u)+s(w,w)}{2} - s(u,w)$$

ile tanımlanan d_s fonksiyonu bir metriktir (Chen vd., 2009).

İspat.

d_1) s_2 ve s_3 aksiyomlarından

$$d_s(u,w) = \frac{s(u,u)+s(w,w)}{2} - s(u,w) = \frac{s(u,u)-(u,w)+s(w,w)-s(u,w)}{2} \geq 0$$

olduğu görülür.

d_2) Eğer $u = w$ ise $d_p(u,w) = 0$ dır. Tersine $d_p(u,w) = 0$ ise $s(u,u)+s(w,w)-2s(u,w) = 0$ olur. $s(u,u) \geq s(u,w)$ ve $s(w,w) \geq s(u,w)$ olduğundan $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ dir. Dolayısıyla $u = w$ dir.

d_3)

$$\begin{aligned} d_s(u,w) &= \frac{s(u,u)+s(w,w)-2s(u,w)}{2} \\ &= \frac{s(w,w)+s(u,u)-2s(w,u)}{2} \\ d_s(w,u) &= \frac{s(w,w)+s(u,u)}{2} - s(w,u) \end{aligned}$$

d_4)

$$
\begin{aligned}
d_s(u,z) &= \frac{s(u,u)+s(z,z)-2s(u,z)}{2} \\
&\leq \frac{s(u,u)+s(z,z)+2s(w,w)-2s(u,w)-2s(w,z)}{2} \\
&= \frac{s(u,u)+s(w,w)-2s(u,w)}{2} + \frac{s(w,w)+s(z,z)-2s(w,z)}{2} \\
&= d_s(u,w)+d_s(w,z).
\end{aligned}
$$

■ Verilen aksiyomlar sağlandığından d_p bir metriktir.

Önerme 4.9. (X,s) bir benzerlik metrik uzayı olsun.

$$d_s(u,w) = max\{s(u,u),s(w,w)\} - s(u,w)$$

fonksiyonu bir metriktir (Chen vd., 2009).

İspat.

d_1) s_3 ve s_5 aksiyomlarından $s(u,u),s(w,w) \geq s(u,w)$ dir. O halde $max\{s(u,u),s(w,w)\} - s(u,w) \geq 0$ olacağı açıktır. Dolayısıyla $d_s(u,w) \geq 0$ bulunur.

d_2) $d_s(u,w) = max\{s(u,u),s(w,w)\} - s(u,w) = 0$ olsun. Bu durumda s_5 aksiyomu gereği $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğundan $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. s_5 aksiyomundan $d_s(u,w) = 0$ dır.

d_3) $d_s(u,w) = max\{s(u,u),s(w,w)\} - s(u,w) = max\{s(w,w),s(u,u)\} - s(w,u) = d_s(w,u)$

d_4) $d_s(u,z) = max\{s(u,u),s(z,z)\} - s(u,z)$ ve $d_s(u,w) + d_s(w,z) = max\{s(u,u),s(w,w)\} - s(u,w) + max\{s(w,w),s(z,z)\} - s(w,z)$ s_3 ve s_4 aksiyomlarından sağlandığı görülür.

Dolayısıyla d_s fonksiyonu bir metriktir. ■

Örnek 4.10. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A,B \in X$ için $s(A,B) = |A \cap B|$ benzerlik metriğinden üretilen

$$d_s(A,B) = max\{|A|,|B|\} - |A \cap B|$$

fonksiyonu Önerme 4.9 gereği bir metriktir.

Önerme 4.11. (X,d) bir metrik uzay ve $m \geq 1$ olmak üzere herhangi bir sabit $o \in X$ için

$$s_d(u,w) = \frac{d(u,o)+d(w,o)}{m} - d(u,w)$$

fonksiyonu bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

İspat.

$$s_1)\ \ s_d(u,w) = \frac{d(u,o)+d(w,o)}{m} - d(u,w)$$
$$= \frac{d(w,o)+d(u,o)}{m} - d(w,u)$$
$$= s_d(w,u)$$

$$s_2)\ \ s_d(u,w) = \frac{d(u,o)+d(u,o)}{m} - d(u,u)$$
$$= \frac{2d(u,o)}{m} - d(u,u)$$
$$= \frac{2d(u,o)}{m} \geq 0$$

$$s_3)\ \ s_d(u,u) = \frac{2d(u,o)}{m} - 0$$
$$s_d(u,w) = \frac{d(u,o)+d(w,o)}{m} - d(u,w)$$
$$s_d(u,u) \geq s_d(u,w)$$

$$s_4)\ \ \frac{1}{m}(d(u,o)+d(z,o)) - d(u,z) \geq \frac{1}{m}(d(u,o)+d(w,o)+d(w,o)+d(z,o)-d(w,o)-d(w,o))$$
$$-d(u,w) - d(w,z) + d(w,w)$$
$$d(u,w)+d(w,z) \geq d(u,z)+d(w,w)$$

$$s_5)\ \ \frac{2d(u,o)}{m} - d(u,u) = \frac{2d(w,o)}{m} - d(w,w) = \frac{d(u,o)+d(w,o)}{m} - d(u,w)$$
$$d(u,u) = d(w,w) = d(u,w) \Rightarrow u = w$$
$$u = w \Rightarrow \frac{2d(u,o)}{m} - d(u,u) = \frac{2d(w,o)}{m} - d(w,w) = \frac{d(u,o)+d(w,o)}{m} - d(u,w)$$
$$s_d(u,u) = s_d(w,w) = s_d(u,w)$$

O halde s_d fonksiyonu bir benzerlik metriğidir. ■

Örnek 4.12. $s : X \times X \to \mathbb{R}$ (normalize) benzerlik metriği ve her $u \in X$ için $s(u,u) = 1$ olsun. Bu durumda

$$d_s : X \times X \to \mathbb{R} \text{ ve } d_s(u,w) = \frac{1}{2}(1 - s(u,w))$$

fonksiyonu bir (normalize) metriktir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de d_s fonksiyonunun $m_1 - m_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$d_1)\ \ d_s(u,w) = \frac{1}{2}(1 - s(u,w))$$
$$\Rightarrow -1 \leq s(u,w) \leq 1$$

$\Rightarrow 1 \geq -s(u,w) \geq -1$
$\Rightarrow 2 \geq 1 - s(u,w) \geq 0$
$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2}(1 - s(u,w)) \geq 0$
$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(1 - s(u,w)) \leq 1$

$d_2)$ $d_s(u,w) = \frac{1}{2}(1 - s(u,w))$
$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(1 - s(u,w))$
$\Rightarrow 0 = 1 - s(u,w)$
$\Rightarrow 1 = s(u,w)$
$\Rightarrow u = w$
$u = w \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u,w) = 0$
$\Rightarrow 1 - s(u,w) = 0$
$\Rightarrow d_s(u,w) = 0$

$d_3)$ $d_s(u,w) = \frac{1}{2}(1 - s(u,w))$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(w,u)) = d_s(w,u)$

$d_4)$ $s(u,w) \geq s(u,z) + s(w,z) - s(w,w)$
$\Rightarrow -s(u,w) \leq -s(u,z) - s(w,z) + s(w,w)$
$\Rightarrow 1 - s(u,w) \leq 1 - s(u,z) + 1 - s(w,z) + 1 - s(w,w)$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u,w) \leq \frac{1}{2}((1 - s(u,z) + (1 - s(w,z))$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u,w) \leq \frac{1}{2}(1 - s(u,z) + \frac{1}{2}(1 - s(w,z))$
$\Rightarrow d_s(u,w) \leq d_s(u,z) + d_s(w,z)$

Dolayısıyla d_s fonksiyonu bir metriktir. Şimdi d_s fonksiyonunun bir (normalize) metrik olduğunu gösterelim.

$d^* = d_s(u,w) \leq 1$
$\Rightarrow -1 \leq s(u,w)$
$\Rightarrow 1 \geq -s(u,w)$
$\Rightarrow 2 \geq 1 - s(u,w)$
$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2}(1 - s(u,w)$
$\Rightarrow d_s(u,w) \leq 1$

Örnek 4.13. $X \neq \emptyset$ üzerinde tanımlanan $s(u,w) = e^{-d(u,w)}$ fonksiyonu bir (normalize) benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de d fonksiyonunun $s_1 - s_5$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür :

$s_1)$ d_2 aksiyomundan $e^{-d(u,w)} = e^{-d(w,u)}$ dir.

$s_2)$ $s(u,u) = 0$
$\Rightarrow -s(u,u) = 0$
$\Rightarrow e^{-d(u,u)} = e^0 = 1$

$s_3)$ $s(u,w) \geq 0$
$\Rightarrow -s(u,w) \leq 0$
$\Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq e^0 = 1$
$\Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq 1$
$\Rightarrow e^{-d(u,u)} \geq e^{-d(u,w)}$

$s_4)$ $s(u,z) \leq s(u,w) + s(w,z) - s(w,w)$
$s(u,z) + s(w,w) \leq s(u,w) + s(w,z)$
$-s(u,z) - s(w,w) \geq -s(u,w) - s(w,z)$
$e^{-d(u,z)} + e^{-d(w,w)} \geq e^{-d(u,w)} + e^{-d(w,z)}$

$s_5)$ $e^{-d(u,u)} = e^{-d(w,w)} = 1 = e^{-d(u,w)} \Leftrightarrow -s(u,w) = 0$
$\Leftrightarrow s(u,w) = 0$
$\Leftrightarrow u = w$ olur. Tersine $u = w$ ise $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ dir. $s_1 - s_5$ aksiyomları sağlandığından d bir benzerlik metriğidir. Şimdi (normalize) benzerlik metriği olması için gerekli koşulu sağlatalım.
$s^* = |s(u,w)| \leq 1$
$\Rightarrow s(u,w) \geq 0$
$\Rightarrow -s(u,w) \leq 0$
$\Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq e^0$
$\Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq 1$
$\Rightarrow |e^{-d(u,w)}| \leq |1|.$

s fonksiyonu bir (normalize) benzerlik metriğidir.

5. BENZERLİK METRİĞİNİN KISMİ METRİK VE QUASİ METRİK İLE İLİŞKİLERİ

Tezin bu bölümünde diğer çalışmalardan farklı olarak benzerlik metriğinin kısmi metrik ve quasi metrik ile ilişkileri incelenmiş ve çeşitli örnekler verilmiştir.

Önerme 5.1. (X,s) bir benzerlik uzayı ve $q_s : X \times X \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $u,w \in X$ için

$$q_s(u,w) = s(u,u) - s(u,w)$$

ile tanımlanan (X,q_s) ikilisi quasi metrik uzaydır.

İspat.

$q_1)$ s_2 aksiyomundan görülür.

$q_2)$ Her $u,w \in X$ için $q_s(u,w) = q_s(w,u) = 0$ ise $q_s(u,w) = s(u,u) - s(u,w) = 0$ ve $q_s(w,u) = s(w,w) - s(w,u) = 0$ dır. Yani s_3 aksiyomundan $s(u,u) = s(u,w) = s(w,w)$ elde ederiz ve dolayısıyla s_4 aksiyomundan $u = w$ elde ederiz. Ayrıca bunun terside açıktır.

$q_3)$ Tüm $u,w \in U$ için s_5 aksiyomu kullanılarak aşağıdaki gibi sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} q_s(u,z) &= s(u,u) - s(u,z) \\ &\leq s(u,u) - [s(u,w) + s(w,z) - s(w,w) \\ &= s(u,u) - s(u,w) + s(w,w) - s(w,z) \\ &= q_s(u,w) + q_s(w,z) \end{aligned}$$

Dolayısıyla q_s bir quasi metriktir. ■

Örnek 5.2. $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ olmak üzere $s(u,w) = min\{u,w\} - u - w$ ile tanımlanan benzerlik metriğinden üretilen

$$q_s(u,w) = w - min\{u,w\}$$

fonksiyonu Önerme 5.1 gereği bir quasi metriktir. s fonksiyonunun $(q_1 - q_3)$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür :

$q_1)$ $q(u,w) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

$q_2)$ $u = w$ olsun. Bu durumda $u - min\{u,u\} = 0$ olduğundan $q(u,w) = q(w,u) = 0$ dır. Tersine $q(u,w) = q(w,u) = 0$ olsun. Bu durumda $q(u,w) = w - min\{u,w\} = 0$ dır. O halde $u = w$ dir.

q_3) Kabul edelim ki $q(u,z) > q(u,w) + q(w,z)$ olsun. Bunun sonucunda $w - min\{u,z\} > w - min\{u,w\} + w - min\{w,z\}$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $q(u,z) \leq q(u,w) + q(w,z)$ olur.

Dolayısıyla q_s fonksiyonu bir quasi metriktir.

Uyarı 5.3. Herhangi bir $u,w \in X$ için $s(u,w) < M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa, o zaman

$$\omega_s(u) = M - s(u,u)$$

fonksiyonu aslında (X,q_s) için bir ağırlık fonksiyonudur. Böylece bir M elemanının varlığında, bir s fonksiyonundan ağırlıklı quasi metrik elde edilebilir. Sonuç olarak, normalize bir benzerlik metriğinden ağırlıklı quasi metrik elde edilebilir.

Örnek 5.4. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olmak üzere $s : X \times X \to \mathbb{R}$ için

$$s(A,B) = |A \cap B|$$

fonksiyonunun bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.4 te belirtilmiştir.
Üstelik X in elemanları sonlu kümeler olduğundan $\sup\{|A| : A \in X\} < \infty$ olur. Bu sayıya M diyelim. Önermemiz sonucunda X üzerinde

$$\begin{aligned} q(A,B) &= s(A,A) - s(A,B) \\ &= |A \cap A| - |A \cap B| = |A| - |A \cap B| = |A \setminus B| \end{aligned}$$

fonksiyonu Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 gereği $\omega(A) = M - s(A,A) = M - |A|$ ile birlikte bir ağırlıklı quasi metrik uzaydır.

q_1) $|A \setminus A| = |\emptyset| = 0$ olduğundan $q_1$aksiyomu sağlanır.

q_2) $A = B \Rightarrow q(A,B) = q(B,A) = 0$ olduğu görülür. Tersine $q(A,B) = q(B,A) = 0$ olsun. $q(A,B) = |A \setminus B| = 0$. Yani $A \subset B$ ve $q(B,A) = |B \setminus A| = 0$ olduğundan $B \subset A$. Dolayısıyla $A = B$ olur.

q_3) q_3 aksiyomunun sağlandığı bir Venn şeması yardımıyla görülebilir.
Daha sonra ağırlıklı quasi metrik aksiyomlarımızı gösterelim.

w_{q_1}) $\omega(A)$ tanımından açıktır.

w_{q_2}) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ve $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$
$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ve $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ dir. Buradan
$M - |A| + |A \setminus B| = M - |B| + |B \setminus A|$ olur. $|A|$ ve $|B|$ eşitlikleri yerine konulursa

$= -|A \setminus B| + |A \cap B| + |A \setminus B| = -|B \setminus A| + |A \cap B| + |B \setminus A|$ yani
$\omega(A) + q(A,B) = \omega(B) + q(B,A)$ olur.

Örnek 5.5. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A,B \in X$ için

$$s(A,B) = \frac{|A \cap B|}{max\{|A|,|B|\}}$$

ile tanımlı $s : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.5 de belirtilmiştir. Burada her $A,B \in X$ için $s(A,B) \leq 1$ olduğu görülebilir. Diğer yandan, $s(A,A) = 1$ dir. Böylece Önerme 5.1 gereği

$$q_s(A,B) = s(A,A) - s(A,B) = 1 - s(A,B)$$

fonksiyonu Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 gereği X üzerinde bir quasi metrik olup, $M = 1$ için $\omega_s(A) = M - s(A,A) = 0$ ağırlık(sabit) fonksiyonu ile birlikte (X, q_s, ω_s) bir ağırlıklı quasi metrik uzaydır.

Ancak bir quasi metrikten bir benzerlik metriği elde etmek mümkün olmayabilir. Bunu yapabilmek için (X,q) üzerinde bir ağırlık fonksiyonuna da ihtiyacımız vardır.

Önerme 5.6. (X, q, ω_q) ağırlıklı quasi metrik uzay olsun. $s_q(u,w) : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u,w \in X$ için

$$s_q(u,w) = \omega_q(u) - q(w,u)$$

(X, s_q) bir benzerlik metrik uzayıdır.

İspat.

$s_1)$ q_2 aksiyomundan ve ω tanımından görülür.

$s_2)$ Tüm $u,w \in X$ q_1 ve q_2 aksiyomlarını kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$s_q(u,u) - s_q(u,w) = \varphi_q(u,w) - q(u,u) - \omega_q(u) + q(w,u) \geq 0.$$

$s_3)$ Tüm $u,w \in X$ için (2.2) koşulunu kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} s_q(u,w) - s_q(w,u) &= \omega_q(u) - q(w,u) - \omega_q(u) + q(u,w) \\ &= \omega_q(u) - \omega_q(w) - q(w,u) + q(u,w) \\ &= q(w,u) - q(u,w) + q(w,u) - q(u,w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

s_4) Tüm $u,w,z \in X$ ve q_2 ve q_3 aksiyomlarını kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} s_q(u,z) &= \omega_q(u) - q(z,u) \\ &\geq \omega_q(u) - [q(z,w) + q(w,u)] \\ &= \omega_q(u) - q(w,u) + \omega_q(w) - q(z,w) - \omega_q(w) - q(w,w) \\ &= s_q(u,w) + s_q(w,z) - s_q(w,w) \end{aligned}$$

s_5) Eğer her $u,w \in X$ için $s_q(u,u) = s_q(u,w)$ ise $\omega_q(u) = \omega_q(u) - q(w,u)$ olur ve dolayısıyla $q(w,u) = 0$ elde ederiz. Benzer şekilde eğer $s_q(w,w) = s_q(u,w)$ ise s_3 aksiyomunu kullanırsak, o zaman $\omega_q(w) = \omega_q(w) - q(u,w)$ ve dolayısıyla $q(u,w) = 0$ olur. Böylece q_2 aksiyomundan $u = w$ elde ederiz. Ayrıca bunun tersi de açıktır.

Dolayısıyla s_q bir benzerlik metriğidir. ■

Örnek 5.7. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u,w) = u$ olan $q((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = \dfrac{\sqrt{(u_1-u_2)^2 + (w_1-w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$ ağırlıklı quasi metrikten üretilen

$$s_q(u,w) = s_q((u_1,w_1),(u_2,w_2)) = u_1 - \frac{\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (w_2-w_1)^2} + u_1 - u_2}{2}$$

fonksiyonu Önerme 5.6 gereği bir benzerlik metriğidir. Gerçektende s_q fonksiyonunun benzerlik metriği aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

s_1) $s_q(u,w) = \frac{u_1+u_2-\sqrt{(u_2-u_1)^2+(w_2-w_1)^2}}{2} = \frac{u_2+u_1-\sqrt{(u_1-u_2)^2+(w_1-w_2)^2}}{2} = s_q(w,u)$ dir.

s_2) $\frac{u_1+u_1-\sqrt{(u_1-u_1)^2+(w_1-w_1)^2}}{2} = u_1 > 0$ olduğundan s_2 aksiyomu sağlanır.

s_3) $u = (u_1,w_1), w = (u_2,w_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{\sqrt{(u_2-u_1)^2+(w_2-w_1)^2}}{2} = A$ dersek buradan A fonksiyonunu koordinat ekseninde göstericek olursak dik kenarları $|u_1 - u_2|$ ve $|w_1 - w_2|$ olan dik üçgenin hipotenüsüdür. O halde $A + u_1 - u_2 \geq 0$ olduğu görülür. Yani s_3 aksiyomunun sağlandığı görülür. Benzer şekilde s_4 ve s_5 aksiyomlarının da sağlandığı görülür. Dolayısıyla s_q fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Uyarı 5.8. Yukarıdaki gösterime bakarak, benzerlik metriği s_q dan quasi metrik q_{s_q} fonksiyonunu oluşturarak, gerçektende q nun eşleniği olan q^* elde edilmiştir. Yani $q_{s_q} = q^*$ dır. Ayrıca her $u,w \in X$ için $s_q(u,w) < M$ eşitsizliğini sağlayan bir M varsa $\omega_{s_q} = M - \omega_q$ dir.

s fonksiyonu X üzerinde tanımlı bir benzerlik metriği olmak üzere

$$d(u,w) = s(u,u) + s(w,w) - 2s(u,w)$$

fonksiyonu bir metriktir (Rozinek ve Mares, 2021).
Dolayısıyla aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz:

Sonuç 5.1. (X,s) bir benzerlik metrik uzay ve $d_s = q_s + q_s^*$ olmak üzere

$$d_s(u,w) = s(u,u) + s(w,w) - 2s(u,w)$$

fonksiyonu bir metriktir.

Önerme 5.9. (X,p) bir kısmi metrik olsun. $s_p : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve her $u,w \in X$ için

$$s_p(u,w) = p(u,u) + p(w,w) - p(u,w)$$

sağlanıyor ise (X,s_p) benzerlik metrik uzayıdır.

İspat. $q_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$olmak üzere her $u,w \in X$ için

$$q_p(u,w) = p(u,w) - p(u,u)$$

fonksiyonunun bir ağırlıklı quasi metrik olduğu Önerme 3.4 de verilmiştir. Önerme 5.6 dan

$$s(u,w) = \omega_q(u) - q(w,u)$$

fonksiyonu bir benzerlik metriğidir. Dolayısıyla $s(u,w) = p(u,u) + p(w,w) - p(u,w)$ dir.

■

Örnek 5.10. $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ve $p(u,w) = max\{u,w\}$ olmak üzere bu kısmi metrikten üretilen benzerlik fonksiyonu $s_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$s_p(u,w) = u + w - max\{u,w\}$$

fonksiyonu Önerme 5.9 gereği bir benzerlik metriğidir.

s_1) $u + w - max\{u,w\} = w + u - \max\{w,u\}$ yani $s(u,w) = s(w,u)$

s_2) $s(u,u) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

s_3) 2 durum söz konusudur. Bu durumları inceleyecek olursak 1. durumumuz $max\{u,w\} = u$ ise $s(u,w) = u + w - u = w$ olur. 2. durumumuz $max\{u,w\} = w$ ise $s(u,w) = u + w - w = u$ olur ve $s(u,u) = u + u - u = u$ olur. Dolayısıyla $s(u,w) \leq s(u,u)$ dir.

s_4) Kabul edelim ki $s(u,w) + s(w,z) > s(u,z) + s(w,w)$ olsun. Bunun sonucunda $w + max\{u,z\} > max\{u,w\} + max\{w,z\}$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için çelişki elde edildiğinden $s(u,w) + s(w,z) \leq s(u,z) + s(w,w)$ dir.

$s_5)$ $u = w$ olsun. O halde $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğu açıktır. $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olsun. $w = u = u + w - max\{u,w\}$ yani $u = w$ olur.

Dolayısıyla s_p fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Önerme 5.11. (X,s) bir benzerlik uzayı ve $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere keyfi $u,w \in X$ için $s(u,w) < M$ olsun. $p_s : X \times X \to \mathbb{R}$ ve her $u,w \in X$ için

$$p_s(u,w) = M - s(u,w) \tag{5.1}$$

ile tanımlanan (X,p_s) bir kısmi metrik uzaydır.

İspat. Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 de belirtildiği gibi (X,q_s,ω) uzayı

$$q_s(u,w) = s(u,u) - s(u,w) \text{ ve } \omega(u) = M - s(u,u)$$

olan ağırlıklı quasi metriktir. O halde Önerme 5.6 dan q_s ye karşılık gelen p kısmi metrik,

$$p(u,w) = \omega(u) + q_s(u,w)$$

olur. Dolayısıyla $p(u,w) = M - s(u,w)$ olur.

■

Örnek 5.12. A ve B kümeleri sonlu kümeler olmak üzere

$$J(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

fonksiyonunun bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.5 da belirtilmiştir. Burada A ve B kümeleri sonlu olduğundan $J(A,B) < M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısının var olduğu görülebilir. O halde bir benzerlik fonksiyonunun varlığında üretilen

$$p_s(u,w) = M - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

fonksiyonu Önerme 5.11 gereği bir kısmi metriktir.

Önerme 5.13. $p : X \times X \to [0,\ 1]$ olsun ve s = 1-p olarak tanımlansın. p fonksiyonunun bir kısmi metrik olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olmasıdır. (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

İspat. p bir kısmi metrik olsun. $u,w,z \in X$ olmak üzere

$s_1)$ $s(u,w) = 1 - p(u,w) = 1 - p(w,u) = s(w,u)$

$s_2)$ $s(u,u) = 1 - p(u,u) \geq 0$ dır. Çünkü $p(u,u) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - p(u,u) \geq 0$

$s_3)$ $\forall u,w \in X$ için $p(u,u) \leq p(u,w)$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $1 - p(u,u) \geq 1 - p(u,w)$ dir. Buradan $s(u,u) \geq s(u,w)$ dir.

$s_4)$ $p(u,z) + p(w,w) \leq p(u,w) + p(w,z)$
$\Leftrightarrow -(p(u,z) + p(w,w)) \geq -(p(u,w) + p(w,z))$
$\Leftrightarrow 1 - p(u,z) + 1 - p(w,w) \geq 1 - p(u,w) + 1 - p(w,z)$
$\Leftrightarrow s(u,z) + s(w,w) \geq s(u,w) + s(w,z)$

$s_5)$ $u = w$ için $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğu açıktır. Şimdi $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olduğunda $u = w$ olduğunu gösterelim. Bu hipotez bize aşağıdaki eşitliği verir.

$$1 - p(u,u) = 1 - p(w,w) = 1 - p(u,w)$$

Buradan $p(u,u) = p(w,w)$ dir. O halde $u = w$ dir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metrik ise s nin bir benzerlik metriğidir. Şimdi s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olduğunu varsayalım ve p fonksiyonunun bir kısmi metrik olduğunu gösterelim.

$p_1)$ $p(u,u) - p(u,w) = s(u,w) - s(u,u) \leq 0$ olduğu bilinmektedir. Buradan $p(u,u) \leq p(u,w)$ dir.

$p_2)$ $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olsun. O halde $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olur. Dolayısıyla $u = w$ dir. $u = w \Rightarrow p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olduğu görülür.

$p_3)$ $1 - p(u,w) = 1 - p(w,u)$ yani $p(u,w) = p(w,u)$ olur.

$p_4)$ $s(u,z) + s(w,w) \geq s(u,w) + s(u,z)$
$\Leftrightarrow -(s(u,z) + s(w,w)) \leq -(s(u,w) + s(w,z))$
$\Leftrightarrow 1 - s(u,z) + 1 - s(w,w) \leq 1 - s(u,w) + 1 - s(w,z)$
$\Leftrightarrow p(u,z) + p(w,w) \leq p(u,w) + p(w,z)$

Buradan s fonksiyonu bir benzerlik metriği ise p fonksiyonu bir kısmi metriktir. ■

Önerme 5.14. $p : X \times X \to \mathbb{R}$ ve $p(u,u) \leq 0$ olsun. Her $u \in X$ için s = -p olarak tanımlansın. p fonksiyonunun bir kısmi metrik olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olmasıdır (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

İspat.

$s_1)$ p fonksiyonu simetrik olduğu için s fonksiyonu simetriktir.

$s_2)$ $s(u,u) = -p(u,u) \in \mathbb{R}^+$.

$s_3)$ $s(u,u) = -p(u,u) \geq -p(u,w) = s(u,w)$

$s_4)$ $s(u,w) + s(w,z) = -(p(u,w) + p(w,z)) \leq -(p(u,z) + p(w,w)) = s(u,z) + s(w,w)$ dir.

$s_5)$ $u = w$ ise bu durumda $s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ dir.
$s(u,u) = s(w,w) = s(u,w)$ olsun. O halde $-p(u,u) = -p(w,w) = -p(u,w)$ dir. Bu durumda $p(u,u) = p(w,w) = p(u,w)$ olur. Dolayısıyla $u = w$ dir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metrik ise s fonksiyonu bir benzerlik metriğidir. Tersi de geçerlidir. Yani s fonksiyonu bir benzerlik metriği ise p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

■

KAYNAKÇA

Alhajjar, E., & Lefèvre, C. (2019). On the similarity metric. *Mathematica Militaris*, 24(1), 4.

Campión, M. J., Catalán, R. G., Induráin, E., & Valero, O. (2018). Weightable quasi-metrics related to fuzzy sets. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(5), 1184-1195.

Chen, S., Ma, B., & Zhang, K. (2009). On the similarity metric and the distance metric. *Theoretical Computer Science*, 410(24-25), 2365-2376.

Chi, K. P., Karapınar, E., & Thanh, T. D. (2012). A generalized contraction principle in partial metric spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(5-6), 1673-1681.

Collins, J., & Zimmer, J. (2007). An asymmetric arzela–ascoli theorem. *Topology and its Applications*, 154(11), 2312-2322.

Elzinga, C. H. (2014). *Distance, Similarity and Sequence Comparison, Advances in Sequence Analysis: Theory, Method, Applications*, 1.4, 51-73.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel, ' *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22(1), 1–72.

Karapınar, E., & Yüksel, U. (2011). Some common fixed point theorems in partial metric spaces. *Journal of Applied Mathematics*, 2011(1), 263621.

Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*, (Vol. 17). John Wiley & Sons.

Kunzi, H. P. A., & Vajner, V. (1994). Weighted Quasi-Metrics. *Annals of the New York Academy of Sciences, 728*(1), 64-77.

Künzi, H. P. A. (2001). Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology. *In Handbook of the history of general topology*, (pp. 853-968). Dordrecht: Springer Netherlands.

Matthews, S. G. (1992). Partial metric spaces. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 183-197.

Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728(1), 183-197.

O'Neill, S. (1995). Two topologies are better than one. *Tech. report, University of Warwick, Conventry, UK*, 1995.

Rozinek, O., & Mares, J. (2021). The duality of similarity and metric spaces. *Applied Sciences*, 11(4), 1910.

Vitolo, P. (1999). The representation of weighted quasimetric spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, Vol* XXXI, 95-100.

Yıldız, C. (2005). *Genel topoloji*. Gazi Kitabevi.

Wilson, W. A. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 53(3), 675-684.