

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPER DUAL SPLİT VEKTÖRLERİN BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE GÜL

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2025

10756549

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPER DUAL SPLIT VEKTÖRLERİN BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE GÜL

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2025

10756549

BEYAN

"Hiper Dual Split Vektörlerin Bazı Uygulamaları" adlı yüksek lisansta yeterlik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

| | |
|---|---------------------------------------|
| Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir. | |
| DESTEK ALINMIŞTIR | DESTEK ALINMAMIŞTIR X |
| Destek alındı ise; | |
| Destekleyen kurum; | |
| Desteğin Türü | Proje Numarası |
| 1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi) | |
| 2-TÜBİTAK | |
| Diğer; | |
| ETİK KURUL onayı var ise; | |
| ETİK KURUL karar tarih/sayı: |/ |

Emine GÜL

Tarih

.....

İmza

.....

ÖN SÖZ

Başta canım kızlarım ve değerli eşim olmak üzere, yüksek lisans hayatımdan itibaren her zaman yanımda olan aileme; bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, çalışmalarımı severek ve isteyerek yürütmemi sağlayan, bu süreçte çok şey öğrendiğim danışman hocam Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a; yüksek lisans çalışmalarım boyunca yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Anabilim dalı öğretim üyelerine özellikle Dr. Öğr. Üyesi Bahar DOĞAN YAZICI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Emine GÜL

2025

ÖZET

HİPER DUAL SPLIT VEKTÖRLERİN BAZI UYGULAMALARI

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş kısmına yer verilmiştir. Tezin amacı açıklanarak; dual ve hiper dual sayıların tarihçesi ile uygulama alanlarına değinilmiştir. Dual ve hiper dual sayı sistemleri, Lorentz-Minkowski uzayı ve ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde, hiper dual split vektörler detaylandırılmış, cebirsel yapıları ve geometrik yorumları açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, hiper dual sayılar yardımıyla tanımlanan hiper dual split vektörler kullanılarak, Euler-Rodrigues dönme formülleri genişletilmiş ve hiper dual split Euler-Rodrigues denklemleri tanıtılmıştır. Bu denklemler hem spacelike hem de timelike birim eksenler için türetilmiş ve hiper dual split dönme matrisleri elde edilmiştir. Son bölümde ise E.Study dönüşümünün hiper dual split yapılarla ilişkisi incelenmiş ve klasik Euler'in sabit nokta teoremi bu yeni çerçevede yeniden formüle edilmiştir. Tez kapsamında yer alan teorik çerçeve çeşitli örneklerle desteklenmiş ve geometrik yorumlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: : Hiper Dual Split Vektör, Euler Teoremi, Euler- Rodrigues Formülü.

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OF HYPER DUAL SPLIT VECTORS

This thesis consists of 4 chapters. The first chapter includes the introduction part. The aim of the thesis is explained; the history and application areas of dual and hyper dual numbers are discussed. Dual and hyper dual number systems, the Lorentz-Minkowski space, and related fundamental concepts are introduced. In the second chapter, hyper dual split vectors are detailed, and their algebraic structures and geometric interpretations are explained. In the third chapter, by using hyper dual split vectors defined with the help of hyper dual numbers, the Euler-Rodrigues rotation formulas are extended and hyper dual split Euler-Rodrigues equations are introduced. These equations are derived for both spacelike and timelike unit axes, and hyper dual split rotation matrices are obtained. In the final chapter, the relationship between the E.Study transformation and hyper dual split structures is examined, and the classical fixed-point theorem of Euler is reformulated in this new framework. Within the scope of the thesis, the theoretical framework is supported with various examples and geometric interpretations are included.

Keywords: Hyper dual split vector, Euler's formula, Euler- Rodrigues formula.

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|-------|
| ÖN SÖZ..... | i |
| ÖZET..... | ii |
| ABSTRACT..... | iii |
| İÇİNDEKİLER..... | iv |
| KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ..... | v |
| 1. GİRİŞ..... | 1 |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR..... | 3 |
| 2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar..... | 3 |
| 2.2. Dual Sayılar ve Dual Vektörler..... | 4 |
| 2.3. Dual Split Vektörler..... | 4 |
| 3. HİPER DUAL SPLİT EULER-RODRIGUES DENKLEMLERİ..... | 10 |
| 4. HİPER DUAL SPLİT EULER TEOREMİNİN OLUŞTURULMASI..... | 20 |
| KAYNAKÇA..... | 22 |

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

x_0, x_1 : Reel skalerler

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$: Reel vektörler

X : Dual sayı

\bar{X} : Dual split vektör

D : Dual sayılar cümlesi

D^3 : Dual uzay

D_1^3 : Dual Lorentzian uzay

S_1^2 : Lorentzian birim küre

H_0^2 : Hiperbolik birim küre

\bar{S}_1^2 : Lorentzian birim dual küre

\bar{H}_0^2 : Hiperbolik birim dual küre

ξ : Dual birim

$\bar{\theta}$: Dual açı

X^* : Hiper dual sayı

D^* : Hiper dual sayılar cümlesi

\bar{X}^* : Hiper dual split vektör

D^{*3} : Hiper dual uzay

D_1^{*3} : Hiper dual Lorentzian uzay

S_1^{*2} : Lorentzian birim Hiper dual küre

H_0^{*2} : Hiperbolik birim Hiper dual küre

θ^* : Hiper dual açı

1. GİRİŞ

Matematiksel fizik ve kinematikte önemli bir yer tutan katı cisim hareketleri zaman içinde diferensiyel geometri ve fizik gibi bir çok alanda kapsamlı araştırmalara konu olmuştur. Özellikle dual sayılar ve bu yapıların genelleştirilmiş halleri olan hiper dual sayıları hesaplamalarda hata payını azaltmaları türev işlemlerini hızlandırmaları nedeniyle öne çıkmaktadır.

Dual sayılar, 1873 yılında Clifford tarafından tanıtılmıştır (Clifford,1873). Clifford'ın bu keşfinden sonra, Study ve Kotelnikov, kinematikteki doğruları ve katı cisim hareketlerini ifade etmek için dual vektörleri kullanmışlardır (Study, 1901; Kotelnikov, 1895). Daha sonra, Lorentzian-3 uzayında dual split vektörler kullanılarak E. Study dönüşümü tanımlanmıştır (Kazaz, Özdemir, & Uğurlu, 2009; Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002). Dual sayılar ve uygulamaları literatürde geniş bir yer tutmaktadır. Dual matrisler, dual-Fibonacci sayıları, dual uzay eğrileri ve otomatik türev alma gibi örnekler verilebilir.

Hiper dual sayılar, dual sayıların genişletilmiş bir versiyonu olarak Fike tarafından tanımlanmıştır (Fike, Numerically exact derivative calculations using hyper-dual numbers, in: 3rd Annual Student Joint Workshop in Simulation-Based Engineering and Design, 2009). Fike ve Alonso, hesaplama süresini ve hataları azaltma amacıyla birinci ve ikinci türev hesaplamalarında hiper dual sayıları kullanmıştır (Fike & Alonso, 2011). Bir hiper dual sayının iki dual sayı cinsinden ifade edilmesi Cohen ve Shoham tarafından gerçekleştirilmiştir (Cohen & Shoham, 2015). Bu şekilde, hiper dual hız, hiper dual momentum ve hiper dual eylemsizlik operatörleri gibi hiper dual sayıların fiziksel uygulamaları tanımlanmış ve katı cisim hareketleri incelenmiştir (Cohen & Shoham, 2017). Cohen ve Shoham, hiper dual vektörleri Study ve Kotelnikov anlamında yorumlamışlardır.

Hiper dual split vektörler, hiper dual sayılar yardımıyla tanımlanmıştır (Aslan, Bekar, & Yaylı, Hyper-dual split quaternions and rigid body motion, Journal of Geometry and Physics. 158, 103876, 2020). Lorentzian birim hiper dual küre ve hiperbolik birim hiper dual küre ifadeleriyle hiper dual split vektörler için E. Study dönüşümü incelenmiştir. Üç boyutlu Minkowski uzayında karşılık gelen spacelike veya timelike doğrular ele alınmıştır. Ayrıca, üç boyutlu Öklidyen ve Minkowski uzaylarında sırasıyla hiper dual kuaterniyonlar ve hiper dual split kuaterniyonlar tanıtılarak kinematikte bazı yapılar elde edilmiştir (Aslan & Yaylı, 2016;

Cohen & Shoham, 2020). Bu yapıların Lorentz uzayında ele alınması hem Öklidyen hem de Minkowski uzayında dinamik dönüşümleri temsil etmek açısından büyük önem taşımaktadır.

Katı cisim dinamiğinin geometrisi, bilim insanlarını Lie cebirleri ve Lie grupları üzerine çalışmaya yönlendirmiştir. Sabit nokta teorileri, matematiğin birçok alt dalında incelenmektedir. Geometrik olarak, Euler bir katı cismin yer değiştirmesi durumunda, cisim üzerindeki bir noktanın üç boyutlu uzayda sabit kalacağını fark etmiştir (Euler, 1776; Palais & Palais, 2007). Bu nedenle, Euler'in teoremi dönme ekseninin varlığını ortaya koyar. Euler-Rodrigues formülü, bir dönmenin matris temsilini dönme açısı ve dönme eksenine birlikte ifade eder (Dai, 2015; McCarthy, 1990). Dual Euler-Rodrigues formülleri dual eksen ve dual açı kullanılarak; hiper dual Euler-Rodrigues formülleri ise hiper dual eksen ve hiper dual açı kullanılarak verilmiştir (Kahveci, Gök, & Yaylı, 2018; Ramis, Yaylı, & Zengin, 2022).

Bu tezde, hiper dual split matrisler yardımıyla hiper dual split Euler-Rodrigues denklemleri tanıtılmıştır. Bu denklemler yardımıyla hem spacelike hem timelike birim eksenler için hiper dual split Euler-Rodrigues bağıntıları elde edilmiştir. Bu bağıntılar sayesinde hiper dual split dönme matrisleri elde edilmiş ve bu matrislerle hiper dual split vektörler için tanımlanan E. Study dönüşümü arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Euler'in sabit nokta teoremini hiper dual split dönme matrisleri ile yeniden ele alınmıştır. Son olarak, teoriyi destekleyen kapsamlı ve ilgi çekici örnekler sunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin temelini oluşturan Lorentz-Minkowski uzayı, dual sayılar, hiper dual sayılar, hiper dual vektörler ve hiper dual split vektörlerin tanımları ile birlikte bu yapıların bazı temel cebirsel özellikleri verilecektir.

2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. Lorentz-Minkowski uzayı $R_1^3 = (R^3, \langle, \rangle_L)$ bir metrik uzaydır. Burada \langle, \rangle_L metriği $\langle, \rangle_L = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ şeklinde tanımlanır ve Lorentzian metrik olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. $q \in R_1^3 - \{0\}$ vektörü için

- $\langle q, q \rangle_L > 0$ ise q spacelike vektör,
- $\langle q, q \rangle_L < 0$ ise q timelike vektör,
- $\langle q, q \rangle_L = 0$ ise q lightlike (null) vektör,

olarak adlandırılır. Ayrıca $q=0$ ise q spacelike vektördür (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. R_1^3 Minkowski 3 uzayında bir $q \in R_1^3$ vektörünün normu

$$\|q\|_L = \sqrt{|\langle q, q \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. R_1^3 Minkowski 3 uzayında $q = (q_1, q_2, q_3)$, $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$

vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı $q \wedge_L \varrho$ ile gösterilir ve

$$q \wedge_L \varrho = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. R_1^3 Minkowski 3-uzayında orijin merkezli Lorentzian ve hiperbolik birim küreler sırasıyla

$$S_1^2 = \{q \in R_1^3 \mid \langle q, q \rangle_L = 1\}$$

ve

$$H_0^2 = \{q \in R_1^3 \mid \langle q, q \rangle_L = -1\}$$

olarak tanımlanır (Lopez, 2014).

2.2. Dual Sayılar ve Dual Vektörler

Bu bölümde dual sayıların ve dual vektörlerin tanımları sunularak bazı temel özellikler incelenecektir.

Tanım 2.2.1. Dual sayılar cümlesi

$$D = \{X = x_0 + \xi x_1 : x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \xi^2 = 0, \xi \neq 0\}$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu,1983).

Tanım 2.2.2. Herhangi iki $X = x_0 + \xi x_1$, $Y = y_0 + \xi y_1$ dual sayısının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$X + Y = (x_0 + y_0) + \xi(x_1 + y_1),$$

$$XY = x_0 y_0 + \xi(x_0 y_1 + y_0 x_1)$$

olarak tanımlanır. Üstelik $(D, +, \cdot)$ üçlüsü birimli değişmeli bir halkadır (Hacısalıhoğlu,1983).

Tanım 2.2.3.

$$D^3 = \{\bar{X} = x_0 + \xi x_1 : x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3\}$$

cümlesinin her elemanına bir dual vektör denir. D^3 , dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalıhoğlu,1983)

2.3. Dual Split Vektörler

Tanım 2.3.1. Dual Lorentzian uzayı

$$D^3_1 = \{\bar{X} = x_0 + \xi x_1 : x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3_1\}$$

olarak tanımlanır. D^3_1 uzayının her bir elemanına dual split vektör denir (Fike ve Alonso, 2011).

Eğer x_0 vektörü spacelike, timelike veya lightlike bir vektör ise

$$\bar{X} = x_0 + \xi x_1 \in D^3_1$$

dual split vektörü de spacelike, timelike veya lightlike vektör olarak tanımlanır (Fike ve Alonso, 2011).

Tanım 2.3.2. Herhangi iki $\bar{X} = x_0 + \xi x_1$ ve $\bar{Y} = y_0 + \xi y_1$ dual split vektörleri için Lorentzian skalar çarpım

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_L = \langle x_0, y_0 \rangle_L + \xi (\langle x_0, y_1 \rangle_L + \langle y_0, x_1 \rangle_L) \in D$$

olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Tanım 2.3.3. Herhangi iki $\bar{X} = x_0 + \xi x_1$ ve $\bar{Y} = y_0 + \xi y_1$ dual split vektörleri için Lorentzian vektörel çarpım

$$\bar{X} \wedge_L \bar{Y} = x_0 \wedge_L y_0 + \xi (x_0 \wedge_L y_1 + y_0 \wedge_L x_1) \in D_1^3$$

olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Tanım 2.3.4. Herhangi bir $\bar{X} = x_0 + \xi x_1$ dual split vektörünün modülü

$$\|\bar{X}\|_L = \|x_0\|_L + \xi \frac{\langle x_0, x_1 \rangle_L}{\|x_0\|_L}, \quad (\|x_0\|_L \neq 0),$$

olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Tanım 2.3.5. Herhangi bir $\bar{X} = x_0 + \xi x_1$ dual split vektörünün normu

$$N_{\bar{X}} = \langle \bar{X}, \bar{X} \rangle_L = \langle x_0, x_0 \rangle_L + 2\xi \langle x_0, x_1 \rangle_L$$

olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Ayrıca $\langle \bar{X}, \bar{X} \rangle_L = \pm 1$ yani $\langle x_0, x_0 \rangle_L = \pm 1$ ve $\langle x_0, x_1 \rangle_L = 0$ ise, o zaman \bar{X} birim dual split vektör olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Tanım 2.3.6. D_1^3 uzayında orijin merkezli Lorentzian ve hiperbolik birim dual küreler sırasıyla

$$\bar{S}_1^2 = \{ \bar{X} = x_0 + \xi x_1 \in D_1^3 \mid \langle \bar{X}, \bar{X} \rangle_L = 1 \}$$

ve

$$\bar{H}_0^2 = \{ \bar{X} = x_0 + \xi x_1 \in D_1^3 \mid \langle \bar{X}, \bar{X} \rangle_L = -1 \}$$

olarak tanımlanır (Yaylı, Çalışkan, & Uğurlu, 2002).

Teorem 2.3.1. (Dual Split Vektörleri için E. Study Dönüşümü) \overline{S}_1^2 Lorentzian birim dual kürenin her noktası bir yönlendirilmiş spacelike doğruya, \overline{H}_0^2 hiperbolik birim dual kürenin her noktası da bir yönlendirilmiş timelike doğruya karşılık gelir (Uğurlu,1987).

Tanım 2.3.7. a) \overline{X} ve \overline{Y} birim dual spacelike vektörleri için Lorentzian skalar çarpımı

$$\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_L = \cos \theta_0 - \xi \theta_1 \sin \theta_0 = \cos \overline{\theta}$$

olarak adlandırılır. Burada $\overline{\theta} = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1 \in D$ olup $\overline{\theta}$ dual açı olarak tanımlanır (Kazaz, Özdemir, & Uğurlu, 2009).

b) \overline{X} ve \overline{Y} birim dual timelike vektörleri için Lorentzian skalar çarpımı

$$\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_L = -\cos h\theta_0 - \xi \theta_1 \sinh \theta_0 = -\cosh \overline{\theta}$$

olarak tanımlanır. Burada $\overline{\theta} = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1 \in D$ olup $\overline{\theta}$ dual hiperbolik açı olarak tanımlanır (Kazaz, Özdemir, & Uğurlu, 2009).

2.4. Hiper Dual Split Vektörler

Bu bölümde hiper dual split vektörleri tanımlamadan önce, hiper dual sayılar ve hiper dual vektörlerin tanımları sunularak bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.4.1. Hiper dual sayılar cümlesi

$$D^* = \{X^* = x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_1 \xi_2 x_3 : x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada reel olmayan ξ_1 ve ξ_2 dual birimleri için

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = (\xi_1 \xi_2)^2 = 0 \text{ ve } \xi_1 \neq \xi_2, \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \xi_2 = \xi_2 \xi_1 \neq 0$$

olarak tanımlanır (Cohen & Shoham, 2015).

Diğer taraftan $X^* = x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_1 \xi_2 x_3$ hiper dual sayısı

$$\begin{aligned} X^* &= x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_1 \xi_2 x_3, \\ &= (x_0 + \xi_1 x_1) + \xi_2 (x_2 + \xi_1 x_3), \\ &= (x_0 + \xi x_1) + \varepsilon^* (x_2 + \xi x_3), \\ &= X_0 + \varepsilon^* X_1 \end{aligned}$$

şeklinde iki dual sayının toplamı olarak tanımlanır (Cohen & Shoham, 2015).

Tanım 2.4.2. Herhangi iki $X^* = X_0 + \varepsilon^* X_1$ ve $Y^* = Y_0 + \varepsilon^* Y_1$ hiper dual sayının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$X^* + Y^* = (X_0 + Y_0) + \varepsilon^*(X_1 + Y_1),$$

$$X^*Y^* = X_0Y_0 + \varepsilon^*(X_0Y_1 + Y_0X_1)$$

olarak tanımlanır (Cohen & Shoham, 2017).

Tanım 2.4.3. Hiper dual vektörlerin cümlesi

$$D^{*3} = \{\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^*\bar{X}_1: \bar{X}_0, \bar{X}_1 \in D^3\}$$

olarak tanımlanır ve D^{*3} cümlesinin her bir elemanına hiper dual vektör denir (Fike ve Alonso, 2011).

Tanım 2.4.4. Hiper dual Lorentzian uzayı

$$D_1^{*3} = \{\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^*\bar{X}_1: \bar{X}_0, \bar{X}_1 \in D^3_1\}$$

olarak tanımlanır. D_1^{*3} uzayının her elemanına hiper dual split vektör denir (Aslan vd., 2020).

Eğer \bar{X}_0 vektörü spacelike, timelike veya lightlike bir vektör ise hiper dual split vektörü de spacelike, timelike veya lightlike vektör olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Tanım 2.4.5. Herhangi iki $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^*\bar{X}_1$ ve $\bar{Y}^* = \bar{Y}_0 + \varepsilon^*\bar{Y}_1$ hiper dual split vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı

$$\bar{X}^* \wedge_L \bar{Y}^* = \bar{X}_0 \wedge_L \bar{Y}_0 + \xi(\bar{X}_0 \wedge_L \bar{Y}_1 + \bar{Y}_0 \wedge_L \bar{X}_1) \in D_1^{*3}$$

olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Tanım 2.4.6. Herhangi iki $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^*\bar{X}_1$ ve $\bar{Y}^* = \bar{Y}_0 + \varepsilon^*\bar{Y}_1$ hiper dual split vektörlerinin Lorentzian skalar çarpımı

$$\langle \bar{X}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = \langle \bar{X}_0, \bar{Y}_0 \rangle_L + \xi(\langle \bar{X}_0, \bar{Y}_1 \rangle_L + \langle \bar{Y}_0, \bar{X}_1 \rangle_L) \in D^*$$

olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Tanım 2.4.7. Herhangi bir $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^*\bar{X}_1$ hiper dual split vektörünün modülü

$$\|\bar{X}^*\|_L = \|\bar{X}_0\|_L + \varepsilon^* \frac{\langle \bar{X}_0, \bar{X}_1 \rangle_L}{\|\bar{X}_0\|_L}, \quad (\|\bar{X}_0\|_L \neq 0)$$

olarak tanımlanır (Aslan vd.,2020).

Tanım 2.4.8. Herhangi bir $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ hiper dual split vektörünün normu

$$N_{\bar{X}} = \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \langle \bar{X}_0, \bar{X}_0 \rangle_L + 2\varepsilon^* \langle \bar{X}_0, \bar{X}_1 \rangle_L$$

olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Ayrıca $\langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \pm 1$ ise $\langle \bar{X}_0, \bar{X}_0 \rangle_L = \pm 1$ ve $\langle \bar{X}_0, \bar{X}_1 \rangle_L = 0$ ise, o zaman \bar{X}^* birim hiper dual split vektör olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Tanım 2.4.9. Orijin merkezli Lorentzian ve hiperbolik birim hiper dual küreler sırasıyla

$$S_1^{*2} = \{ \bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1 \in D_1^{*3} \mid \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = 1 \}$$

ve

$$H_0^{*2} = \{ \bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1 \in D_1^{*3} \mid \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = -1 \}$$

olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

Teorem 2.4.1. (Hiper Dual Split Vektörler için E. Study Dönüşümü) S_1^{*2} Lorentzian birim hiper dual kürenin her bir noktası, bir yönlendirilmiş dual spacelike doğruya; H_0^{*2} hiperbolik birim hiper dual kürenin her bir noktası, bir yönlendirilmiş dual timelike doğruya karşılık gelir (Aslan vd., 2020).

Teorem 2.4.2.

1) $\bar{X}_0, \bar{X}_1 \in \bar{S}_1^2$ olmak üzere $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ bir hiper dual split vektör olsun. S_1^{*2} küresindeki noktalar ile R_1^3 uzayındaki herhangi iki dik kesişen yönlendirilmiş spacelike doğrular arasında birebir bir karşılık gelme vardır.

2) $\bar{X}_0 \in \bar{S}_1^2, \bar{X}_1 \in \bar{H}_0^2$ olmak üzere $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ bir hiper dual split vektör olsun. S_1^{*2} küresindeki noktalar ile R_1^3 uzayındaki herhangi iki dik kesişen yönlendirilmiş doğrular arasında birebir bir karşılık gelme vardır; bunlardan biri (birim dual spacelike vektör \bar{X}_0 vektörüne karşılık gelen) spacelike ve diğeri (birim dual timelike vektör \bar{X}_1 vektörüne karşılık gelen) timelike doğrudur.

3) $\bar{X}_0 \in \bar{H}_0^2, \bar{X}_1 \in \bar{S}_1^2$ olmak üzere $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ bir hiper dual split vektör olsun. H_0^{*2} küresindeki noktalar ile R_1^3 uzayındaki herhangi iki dik kesişen yönlendirilmiş doğrular arasında birebir bir karşılık gelme vardır; bunlardan biri (birim dual timelike vektör \bar{X}_0 vektörüne karşılık gelen) timelike ve diğeri (birim dual spacelike vektör \bar{X}_1 vektörüne karşılık gelen) spacelike doğrudur (Aslan vd., 2020).

Tanım 2.4.10.

a) \bar{X}^* ve \bar{Y}^* birim hiper dual spacelike vektörleri için Lorentzian skalar çarpımı

$$\langle \bar{X}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = \cos \bar{\theta}_0 + \varepsilon^* \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_0 = \cos \theta^*$$

olarak tanımlanır. Burada $\theta^* = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^* \bar{\theta}_1 \in D^*$ olup θ^* hiper dual sayısı hiper dual açı olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

b) \bar{X}^* ve \bar{Y}^* birim hiper dual timelike vektörler için Lorentzian skalar çarpımı

$$\langle \bar{X}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = -\cosh \bar{\theta}_0 - \varepsilon^* \bar{\theta}_1 \sinh \bar{\theta}_0 = -\cosh \theta^*$$

olarak tanımlanır. Burada $\theta^* = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^* \bar{\theta}_1 \in D^*$ olup θ^* hiper dual sayısı hiper dual hiperbolik açı olarak tanımlanır (Aslan vd., 2020).

3. HİPER DUAL SPLIT EULER-RODRIGUES DENKLEMLERİ

Bu bölümde ele alınan temel kavramlar O'Neill (1983) ve Kahveci (2016) makalelerinin çalışmalarına dayanmaktadır. Hiper dual split vektörler için Euler-Rodrigues denklemlerini elde etmek amacıyla, Minkowski uzayının yapısını kullanarak hiper dual yarı ortogonal matrisler incelenecektir.

Tanım 3.1. Hiper dual yarı ortogonal matrislerin cümlesi

$$O_1^*(3) = \{ \bar{Y}^* \in D_3^{*3} \mid (\bar{Y}^*)^T \varepsilon \bar{Y}^* \varepsilon = \bar{Y}^* \varepsilon (\bar{Y}^*)^T \varepsilon = I_3 \}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}^* = [\bar{Y}_{ij}^*]: \bar{Y}_{ij}^* = \bar{Y}_{ij} + \varepsilon \bar{Z}_{ij} \in D^*,$$

\bar{Y}, \bar{Z} birer dual matristir (Kahveci, 2016).

Teorem 3.1. Eğer hiper dual yarı ortogonal matris \bar{Y}^* , $\det \bar{Y}^* = 1$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda bu matris bir Lorentzian Lie grup yapısı oluşturur ve $SO_1^*(3)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. Lorentzian Lie cebirinin yapısından hareketle, hiper dual yarı anti simetrik matrisler

$$sO_1^*(3) = \{ Z^* \in D_3^{*3} \mid (Z^*)^T = -\varepsilon Z^* \varepsilon \}$$

olarak tanımlanır (Kahveci, 2016).

Teorem 3.2. $sO_1^*(3)$ ile hiper dual split vektörler cümlesi arasındaki izomorfizm

$$g: sO_1^*(3) \rightarrow D_1^{*3},$$

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} 0 & s_z^* & -s_y^* \\ s_z^* & 0 & -s_x^* \\ -s_y^* & s_x^* & 0 \end{pmatrix} \rightarrow g(\mathbf{S}^*) = S^* = (s_x^*, s_y^*, s_z^*) \quad (3.1)$$

şeklindedir (Kahveci, 2016).

Hiper dual split vektörler için Lorentzian vektörel çarpım kullanılarak $\mathbf{S}^* \bar{Y}^* = S^* \otimes_L \bar{Y}^*$ yazılabilir. Şimdi hiper dual split vektörler için tanımlanan açılı ve eksenler için hiper dual split

dönme olarak tanımlayacağımız \mathbf{R}^* ifadesini tanımlayalım. Dönme ekseninin hiper dual spacelike birim eksen ve hiper dual timelike birim eksen olduğu durumları inceleyelim.

Teorem 3.3. Eğer S^* bir hiper dual spacelike birim eksen ve θ^* bir hiper dual hiperbolik açı ise

$$\mathbf{R}^* = I_3 + \sinh \theta^* \mathbf{S}^* + (-1 + \cosh \theta^*) \mathbf{S}^{*2} \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. Burada S^* , $S^* = (s_x^*, s_y^*, s_z^*)$ eksenine ait yarı anti simetrik bir matristir. Bu durumda

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 1 + (-1 + \cosh \theta^*)(s_y^{*2} + s_z^{*2}) & (1 - \cosh \theta^*)s_x^*s_y^* + \sinh \theta^*s_z^* & (1 - \cosh \theta^*)s_x^*s_z^* - \sinh \theta^*s_y^* \\ (1 - \cosh \theta^*)s_x^*s_y^* + \sinh \theta^*s_z^* & 1 + (-1 + \cosh \theta^*)(-s_x^{*2} + s_z^{*2}) & (1 - \cosh \theta^*)s_y^*s_z^* - \sinh \theta^*s_x^* \\ (-1 + \cosh \theta^*)s_x^*s_z^* - \sinh \theta^*s_y^* & (1 - \cosh \theta^*)s_y^*s_z^* + \sinh \theta^*s_x^* & 1 + (-1 + \cosh \theta^*)(-s_x^{*2} + s_y^{*2}) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Kahveci, 2016).

Teorem 3.4. Eğer S^* bir hiper dual timelike birim eksen ve θ^* bir hiper dual açı ise

$$\mathbf{R}^* = I_3 + \sin \theta^* \mathbf{S}^* + (1 - \cos \theta^*) \mathbf{S}^{*2} \quad (3.3)$$

olarak elde edilir. Burada S^* , $S^* = (s_x^*, s_y^*, s_z^*)$ eksenine ait yarı anti simetrik bir matristir. Bu durumda

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 1 + (1 - \cos \theta^*)(s_y^{*2} + s_z^{*2}) & (-1 + \cos \theta^*)s_x^*s_y^* + \sin \theta^*s_z^* & (-1 + \cos \theta^*)s_x^*s_z^* - \sin \theta^*s_y^* \\ (1 - \cos \theta^*)s_x^*s_y^* + \sin \theta^*s_z^* & 1 + (1 - \cos \theta^*)(-s_x^{*2} + s_z^{*2}) & (-1 + \cos \theta^*)s_y^*s_z^* - \sin \theta^*s_x^* \\ (1 - \cos \theta^*)s_x^*s_z^* - \sin \theta^*s_y^* & (-1 + \cos \theta^*)s_y^*s_z^* + \sin \theta^*s_x^* & 1 + (1 - \cos \theta^*)(-s_x^{*2} + s_y^{*2}) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Kahveci, 2016).

Teorem 3.5. $\theta^* = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1 \in D^*$ herhangi bir hiper dual hiperbolik açı ve

$S^* = \overline{S}_0 + \varepsilon^* \overline{S}_1 \in S_1^{*2}$ herhangi bir hiper dual spacelike vektör olsun. Bu durumda bir hiper dual spacelike birim eksen etrafındaki bir hiper dual split dönme

$$\mathbf{R}^* = \overline{\mathbf{C}} + \varepsilon^* \overline{\mathbf{D}}$$

olarak tanımlanır. Burada, \mathbf{R}^* matrisinin dual kısmı, dual spacelike eksen \overline{S}_0 ve dual hiperbolik açısı $\overline{\theta}_0$ olan bir dönme tanımlar. \mathbf{R}^* matrisinin hiper kısmı ise, dual yarı anti simetrik bir matris $\overline{\mathbf{P}}$ olmak üzere $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{P}}\overline{\mathbf{C}}$ olarak tanımlanır.

İspat. Teorem 3.2. de tanımlanan g izomorfizması ile $g(\mathbf{S}^*) = S^*$ yazabiliriz. Bu durumda $g(\overline{\mathbf{S}}_0) = \overline{S}_0$, $g(\overline{\mathbf{S}}_1) = \overline{S}_1$ ve dolayısıyla $\mathbf{S}^* = \overline{S}_0 + \varepsilon^* \overline{S}_1$ olur. Eğer S^* ve $\cosh \theta^* = \cosh \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1 \sinh \overline{\theta}_0$ denklemleri, hiper dual spacelike birim eksen dönme matrisinde yerine yazılırsa, \mathbf{R}^* matrisi iki dual matrisin toplamı olarak $\overline{\mathbf{C}} + \varepsilon^* \overline{\mathbf{D}}$ şeklinde ifade edilir. $\mathbf{R}^* \varepsilon (\mathbf{R}^*)^T \varepsilon = I_3$ denkleminde ise

$$\overline{\mathbf{C}} \varepsilon \overline{\mathbf{C}}^T \varepsilon + \varepsilon^* (\overline{\mathbf{C}} \varepsilon \overline{\mathbf{D}}^T \varepsilon + \overline{\mathbf{D}} \varepsilon \overline{\mathbf{C}}^T \varepsilon) = I_3 \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. (3.4) denkleminde

$$\overline{\mathbf{C}} \varepsilon \overline{\mathbf{C}}^T \varepsilon = I_3 \quad \text{ve} \quad \overline{\mathbf{C}} \varepsilon \overline{\mathbf{D}}^T \varepsilon + \overline{\mathbf{D}} \varepsilon \overline{\mathbf{C}}^T \varepsilon = 0 \quad (3.5)$$

yazılabilir.

Böylece, $\overline{\mathbf{C}}$ bir dual yarı ortogonal matristir. \overline{S}_0 bir birim dual spacelike vektör olduğundan ve (3.5) denklemini kullanarak

$$\overline{\mathbf{C}} = I_3 + \sinh \overline{\theta}_0 \overline{S}_0 + (-1 + \cosh \overline{\theta}_0) \overline{S}_0^2 \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu ifade $\overline{\mathbf{C}}$ matrisinin, dual spacelike eksen \overline{S}_0 ve dual hiperbolik açısı $\overline{\theta}_0$ olan bir dual dönme tanımladığını açıkça gösterir. Öte yandan, $\overline{\mathbf{D}} \varepsilon (\overline{\mathbf{C}})^T \varepsilon = \overline{\mathbf{P}}$ alınır ve (3.5) denklemleri kullanılırsa $(\overline{\mathbf{P}})^T = -\varepsilon \overline{\mathbf{P}} \varepsilon$ elde edilir.

Teorem 3.6. $\theta^* = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1 \in D^*$ hiper dual açı ve $S^* = \overline{S}_0 + \varepsilon^* \overline{S}_1 \in H_0^{*2}$ hiper dual timelike vektör olsun. Bu durumda, hiper dual timelike birim eksen etrafındaki bir hiper dual split dönme

$$\mathbf{R}^* = \overline{\mathbf{E}} + \varepsilon^* \overline{\mathbf{F}}$$

olarak elde edilir. Burada, \mathbf{R}^* matrisinin dual kısmı, dual timelike eksen \overline{S}_0 ve dual açısı $\overline{\theta}_0$ ile birlikte bir dönme tanımlar. \mathbf{R}^* matrisinin hiper kısmı ise, dual yarı anti simetrik bir matris $\overline{\mathbf{P}}$ olmak üzere $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{E}}$ olarak elde edilir.

İspat Teorem 3.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

$$\bar{X}^* \text{ ve } \bar{Y}^* \text{ } D_1^3 \text{ uzayında } \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L > 0 \text{ veya } \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L < 0$$

koşulunu sağlayan herhangi iki hiper dual split vektör olmak üzere $\mathbf{R}^*(X) = Y$ eşitliği sağlanır. Buna bağlı olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1. Birim hiper dual split vektörler için E.Study dönüşümü aracılığıyla aşağıdaki ifadeler verilebilir.

1) Eğer \bar{X}^* bir birim hiper dual spacelike vektörse, o zaman $\mathbf{R}^*(\bar{X}^*) = \bar{Y}^*$ hiper dual split dönmesi \bar{X}^* vektörüne karşılık gelen dual spacelike doğrusunu \bar{Y}^* vektörüne karşılık gelen dual spacelike doğrusuna dönüştürür.

2) Eğer \bar{X}^* bir birim hiper dual timelike vektörse, o zaman $\mathbf{R}^*(\bar{X}^*) = \bar{Y}^*$ hiper dual split dönmesi ifadesi \bar{X}^* vektörüne karşılık gelen dual timelike doğrusunu \bar{Y}^* vektörüne karşılık gelen dual timelike doğrusuna dönüştürür.

İspat:

1) Teorem 2.4.1'den, eğer \bar{X}^* bir birim hiper dual spacelike vektörse, bu durumda \bar{X}^* vektörüne yönlü bir spacelike doğrusu karşılık gelir. Bu durumda

$$\mathbf{R}^*(\bar{X}^*) = \bar{Y}^*, \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = 1 \text{ şartını sağlayan bir spacelike doğrudur.}$$

2) Teorem 2.4.1'den, eğer \bar{X}^* bir birim hiper dual timelike vektörse, bu durumda \bar{X}^* vektörüne yönlü bir timelike doğrusu karşılık gelir. Bu durumda

$$\mathbf{R}^*(\bar{X}^*) = \bar{Y}^*, \langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = \langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = -1 \text{ şartını sağlayan bir timelike doğrudur.}$$

Kabul edelim ki $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ ve $\bar{Y}^* = \bar{Y}_0 + \varepsilon^* \bar{Y}_1$, $\mathbf{R}^*(\bar{X}^*) = \bar{Y}^*$ şartını sağlayan \mathbf{R}^* hiper dual split dönmesi, $\theta^* = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^* \bar{\theta}_1$ hiper dual açısı (sırasıyla hiper dual hiperbolik açı) ve $S^* = (s_x^*, s_y^*, s_z^*)$ hiper dual timelike birim ekseni (sırasıyla hiper dual spacelike birim ekseni) ile birlikte birer hiper dual birim spacelike (sırasıyla timelike) vektörler olsun. Eğer D_1^3 uzayında $\bar{L}_{\bar{X}^*}$ ve $\bar{L}_{\bar{Y}^*}$ sırasıyla \bar{X}^* ve \bar{Y}^* vektörlerine karşılık gelen dual spacelike (sırasıyla timelike) doğrular ise, bu durumda:

$\bar{\theta}_0, \bar{X}_0$ ile \bar{Y}_0 dual spacelike (sırasıyla timelike) vektörleri arasındaki dual açısı (sırasıyla dual hiperbolik açı),

$\bar{\theta}_1, \bar{L}_{\bar{X}^*}$ ile $\bar{L}_{\bar{Y}^*}$ arasındaki en kısa uzaklık olarak elde ederiz.

Bu durumda, her iki durum için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.7. Hiper dual açı $\theta^* = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1$ ve hiper dual timelike birim eksen S^* tarafından üretilen hiper dual split dönme R^* , bir vida hareketi ile belirlenir. Bu vida hareketi \overline{L}_{S^*} doğrusu $\overline{\theta}_0$ dual açısıyla dual dönme ve \overline{L}_{S^*} boyunca $\overline{\theta}_1$ kadar yapılan ötelemenin bileşkesidir. Burada, $\overline{L}_{S^*}, D_1^3$ uzayında R^* dönmesinin hiper dual timelike birim eksenine ait dual timelike doğrusudur.

Teorem 3.8. Hiper dual hiperbolik açı $\theta^* = \overline{\theta}_0 + \varepsilon^* \overline{\theta}_1$ ve hiper dual spacelike birim eksen S^* tarafından üretilen hiper dual split dönme R^* , bir vida hareketi ile belirlenir. Bu vida hareketi \overline{L}_{S^*} doğrusu $\overline{\theta}_0$ dual hiperbolik açısıyla dual dönme ve \overline{L}_{S^*} boyunca $\overline{\theta}_1$ kadar yapılan ötelemenin bileşkesidir. Burada, $\overline{L}_{S^*}, D_1^3$ uzayında R^* dönmesinin hiper dual spacelike eksenine ait dual spacelike doğrusudur.

Diğer taraftan, $\overline{X}^* = \overline{X}_0 + \varepsilon^* \overline{X}_1$ birim hiper dual spacelike bir vektör olduğunu kabul edelim. Eğer $\langle \overline{X}_1^*, \overline{X}_1^* \rangle_L = -1$ ise, bu durumda $\overline{X}^* = \overline{X}_0 + \varepsilon^* \overline{X}_1$ noktaları ile R^3_1 uzayında herhangi iki dik kesişen doğrular arasında birebir bir karşılık gelme vardır. Bu doğrulardan biri \overline{X}_0 birim dual spacelike vektörüne karşılık gelen spacelike doğrusu; diğeri ise \overline{X}_1 birim dual timelike vektörüne karşılık gelen timelike doğrusudur (Aslan vd., 2020). Eğer $\langle \overline{X}_1^*, \overline{X}_1^* \rangle_L = 1$ ise bu durumda $\overline{X}^* = \overline{X}_0 + \varepsilon^* \overline{X}_1$ noktaları ile R^3_1 uzayında herhangi iki dik kesişen spacelike doğrular arasında birebir bir karşılık gelme vardır (Aslan vd., 2020).

$\overline{X}^* = \overline{X}_0 + \varepsilon^* \overline{X}_1$ birim hiper dual timelike vektör olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\overline{X}^* = \overline{X}_0 + \varepsilon^* \overline{X}_1$ noktaları ile R^3_1 uzayında herhangi iki dik kesişen doğrular arasında birebir bir ilişki vardır. Bu doğrulardan biri \overline{X}_0 birim dual timelike vektörüne karşılık gelen timelike doğrusu diğeri ise \overline{X}_1 birim dual spacelike vektörüne karşılık gelen spacelike doğrusudur (Aslan vd., 2020).

Teorem 3.9. R^* hiper dual split dönmesi için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

1) R^* hiper dual split dönmesi R^3_1 uzayında herhangi iki dik kesişen yönlendirilmiş spacelike doğrularını iki dik kesişen yönlendirilmiş spacelike doğrulara dönüştürür.

2) \mathbf{R}^* hiper dual split dönmesi \mathbf{R}_1^3 uzayında herhangi iki dik kesişen yönlendirilmiş spacelike doğrusu ve timelike doğrusunu sırasıyla iki dik kesişen yönlendirilmiş spacelike ve timelike doğrulara dönüştürür.

Örnek 3.1. $\bar{X}^* = (\xi + \varepsilon^*, 1 + \xi\varepsilon^*, -\xi + \xi\varepsilon^*)$ ve $\bar{Y}^* = (-\xi - \varepsilon^*, \xi + \xi\varepsilon^*, 1 + \xi\varepsilon)$ hiper dual split vektörler olsun. $\langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = 1$ ve $\langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = 1$ olduğundan \bar{X}^* ve \bar{Y}^* hiper dual spacelike vektörlerdir. Bu durumda

$$S^* = \bar{X}^* \otimes_L \bar{Y}^* = (-1 - 2\xi\varepsilon^*, -\xi + \xi\varepsilon^* - \varepsilon^*, \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^*)$$

elde edilir. Burada, $\bar{S}_0 = (-1, -\xi, \xi)$ ve $\bar{S}_1 = (-2\xi, \xi - 1, \xi + 1)$ dir. $\langle S^*, S^* \rangle_L = -1$ olduğundan S^* bir hiper dual timelike vektördür. (3.1) kullanılarak buna karşılık gelen yarı anti simetrik matris

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & \xi - \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* \\ \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & 0 & 1 + 2\xi\varepsilon^* \\ \xi - \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & -1 - 2\xi\varepsilon^* & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Böylece,

$$(S^*)^2 = \begin{bmatrix} 4\xi\varepsilon^* & -\xi + \xi\varepsilon^* - \varepsilon^* & \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* \\ \xi - \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & -1 - 2\xi\varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* \\ -\xi - \xi\varepsilon^* - \varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* & -1 - 2\xi\varepsilon^* \end{bmatrix}$$

elde edilir.

\bar{X}^* ve \bar{Y}^* hiper dual spacelike vektörler olduğundan, $\theta^* = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^*\bar{\theta}_1$ hiper dual açısı kullanılarak,

$$\cos \theta^* = 4\xi\varepsilon^*, \quad \sin \theta^* = 1$$

elde edilir.

Timelike eksen için hiper dual split Euler-Rodrigues denklemlerine göre

$$\mathbf{R}^* = I_3 + \mathbf{S}^* + (1 - 4\xi\varepsilon^*)\mathbf{S}^{*2}$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 1 + 4\xi\varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* & 2\xi + 2\varepsilon^* \\ 2\xi + 2\varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* & 1 + 4\xi\varepsilon^* \\ -2\xi\varepsilon^* & -1 & 2\xi\varepsilon^* \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\xi \\ 2\xi & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ve \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} 4\xi & 2\xi & 2 \\ 2 & 2\xi & 4\xi \\ -2\xi & 0 & 2\xi \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada $\mathbf{R}^* = \bar{E} + \varepsilon^* \bar{F}$ dir. $\mathbf{R}^*(S^*) = S^*$, $\bar{E}(\bar{S}_0) = \bar{S}_0$ ve \bar{E} matrisinin dual dönme açısı $\bar{\theta}_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $\bar{F} = \overline{PE}$ dual yarı anti simetrik matrisi

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2\xi \\ 2 & 0 & -2\xi \\ -2\xi & 2\xi & 0 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca ;

- $\bar{X}^* = \bar{X}_0 + \varepsilon^* \bar{X}_1$ için $\bar{X}_0 = (\xi, 1, -\xi)$ ve $\bar{X}_1 = (1, \xi, \xi)$,
- $\bar{Y}^* = \bar{Y}_0 + \varepsilon^* \bar{Y}_1$ için $\bar{Y}_0 = (-\xi, \xi, 1)$ ve $\bar{Y}_1 = (-1, \xi, \xi)$,
- $S^* = \bar{S}_0 + \varepsilon^* \bar{S}_1$ için $\bar{S}_0 = (-1, -\xi, \xi)$ ve $\bar{S}_1 = (-2\xi, \xi - 1, \xi + 1)$,

yazılabilir. Buradan

$$\langle \bar{X}_0, \bar{X}_0 \rangle_L = 1, \quad \langle \bar{Y}_0, \bar{Y}_0 \rangle_L = 1, \quad \langle \bar{S}_0, \bar{S}_0 \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Böylece, \bar{X}_0 ve \bar{Y}_0 birim dual spacelike vektörler ve \bar{S}_0 birim dual timelike vektördür. Diğer taraftan, $\langle \bar{X}_0, \bar{X}_1 \rangle_L = 0$, $\langle \bar{Y}_0, \bar{Y}_1 \rangle_L = 0$ ve $\langle \bar{S}_0, \bar{S}_1 \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{X}^* \in S_1^{*2}$, $\bar{Y}^* \in S_1^{*2}$ ve $S^* \in H_0^{*2}$ elde edilir. Lorentz birim hiper dual küresinin her bir noktası yönlü bir spacelike doğruya ve hiperbolik birim hiper dual küresinin her bir noktası da yönlü bir timelike doğruya karşılık gelir. Bu doğrular;

$$\bar{X}^* \leftrightarrow \bar{L}_{\bar{X}^*} = (-\xi, -\xi, -1) + \bar{t}_x(\xi, 1, -\xi)$$

$$\bar{Y}^* \leftrightarrow \bar{L}_{\bar{Y}^*} = (\xi, -1, \xi) + \bar{t}_y(-\xi, \xi, 1)$$

$$S^* \leftrightarrow \bar{L}_{S^*} = (0, \xi + 1, -\xi + 1) + \bar{t}_s(-1, -\xi, \xi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $t_x, t_y, t_z \in D$ 'dir. Geometrik olarak \mathbf{R}^* , dual spacelike $\bar{L}_{\bar{X}^*}$ ve dual spacelike $\bar{L}_{\bar{Y}^*}$ doğrularını, dual timelike \bar{L}_{S^*} doğrusu etrafında $\bar{\theta}_0 = \frac{\pi}{2}$ açısı kadar döndürür ve $\bar{\theta}_1 = 4\xi$ kadar bir öteleme uygular. $\bar{X}_1 \in H_0^{*2}$, $\bar{X}^* \in S_1^{*2}$, $\bar{Y}_1 \in H_0^{*2}$ ve $\bar{Y}^* \in S_1^{*2}$ olduğundan \bar{X}^* ve \bar{Y}^* noktaları birbirini dik kesen herhangi iki doğruya karşılık gelir. R_1^3 uzayında bu doğrulardan biri spacelike ve diğeri de timelike doğrular. Bu doğrular

$$\bar{X}^* \leftrightarrow \begin{cases} d_{\bar{X}_0} = (1, 0, -1) + \lambda_0(0, 1, 0) \\ d_{\bar{X}_1} = (0, -1, 1) + \lambda_1(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\bar{Y}^* \leftrightarrow \begin{cases} d_{\bar{Y}_0} = (1, -1, 0) + \mu_0(0, 0, 1) \\ d_{\bar{Y}_1} = (0, -1, 1) + \mu_1(-1, 0, 0) \end{cases}$$

dır.

Örnek 3.2. $\bar{X}^* = (1, \varepsilon^*, \xi\varepsilon^*)$ ve $\bar{Y}^* = (\sqrt{2} + \varepsilon^*, 1 + \sqrt{2}\varepsilon^*, \xi\varepsilon^*)$ hiper dual split vektörler olsun. $\langle \bar{X}^*, \bar{X}^* \rangle_L = -1$ ve $\langle \bar{Y}^*, \bar{Y}^* \rangle_L = -1$ olduğundan \bar{X}^* ve \bar{Y}^* birer hiper dual timelike vektörlerdir. Böylece

$$S^* = \bar{X}^* \otimes_L \bar{Y}^* = (\xi\varepsilon^*, \sqrt{2}\xi\varepsilon^* - \xi\varepsilon^*, 1)$$

elde edilir. Burada $\bar{S}_0 = (0, 0, 1)$ ve $\bar{S}_1 = (\xi, \sqrt{2}\xi - \xi, 0)$ dir. $\langle S^*, S^* \rangle_L = 1$ olduğundan S^* bir hiper dual spacelike vektördür. (3.1) denklemini kullanarak buna karşılık gelen yarı anti simetrik matris

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2}\xi\varepsilon^* + \xi\varepsilon^* \\ 1 & 0 & -\xi\varepsilon^* \\ -\sqrt{2}\xi\varepsilon^* + \xi\varepsilon^* & \xi\varepsilon^* & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Daha sonra

$$(S^*)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\xi\varepsilon^* \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\xi\varepsilon^* + \xi\varepsilon^* \\ \xi\varepsilon^* & -\sqrt{2}\xi\varepsilon^* + \xi\varepsilon^* & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

\bar{X}^* ve \bar{Y}^* hiper dual timelike vektörler olduğundan, $\theta^* = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^*\bar{\theta}_1$ hiper dual hiperbolik açısı kullanılarak

$$\cosh \theta^* = \sqrt{2}, \quad \sinh \theta^* = 1$$

elde edilir.

Spacelike eksen için hiper dual split Euler-Rodrigues denklemlerinden,

$$\mathbf{R}^* = I_3 + \mathbf{S}^* + (-1 + \sqrt{2})\mathbf{S}^{*2}$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & (2 - 2\sqrt{2})\xi\varepsilon^* \\ 1 & \sqrt{2} & (2\sqrt{2} - 4)\xi\varepsilon^* \\ 0 & (2\sqrt{2} - 2)\xi\varepsilon^* & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (2 - 2\sqrt{2})\xi \\ 0 & 0 & (2\sqrt{2} - 4)\xi \\ 0 & (2\sqrt{2} - 2)\xi & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{R}^* = \bar{\mathbf{C}} + \varepsilon^*\bar{\mathbf{D}}$ dir. Bu durumda $\mathbf{R}^*(S^*) = S^*$, $\bar{\mathbf{C}}(\bar{S}_0) = \bar{S}_0$ ve $\bar{\mathbf{C}}$ matrisinin dual dönme açısı $\bar{\theta}_0 = \text{arccosh}(\sqrt{2})$ olur. Ayrıca, $\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{C}}$, dual yarı anti simetrik matrisiyle

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (2 - 2\sqrt{2})\xi \\ 0 & 0 & (2\sqrt{2} - 4)\xi \\ (2 - 2\sqrt{2})\xi & (4 - 2\sqrt{2})\xi & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca

- $\bar{\mathbf{X}}^* = \bar{\mathbf{X}}_0 + \varepsilon^*\bar{\mathbf{X}}_1$ için $\bar{\mathbf{X}}_0 = (1,0,0)$ ve $\bar{\mathbf{X}}_1 = (0,1,\xi)$,
- $\bar{\mathbf{Y}}^* = \bar{\mathbf{Y}}_0 + \varepsilon^*\bar{\mathbf{Y}}_1$ için $\bar{\mathbf{Y}}_0 = (\sqrt{2},1,0)$ ve $\bar{\mathbf{Y}}_1 = (1,\sqrt{2},\xi)$,
- $S^* = \bar{S}_0 + \varepsilon^*\bar{S}_1$ için $\bar{S}_0 = (0,0,1)$ ve $\bar{S}_1 = (\xi,(\sqrt{2}-1)\xi,0)$,

yazılabilir. Burada

$$\langle \bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{X}}_0 \rangle_L = -1, \quad \langle \bar{\mathbf{Y}}_0, \bar{\mathbf{Y}}_0 \rangle_L = -1 \text{ ve } \langle \bar{S}_0, \bar{S}_0 \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Böylece, $\bar{\mathbf{X}}_0$ ve $\bar{\mathbf{Y}}_0$ birim dual timelike vektörler ve \bar{S}_0 birim dual spacelike vektördür. $\langle \bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{X}}_1 \rangle_L = 0$, $\langle \bar{\mathbf{Y}}_0, \bar{\mathbf{Y}}_1 \rangle_L = 0$ ve $\langle \bar{S}_0, \bar{S}_1 \rangle_L = 0$ olduğundan, $\bar{\mathbf{X}}^* \in H_0^{*2}$, $\bar{\mathbf{Y}}^* \in H_0^{*2}$ ve $S^* \in S_1^{*2}$ elde edilir. Lorentz birim hiper dual küresinin her bir noktası yönlü bir spacelike doğruya,

hiperbolik birim hiper dual küresinin her bir noktası ise yönlü bir timelike doğruya karşılık gelir. Bu doğrular;

$$\bar{X}^* \leftrightarrow \bar{L}_{\bar{X}^*} = (0, -\xi, 1) + \bar{t}_x(1,0,0)$$

$$\bar{Y}^* \leftrightarrow \bar{L}_{\bar{Y}^*} = (-\xi, -\sqrt{2}\xi, 1) + \bar{t}_y(\sqrt{2}, 1,0)$$

$$S^* \leftrightarrow \bar{L}_{S^*} = ((\sqrt{2} - 1)\xi, \xi, 0) + \bar{t}_s(0,0,1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\bar{t}_x, \bar{t}_y, \bar{t}_s \in D$ dir. Geometrik olarak \mathbf{R}^* , dual timelike $\bar{L}_{\bar{X}^*}$ ve dual timelike $\bar{L}_{\bar{Y}^*}$ doğrularını, dual spacelike \bar{L}_{S^*} doğrusu etrafında $\bar{\theta}_0 = \text{arccosh}(\sqrt{2})$ açısı kadar döndürür ve $\bar{\theta}_1 = 0$ kadar bir öteleme uygular. $\bar{X}_1 \in S_1^{*2}$, $\bar{X}^* \in H_0^{*2}$, $\bar{Y}_1 \in S_1^{*2}$ ve $\bar{Y}^* \in H_0^{*2}$ olduğundan \bar{X}^* ve \bar{Y}^* noktaları, birbirini dik kesen herhangi iki doğruya karşılık gelir. R_1^3 uzayında bu doğrulardan biri timelike ve diğeri de spacelike doğrulardır. Bu doğrular;

$$\bar{X}^* \leftrightarrow \begin{cases} d_{\bar{X}_0} = (0,0,0) + \lambda_0(1,0,0) \\ d_{\bar{X}_1} = (-1,0,0) + \lambda_1(0,1,0) \end{cases}$$

$$\bar{Y}^* \leftrightarrow \begin{cases} d_{\bar{Y}_0} = (0,0,0) + \mu_0(\sqrt{2}, 1,0) \\ d_{\bar{Y}_1} = (-\sqrt{2}, -1,0) + \mu_1(1, \sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

dır.

4. HİPER DUAL SPLIT EULER TEOREMİNİN OLUŞTURULMASI

Bu bölümde, Euler tarafından verilen sabit nokta teoremi, hiper dual split dönme matrisi kullanılarak inşa edilecek ve bu teorem hiper dual split Euler teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.1. $R^* \in SO_1^*(3)$ hiper dual split dönme matrisi olsun. Bu durumda $S^* \neq 0$ olmak üzere $R^* S^* = S^*$ eşitliğini sağlayan bir hiper dual split vektör $S^* \in D_1^{*3}$ vardır.

İspat. R^* hiper dual split dönme matrisi olsun. Bu durumda

$(R^*)^T \varepsilon R^* \varepsilon = R^* \varepsilon (R^*)^T \varepsilon = I_3$, $\det(R^*) = 1$ elde edilir. R^* , bir yarı simetrik ve bir yarı anti simetrik matrisin toplamı olarak

$$R^* = \frac{R^* + \varepsilon(R^*)^T \varepsilon}{2} + \frac{R^* - \varepsilon(R^*)^T \varepsilon}{2} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. R^* matrisinin yarı anti simetrik kısmına S^* denirse

$$R^* S^* \varepsilon (R^*)^T \varepsilon = S^* \quad (4.2)$$

yazılabilir.

(3.1) denklemini kullanarak, $S^* \in D_1^{*3}$ için $g(S^*) = S^*$ olacak şekilde S^* matrisine bir hiper dual split vektör karşılık gelir. Böylece β^* hiper dual split vektörü için

$$S^* = g_{S^*}^{-1} \text{ ve } g_{S^*}^{-1}(\beta^*) = S^* \otimes_L \beta^* \text{ elde edilir. Bu durumda}$$

$$R^*(S^* \otimes_L \beta^*) = R^* S^* \otimes_L R^* \beta^* \quad (4.3)$$

elde edilir.

(4.3) denkleminde de

$$R^* g_{S^*}^{-1} = g_{R^* S^*}^{-1} R^* \quad (4.4)$$

olduğu açıktır.

(4.4) denkleminin her iki tarafına $\varepsilon(R^*)^T \varepsilon$ uygulanırsa

$$R^* g_{S^*}^{-1} \varepsilon (R^*)^T \varepsilon = g_{R^* S^*}^{-1}$$

elde edilir. Böylece

$$g_{R^* S^*}^{-1} = S^*$$

ve

$$\mathbf{R}^* \mathbf{S}^* = g(\mathbf{S}^*) = \mathbf{S}^*$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. Eğer \mathbf{R}^* yarı simetrik matris ise (yani $(\mathbf{R}^*)^T = \varepsilon \mathbf{R}^* \varepsilon$), o zaman $\mathbf{S}^* = 0$ ve $(\mathbf{R}^*)^2 = I_3$ olur. Açık ki, $\mathbf{R}^*(I_3 + \mathbf{R}^*) = I_3 + \mathbf{R}^*$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak, $I_3 + \mathbf{R}^*$ matrisinin her bir sütunu sabit kalır ve sıfır olmayan sütunlar sabit vektörler olur.

Örnek 4.1. \mathbf{R}^* , hiper dual split matrisi

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 1 + 4\xi\varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* & 2\xi + 2\varepsilon^* \\ 2\xi + 2\varepsilon^* & 2\xi\varepsilon^* & 1 + 4\xi\varepsilon^* \\ -2\xi\varepsilon^* & -1 & 2\xi\varepsilon^* \end{bmatrix} \in SO_1^*(3) \quad (4.5)$$

olsun.

$\mathbf{S}^* = \frac{\mathbf{R}^* - \varepsilon(\mathbf{R}^*)^T \varepsilon}{2}$ denkleminde, \mathbf{R}^* matrisinin yarı anti simetrik kısmı

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 0 & \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & \xi - \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* \\ \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & 0 & 1 + 2\xi\varepsilon^* \\ \xi - \xi\varepsilon^* + \varepsilon^* & -1 - 2\xi\varepsilon^* & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

\mathbf{S}^* matrisine karşılık gelen vektör

$$\mathbf{S}^* = (-1 - 2\xi\varepsilon^*, -\xi + \xi\varepsilon^* - \varepsilon^*, \xi + \xi\varepsilon^* + \varepsilon^*) \quad (4.6)$$

dır.

(4.5) ve (4.6) denklemlerden, $\mathbf{R}^* \mathbf{S}^* = \mathbf{S}^*$ olduğu görülür.

KAYNAKÇA

- Aslan, S., Bekar, M., & Yaylı, Y.** (2020). Hyper-dual split quaternions and rigid body motion. *Journal of Geometry and Physics*, 158, 103876.
- Aslan, S., & Yaylı, Y.** (2016). Split quaternions and canal surfaces in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometry*, 5(2).
- Clifford.** (1871). Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1), 381-395.
- Cohen, A., & Shoham, M.** (2016). Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(1), 011015.
- Cohen, A., & Shoham, M.** (2017). Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion. *Mechanism and Machine Theory*, 111, 76-84.
- Cohen, A., & Shoham, M.** (2020). Hyper Dual Quaternions representation of rigid bodies kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 150, 103861.
- Dai, J. S.** (2015). Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections. *Mechanism and Machine Theory*, 92, 144-152.
- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı, Karakuş, S., & Gül, E.,** (2025), On HD-Split Euler-Rodrigues Equations. *International Electronic Journal of Geometry*, 18(1), 124-134.
- Euler, L.** (1776). *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*. *Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae*, 189-207.
- Fike, J. A.** (2016). *Derivative Calculations Using Hyper-Dual Numbers* (No. SAND2016-5252PE). Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).
- Fike, J., & Alonso, J.** (2011, January). The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. In *49th AIAA aerospace sciences meeting including the new horizons forum and aerospace exposition* (p. 886).
- Kahveci, D., Gök, İ., & Yaylı, Y.** (2018). Some variations of dual Euler–Rodrigues formula with an application to point–line geometry. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 459(2), 1029-1039.
- Kahveci, D., Yaylı, Y., & Gök, İ.** (2016). The geometrical and algebraic interpretations of Euler–Rodrigues formula in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(10), 1650116.
- Kazaz, M., Özdemir, A., & Uğurlu, H. H.** (2009). Elliptic motion on dual hyperbolic unit sphere $H^{\sim} 02$. *Mechanism and machine theory*, 44(7), 1450-1459.
- Kotelnikov, A. P.** (1895). Screw calculus and some applications to geometry and mechanics. *Annals of the Imperial University of Kazan*, 24.

López, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International electronic journal of geometry*, 7(1), 44-107.

McCarthy, J. M. (1990). *Introduction to theoretical kinematics*. MIT press.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity* (Vol. 103). Academic press.

Palais, B., & Palais, R. (2007). Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation. *Journal of fixed point theory and applications*, 2(2), 215-220.

Ramis, Ç., Yaylı, Y., & Zengin, İ. (2022). The application of Euler-Rodrigues formula over hyper-dual matrices. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 266-276.

Study, E. (1901). *Geometrie der Dynamen*. Leipzig: B. G. Teubner.

Yaylı, Y., Çalışkan, A., & Uğurlu, H. H. (2002). The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres. In *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy* (Vol. 102, No. 1, pp. 37-47).