

T.C.  
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**RANKİN-COHEN OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF TERCAN

TEZ DANIŐMANI  
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2021

10404685

T.C.  
BİLECİK ŐEHY EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**RANKİN-COHEN OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF TERCAN

TEZ DANIŐMANI  
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2021

10404685

## BEYAN

“Rankin-Cohen Operatörleri ve Uygulamaları” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmam, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR</b>
Destek alındı ise;	
<b>Destekleyen Kurum:</b>	
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
<b>Diğer; .....</b>	

**Elif TERCAN**

**Tarih**

.....

**İmza**

.....

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmanın yürütülmesinde bilgi ve önerileriyle beni yönlendirerek bana yol gösteren ve desteğini benden esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. İlker İNAM'a,

Yüksek lisansım boyunca birlikte geçirdiğimiz süre için ve bana verdikleri sonsuz destekleri için ekip arkadaşlarım saygıdeğer Öğr. Gör. Banu İREZ AYDIN ve sevgili Öğr. Gör. Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca lisans hayatım boyunca matematik öğrenimim ve eğitimimde emekleri olan Uludağ Üniversitesi'ndeki kıymetli hocalarıma bana kattıkları her şey için teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisansımın özellikle tez döneminde kendilerinden görmüş olduğum motivasyon desteği ve ümit verici konuşmalarıyla beni rahatlatan tüm yakın çevreme gönülden teşekkür ederim.

Pari/GP Programı öğrenimi için Erasmus Staj Hareketliliği kapsamında beni üniversitelerinde misafir eden Prof. Dr. Henri COHEN, Prof. Dr. Karim BELABAS ve Doç. Dr. Bill ALLOMBERT'e gösterdikleri sabır, ilgi ve alaka için en içten teşekkür ederim.

Yüksek lisans tez çalışmam 118F148 no'lu TÜBİTAK 1001 Projesi tarafından desteklenmiştir; desteğinden ötürü Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederim.

Bu çalışma küçüklüğümden itibaren üzerimde sonsuz emeği olan, beni büyük bir itina ve özveriyle büyütüp güçlü bir karaktere sahip olmama vesile olan ve hayatın her alanında kararlarım daima saygı gösteren hayattaki en değerli varlığım annem Mercan TERCAN'a ithaf edilmiştir.

## ÖZET

### RANKİN-COHEN OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI

Modüler formlar Matematik'in birçok dalını bir araya getirmesi, uygulamalarının Fizik'e kadar uzanması nedeniyle yüzyılı aşan süredir popülerliğini kaybetmemiştir ve halen yaygın olarak çalışılmaktadır. Bu çalışmada modüler formların Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi ile Sayılar Teorisi'nin ara kesitinde kalan Rankin-Cohen operatörleri (parantezi) konusu çalışılmıştır. 7 bölüm ve bir ekten oluşan bu tezin ilk bölümü ön bilgilere ve ileride kullanılacak olan kavramların tanıtılmasına ayrılmıştır. İkinci bölümde modüler formlar üzerinde tanımlı diferansiyel operatörler verilmiş olup üçüncü bölümde tezin ana kısmını oluşturan Rankin-Cohen parantezi kavramı tanıtılmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Rankin-Cohen parantezlerinin modüler formlar üzerinde tanımlı Petersson iç çarpımı ile olan ilişkisi ele alınmıştır. Beşinci bölümde Choie ve Lee tarafından 2011'de yayımlanan bir makale incelenmiştir. Altıncı bölümde Lanphier ve Takloo-Bighash tarafından verilen Rankin-Cohen parantezleri ile ilgili ilginç bir sonuç verilecektir. Yedinci ve tezin orijinal kısmını oluşturan Rankin-Cohen parantezinin bir uygulaması olarak Kohnen plus uzayında yer alan yarım tam sayı ağırlıklı iki Hecke eigenform, Eisenstein serisi ve klasik teta serisinin birinci mertebeden Rankin-Cohen parantezi cinsinden ifade edilmiştir. Tezde ek olarak Pari-GP yazılımında mf-paketinde yer alan Rankin-Cohen parantezini de kapsayan bazı hesaplamaların ekran görüntüleri yer almaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Modüler formlar, Rankin-Cohen parantezleri, Pari-GP yazılımı, Petersson iç çarpımı, yarım tam sayı ağırlıklı modüler formlar

## ABSTRACT

### RANKIN-COHEN OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

Modular forms have not lost popularity for more than a hundred years and are still widely studied, as they bring together many branches of mathematics and their applications extend to physics. In this study, the subject of Rankin-Cohen operators (brackets), which is located at the intersection of analysis and function theory and modular forms. The first part of this thesis, which consists of 7 chapters and an appendix, is devoted to preliminaries and the introduction of topics that will be used in the thesis. In the second part, differential operators defined on modular forms are given. In the third part, the concept of Rankin-Cohen bracket, which forms the main part of the thesis, is introduced and its basic features are examined. In the fourth section, the relation of Rankin-Cohen bracket with Petersson inner product defined on modular forms is discussed. In the fifth chapter, the article published in 2011 by Choie and Lee is examined. In the sixth chapter, an interesting result about the Rankin-Cohen parenthesis given by Lanphier and Takloo-Bighash is discussed. As an application of the Rankin-Cohen bracket, which forms the seventh and original part of the thesis, the two Hecke eigenforms in the Kohnen-plus space are expressed via the first order Rankin-Cohen parenthesis in terms of the classical theta series and Eisenstein series are expressed. In addition to the thesis, there are screenshots of some calculations including the Rankin-Cohen bracket included in the mf-package in Pari-GP software.

**Keywords:** Modular forms, Rankin-Cohen brackets, Pari-GP software, Petersson inner product, half integral weight modular forms

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER.....	1
1.1. Tanım ve Temel Özellikler.....	1
2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLER.....	7
2.1. Giriş.....	7
2.2. Diferansiyel Operatör Üzerindeki Bazı Düzenlemeler.....	9
3. RANKIN-COHEN OPERATÖRLERİ.....	13
4. RANKIN-COHEN PARANTEZLERİ ÜZERİNE BİR SONUÇ.....	17
5. RANKIN-COHEN PARANTEZİNİN FARKLI UYGULAMALARI.....	21
5.1. Ön Hazırlık ve Temel Sonucun İfadesi.....	21
5.2. Materyal ve Metotlar.....	22
5.3. Ana Teorem'in (Teorem 5.1.4) İspatı.....	23
6. HECKE EIGENFORMLARIN RANKIN-COHEN PARANTEZLERİ ÜZERİNE ...	27
6.1. Temel Sonucun İfadesi.....	27
6.2. $L$ -Fonksiyonları ile Bağlantı.....	27
7. RANKIN-COHEN PARANTEZİNİN UYGULAMALARI.....	33
KAYNAKÇA.....	36
EKLER.....	38

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

### Simgeler

- $C^1$  : 1. Mertebeden Sürekli Kısmi Türevlere Sahip Karmaşık Fonksiyonların Kümesi
- $C^\infty$  : Sonsuz Mertebeden Sürekli Kısmi Türevlere Sahip Karmaşık Fonksiyonların Kümesi
- $\mathbb{C}$  : Kompleks Sayılar
- $GL_2^+(\mathbb{R})$  : Genel Lineer Grup
- $\mathfrak{H}$  : Karmaşık Üst Yarı Düzlem
- $Im(z)$  :  $z$  Karmaşık Sayısının Sanal Kısmı
- $M_k(\Gamma)$  :  $\Gamma$  için  $k$  Ağırlıklı Modüler Form Uzayı
- $PSL(2, \mathbb{Z})$  : Projektif Modüler Grup
- $P_k^n$  : Poincaré Serisi
- $\mathbb{R}$  : Reel Sayılar
- $Re(z)$  :  $z$  Karmaşık Sayısının Reel Kısmı
- $S_k(\Gamma)$  :  $\Gamma$  için  $k$  Ağırlıklı Cusp Formların Uzayı
- $\mathbb{Z}$  : Tam Sayılar
- $\Gamma$  : Modüler Grup
- $\Gamma_0(N)$  : Modüler Grubun  $N$  Seviyeli Temel Denklik Alt Grubu

# 1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

## 1.1. Tanım ve Temel Özellikler

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak kavramlar verilecektir. Bu çalışma boyunca  $\mathfrak{H}$  ile karmaşık üst yarı düzlem,  $PSL(2, \mathbb{Z})$  ile katsayıları tam sayı ve  $ad - bc = 1$  olmak üzere  $\frac{az+b}{cz+d}$  biçimindeki lineer kesirli dönüşümlerin grubu ve  $\Gamma$  ile modüler grup temsil edilecektir. Aksi belirtilmedikçe  $z$  değişkenleri  $Im z > 0$  özelliğinde olacaktır.

Modüler formlarla ilgili temel kaynaklar Miyake (2006), (Cohen ve Strömberg, 2017) ve Koblitz (1984) olup bu bölümdeki bilgiler ve daha fazlası bu kaynaklardan elde edilebilir.

**Tanım 1.1.1. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $k \in \mathbb{Z}$  olsun ve  $F: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu göz önüne alınsın.

1. Eğer her  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  ve  $z \in \mathfrak{H}$  için

$$F(\gamma(z)) = (cz + d)^k F(z)$$

oluyor ise  $F$ 'ye  $\Gamma$  için  $k$  ağırlıklı zayıf modüler adı verilir.

2. Eğer  $F, \mathfrak{H}$  üzerinde analitik ve  $Im(z) \rightarrow \infty$  için  $|F(z)|$  sınırlı kalıyor ise  $F$ 'ye  $\Gamma$  için  $k$  ağırlıklı modüler form denir. Bu özellikteki modüler formların kümesi  $M_k(\Gamma)$  ile ifade edilir.

3. Eğer  $Im(z) \rightarrow \infty$  için  $F(z)$  sifıra yakınsıyor ise  $F$ 'ye  $\Gamma$  için  $k$  ağırlıklı cusp form denir. Bu özellikteki cusp formların kümesi  $S_k(\Gamma)$  ile gösterilir.

4. Modüler grubun üreteçleri  $S(z) = -\frac{1}{z}$  ve  $T(z) = z + 1$  olup  $F(z)$  bir  $k$  ağırlıklı modüler form ise özel olarak 1. koşulu sağlaması gerekir yani  $F(z + 1) = F(z)$  olur, böylece  $k$  ağırlıklı bir modüler form periyodik bir fonksiyon olur. O halde Fourier Analizi Teorisi gereği periyodik her bir karmaşık fonksiyon  $\sin z$  ve  $\cos z$  cinsinden ifade edilebilir.

Böylece  $q = e^{2\pi iz}$  olmak üzere  $k$  ağırlıklı  $F(z)$  modüler formunun

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

gibi bir Fourier açılımı vardır ve eğer  $F(z)$  bir cusp form ise buradaki toplam  $n = 1$  den başlar.

$M_k(\Gamma)$  ve  $S_k(\Gamma)$ 'nin  $\mathbb{C}$  karmaşık sayı cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğu kolayca görülebilir. Böylece vektör uzayları ile ilgili olan tüm kavramların modüler form uzaylarında da karşılıkları olur. Öte yandan modüler grubun alt grubu olan gruplar üzerinde de modüler formlar tanımlanabilir. Bunlardan en meşhuru modüler grubun  $c \equiv 0 \pmod{N}$  özelliğindeki elemanlarından oluşan alt grubu olan temel denklik alt grubudur. Bu grup üzerinde

tanımlı  $k$  ağırlıklı modüler formlara “ $N$  seviyeli  $k$  ağırlıklı modüler form” adı verilir ve 2. koşuldaki analitiklik koşulları buna göre düzenlenir.

**Tanım 1.1.2. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $M_k(\Gamma)$  vektör uzayı olduğu için Hecke operatörleri adı verilen lineer operatörler  $M_k(\Gamma)$  üzerinde hareket eder. Daha açık bir ifadeyle verilen bir  $k$  ağırlıklı  $f(z)$  modüler formu için  $m$ . Hecke operatörünün etkisi aşağıdaki gibi verilir:

$$T_m f(z) = m^{k-1} \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \backslash M_m} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Burada  $M_m$ , determinantı  $m$  olan  $2 \times 2$  tam sayı girdili matrislerin kümesini temsil eder.

**Tanım 1.1.3. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Her bir  $m = 1, 2, \dots$  için tüm  $T_m$  Hecke operatörleri için öz vektör olan modüler forma Hecke eigenform (öz form) adı verilir. Açıktır ki, baş katsayısı 1 olan eigenformlar tam olarak Hecke operatörlerinin öz vektörü olur.

**Uyarı 1.1.4.**  $k$  bir tam sayı olmak üzere  $k + \frac{1}{2}$  bir yarım tam sayı olarak adlandırılır. Tam sayı ağırlıklı modüler form tanımında  $(cz + d)^k$  olarak gelen otomorfi çarpanı yarım tam sayı ağırlıklı modüler form tanımında kompleks karekök fonksiyonu olarak geleceği için biraz daha dikkatli olunmalıdır.

$z \in \mathfrak{H}$  olmak üzere Teta serisi  $\theta(z) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$  biçiminde tanımlanır.  $\theta(z + 2) = \theta(z)$  ve  $\theta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{-iz}\theta(z)$  bağıntıları sağlanır. Karmaşık karekök fonksiyonunun bilinen dalı seçilerek her  $\gamma \in \Gamma$  için  $b, c \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $\left(\frac{2c}{d}\right)_2$  Legendre sembolü ve  $\epsilon_d = 1$  veya  $i$  (sırasıyla  $d \equiv 1$  veya  $3$  için) olmak üzere  $\theta(\gamma(z)) = \left(\frac{2c}{d}\right)_2 \epsilon_d^{-1} (cz + d)^{\frac{1}{2}} \theta(z)$  elde edilir.  $\tilde{\theta}(z) = \theta(2z)$  seçilerek her  $\gamma \in \Gamma_0(4)$  için  $j(\gamma, z) := \left(\frac{2c}{d}\right)_2 \epsilon_d^{-1} (cz + d)^{\frac{1}{2}}$  olmak üzere  $\tilde{\theta}(\gamma(z)) = j(\gamma, z) \tilde{\theta}(z)$  olur.

**Tanım 1.1.5. (Koblitz, 1984)**  $k$  bir tam sayı olsun. Bu durumda  $k + \frac{1}{2}$  yarım tam sayı olarak adlandırılır. Her bir cusp noktasında analitik olan ve  $\tilde{\theta}(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^{k+1/2} \tilde{\theta}(z)$  fonksiyonel eşitliğini sağlayan fonksiyonlara  $\Gamma_0(4)$  için  $k + \frac{1}{2}$  ağırlıklı modüler form yani yarım tam sayı ağırlıklı modüler form denir ve  $M_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$  ile gösterilir.

Sonsuzda sıfır olan yarım tam sayı ağırlıklı modüler forma yarım tam sayı ağırlıklı cusp form denir. Bu özellikteki cusp formların uzayı  $S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$  ile gösterilir.

**Teorem 1.1.6. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Yarım tam sayı ağırlıklı modüler formlar üzerinde  $p^2$ . ağırlıklı Hecke operatörü  $4|N$  ve  $p$  asal olmak üzere  $p \nmid N$ ,  $k = 2\lambda + 1$  pozitif tek tam sayı olsun.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N))$  olduğunda

$$b_n = a_{p^2 n} + \left( \frac{(-1)^{\lambda n}}{p} \right) p^{\lambda-1} a_n + p^{k-2} a_{n/p^2}$$

olmak üzere  $T_{p^2} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$  'dir.

**Tanım 1.1.7. (Koblitz, 1984)**  $p$  asal olmak üzere tüm  $T_{p^2}$ 'ler için öz vektör olan modüler forma yarım tam sayı ağırlıklı modüler formlar için Hecke eigenform denir.

**Tanım 1.1.8. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $f$  ve  $g$ ,  $\mathfrak{H}$  üst yarı düzleminde  $C^\infty$  sınıfından sırasıyla  $k$  ve  $l$  ağırlıklı iki fonksiyon olsun; bu durumda  $f$  ve  $g$  fonksiyonunun  $n$ . Rankin-Cohen parantezi:

$$[f, g]_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+k-1}{j} \binom{l+n-1}{n-j} \mathfrak{D}_\tau^{n-j} \mathfrak{D}_\tau^j(g)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada  $\mathfrak{D}_\tau(f) := \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial \tau}$  şeklindedir. Ayrıca  $f$ ,  $k$  ağırlıklı ve  $g$ ,  $l$  ağırlıklı birer modüler form ise ( $k, l$  tam sayı veya yarım tam sayı)  $[f, g]_1 = lgf' - kfg' \in M_{k+l+2}(\Gamma)$  olur.

**Tanım 1.1.9. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $k > 2$  bir çift tam sayı olsun.  $(m, n)$  aynı anda sıfır olmayan tam sayı çifti olmak üzere  $k$  ağırlıklı Eisenstein serisi  $z \in \mathfrak{H}$  olmak üzere

$$G_k(z) := \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz + n)^k}$$

biçiminde tanımlanır.

Bazı  $k$  çift tam sayıları için Eisenstein serileri şu şekildedir:

$$G_4(z) = \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + \dots$$

$$G_6(z) = -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + \dots$$

$$G_8(z) = \frac{1}{480} + q + 129q^2 + 2188q^3 + \dots$$

**Tanım 1.1.10. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $k > 2$  bir çift tam sayı olsun. Bu durumda  $k$  ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serisi  $E_k(z)$  ile gösterilir ve

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

olarak tanımlanır. Burada  $B_k$ ,  $k$ . Bernoulli sayısını gösterir ve  $\sigma$  bölen fonksiyonu

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}$$

olarak tanımlanır.

$$E_4(z) = 1 + 240q + 2160q^2 + \dots$$

$$E_6(z) = 1 - 504q - 16632q^2 + \dots$$

$$E_8(z) = 1 + 480q + 61920q^2 + \dots$$

**Teorem 1.1.11. (Koblitz, 1984)**  $k \geq 4$  olmak üzere  $E_k \in M_k(\Gamma)$  olur.

**Teorem 1.1.12. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $z \in \mathfrak{H}$  ve  $q = e^{2\pi iz}$  olmak üzere

$$\theta(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$$

olur.

**Teorem 1.1.13. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ ,  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N))$  olsun.  $d_N$  sayısı  $\Gamma_0(N)$ 'in  $PSL(2, \mathbb{Z})$ 'deki görüntüsünün indeksi olmak üzere  $M := \frac{kd_N}{12}$  sayısı tanımlansın. Eğer  $0 \leq i \leq M$  için  $a_i = b_i$  ise bu takdirde  $f = g$  olur.  $M$  sayısına Sturm sınırı adı verilir.

**Tanım 1.1.14. (Koblitz, 1984)**  $k$  çift tam sayı,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$  olsun.  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$  özelliğindeki  $a_n$  Fourier katsayıları sıfır olan cusp formlar  $S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$  uzayının alt uzayını oluşturur. Bu uzaya Kohnen plus uzayı adı verilir ve  $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.15. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Modüler fonksiyonlar  $\mathfrak{H}$  üst yarı düzlemde tanımlı ve  $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$  modüler grubunun değişmeyen belirli fonksiyonlarıdır.  $\Gamma \subset \Gamma(1)$  alt grubuna göre invaryant (değişmez) ya da hemen hemen invaryant kalan belirli fonksiyonlardır. Burada  $\Gamma(1)$  daha genel olarak  $\mathfrak{H}$  üzerinde  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  için  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  kesirli doğrusal dönüşümlerle

$$G = GL_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \det(g) > 0 \right\}$$

biçiminde ifade edilir.

**Tanım 1.1.16. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $k \in \mathbb{Z}$  olsun. Eğer  $f$ ,

1.  $\mathfrak{H}$  üzerinde meromorfik,
2.  $\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  için  $j(g, z) = cz + d$  olmak üzere

$$f(g(z)) = j(g, z)^k f(z)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlıyorsa  $\Gamma$  üzerinde  $k$  ağırlıklı bir zayıf modüler fonksiyondur.

**Tanım 1.1.17. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $X$ ,  $\mathfrak{H}$  üzerinde tüm karmaşık değerli analitik fonksiyonların uzayı olsun.  $\mathfrak{H}$  üzerindeki  $SL_2(\mathbb{Z})$  etkisini kullanarak  $X$  üzerindeki  $SL_2(\mathbb{Z})$  etkisini tanımlayabiliriz. Herhangi bir  $k \in \mathbb{N}$  için slash operatörü  $f \in X$  ve  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  olmak üzere  $\tau \in \mathfrak{H}$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  iken

$$(f|_k\gamma)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau)$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 1.1.18. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $\Gamma$ ,  $SL_2(\mathbb{Z})$ 'nin  $N$  seviyeli kongrüans alt grubu olsun. Bir  $f \in X$  fonksiyonu

1.  $\forall \gamma \in \Gamma$  için  $f|_k\gamma = f$ ,
2.  $\forall \alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$  için  $f|_k\alpha$  fonksiyonu  $\infty'$ da analitik

şartlarını sağlıyorsa  $\Gamma$ 'ya  $k$  ağırlıklı  $N$  seviyeli bir modüler form denir.

**Tanım 1.1.19. (Cohen ve Strömberg, 2018)**  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(N)$  cusp formunun  $L$ -fonksiyonu  $L(s, f)$  ile gösterilir ve

$$L(s, f) = \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1} \sum_{p \nmid N} \left(1 - \frac{a_p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s+1-k}}\right)^{-1}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.1.20. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Modüler formlar uzayı  $\mathbb{C}$  karmaşık cisimi üzerinde sonlu bir vektör uzayı olduğunu görmüştük. Bu nedenle modüler formlar uzayı üzerinde uygun bir iç çarpım fonksiyonu tanımlayarak bu uzaylar iç çarpım uzayına dönüştürülebilir. Böylece modüler formların geometrik özelliklerinin çalışılması da mümkün olur. Hatırlanacağı üzere modüler formları  $\mathfrak{H}$  üst yarı düzlemi üzerinde tanımlamıştık; yani modüler formların geometrik özellikleri hiperbolik geometri ile açıklanır.

$\mathfrak{H}$  üst yarı düzlemi üzerindeki hiperbolik ölçümü  $d_\mu = dx dy / y^2$  ile gösterelim. Bu ölçün  $GL_2^+(\mathbb{R})$  dönüşümleri altında invariant kalır ve eğer  $G$  1. tip bir Fuchsian grupsa ve cövlümü  $covol(G)$  ile gösterilirse

$$covol(G) = \int_{G \backslash \mathfrak{H}} d_\mu = \int_{\mathfrak{F}(G)} \frac{dx dy}{y^2}$$

olarak tanımlanır. Eğer  $G$ ,  $\Gamma$ 'nın bir alt grubu ise bu takdirde  $covol(G) = [\Gamma : G](\pi/3)$  olur. Aşağıdaki tanımda  $f$  ve  $g$  gibi iki modüler formun bir  $G$  grubuna göre Petersson iç çarpımı tanımlanacaktır.

**Tanım 1.1.21. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $G$ ,  $\Gamma$ 'nın sonlu indeksli bir alt grubu olsun. Eğer  $f, g \in M_k(G)$  ise mevcut olduğu durumda  $f$  ve  $g$ 'nin  $G$  grubuna göre Petersson skaler çarpımı

$$\langle f, g \rangle_G = \frac{1}{[\Gamma : G]} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \overline{g(\tau)} y^k d_\mu$$

olarak tanımlanır.

**Uyarı 1.1.22.** Petersson iç çarpımının birçok normalizasyon şekli mümkündür. Bu tanımda normalleştirme için 1 veya  $1/covol(G)$  seçmek yerine  $1/[\Gamma : G]$  seçilmiştir. Bunun nedeni ise formları daha basit yazmak adına gruba olan bağlılıktan kaçınmaktır.

## 2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

### 2.1. Giriş

Bu bölümde modüler formlardan yeni modüler form elde etmenin yöntemlerinden biri olan diferansiyel operatörleri ele alacağız. Burada ele alacağımız yapılarda  $G$  genellikle 1. tip genel Funchsian grupları gösterse de birkaç yerde  $G$  grubunun  $\Gamma$  modüler grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olduğunu kabul edeceğiz.

**Tanım 2.1.1. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $f$  fonksiyonu verilsin. Bu takdirde her  $\gamma =$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$  için slaş operatörü

$$f|_k \gamma = (ad - bc)^{k/2} (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau)$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.2. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Eğer  $f$ ,  $\mathfrak{H}$  üst yarı düzlem üzerinde  $C^1$  sınıfından bir fonksiyon ise bu durumda

$$D_\tau(f) := \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

ve

$$D_{\bar{\tau}}(f) := \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial \bar{\tau}}$$

olarak tanımlanır.

**Lemma 2.1.3. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Eğer  $f$  yerine  $D_\tau(f)$  alırsak

$$D_\tau(f)|_{k+2} \gamma = D_\tau(f|_k) + \frac{k}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d} f|_k \gamma' \text{ dir.}$$

**İspat.**  $\tau$ 'ya göre kısmi türevi kısaca  $\partial\tau$  ile göstereelim. Eğer  $f|_k \gamma$ 'nın tanımında  $\tau$  'ya göre diferansiyel alırsak, bu durumda

$$\partial_\tau \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \frac{a(c\tau + d) - c(a\tau + b)}{(c\tau + d)^2} = \frac{ad - bc}{(c\tau + d)^2}$$

olduğundan

$$\partial_\tau (f|_k \gamma) \tau = (ad - bc)^{\frac{k+2}{2}} (c\tau + d)^{-k-2} \partial\tau(f)(\gamma\tau) - kc(ad - bc)^{\frac{k}{2}} (c\tau + d)^{-k-1} f(\gamma\tau)$$

elde ederiz. Başka bir deyişle  $2\pi i$  ile bölerek

$$\partial_\tau(f)|_{k+2\gamma} = \partial_\tau(f|_k\gamma) + \frac{kc}{c\tau + d}f|_k\gamma$$

elde ederiz.

O hâlde eğer  $f$ ,  $k$  ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon ise  $D_{\tau(f)}$ ,  $(k+2)$  ağırlıklı bir hemen hemen modüler form olur ve bu formun derinliği 1'den küçük ya da eşittir. Sadece  $k=0$  olması durumunda zayıf modüler form olur. Örneğin;  $j(\tau)$  modüler fonksiyonunu dikkate alalım.  $j'(\tau)$  2 ağırlıklı zayıf modüler form olur. 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyonun türevinin hâlâ 2 ağırlıklı modüler olması 0'dan farklı ağırlığa sahip modüler fonksiyonlar için de önemli sonuçlar doğurur.

**Önerme 2.1.4. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $G$ ,  $\Gamma$ 'nın sonlu indeksli bir alt grubu ve  $f \in M_k(G)$  ve  $g \in M_l(G)$  olsun. Bu takdirde  $F = lgf' - kfg'$ ,  $G$  üzerinde  $k+l+2$  ağırlıklı bir cusp form olur.

**İspat.**  $G$  özdeşliğinin sıfırından farklı olduğunu kabul edelim. Eğer  $h = \frac{f^l}{g^k}$  olarak tanımlanırsa bu durumda  $h$ 'nin 0 ağırlıklı bir modüler form olduğu açıktır ve  $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ ,  $g\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^l g(\tau)$  olmak üzere  $h = \frac{f(\tau)^l}{g(\tau)^k}$  olur. Bir diğer yandan  $h'$  de 2 ağırlıklı bir modüler fonksiyon olur.

Böylece  $F = \frac{g^{k+1}h'}{f^{l-1}} = lgf' - kfg'$  fonksiyonu  $l(k+1) + 2 - k(l-1) = k+l+2$  ağırlıklı bir modüler fonksiyon olur.

Üstelik  $F = lgf' - kfg'$  üst yarı düzlemin kapanışı  $\bar{\mathfrak{H}}$  üzerinde analitik olduğu ve polinom olarak sınırlı olduğu açıktır.

Şimdi  $F$ 'nin cusp form olduğunu görelim:

$(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$   $G \setminus \Gamma$  bölüm grubunun sağ kosetlerinin temsilcilerin bir sistemi olsun.  $f_i = f|_k\gamma_i$ ,  $g_i = g|_l\gamma_i$  olarak tanımlansın. Öte yandan  $h_i = h|_0\gamma_i$  tanımlansın ki bu durumda  $h_i = \frac{f_i^l}{g_i^k}$ ,  $G_i = \gamma_i^{-1}G\gamma_i$  eşlenik grubu üzerinde sıfır ağırlıklı bir modüler form olsun. Üstteki gibi  $F_i = lg_i f_i' - k f_i g_i'$   $G_i$  üzerinde  $k+l+2$  ağırlıklı bir modüler form olur ve üstelik tanım gereği  $h_i' = h'|_2\gamma_i$  olur ki bu durumda  $F|_{k+l+2}\gamma_i = F_i$  olduğu elde edilir.

Fourier açılımlarına bakılarak  $y \rightarrow \infty$  yapıldığında bu fonksiyonun 0'a yakınsadığı görülür. Bu ise  $F$ 'nin cusp form olduğunu ispatlar.

Yukarıdaki teorem yardımıyla diferansiyel operatörlerdeki ilk adımı atmış oluyoruz.

## 2.2. Diferansiyel Operatör Üzerindeki Bazı Düzenlemeler

Eğer  $k \neq 0$  ise bu durumda diferansiyel operatörü modularite korunacak şekilde düzenlemek çok da zor değildir. Bunu yapabilmemizin en az iki yolu vardır. Birincisinin avantajı şu şekildedir: Eğer ilk form analitikse diferansiyel operatör uygulandıktan sonra da analitiklik korunur. İkincisinde ise sadece hemen hemen analitiklik korunur; ancak buradaki avantaj bu diferansiyel operatörün kolaylıkla uygulanabilmesidir.

Bu bölümde ilk olarak bazı notasyonları tanıtmış olacağız.

**Tanım 2.2.1. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $f, \xi$  üst yarı düzlemde tanımlı bir fonksiyon ve  $k \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda

$$Y(\tau) := -\frac{1}{4\pi\xi(\tau)} = -\frac{1}{4\pi y},$$

$$Y_2(\tau) := -\frac{1}{12}E_2(\tau) = -\frac{1}{12} + 2\sum_{n \geq 1} \sigma_1(n)q^n,$$

$$Y_2^*(\tau) := -\frac{1}{12}E_2^*(\tau) = Y_2(\tau) - Y(\tau)$$

biçimde tanımlanır ve  $\bar{\mathfrak{H}}$  üzerindeki herhangi bir  $Z$  fonksiyonu örneğin  $Y$  veya  $Y_2$  için

$$D_Z(f) = D_{Z,k}(f) := D_Z(f) + kZf$$

olarak tanımlanır. Burada belirliyse  $k$  indeksi ihmal edilebilir.

**Uyarı 2.2.2. (Cohen ve Strömberg, 2017)**'de sayfa 151 Sonuç 5.2.17 gereği

$$Y(\tau) - Y_2(\tau) = E_2^*(\tau)/12 = -Y_2^*$$

olur ki bu bir hemen hemen holomorfik (analitik) bir modüler formdur ve özel olarak zayıf modülerdir.

Böylece

$$D_{Y,k}(f) - D_{Y_2,k}(f) = \left(\frac{k}{12}\right)E_2^*(f) = -Y_2^*f$$

özdeşliği elde edilir.

**Uyarı 2.2.3.**  $D_{Y_2,k}$  operatörü analitikliği korur; ancak  $D_{Y,k}$  yalnızca hemen hemen analitikliği korur.

Diğer yandan iki operatör de (zayıf) modülerliği korur. İlk olarak  $D_{Y,k}$ 'nin analitik olmayan modifikasyonu ile başlayalım.

**Önerme 2.2.4. (Cohen ve Strömberg, 2017)**

(a)  $D_\tau(Y) = -Y^2$  ve herhangi bir  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$  için

$$(Y|_2\gamma)(\tau) = Y(\tau) - \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d}$$

eşitliği sağlanır.

(b) Eğer  $f \in \mathfrak{H}$  üst yarı düzleminde  $C^1$  sınıfından bir fonksiyon ise herhangi bir  $\gamma =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\mathfrak{D}_{Y,k}(f)|_{k+2}\gamma = \mathfrak{D}_{Y,k}(f|_k\gamma)$$

elde edilir.

Özel olarak eğer  $f$  belli bir  $G$  grubu için  $k$  ağırlıklı bir hemen hemen analitik modüler form ise bu durumda  $\mathfrak{D}_{Y,k}(f)$   $G$  için  $k+2$  ağırlıklı bir hemen hemen analitik modüler form olur.

**İspat.**

(a)  $Y(\tau) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \left(\frac{1}{\tau - \bar{\tau}}\right)$ ,  $\tau$ 'ya göre türev alırsak kolayca görülebilir ki

$$\partial_\tau Y(\tau) = -2\pi i Y^2(\tau)$$

olur.

2. formülü elde edebilmek için  $Im(Y, \tau) = (ad - bc)Im(\tau)|c\tau + d|^{-2}$  olduğu hatırlanırsa

$$Y(\gamma\tau) = -\frac{1}{4\pi Im(\gamma\tau)} = \frac{|c\tau + d|^2}{ad - bc} Y(\tau)$$

olur.

Böylece

$$(Y|_2\gamma)(\tau) = \frac{c\bar{\tau} + d}{c\tau + d} Y(\tau) = \left(1 - \frac{2icy}{c\tau + d}\right) Y(\tau) = Y(\tau) - \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d}$$

elde edilir.

(b) (Cohen ve Strömberg, 2017)'de sayfa 152 Lemma 5.3.2 gereği

$$D_\tau(f)|_{k+2}\gamma = D_\tau(f|_k\gamma) + \frac{k}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d} f|_k\gamma$$

ve

$$D_{Y,k}(f) = D_\tau(f) + kYf$$

olduğundan (a)'yı kullanarak

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{Y,k}(f)|_{k+2\gamma} &= D_\tau(f)|_{k+2\gamma} + kY|_2\gamma f|_k\gamma \\ &= D_\tau(f|_k\gamma) + \frac{k}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d} f|_k\gamma + k \left( Y - \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{c\tau + d} \right) f|_k\gamma = \mathfrak{D}_{Y,k}(f|_k\gamma)\end{aligned}$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur.

Bu son ifade teoremin ispatında derinlikle ilgili iddiayı da açıklar.

Çünkü  $D_\tau(y^{-p}) = -\left(\frac{i}{2}\right)py^{-(p+1)}$  olup  $\mathfrak{D}_{Y,k}$  operatörünün derinliği 1 artırdığı açıktır.

**Önerme 2.2.5. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Eğer  $f \in \mathfrak{S}$  üst yarı düzlemde  $C^1$  sınıfından bir fonksiyon ise her  $\gamma \in \Gamma$  için  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}(f)|_{k+2\gamma} = \mathfrak{D}_{Y_2,k}(f|_k\gamma)$  olur. Özel olarak eğer  $f \in \Gamma$ 'nin belli bir  $G$  alt grubu için  $k$  ağırlıklı bir zayıf modüler form ise bu durumda  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}(f)$   $k+2$  ağırlıklı modüler formdur ve eğer  $f \in G$  için modüler ya da cusp form ise  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}(f)$  aynı özelliktedir.

**İspat.** Bu ispat doğrudan yapılacak bir hesaplamayla da gösterilebilir ancak dikkat edilirse Önerme 2.2.4 bize  $\mathfrak{D}_{Y,k}(f) = D_\tau(f) + kYf$ 'nin  $\mathfrak{D}_{Y,k}(f)|_{k+2\gamma} = \mathfrak{D}_{Y,k}(f|_k\gamma)$  olmasını gerektirdiğini gösterir. Öte yandan  $\mathfrak{D}_{Y,k}(f) - \mathfrak{D}_{Y_2,k}(f) = \left(\frac{k}{12}\right) f E_2^* = -kY_2^* f$  ve  $Y_2^*$  2 ağırlıklı zayıf modüler olduğundan  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}$ 'nin  $\gamma$  altındaki davranışı  $\mathfrak{D}_{Y,k}$  ile aynıdır. Ek olarak  $Y_2$  analitik ve polinom olarak sınırlı olduğundan modüler formların korunduğu açıktır. Son olarak  $f$  eğer bir modüler form ise bu durumda her bir  $\gamma \in \Gamma$  için  $f|_k\gamma$ 'nin  $\sum_{n \geq 0} a_\gamma(n) e^{2\pi i n \tau / m}$  sonsuzdaki Fourier açılımıdır. O hâlde türevi sonsuzda 0 olur.  $f$ , cusp form ise  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}$  de cusp form olur.

**Uyarı 2.2.6.**  $E_2$  Eisenstein serisi sadece  $\Gamma$  için hemen hemen modüler olduğundan  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}$  dönüşüm formülü yalnızca  $\gamma \in \Gamma$  için geçerlidir. Bu formül herhangi bir  $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{R})$  için geçerli değildir, bu ise  $\mathfrak{D}_{Y_2,k}$  operatörünün  $\mathfrak{D}_{Y,k}$  den farkını gösterir.

**Lemma 2.2.7. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $\frac{1}{2\pi i} E_2' - \frac{1}{12} E_2^2 = -\frac{1}{12} E_4 \in M_4(\Gamma)$  veya denk olarak  $D_\tau(Y_2) + Y_2^2 = \frac{1}{144} E_4 \in M_4(\Gamma)$  'dır.

**İspat.** (Cohen ve Strömberg, 2017) sayfa 151 Sonuç 5.2.17'nin (b) şıkkı gereği eşitliğin sol tarafı  $\Gamma$  için 4 ağırlıklı zayıf modüler formdur; analitik olduğu ve polinom olarak sınırlı olduğu açıktır. Böylece eşitliğin sol tarafı  $M_4(\Gamma)$  uzayının boyutu 1 olduğundan eşitliğin doğruluğu Fourier açılımındaki sabitlerin karşılaştırılmasıyla görülür.

**Önerme 2.2.8. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $\bigoplus_{k \geq 0} M_k(\Gamma) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$ ; cebirini içeren  $\mathbb{C}[E_2; E_4; E_6]$ ; cebiri  $D_\tau$  operatörünün altında değişmezdir.

Daha kesin olarak  $D_\tau(E_2) = \frac{E_2^2 - E_4}{12}$ ,  $D_\tau(E_4) = \frac{E_2 E_4 - E_6}{3}$  ve  $D_\tau(E_6) = \frac{E_2 E_6 - E_4^2}{2}$  eşitlikleri elde edilir.

**Sonuç 2.2.9. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $\mathbb{C}[E_2; E_4; E_6]$  cebiri herhangi bir elemanı (özel olarak  $\mathbb{C}$ 'nin herhangi bir modüler formu) sabit katsayılı lineer olmayan 3. mertebeden diferansiyel denklemin çözümüdür.

**İspat.** Eğer  $f \in \mathcal{R} := \mathbb{C}[E_2; E_4; E_6]$  ise önerme gereği  $f', f''$  ve  $f''' \in \mathcal{R}$  olur, öte yandan  $\mathcal{R}$ 'nin  $\mathbb{C}$  üzerindeki aşkınlık derecesi en fazla 3 olup (aslında tam olarak 3'tür) bu dört fonksiyon  $\mathbb{C}$  üzerinde cebirsel olarak bağlantılı olmak zorundadır.

Yukarıdaki ispat gerçekten de oldukça yapıcı bir ispattır. Herhangi bir  $f$  verildiğinde bu modüler formu çözüm kabul eden bir diferansiyel denklemi tam olarak bulmak oldukça kolaydır. Gerçekten de aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 2.2.10. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $2E_2 D_\tau^2(E_2) - 3(D_\tau(E_2))^2 - 2D_\tau^3(E_2) = 0$  özdeşliği doğrudur. Denk olarak  $y = E_2$  fonksiyonu  $2yy'' - 3y'^2 - \frac{2}{2\pi i} y''' = 0$  diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Yukarıdaki diferansiyel denkleme Chazy denklemi denir.

**Sonuç 2.2.11. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Önerme 2.2.8'deki sonuçlar  $E_2 = E_2^*$  ve  $D_\tau = \mathcal{D}_{Y,k}$  alındığında da sağlanır.

**Sonuç 2.2.12. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Eğer  $f$ ,  $\Gamma$  üzerinde  $k$  ağırlıklı bir modüler fonksiyon ise bu durumda  $\mathcal{D}_{Y,k}^n(f)$   $E_2^*$ ,  $E_4$  ve  $E_6$ 'nın bir rasyonel fonksiyonu olur. Üstelik eğer  $f$ , katsayıları cebirsel sayılar olan Fourier açılımına sahipse rasyonel fonksiyon da aynı özelliğe sahiptir.

**İspat.** Gerçekten de  $f/(E_6/E_4)^{k/2}$ , 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyon olur böylece  $j = \frac{1728E_4^2}{(E_4^3 - E_6^2)}$  bir rasyonel fonksiyondur. O hâlde  $f$ ,  $E_4$  ve  $E_6$ 'nın bir rasyonel fonksiyonu olur. Sonuç bir önceki sonuçtan açıktır.

### 3. RANKIN-COHEN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde iki modüler form verildiğinde yeni bir modüler form elde etmek için kullanılabilecek yöntemlerden birisi olan Rankin-Cohen operatörleri verilecektir. Bu operatörler bi-lineer operatörlerdir.

**Tanım 3.1. (Cohen ve Strömberg, 2017)**  $f$  ve  $g$   $\mathfrak{H}$  üst yarı düzleminde  $C^\infty$  sınıfından iki fonksiyon ve  $k$  ve  $l$  belirli tam sayılar olsun; bu durumda  $f$  ve  $g$ 'nin  $n$ . Rankin-Cohen parantezi

$$[f, g]_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+k-1}{j} \binom{l+n-1}{n-j} \mathfrak{D}_\tau^{n-j}(f) \mathfrak{D}_\tau^j(g)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

**Uyarı 3.2.**  $[f, g]_n$  parantezinin net olarak tanımı (Cohen, 1975)'te verilmiştir. Aslında bu çalışma ilk olarak Rankin'de (1956) verilmiş olup Zagier'de (1994) bu operatörlere Rankin-Cohen parantezi ismi verilmiştir.

**Teorem 3.3. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Rankin Cohen parantezi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(a) Herhangi bir  $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{R})$  için

$$([f, g]_n)|_{k+l+2n}\gamma = [f|_k\gamma, g|_l\gamma]_n$$

olur.

(b) Eğer  $f$  ve  $g$   $G$  üzerinde sırasıyla  $k$  ve  $l$  ağırlıklı zayıf modüler ise  $[f, g]_n$ ,  $k+l+2n$  ağırlıklı bir zayıf modüler olur.

(c) Eğer  $f$  ve  $g$  modüler form ise  $[f, g]_n$  bir modüler formdur ve aslında  $n \geq 1$  için bir cusp formdur.

(d)  $[g, f]_n = (-1)^n [f, g]_n$  olup özel olarak  $n$  tek sayı ise  $[f, f]_n = 0$  olur.

**İspat**

$$(a) \quad c(n, j) = \frac{1}{(n-j)!(n+k-j-1)j!(l+j-1)!} = \frac{1}{(n+k-1)!(l+n-1)!} \binom{n+k-1}{j} \binom{l+n-1}{n-j}$$

olmak üzere

$$CK_D(f; \tau, T) CK_D(g; \tau, -T) = \sum_{n \geq 0} T^n \sum_{j=0}^n (-1)^j c(n, j) D_\tau^j(g) D_\tau^{n-j}(f)$$

yazılabilir. Böylece  $[f, g]_n$  tanımı gereği

$$CK_D(f; \tau, T) CK_D(g; \tau, -T) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+k-1)!(l+n-1)!} [f, g]_n T^n$$

eşitliği elde edilir.

(Cohen ve Strömberg, 2017)'de sayfa 158 Önerme 5.3.18 gereği  $(\tau, T)$ 'yi  $\left(\frac{(a\tau + b)}{(c\tau + d)}, \frac{(ad - bc)T}{(c\tau + d)^2}\right)$  ile yazarsak  $(c\tau + d)^k e^{\left(\frac{T}{2\pi i}\right)c/(c\tau + d)}$  ve  $(c\tau + d)^l e^{-\left(\frac{T}{2\pi i}\right)c/(c\tau + d)}$  çarpımlarını elde ederiz ki bunlar  $(c\tau + d)^{k+l}$  çarpımında yerine yazılabilir.

Böylece istenilen sonuç  $\frac{1}{((n+k-1)!(l+n-1)!)}$  katsayısından bağımsız olarak elde edilir.

(b)  $f$  ve  $g$ , sırasıyla  $k$  ve  $l$  ağırlıklı bir zayıf modüler olsun.

Bu durumda  $f(\tau) = f|_k\gamma(\tau)$  ve  $g(\tau) = g|_l\gamma(\tau)$  olmak üzere  $[f, g]_n$  tanımı ve teoremin (a) şikkı kullanılırsa

$$([f, g]_n)|_{k+l+2n}\gamma = [f|_k\gamma, g|_l\gamma]_n$$

olduğu görülür.

(c)  $f$  bir modüler form ise  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  ve  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$  olduğundan  $[f, g]_n$ 'de Rankin-Cohen tanımı gereği sabit terim bulunmayacağından  $n \geq 1$  için  $[f, g]_n$  bir cusp form olur.

(d)  $n$  tek sayısı için  $[f, f]_n = 0$  olduğunu tümevarım yoluyla ispatlayalım.

$n=1$  için

$$[f, f]_1 = k \cdot f'f - kff' = 0,$$

$n=2m+1$  için

$$[f, f]_{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^j \binom{2m+k}{j} \binom{2m+k}{2m+1-j} D_{\tau}^{2m+1-j}(f) D_{\tau}^j(f) = 0$$

olduğunu kabul edelim ve  $n=2m+3$  için doğruluğunu görelim:

$$\begin{aligned} [f, f]_{2m+3} &= \sum_{j=0}^{2m+3} (-1)^j \binom{2m+2+k}{j} \binom{2m+2+k}{2m+3-j} D_{\tau}^{2m+3-j}(f) D_{\tau}^j(f) = \\ &= \sum_{j=0}^{2m+3} (-1)^j \binom{2(m+1)+k}{j} \binom{2(m+1)+k}{2(m+1)+1-j} D_{\tau}^{2(m+1)+1-j}(f) D_{\tau}^j(f) \end{aligned}$$

olur.  $m + 1 = r$  alıp eşitliğin son satırını düzenler isek

$$[f, f]_{2m+3} = \sum_{j=0}^{2r+1} (-1)^j \binom{2r+k}{j} \binom{2r+k}{2r+1-j} D_{\tau}^{2r+1-j}(f) D_{\tau}^j(f)$$

olur ki kabul gereği bu eşitliğin 0 olduğu görülür.

Rankin-Cohen parantezi kavramı ilk olarak 1956'da verilen bir otomorfik formun türevleri yardımıyla yeni bir otomorf formun elde edilmesini konu alan Rankin (1956) çalışmasından yola çıkarak Henri Cohen tarafından Cohen (1975) makalesinde bugünkü tanımına kavuşmuştur. Ancak bu paranteze Rankin-Cohen parantezi ismini Don Zagier (1994) çalışmasında vermiştir. Rankin-Cohen parantezlerinin oldukça ilgi çekici özellikleri vardır. Bunlardan bazılarını aşağıdaki örneklerde göreceğiz.

Örneğin; Rankin-Cohen parantezi tanımı kullanılarak  $n$ 'nin bazı küçük değerleri için Rankin-Cohen parantezleri açık olarak yazılabilir:

$$[f, g]_0 = f \cdot g,$$

$$[f, g]_1 = k \cdot f \cdot D_\tau(g) - l \cdot D_\tau(f) \cdot g$$

ve

$$[f, g]_2 = \left( \frac{k(k+1)}{2} f D_\tau^2(g) - (k+1)(l+1) D_\tau(f) D_\tau(g) + \frac{l(l+1)}{2} D_\tau^2(f) g \right).$$

**Lemma 3.4. (Cohen ve Strömberg, 2017)** 2 ağırlıklı bir  $Y$  fonksiyonunu göz önüne alalım. (Hemen hemen modüler ve hemen hemen analitik olmasına rağmen bu kabulü yapalım.) Eğer  $f$ ,  $k$  ağırlığında ise

$$[Y, f]_n = \frac{(-1)^n}{n+k} (D_Y^{n+1}(f) - D_\tau^{n+1}(f))$$

veya denk olarak

$$[E_2^*, f]_n = [E_2, f]_n + (-1)^n \frac{12}{n+k} (D_Y^{n+1}(f) - D_\tau^{n+1}(f))$$

olur.

$E_2$  Eisenstein serisinin modüler form olmadığını ancak analitiklik koşullarını ve modüler form tanımındaki fonksiyon eşitliğini hemen hemen sağladığı için hemen hemen modüler olduğunu görmüştük.  $[f, g]_n$  operatörü üzerinde bazı yapısal değişiklikler yardımıyla Rankin-Cohen parantezlerinin  $E_2$  de dahil olmak üzere modüler formlar vereceğini göreceğiz. Böylece Rankin-Cohen parantezinin uygulama alanları genişletilmiş olur.

İspat. Tanım gereği

$$[Y, f]_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{n+k-1}{n-j} D_\tau^{n-j}(Y) D_\tau^j(f)$$

olur.

$$D_\tau(Y) = -Y^2$$

olduğundan

$$D_\tau^m(Y) = (-1)^m m! Y^{m+1}$$

elde edilir ve böylece  $\mathfrak{D}_Y^n(f)$  tanımından

$$\begin{aligned} [Y, f]_n &= (-1)^n \sum_{j=0}^n (n-j)! \binom{n+1}{j} \binom{n+k-1}{n-j} Y^{n-j+1} D_\tau^j(f) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+k} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} \frac{(n+k)!}{(k+j-1)!} Y^{n+1-j} D_\tau^j(f) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+k} (\mathfrak{D}_Y^{n+1}(f) - D_\tau^{n+1}(f)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ilk formüldeki ispatlar; 2. ise  $E_2^* = E_2 - \frac{3}{\pi y} = E_2 + 12Y$  olur.

**Teorem 3.5.** (Cohen ve Strömberg, 2017)  $f$ ,  $k$  ağırlıklı bir modüler form olsun ve aşağıdaki modifiye Rankin-Cohen parantezini tanımlayalım:

$$[E_2, f]_n^* := [E_2, f]_n - (-1)^n \frac{12}{n+k} D_\tau^{n+1}(f),$$

$$[f, E_2]_n^* := [f, E_2]_n - \frac{12}{n+k} D_\tau^{n+1}(f)$$

ve

$$[E_2, E_2]_n^{**} := [E_2, E_2]_n - \frac{12}{n+2} (1 + (-1)^n) D_\tau^{n+1}(E_2)$$

olsun.

Bu takdirde  $[E_2, f]_n^*$   $\Gamma$  üzerinde  $k + l + 2n$  ağırlıklı modüler formlar olur.  $[E_2, E_2]_n^{**}$  ise  $2n+4$  ağırlıklı bir modüler form olur ve  $n > 0$  için cusp form belirtirler.

Uyarı 3.6.

$$\mathbf{a)} \quad [f, E_2]_0^* = E_2 f - \left(\frac{12}{k}\right) D_\tau(f) = -\left(\frac{12}{k}\right) (D_\tau(f) + kY_2) = -\left(\frac{12}{k}\right) \mathfrak{D}_{Y_2, k}(f)$$

olduğundan  $n = 0$  durumu tam olarak Önerme 2.2.4'ten elde edilir.

**b)** Bir önceki Teorem 3.3 gereği

$$[f, E_2]_n^* = (-1)^n [E_2, f]_n^*$$

ve  $n$  tek iken

$$[E_2, E_2]_n^{**} = 0$$

olur.

#### 4. RANKIN-COHEN PARANTEZLERİ ÜZERİNE BİR SONUÇ

Modüler formlar uzayı  $\mathbb{C}$  kompleks cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğundan bu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanarak bu vektör uzayı bir iç çarpım uzayına dönüştürülebilir. Bu özellikteki iç çarpım uzayına Petersson iç çarpımı denir. Bu bölümde Eisenstein serilerini bulunduran Rankin-Cohen parantezlerinin Petersson iç çarpımıyla ilgili olan bazı sonuçları vereceğiz. Bu ise Rankin-Cohen parantezinin bir uygulaması olarak görülebilir.

Poincare serileri klasik Eisenstein serilerinin genelleştirilmiştir.  $\Gamma$  modüler grubunun bir  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  elemanını düşünelim.  $\gamma$ 'ya karşılık gelen kesirli lineer dönüşüm

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

olur. Belli bir  $k$  için  $j(z) = (cz + d)^k$  olsun. Bu takdirde Poincare serisi  $P_m^k(z)$  ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 4.1.** (Cohen ve Strömberg, 2017)  $P_m^k(z) = \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ c \geq 0 \\ (c,d)=1}} \frac{e^{2\pi i m \gamma z}}{(cz+d)^k}$  serisine Poincare serisi denir. Poincare serilerinin önemli özelliği aşağıda verilmiştir.

**Teorem 4.2.** (Cohen ve Strömberg, 2017)  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$  olsun.

(a) Eğer  $f \in M_k(\Gamma)$  ve  $l$  çift tam sayısı  $l > k + 2$  özelliğinde ise bu takdirde  $f \cdot E_l = \sum_{n \geq 0} a(n)P_{k+l}^n$  olup burada  $P_{k+l}^n$  Poincare serisini göstermektedir.

(b) Eğer  $f \in S_k(\Gamma)$  ise bu formül tüm  $l \geq 4$  çift tam sayıları için doğrudur.

(c) Eğer  $f = F_2 = -E_2/24 = \sum_{n \geq 0} \sigma_1(n)q^n$  ise bu takdirde bu formül bir terim ilavesiyle tüm  $l > 4$  özelliğindeki tam sayılar için doğrudur.

Daha kesin olarak  $F_2 E_l = \sum_{n \geq 0} \sigma_1(n) P_{l+2}^n + \frac{i}{4\pi l} E_l'$  şeklindedir.

**Sonuç 4.3.** (Cohen ve Strömberg, 2017)  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$   $k$  ağırlıklı bir modüler form ve  $g = \sum_{n \geq 0} b(n)q^n$   $k+1$  ağırlıklı bir cusp form olsun.

(a) Eğer  $l \geq k + 2$  ise bu takdirde  $\langle f E_l, g \rangle = \frac{(k+l+2)!}{(4\pi)^{k+l-1}} \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)\overline{b(n)}}{n^{k+l-1}}$  olur.

(b) Eğer buna ilave olarak  $f$  bir cusp formuysa yukarıdaki formül  $l \geq 4$  özelliğindeki çift tam sayılar için geçerlidir.

(c) Eğer  $f = F_2^* = -E_2^*/24$  ağırlığı 2 olan bir hemen hemen modüler form ise yukarıdaki formül herhangi bir  $l \geq 2 + 2 = 4$  çift tam sayıları için doğrudur.

Teorem 4.2'yi aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz.

**Teorem 4.4.** (Cohen ve Strömberg, 2017)  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n \in M_k(\Gamma)$  olsun.

(a) Eğer  $l \geq k + 2$  çift tam sayıları için

$$[f, E_l]_m = \binom{l+m-1}{l-1} \sum_{n \geq 0} n^m a(n) P_{k+l+2m}^n(\tau)$$

olur.

(b)  $f \in S_k(\Gamma)$  cusp formuysa  $l \geq 4$  çift tam sayıları için doğrudur.

(c)  $f = F_2 = -E_2/24$  ise bu formül ek bir terimle tüm  $l > 4$  tam sayıları için geçerlidir. Daha kesin olarak

$$[F_2, E_l]_m = \binom{l+m-1}{l-1} \sum_{n \geq 0} n^m a(n) P_{2+l+2m}^n(\tau) + (-1)^{m+1} \frac{\partial_\tau^{m+1}(E_l)}{2(l+m)(2\pi i)^{m+1}}$$

olur.

**İspat.** Tanım gereği

$$\partial_\tau^j(E_l) = \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \partial_\tau^j(c\tau + d)^{-l} = \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (-1)^j \frac{(l+j-1)!}{(l-1)!} c^j (c\tau + d)^{-(l+j)}$$

elde edilir, böylece

$$\begin{aligned} A(m, j) &= \binom{k+m-1}{m-j} \binom{l+m-1}{j} \frac{(l+m-j-1)!}{(l-1)!} = \frac{(k+m-1)! (l+m-1)!}{(m-j)! (k+j-1)! j! (l-1)!} \\ &= \binom{l+m-1}{l-1} \binom{m}{j} \frac{(k+m-1)!}{(k+j-1)!} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} [f, E_l]_m &= \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \sum_{j=0}^m A(m, j) c^{m-j} (c\tau + d)^{-(l+m-j)} \partial_\tau^j(f) \\ &= \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \frac{(c\tau + d)^{-(k+l+2m)}}{(2\pi i)^m} \sum_{j=0}^m A(m, j) c^{m-j} (c\tau + d)^{k+m+j} \partial_\tau^j(f) \end{aligned}$$

olur.

(Cohen ve Strömberg, 2017) sf. 159 Sonuç 5.3.19'dan  $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$  ve  $\delta = ad - bc = \det(\gamma)$

olduğunu biliyoruz. Bu sonucu burada kullanırsak

$$[f, E_l]_m = \binom{l+m-1}{l-1} \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (c\tau + d)^{-(k+l+2m)} (\partial_\tau^m(f))(\gamma\tau)$$

elde ederiz.

Böylece  $\partial_\tau^m(f) = (2\pi i)^m \sum_{n \geq 0} n^m a(n) q^n$  olduğundan

$$\begin{aligned} [f, E_l]_m &= \binom{l+nm-1}{l-1} \sum_{n \geq 0} n^m a(n) \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (c\tau + d)^{-(k+l+2m)} e^{2\pi i \gamma \tau} \\ &= \binom{l+m-1}{l-1} \sum_{n \geq 0} n^m a(n) P_{k+l+2m}^n(\tau) \end{aligned}$$

sonucunu çıkarırız.

Bu ise teoremin (a) ve (b) şıklarının ispatını tamamlar. (c) şikkını ispatlamak için

$$\partial_\tau^m(F_2|_2\gamma) = \partial_\tau^j(F_2) + (i/(4\pi))(-1)^j j! c^{j+1} (c\tau + d)^{-(j+1)}$$

olduğunu biliyoruz.

Diğer yandan

$$\sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} c^{m+1} (c\tau + d)^{-(l+m+1)} = (-1)^{m+1} \frac{(l-1)!}{(l+m)!} \partial_\tau^{m+1}(E_l)$$

olduğundan yukarıdaki formül

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(2+m-1)!}{(2+j-1)!} c^{m-j} (c\tau + d)^{2+m+j} \partial_\tau^j(F_2) \\ &= \partial_\tau^m(F_2)(\gamma\tau) - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^m (-1)^j j! \binom{m}{j} \frac{(2+m-1)!}{(2+j-1)!} c^{m+1} (c\tau + d)^{2+m-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleşmeler yapılarak teoremin (a) ve (b) şikkına ilave olarak

$-\frac{1}{4\pi} \binom{l+m-1}{l-1} \frac{1}{(2\pi i)^m} \partial_\tau^{m+1}(E_l) \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{(m+1)!}{(j+1)!}$  formülü terime eklenir. Kolayca görülebi-

lir ki içteki toplam  $m!$ 'e eşittir. Çünkü

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{x^{j+1}}{j+1} = \frac{1-(1-x)^{m+1}}{m+1} \text{ dir.}$$

**Sonuç 4.5.**  $f = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n$  k ağırlıklı bir modüler form ve  $g = \sum_{n \geq 0} b(n) q^n$   $k+l+2n$  ağırlıklı bir cusp form olsun.

(a)  $l \geq k+2$  ise  $\langle [f, E_l]_m, g \rangle = \frac{(k+l+2m-2)!}{(4\pi)^{k+l+2m-1}} \binom{l+m-1}{l-1} \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)\overline{b(n)}}{n^{k+l+m-1}}$  olur

(b) Eğer ilaveten  $f$  bir cusp form ise bu takdirde yukarıdaki formül herhangi bir  $l \geq 4$  çift tam sayısı için geçerlidir.

(c) Eğer  $f = F_2^* = -E_2^*/24$  ağırlığı 2 olan hemen hemen modüler form ise yukarıdaki formül herhangi bir  $l \geq 2 + 2 = 4$  özellikli çift tam sayılar için geçerlidir.



## 5. RANKİN-COHEN PARANTEZİNİN FARKLI UYGULAMALARI

Önceki bölümlerden  $f$  ve  $g$  belirli seviye ve ağırlıkta iki modüler form ise bu takdirde  $[f, g]_n$   $n$ . Rankin-Cohen parantezinin bir modüler form olduğunu gördük. Bu bölümde ise (Choie ve Lee, 2011)'de verilen Rankin-Cohen parantezinin farklı özelliklerini inceleyeceğiz. Bu çalışmada özetle Rankin-Cohen parantezinin aslında üst yarı düzlemde tanımlı iki analitik fonksiyon için de tanımlanabileceği ve bu parantezin sonucu bir modüler form ise  $f$  ve  $g$ 'den herhangi birinin modüler form olması halinde diğerinin de bir modüler form olacağı sonuçlanmıştır. Bu sonucu adi lineer diferansiyel denklemlerin çözümleriyle nasıl ilişkilendirdiklerini göstereceğiz.

### 5.1. Ön Hazırlık ve Temel Sonucun İfadesi

**Teorem 5.1.1. (Cohen ve Strömberg, 2017)** Eğer  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 0$  ve  $k > 2$  ise bu takdirde  $P_m^k(z) \in M_k(\Gamma)$ 'dir.

$\mathfrak{H}$  Poincare üst yarı düzlemi ve  $\mathcal{F}$ ,  $\mathfrak{H}$  üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların kompleks cebiri olsun. Negatif olmayan  $\alpha, \beta$  ve  $\omega$  tam sayıları ve  $f, h \in \mathcal{F}$  fonksiyonları verilsin.

Bu durumda

$$\sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega + \alpha - 1}{\omega - r} \binom{\omega + \beta - 1}{r} f^r \phi^{(\omega-r)} = h(z) \quad (5.1)$$

$\phi$  için  $\omega$  mertebeli adi lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım.  $\mathfrak{S}_{\omega}^{\alpha, \beta}(f, h)$  ile  $\mathcal{F}$ 'nin (5.1) adi diferansiyel denkleminin çözümlerini içeren alt kümesini göstereyim.

**Tanım 5.1.2. (Choie ve Lee, 2011)**  $\Gamma$ ,  $SL(2, \mathbb{R})$ 'nin kayma dönüşümlerini bulunduran ayrık alt grubu olsun. Her bir negatif olmayan  $\nu$  tam sayısı için  $M_{\nu}(\Gamma)$  ile  $\Gamma$  için  $\nu$  ağırlıklı modüler formların uzayını göstereyim.  $\alpha, \beta$  ve  $\omega$  ile eşleşen Rankin-Cohen parantezi

$$[\cdot, \cdot]_{\omega}^{\alpha, \beta} : M_{\alpha}(\Gamma) \times M_{\beta}(\Gamma) \rightarrow M_{\alpha+\beta+\omega}(\Gamma)$$

şeklindeki bilineer dönüşüm olarak tanımlanır.

**Uyarı 5.1.3.**  $f \in M_\alpha(\Gamma)$  ve  $g \in \mathfrak{S}_\omega^{\alpha,\beta}(f, h)$  olduğunu kabul edelim. Eğer buna ilave olarak  $g \in M_\beta(\Gamma)$  ise bu takdirde  $h = [f, g]_\omega^{\alpha,\beta} \in M_{\alpha+\beta+2\omega}(\Gamma)$  olduğu görülebilir. O hâlde  $g$  bir modüler form ise  $h$  de modüler form olur. (Choie ve Lee, 2011)'de eğer  $h$  bir modüler form ise  $g$ 'nin bir modüler form olduğu gösterilmiştir. Daha kesin olarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

**Teorem 5.1.4. (Choie ve Lee, 2011)**  $\alpha, \beta$  verilen tam sayılar ve  $f, h \in \mathcal{F}$ ,  $f \in M_\alpha(\Gamma)$  ve  $h \in M_{\alpha+\beta+2\omega}(\Gamma)$  özelliğinde sabit olmayan analitik modüler formlar olsunlar.

- i. (5.1) diferansiyel denkleminin her bir  $\mathfrak{S}_\omega^{\alpha,\beta}(f, h)$  çözümü  $\Gamma$  için  $\beta$  ağırlıklı  $\mathfrak{S} \cup \{\infty\}$  üzerinde kutup yerleri olabilen bir meromorf modüler form olur.
- ii. Eğer  $g \in \mathfrak{S}_\omega^{\alpha,\beta}(f, h)$   $\mathfrak{S} \cup \{\infty\}$  üzerinde analitikse bu takdirde  $M_\beta(\Gamma)$ 'da kalan bir analitik modüler form olur.

**Uyarı 5.1.5.**

1. Yukarıdaki teorem daha genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir: Eğer  $f$  ve  $h$ ,  $\mathfrak{S}$  üst yarı düzlem üzerinde her bir  $\gamma \in (\Gamma)$  için  $f|_\alpha\gamma = f$  ve  $h|_{\alpha+\beta+2\omega}\gamma = h$  özelliğini sağlayan karmaşık değerli fonksiyonlar ise bu takdirde (5.1) diferansiyel denkleminin her bir  $g$  çözümü tüm  $\gamma \in \Gamma$  için  $g|_\beta\gamma = g$  özelliğini sağlar.
2. Teorem 5.1.4 yarım tam sayı ağırlıklı modüler formlar için de geçerlidir.

## 5.2. Materyal ve Metotlar

(Choie ve Lee, 2011) sf. 143-144'e göre  $f \mapsto f|_k\gamma$   $\mathcal{F}$  üzerinde  $\Gamma$ 'nın sağ grup etkisini tanımlar. Diğer yandan  $l \geq 0$  özelliğinde  $k$  ve  $l$  tam sayılar ve  $F \in \mathcal{F}$  ise  $D = d/dz$  olmak üzere her  $\gamma \in SL(2, \mathbb{R})$  için

$$(F^{(l)}|_{k+2l}\gamma)(z) = \sum_{r=0}^l \frac{(k+l-1)!}{(k+r-1)!} \binom{l}{r} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{l-r} D^r(F|_k\gamma)(z) \quad (5.2)$$

ve

$$D^l(F|_k\gamma)(z) = \sum_{r=0}^l (-1)^{l-r} \frac{l!}{r!} \binom{k+l-1}{l-r} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{l-r} (F^{(r)}|_{k+2r}\gamma)(z) \quad (5.3)$$

olduğu gösterilebilir (Choie ve Lee, 2011).

**Tanım 5.2.1. (Choie ve Lee, 2011)** Negatif olmayan  $\alpha, \beta$  ve  $\omega$  tam sayıları verilsin. Her  $f, g \in \mathcal{F}$  için  $[\cdot, \cdot]_\omega^{(\alpha,\beta)}: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$   $\alpha, \beta$  ve  $\omega$  ile eşleşen Rankin-Cohen parantezi

$$[f, g]_{\omega}^{(\alpha, \beta)} = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega + \alpha - 1}{\omega - r} \binom{\omega + \beta - 1}{r} f^{(r)} g^{(\omega - r)} \quad (5.4)$$

ile tanımlanır.

**Uyarı 5.2.2.** Tanım 5.2.1’de verilen  $\alpha, \beta$  ve  $\omega$  ile eşleşen Rankin-Cohen parantezini kısaca  $\alpha, \beta, \omega$ -Rankin-Cohen parantezi ile yazacağız. Verilen bu  $\alpha, \beta, \omega$  Rankin-Cohen parantezi özel olarak modüler formlar uzayı için de geçerlidir. Bu nedenle bu tanım Rankin-Cohen parantezinin genelleştirilmesi olarak düşünebilir.

Böylece  $f \in M_{\alpha}(\Gamma)$  ve  $g \in M_{\beta}(\Gamma)$  olmak üzere  $[f, g]_{\omega}^{(\alpha, \beta)} \in M_{\alpha + \beta + 2\omega}(\Gamma)$  olduğu görülür.

### 5.3. Ana Teorem’in (Teorem 5.1.4) İspatı

Bir  $f \in M_{\alpha}(\Gamma)$  modüler formu ve bir  $g \in \mathcal{F}$  fonksiyonunu ele alalım, aynı zamanda  $[f, g]_{\omega}^{(\alpha, \beta)} = h \in M_{\alpha + \beta + 2\omega}(\Gamma)$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde verilen bir  $\gamma \in \Gamma$  için  $h$  bir modüler form olarak kabul edildiğinden slaş operatörü tanımı kullanılarak

$$h = h|_{\alpha + \beta + 2\omega} \gamma = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega + \alpha - 1}{\omega - r} \binom{\omega + \beta - 1}{r} (f^{(r)}|_{\alpha + 2r} \gamma)(g^{(\omega - r)}|_{\beta + 2\omega - 2r} \gamma)$$

elde edilir.

Bu son eşitlik ve (5.2) gereği

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega + \alpha - 1}{\omega - r} \binom{\omega + \beta - 1}{r} (f^{(r)}|_{\alpha + 2r} \gamma)(z) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\omega - r} \frac{(\beta + \omega - r - 1)!}{(\beta + j - 1)!} \binom{\omega - r}{j} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega - r - j} D^j (g|_{\beta} \gamma)(z) \\ &= \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega + \alpha - 1}{\omega - r} \binom{\omega + \beta - 1}{r} (f^{(r)}|_{\alpha + 2r} \gamma)(z) \\ &\quad \times \sum_{k=r}^{\omega - r} \frac{(\beta + \omega - r - 1)!}{(\beta + k - r - 1)!} \binom{\omega - r}{k - r} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega - k} D^{k - r} (g|_{\beta} \gamma)(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega} \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{(\omega + \alpha - 1)! (\omega + \beta - 1)!}{(\alpha + p - 1)! p! (\beta + k - p - 1)! (k - p)! (\omega - k)!} \\ &\quad \times \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega - k} D^{k - p} (g|_{\beta} \gamma)(z) (f^{(p)}|_{\alpha + 2p} \gamma)(z) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Diğer yandan (5.2) ve (5.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
h &= \\
&\sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega+\alpha-1}{\omega-r} \binom{\omega+\beta-1}{r} (D^r (f|_{\alpha}\gamma))(z) (D^{\omega-r} g)(z) = \\
&\sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \binom{\omega+\alpha-1}{\omega-r} \binom{\omega+\beta-1}{r} (D^{\omega-r} g)(z) \times \\
&\sum_{p=0}^r (-1)^{r-p} \frac{r!}{p!} \binom{\alpha+r-1}{r-p} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{r-p} (z) (f^{(p)}|_{\alpha+2p}\gamma)(z) = \\
&\sum_{r=0}^{\omega} \sum_{p=0}^r (-1)^p \frac{(\omega+\alpha-1)!(\omega+\beta-1)!}{(\omega-r)!(\omega+\beta-r-1)!p!(\alpha+p-1)!(r-p)!} \times \\
&\mathfrak{K}(\gamma, z)^{r-p} (D^{\omega-r} g)(z) (f^{(p)}|_{\alpha+2p}\gamma)(z) = \\
&\sum_{k=0}^{\omega} \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{(\omega+\alpha-1)!(\omega+\beta-1)!}{(\omega-k)!(\omega+\beta-k-1)!p!(\alpha+p-1)!(k-p)!} \times \mathfrak{K}(\gamma, z)^{k-p} (D^{\omega-k} g)(z) (f^{(p)}|_{\alpha+2p}\gamma)(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. O hâlde

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{(\omega + \alpha - 1)! (\omega + \beta - 1)!}{(\omega - k)! p! (\alpha + p - 1)! (k - p)!} \\
&\times \sum_{p=0}^{\omega} \sum_{k=p}^{\omega} \left( \frac{(-1)^p}{(\beta + k - p - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-k} D^{k-p} (g|_{\beta}\gamma)(z) \right. \\
&\left. - \frac{(-1)^p}{(\beta + \omega - k - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{k-p} (D^{\omega-k} g)(z) \right) (f^{(p)}|_{\alpha+2p}\gamma)(z)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

$q = k - p$  ve  $k = q + p$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^{\omega} \frac{(-1)^p}{(\beta + k - p - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-k} D^{k-p} (g|_{\beta}\gamma)(z) \\
&= \sum_{q=0}^{\omega-q} \frac{(-1)^p}{(\beta + q - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-p-q} D^q (g|_{\beta}\gamma)(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan  $q = \omega - k$  ve  $k = \omega - q$  olduğu kullanılarak

$$\sum_{k=p}^{\omega} \frac{(-1)^p}{(\beta + \omega - k)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{k-p} (D^{\omega-k} g)(z) = \sum_{q=0}^{\omega-p} \frac{(-1)^p}{(\beta + q - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-p-q} D^q g(z)$$

olduğu görülür.

O hâlde

$$0 = \sum_{p=0}^{\omega} \sum_{q=0}^{\omega-p} \frac{(-1)^p}{(\beta + q - 1)!} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-p-q} D^q \left( (g|_{\beta\gamma}) - g \right) (z) (f^{(p)}|_{\alpha+2p\gamma})(z)$$

elde edilir.

Bu son eşitlik ve (5.2) gereği  $0 \leq r \leq \omega$  için

$$A_r(\gamma, z) = \sum_{p=r}^{\omega} \sum_{q=0}^{\omega-p} \frac{(-1)^p}{(\beta + q - 1)!} \frac{(\alpha + p - 1)!}{(\alpha + r - 1)!} \binom{p}{r} \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-r-q} D^q \left( (g|_{\beta\gamma}) - g \right) (z)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{p=0}^{\omega} \sum_{q=0}^{\omega-p} \sum_{r=0}^p \frac{(-1)^p}{(\beta + q - 1)!} \frac{(\alpha + p - 1)!}{(\alpha + r - 1)!} \binom{p}{r} \times \mathfrak{K}(\gamma, z)^{\omega-r-q} D^q \left( (g|_{\beta\gamma}) - g \right) (z) f^{(r)}(z) \\ &= \sum_{r=0}^{\omega} A_r(\gamma, z) f^{(r)}(z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse kabul gereği  $\Gamma$  grubunun kayma dönüşümlerini bulundurması nedeniyle  $f \in M_{\alpha}(\Gamma)$  modüler formunun belirli bir  $\xi \in \mathcal{R}$  için  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2\pi k z / \xi}$  şeklinde bir Fourier açılımına sahip olduğunu kabul edebiliriz.

Bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\omega} \left( \frac{2\pi i k}{\xi} \right)^r a_k A_r(\gamma, z) e^{\frac{2\pi i k z}{\xi}} = 0$$

olur.

Böylece her  $k \geq 0$  için

$$\sum_{r=0}^{\omega} \left( \frac{2\pi i k}{\xi} \right)^r a_k A_r(\gamma, z) = 0$$

olduğu görülür.

Bu yüzden her  $r \in \{0, 1, \dots, \omega\}$  için  $A_r(\gamma, z) = 0$  olduğu sonucu elde edilir.

Özel olarak her  $z \in \mathfrak{H}$  için

$$0 = A_\omega(\gamma, z) = \frac{(-1)^\omega (\alpha + \omega - 1)!}{(\beta - 1)! (\alpha + \omega - 1)!} \left( (g|_\beta \gamma) - g \right) (z)$$

olur.

Böylece  $g|_\beta \gamma = g$  olduğu sonucuna varılır.

O hâlde  $g$ 'nin  $\beta$  ağırlıklı bir modüler form olduğunu göstermek için gerekli olan fonksiyonel eşitlik elde edilir.

Şimdi  $g$ 'nin analitiklik özelliklerini inceleyelim. Kabul gereği  $f$  ve  $h$  üst yarı düzlem üzerinde ve  $\Gamma$ 'nin her bir cusp formu üzerinde analitik olduğundan  $g$  fonksiyonu  $\Gamma$  için  $\beta$  ağırlıklı bir meromorf modüler form olur. Çünkü analitik fonksiyonların türevleri, analitik ve meromorf fonksiyonların çarpımları meromorftur. Üstelik eğer analitikse  $M_\beta(\Gamma)$ 'ya ait bir modüler form olur.

## 6. HECKE EIGENFORMLARIN RANKIN-COHEN PARANTEZLERİ ÜZERİNE

### 6.1. Temel Sonucun İfadesi

Bu bölümde (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)'te verilen oldukça ilgi çekici bir sonuç verilecektir.

#### **Teorem 6.1.1. (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)**

1.  $[E_4, E_6]_0 = E_{10}$  ve  $[E_4, E_{10}]_0 = [E_6, E_8]_0 = E_{14}$  olur.
2. Eğer  $k, l \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$  ve  $n \geq 1$  için  $k + l + 2n \in \{12, 16, 18, 20, 22, 26\}$  olmak üzere

$$[E_k, E_l]_n = c_n(k, l)\Delta_{k+l+2n}$$

olur.

Burada  $c_n(k, l) = -\frac{2l}{B_l} \binom{n+l-1}{n} + (-1)^{n+1} \frac{2k}{B_k} \binom{n+k-1}{n}$  dir.

3. Eğer  $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$  ise bu takdirde  $[E_k, \Delta_l] = c_n(l)\Delta_{k+l+2n}$  olur. Burada  $c_n(l) = \binom{n+l-1}{n}$  dir.

Bu teorem Duke'de (1999) ve Ghate'de (2004) yer alan sonuçların genelleştirilmişleridir. Teorem 6.1.1'de  $n = 0$  alınırsa önceki sonuçlar elde edilir.

### 6.2. L-Fonksiyonları ile Bağlantı

Çalışmanın önceki bölümlerinden farklı olarak notasyon kolaylığı açısından  $\Gamma$  ile denklik alt grubunu göstereyim ve  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  için  $J_k(\gamma, z) = (cz + d)^{-k}$  olsun. Eğer  $k > 2$  ise  $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.i\infty = i\infty\}$  olmak üzere  $E_k^\Gamma(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} J_k(\gamma, z)$  Eisenstein serilerini elde etmiş oluruz.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  olması durumunda Eisenstein serisi notasyonunda  $\Gamma$  üst indisini kaldıracğıız. Bu durumda çok iyi bilinmektedir ki  $E_k$  Eisenstein serisinin Fourier açılımı

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

ile verilir. Uygun bir normalleştirme yardımıyla Zagier'in (1977) Önerme 6'sı aşağıdaki şekilde verilir:

**Teorem 6.2.1. (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)**  $k_1, k_2, k$  ve  $n, k_2 \geq k_1 + 2 \geq 2$  ve  $k = k_1 + k_2 + 2n$  özelliğindeki tam sayılar olsun.  $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{2\pi i j z / \omega}$  ve  $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{2\pi i j z / \omega}$  ise ağırlıkları sırasıyla  $k$  ve  $k_1$  olan  $\Gamma$  için iki modüler form olsun.

Bu takdirde

$$\langle f, [g, E_{k_2}^{\Gamma}]_n \rangle = \frac{\Gamma(k-1)\Gamma(k_2+n)\omega^{k-n}}{(4\pi)^{k-1}n!\Gamma(k_2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \bar{b}_j}{j^{k_1+k_2+n-1}}$$

olur. Burada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ile  $\langle f, g \rangle = \int f(z) \overline{g(z)} \frac{dx dy}{y^2}$  alışılmış Petersson iç çarpımı ve  $\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$  için  $\omega = [\Gamma'_{\infty} : \Gamma_{\infty}]$  şeklindedir.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  ve  $g = E_{k_1}$  alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 6.2.2. (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)**  $k_1 \neq k_2$  olmak üzere  $k_1, k_2 \geq 4$  özelliğinde çift tam sayılar ve  $n$  ile  $f$  Teorem 6.2.1'deki gibi olsun.

Bu takdirde

$$\langle f, [E_{k_1}, E_{k_2}]_n \rangle = (-1)^{\frac{k_2}{2}} \frac{2k_1}{B_{k_1}} \frac{2k_2}{B_{k_2}} \frac{\Gamma(k-1)}{n! 2^{k-1} \Gamma(k-n-2)} L^*(f, k-n-1) L^*(f, k_2+n)$$

olur. Burada  $L^*(f, s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(f, s)$  ile tanımlanır ve  $L(f, s)$   $f$ 'nin standart  $L$ -fonksiyonudur.

**Uyarı 6.2.3.** Teorem 6.2.2 Zagier'in (1977) Önerme 6'sının bir sonucudur ve  $n$  çift olması durumunda özdeşlik  $k_1 = k_2$  için de doğrudur.

### 6.3. Teorem 6.1.1'in İspatı

$(F, G, n)$  üçlüsünün teoremin koşullarını sağladığını kabul edelim. Sırasıyla  $F$  ve  $G$   $u$  ve  $v$  ağırlıklı olsun.  $k = u + v + 2n$  yazalım.

$$H = [F, G]_n$$

ve

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j e^{2\pi i j z}$$

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j e^{2\pi i j z}$$

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{2\pi i j z}$$

biçiminde olsun. Rankin-Cohen parantezi gereği

$$c_j = \sum_{m+t=j} A_m B_t \sum_{r+s=n} m^r t^s (-1)^r \binom{n+u-1}{r} \binom{n+v-1}{s} \quad (6.1)$$

olur. Özel olarak eğer  $A_0 = B_0 = 0$  ise bu takdirde  $C_0 = C_1 = 0$  olur.  $H$ 'nin Hecke eigenform olma kabulü aslında  $H \equiv 0$  olmasını gerektirir. Bu nedenle mutlaka  $F$  ve  $G$ 'nin en az biri cusp form olmamalıdır.

İki durum göz önüne alınmalıdır:

1. Durum: Bu durumda  $F$  cusp form  $G = E_v$  olsun. Bu takdirde  $H, S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ 'de bir eigenform olacaktır. Kabul edelim ki  $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) \neq 1$  olsun. Bu durumda  $\langle U, H \rangle = 0$  olacak şekilde bir  $U \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  cusp formu vardır. Bu özellikteki cusp formu

$$U(z) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j e^{2\pi i j z}$$

ile göstereyim. Bu durumda Teorem 6.2.1 gereği

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j \bar{A}_j}{j^{u+v+n-1}} = 0$$

olur. Bununla beraber  $U$  ve  $F$  cusp formlar olduğundan  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j \bar{A}_j}{j^s}$  serisi  $Re(s) > u + \frac{v}{2} + n$  için mutlak yakınsak olacak şekilde bir Euler çarpımına sahiptir.  $v > 2$  olduğundan

$$u + v + n - 1 > u + \frac{v}{2} + n$$

olur.

Sonuç olarak yukarıdaki özelliğe sahip bir  $U$  cusp formu yoktur ve böylece  $H$  eigenformu sadece  $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 1$  durumunda gerçekleşir.

2. Durum: Burada  $F = E_u$  ve  $G = E_v$  olsun.  $n = 0$  durumu Ghate'de (2000) yer almaktadır, bu nedenle  $n > 0$  kabul edelim. İlk olarak  $u \neq v$  durumunu göz önüne alalım. Bu

durumda kolayca görülebilir ki  $H$ ,  $u + v + 2n$  ağırlığında bir cusp form olmak zorundadır. Eğer  $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) \neq 1$  ise bu takdirde  $\langle U, [E_u, E_v]_n \rangle = 0$  özelliğinde bir  $U \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  eigenformu seçebiliriz. Bunu Teorem 6.2.2 ile birleştirerek

$$L^*(U, u + v + n - 1)L^*(U, v + n) = 0$$

sonucuna varırız. Diğer yandan  $Re(s) > \frac{u+v+2n+1}{2}$  için  $L^*(U, s)$ 'nin sıfır olmadığı bilinir. Bu bölge Euler çarpımının mutlak yakınsaklık bölgesidir.  $s = u + v + n - 1$  mutlak yakınsaklığın bölgesinde olduğu için ilk terim sıfır olmaz. İkinci terim için eğer  $v + n$  mutlak yakınsaklık bölgesinde değilse bu takdirde

$$L^*(U, k - v - n) = (-1)^{k/2} L^*(U, u + n)$$

elde etmek için fonksiyonel eşitliği kullanacağız.  $u \neq v$  çift sayılar olduğundan bu takdirde  $u + v$  mutlak yakınsaklık bölgesinde olmak zorundadır. Şimdi  $u = v$  durumunu göz önüne alalım.

$$[f, g]_n = (-1)^n [g, f]_n$$

olduğundan  $n$  sayısının tek olması durumunda

$$[E_u, E_u]_n = 0$$

elde edilir. Bu nedenle  $n$  sayısını çift kabul edebiliriz.  $n = 2$  durumunu aşağıda ayrıca ele alacağız.

**Lemma 6.3.1. (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)**  $u \in \{4, 6, 8\}$  olmadıkça  $[E_u, E_u]_2$  nin Fourier açılımında bazı hesaplamalar yapacağız.

$$E_u(z) = 1 - \frac{2u}{B_u} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{u-1}(n) q^n,$$

$$E'_u(z) = -\frac{2u}{B_u} \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_{u-1}(n) q^n,$$

$$E''_u(z) = -\frac{2u}{B_u} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sigma_{u-1}(n) q^n$$

olur.

O hâlde direkt hesaplama yardımıyla

$$f(z) = \frac{-B_u}{2u^2(u+1)} [E_u, E_u]_2(z)$$

$$= q + \sum_{N=2}^{\infty} \left\{ N^2 \sigma_{u-1}(N) + \frac{2}{B_u} \sum_{\substack{m+n=N \\ m, n \geq 1}} n \sigma_{u-1}(n) \sigma_{u-1}(m) [u(m-n) + m] \right\} q^N$$

$[E_u, E_u]_2$  ile eşleşen normalize edilmiş form olur.  $f$  formunun  $n$ . Fourier katsayısını  $E(n)$  ile gösterelim.

Eğer  $f$  normalize edilmiş eigenform ise bu takdirde

$$E(4) = E(2)^2 - 2^{2u+3} \quad (6.2)$$

elde edilir. (6.1) eşitliğinden

$$E(2) = 4 + 2^{u+1} + \frac{2}{B_u}$$

ve

$$E(4) = 16\sigma_{u-1}(4) + \frac{2}{B_u} (\sigma_{u-1}(3)(-4u+6) + 4\sigma_{u-1}(2)^2)$$

olur. Burada (6.2) eşitliğini  $X = \frac{2}{B_u}$  için düzenlersek

$$X^2 + (8\sigma_{u-1}(2) - \sigma_{u-1}(3)(-4u+6) + 4\sigma_{u-1}(2)^2)X$$

$$+ (16\sigma_{u-1}(2)^2 - 2^{2u+3} - 16\sigma_{u-1}(4)) = 0 \quad (6.3)$$

olur. Bu denklemin rasyonel bir çözümü olması için  $D$  diskriminantının bir tam sayının tam karesi olması gerekir.

(6.3) denkleminin diskriminantı

$$D = (4\sigma_{u-1}(2)^2 + \sigma_{u-1}(3)(-4u+6) - 8\sigma_{u-1}(2))^2 - 4(16\sigma_{u-1}(2)^2 - 2^{2u+3} - 16\sigma_{u-1}(4)) = (4^u + 3^{u-1}(-4u+6) + (2-4u))^2 + 2^{2u+5} - 2^{u+5}, \text{dir.}$$

$$Y = 4^u + 3^{u-1}(-4u+6) + (2-4u)$$

olsun, bu takdirde

$$D = Y^2 + 2^{2u+5} - 2^{u+5}$$

olur.

$u \geq 4$  için  $2^7u > 2^8$  olduğundan kolayca görülebilir ki  $2^{2u+5} - 2^{u+5} > 2^5Y + 2^8$  dir. O hâlde  $D > (Y + 16)^2$  olur.

Belirli bir  $c < 1$  ve  $u \geq 22$  için  $(\frac{4}{3})^u > 4.17u/3c$  olduğundan  $17 \cdot 2^{2u+1} > 2^{2u+5} > 2^{2u+1}c > 2^{2u+5} + 2^3 \cdot 17u3^{u-1}$  elde edilir, burada  $(Y + 17)^2 > D$  olur. O hâlde  $u \geq 22$  için  $(Y + 17)^2 > D > (Y + 16)^2$  elde ederiz. Böylece  $D$  bir tam sayının tam karesi olamaz.  $u \in \{10,12,14,16,18,20\}$  için direkt hesaplamayla görülebilir ki diskriminant bir tam sayı olamaz.

Böylece (6.3) eşitliğinin rasyonel çözümü yoktur. O hâlde  $u \geq 10$  için  $f$  bir eigenform olamaz.  $u \in \{4,6,8\}$  için  $S_{2u+4}(SL_2(\mathbb{Z}))$  uzayları 1 boyutlu olduğundan bu özellikteki  $u$ 'lara karşılık gelen  $f$  eigenform olur.

**Sonuç 6.3.2. (Lanphier ve Takloo-Bighash, 2003)**  $k > 20$  ve  $k \equiv 0 \pmod{4}$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde  $L^*(f, k/2) \neq 0$  ve  $L^*(g, k/2) \neq 0$  olacak şekilde  $f, g \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$  özelliğinde iki eigenform vardır.

**İspat.**  $u = \frac{1}{2}k - 2$  olsun. Bu durumda Lemma 6.3.1 gereği  $[E_u, E_u]_2$ 'nin eigenform olmadığını biliyoruz. Bu ise  $S_k$ 'de  $\langle f, [E_u, E_u]_2 \rangle \neq 0$  ve  $\langle g, [E_u, E_u]_2 \rangle \neq 0$  özelliğinde iki eigenform olmasını gerektirir. İspat, Teorem 6.2.2'nin direkt bir sonucudur.

Bu hazırlıklardan sonra  $n$  çift sayı olmak üzere  $[E_u, E_u]_n$  durumunu ele alabiliriz. Bu takdirde Teorem 6.2.2 gereği

“ $[E_u, E_u]_n$  bir  $f \in S_{2u+2n}(SL_2(\mathbb{Z}))$  eigenformunun sıfırdan farklı bir izdüşümüne sahiptir  $\Leftrightarrow L^*(f, u + n) \neq 0$ 'dır.”

Sonuç gereği  $2u + 2n > 20$  ise bu takdirde bu özelliğe sahip olan  $f$  ve  $g$  gibi en az iki eigenform vardır; bu ise  $[E_u, E_u]_n$ 'nin bir eigenform olacağını gerektirir.  $c_n(k, l)$  ve  $c_n(l)$  sayıları (6.1) eşitliğinden kolaylıkla hesaplanabilir.

## 7. RANKIN-COHEN PARANTEZİNİN UYGULAMALARI

Rankin-Cohen parantezinin ilgi çekici uygulamalarından birisi de yarım tam sayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi probleminin çözümü olarak karşımıza çıkar. Aşağıda (İnam vd., 2020)'de yer alan ve bu tez çalışmasının orijinal sonuçlarından olan iki sonucu ele alacağız.

**Teorem 7.1.**  $f_1 = -\frac{84}{2\pi i} (3G_6(4z)\theta'(z) - G_6'(4z)\theta(z)) \in S_{\frac{17}{2}}^+(\Gamma_0(4))$  bir Hecke eigenformdur.

**İspat.**  $[G_6(4z), \theta]_1$  Rankin-Cohen parantezini hesaplayalım. Tanım 1.1.8 gereği

$$g_1 := 6G_6(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_6'(4z)\theta(z) = -\frac{1}{42}q - \frac{44}{21}q^4 + 8q^5 - 88q^8 + \dots \quad (7.1)$$

olur.

$q$ 'lu terimin katsayısı 1 olacak şekilde normalleştirme yapılırsa  $f_1 = -42g_1$  elde edilir.

Öte yandan  $\dim(S_{17/2}(\Gamma_0(4))) = 3$  olup

$$u_1 := q + 88q^4 - 336q^5 + 3696q^8 - 5535q^9 + O(q^{12})$$

$$u_2 := q^2 + 4q^4 - 56q^5 + 126q^6 - 224q^7 + 488q^8 - 576q^9 + O(q^{12})$$

$$u_3 := q^3 - 6q^4 + 20q^5 - 56q^6 + 124q^7 - 220q^8 + 352q^9 + O(q^{12})$$

olmak üzere  $\{u_1, u_2, u_3\}$   $S_{17/2}(\Gamma_0(4))$ 'nin bir tabanıdır.

Bu uzay için Sturm sınırı 4 olup (7.1) eşitliğine dikkat edilirse  $f_1$ 'in  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$  özelliğindeki Fourier katsayılarının sıfır olması nedeniyle  $f_1 \in S_{17/2}^+$  olur.

Son olarak  $S_{\frac{17}{2}}^+(\Gamma_0(4))$ 'te bir tek Hecke eigenform mevcut olup bu formun  $u_1$  yani  $f_1$  formu olduğu kolayca görülebilir, bu daispatı bitirir.

**Teorem 7.2.**  $f_2 := \frac{30}{2\pi i} (8G_8(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_8'(4z)\theta(z)) \in S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$  bir Hecke eigenformdur.

**İspat.**  $[G_8(4z), \theta(z)]_1$  Rankin-Cohen parantezini uygulayalım. Tanım 1.1.8 gereği

$$g_2 := [G_8(4z), \theta(z)]_1 = 8G_8(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_8'(4z)\theta(z) = \frac{1}{30}q - \frac{56}{30}q^4 + 12q^5 - 456q^8 + \left(\frac{18}{60} + 1032\right)q^9 + \dots \quad (7.2)$$

olur.  $q$ 'lu terimin katsayısı 1 olacak şekilde normalleştirme yapılırsa  $f_2 = 30g_2$  elde edilir. Öte yandan  $\dim(S_{21/2}(\Gamma_0(4))) = 4$  olup

$$u_1 := q + 24q^5 + 1344q^6 - 4480q^7 - 1920q^8 + 4089q^9 + O(q^{12})$$

$$u_2 := q^2 + 112q^5 - 426q^6 + 672q^7 + 2176q^8 + 6144q^9 + O(q^{12})$$

$$u_3 := q^3 + 8q^5 - 56q^6 + 148q^7 - 448q^8 + 1024q^9 + O(q^{12})$$

$$u_4 := q^4 - 6q^5 + 24q^6 - 80q^7 + 210q^8 - 480q^9 + O(q^{12})$$

olmak üzere  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$   $S_{21/2}^+$ 'nin bir tabanıdır.

Bu uzay için Sturm sınırı 5 olup (7.2) eşitliğine dikkat edilirse  $f_2 = u_1 - 56u_4$  olup  $f_2 \in S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$  olduğu açıktır. Kohnen plus uzayı tanımı gereği  $f_2$ 'nin  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$  özelliğindeki Fourier katsayılarının sıfır olması nedeniyle  $f_2 \in S_{21/2}^+$  olur.

Son olarak  $S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$ 'te bir tek Hecke eigenform mevcut olup bu formun  $f_2 = u_1 - 56u_4$  formu olduğu kolayca görülebilir, bu da ispatı bitirir.

(İnam vd., 2020)'de Rankin-Cohen parantezi yardımıyla  $17/2$  ve  $21/2$  ağırlıklı Kohnen plus uzayında bulunan Hecke eigenformlar Eisenstein serileri ve teta serisi cinsinden ifade edilmiştir. Dikkat edilirse bu Hecke eigenformların en az  $10^8$  Fourier katsayısı Magma (Bosma vd., 1997) Cebir Programı'nda kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamada yalnızca Cauchy çarpımları zaman alır. Magma Cebir Programı'nda var olan Fast Fourier Transform (FFT) özelliği bu çarpımları kolaylaştırır. Eisenstein serileri ve özellikle teta serisinin oluşturulması herhangi bir hesaplama yükü getirmez. Sonuç olarak elde edilen bu basit formüller yardımıyla bu iki ağırlık için yeterince Fourier katsayısı kolayca hesaplanabilir. Burada şunu da not düşmekte fayda var, Pari/GP (Pari/GP, 2021) Cebir Programı'nın 2.11 ve üst versiyonlarında bulunan modüler formlar (mf) paketi modüler formlarla hesaplama yapmak isteyen araştırmacılara önemli avantajlar sağlamıştır. Örneğin; ispatlarda kullanılan Sturm sınırı pratik şekilde

Pari/GP’de hesaplanabilirken Magma’da bu sınırı direkt olarak hesaplayan bir komut bulunmamaktadır. Ancak Pari/GP’de FFT özelliği bulunmadığı için Cauchy çarpımında olduğu gibi benzer büyük hesaplamalarda hafıza problemi çıkacaktır.

Bu çalışmaya ilham veren bu fikir sayesinde (İnam vd., 2021)'de yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların Ramanujan-Petersson konjektürü yardımıyla normalleştirilen Fourier katsayılarının Sato-Tate benzeri dağılımını incelemek için gerekli örneklerin temini Rankin-Cohen parantezleri sayesinde yapılmıştır. Böylece yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi problemi de çözülmüştür.

Öte yandan yine bu fikir sayesinde yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların Rankin-Cohen bazı (İnam ve Wiese, 2021)'de tanımlanmış olup yine aynı çalışmada diğer iki bazla hız kıyaslamaları yapılmıştır.



## KAYNAKÇA

**Bosma W., Cannon J., & Playout C.** (1997). The Magma algebra system I, The User Language. *J. Symbolic Comput*, 24, 235-265.

**Choie, Y., & Lee, M.H.** (2011). Notes on Rankin-Cohen brackets. *Ramanujan Journal*, 25, 141-147.

**Cohen, H.** (1975). Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. *Math. Ann*, 217, 271-285.

**Cohen, H., Strömberg, F.** (2017)., *Modular Forms: A Classical Approach. Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics: 179, USA, 700.

**Duke, W.** (1999). When is the product of two eigenforms an eigenform?. *Elementary and Analytic Number Theory*, ed. by Kalman Gyory & Henryk Iwaniec and Jerzy Urbanowicz, *Number theory in progress Vol. 2*, de Gruyter, Berlin, 737–741.

**Ghate, E.** (2000). On monomial relations between Eisenstein series. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 15, 71-79.

**İnam, İ., Demirkol Özkaya, Z., Tercan, E., Wiese, G.** (2021). On the distribution of coefficients of half-integral weight modular forms and the Bruinier-Kohnen Conjecture, yayına sunuldu, arXiv:2010.11240.

**İnam, İ., Wiese, G.** (2021). Fast computation of half-integral weight modular forms, yayına sunuldu, arXiv: 2010.11239.

**İnam, İ., Tercan, E., İrez Aydın, B. & Demirkol Özkaya, Z.** (2020). Rankin-Cohen Parantezi Yardımıyla Elde Edilen Hecke Eigenform Örnekleri. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13 (2), 772-778.

**Koblitz, N.** (1984). *Graduate Texts in Mathematics : Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms.*, 97. Springer, New York, 252.

**Miyake, T.** (2006). *Modular Forms*. Springer, Berlin, 338.

**Lanphier, D., & Takloo-Bighash R.** (2004). On Rankin-Cohen brackets of eigenforms. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 19 (4), 253-259.

**PARI/GP**, (2021) <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>, [Son Erişim Tarihi: 14.06.2021].

**Rankin, R.A.** (1956). The construction of automorphic forms the derivatives of a given form. *J. Indian Math. Soc.*, 20, 103-116.

**Zagier, D.** (1977). Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields, Modular functions of one variable. *Lecture Notes in Math.*, 627, Springer, Berlin.

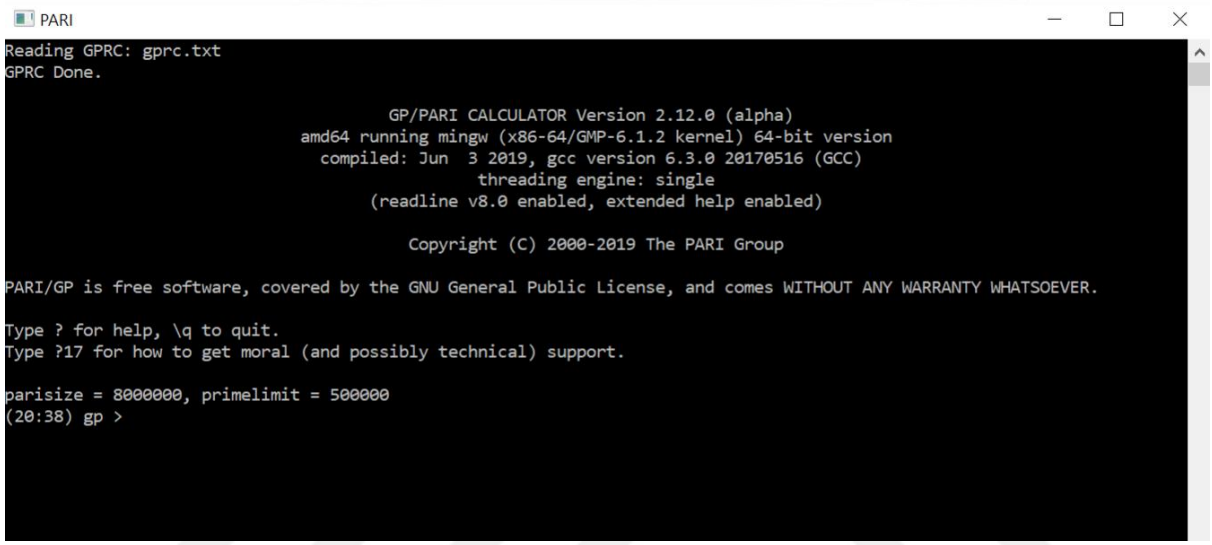
**Zagier, D.** (1994). Modular forms and differential operators. *Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.)*, 104(1), 57-75.



## EKLER

### Ek-1: PARI/GP Tanıtımı

PARI/GP sayılar teorisinde hızlı hesaplamalar için (çarpanlara ayırma, cebirsel sayılar teorisi, eliptik eğriler, modüler formlar, L-fonksiyonları) dizayn edilmiş ve yaygınca kullanılan bir cebir bilgisayar sistemidir.



```
PARI
Reading GPRC: gprc.txt
GPRC Done.

GP/PARI CALCULATOR Version 2.12.0 (alpha)
amd64 running mingw (x86-64/GMP-6.1.2 kernel) 64-bit version
compiled: Jun 3 2019, gcc version 6.3.0 20170516 (GCC)
threading engine: single
(readline v8.0 enabled, extended help enabled)

Copyright (C) 2000-2019 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.
Type ? for help, \q to quit.
Type ?17 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 8000000, primelimit = 500000
(20:38) gp >
```

### Ek-2(a): Pari/GP Uygulama Örnekleri

Aşağıdaki örnekte:

1. 4 ağırlıklı Eisenstein serisi ve Teta serisi tanımlanıp Rankin-Cohen parantezi altındaki ilk 50 terimi hesaplanmıştır.
2.  $13/2$  ağırlıklı cusp form oluşturulup bu uzayın boyutu ve baz elemanları gösterilmiştir.

```

PARI
Copyright (C) 2000-2019 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?17 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 8000000, primelimit = 500000
(16:17) gp > E4=mfEk(4);
(16:17) gp > T=mfTheta();
(16:17) gp > A=mfbracket(E4,T,1);
(16:17) gp > Ser(mfcoefs(A,50),q)
%4 = 112*q + 480*q^2 - 2880*q^3 + 1408*q^4 - 1920*q^5 + 25920*q^6 - 26880*q^7 - 11520*q^8 + 1008*q^9 - 47040*q^10 + 87360*q^11 + 69120*q^12 + 21120*q^13 - 174720*q^14 + 103680*q^15 - 263168*q^16 - 26880*q^17 + 237600*q^18 - 116160*q^19 + 537600*q^20 - 80640*q^21 + 306240*q^22 - 625920*q^23 - 622080*q^24 + 190960*q^25 + 185280*q^26 - 725760*q^27 + 645120*q^28 + 63360*q^29 + 247680*q^30 + 2680320*q^31 - 706560*q^32 - 725760*q^33 - 3258240*q^34 + 1303680*q^35 + 12672*q^36 + 382080*q^37 - 628800*q^38 - 3052800*q^39 + 1128960*q^40 + 1827840*q^41 + 5443200*q^42 + 1431360*q^43 - 2096640*q^44 - 950400*q^45 - 2202240*q^46 - 3816960*q^47 + 4239360*q^48 - 3757712*q^49 + 3818400*q^50 + O(q^51)
(16:17) gp > f=mfinit([4,13/2],1);
(16:17) gp > mfdim(f)
%6 = 2
(16:17) gp > L=mfbasis(f);
(16:17) gp > mfcoefs(L[1],10)
%8 = [0, 1, 0, 0, -56, 120, 0, 0, -240, 9, 0]
(16:17) gp > mfcoefs(L[2],10)
%9 = [0, 0, 1, -6, 16, -32, 54, -56, 32, 0, -98]
(16:17) gp > mfsturm(f)
%10 = 3
(16:17) gp >

```

## Ek-2(b): Pari/GP Uygulama Örnekleri

Aşağıdaki örnekte 7. Rankin-Cohen Parantezinin Uygulamaları başlığı altında verilen Teorem 7.2'deki ifadenin Pari yardımıyla çözümü verilmiştir.

```

PARI
Copyright (C) 2000-2019 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?17 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 8000000, primelimit = 500000
(17:25) gp > G8=mfeisenstein(8);
(17:25) gp > T=mfTheta();
(17:25) gp > G84=mfbd(G8,4);
(17:25) gp > G8p=mfderiv(G8);
(17:25) gp > G84p=mfbd(G8p,4);
(17:25) gp > Tp=mfderiv(T);
(17:25) gp > A=mfmul(G84,Tp);
(17:25) gp > B=mfmul(G84p,T);
(17:25) gp > C=mflinear([A,B],[240,-60]);
(17:25) gp > V1=mfcoefs(C,50);
(17:25) gp > Ser(V1,q)
%11 = q - 56*q^4 + 360*q^5 - 13680*q^8 + 30969*q^9 - 177120*q^12 + 266760*q^13 - 549824*q^16 + 526320*q^17 + 348480*q^20 - 710640*q^21 + 2475360*q^24 - 4330535*q^25 + 8830080*q^28 - 5835240*q^29 - 6238080*q^32 + 3065040*q^33 - 1734264*q^36 + 20307240*q^37 - 62929440*q^40 + 35801280*q^41 + 30048480*q^44 + 25320600*q^45 - 80766720*q^48 - 57271151*q^49 + O(q^51)
(17:25) gp > D=mfbracket(G84,T,1);
(17:25) gp > V2=mfcoefs(D,50);
(17:25) gp > Ser(V2,q)
%14 = -1/30*q + 28/15*q^4 - 12*q^5 + 456*q^8 - 10323/10*q^9 + 5904*q^12 - 8892*q^13 + 274912/15*q^16 - 17544*q^17 - 11616*q^20 + 23688*q^21 - 82512*q^24 + 866107/6*q^25 - 294336*q^28 + 194508*q^29 + 207936*q^32 - 102168*q^33 + 289044/5*q^36 - 676908*q^37 + 2097648*q^40 - 1193376*q^41 - 1001616*q^44 - 844020*q^45 + 2692224*q^48 + 57271151/30*q^49 + O(q^51)
(17:25) gp >

```