

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

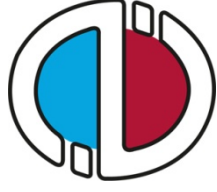
**RIEMANN YÜZEYLERİNİN FİZİK UYGULAMALARI:
MODÜLLER UZAYLARI**

**Uygar AVCI
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM**

BİLECİK, 2017

Ref. No: 10157593



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

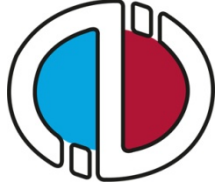
**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

**RIEMANN YÜZEYLERİNİN FİZİK UYGULAMALARI:
MODÜLLER UZAYLARI**

**Uygar AVCI
Yüksek Lisans**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. İlker İNAM**

BİLECİK, 2017



ANADOLU UNIVERSITY



**BILECIK SEYH EDEBALI
UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

**APPLICATIONS OF THE RIEMANN SURFACES IN PHYSICS: MODULI
SPACES**

**Uygar AVCI
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Ilker INAM**

BILECIK, 2017



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21.06.2017 tarih ve 32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14.07.2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Uygur AVCI'nın "Riemann Yüzeylerinin Fizik Uygulamaları: Modüller Uzayları" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. İlker İNAM

ÜYE : Prof.Dr.Emrah AKYAR

ÜYE : Doç.Dr.Yasemin ÇENGELLENMİŞ

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
..... tarih ve sayılı kararı.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitiminin tez hazırlama süreci boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, yoğun mesaisine rağmen beni ihmal etmeyen kıymetli hocam, Sayın Doç. Dr. İlker İNAM' a, katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman kahrımı çeken ve sürekli bana destek olan çok kıymetli eşim Nesrin AVCI' ya teşekkürü bir borç bilirim ve bu tez çalışmasını da hayatımıza neşe kaynağı olan kızlarım Damla Cansu AVCI ve Beren Çağla AVCI' ya armağan ederim.

Bu tezin oluşturulması sırasında yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr.Yılmaz AKYILDIZ ve Prof.Dr.Nihat Sadık DEĞER'e danışmanımınla birlikte teşekkürlerimizi sunarız.

Uygar AVCI

ÖZET

Bu çalışmada, Riemann yüzeylerinin fizik uygulamaları göz önüne alınmış, özel olarak Riemann yüzeylerinin modüller uzayları ele alınmıştır. Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümü modüller uzaylarının tanıtımına ayrılmıştır ve sicim teorisi kısaca tanıtılmıştır. İkinci bölümde, bazı eğrilerin modüller uzayları elde edilmiştir. Üçüncü bölüm Riemann yüzeyleri ve dünya yapraklarına ayrılmıştır. Özel olarak üç sicim etkisi ve Schwarz-Cristoffel dönüşümleri çalışılmıştır. Dördüncü ve son bölümde ise Riemann yüzeylerinin modüller uzayları elde edilmiştir. Bu çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Riemann yüzeyleri; Modüller uzayı

ABSTRACT

In this work, the physical applications of Riemann surfaces are taken into account, and the moduli spaces of Riemann surfaces in particular are considered. The first part of this work, which consists of four chapters, is devoted to the introduction of moduli spaces and string theory is briefly introduced. In the second part, some curves' moduli spaces are obtained. The third chapter is devoted to Riemann surfaces and the world-sheet. Specifically, three string effects and Schwarz-Cristoffel transformations have been studied. In the fourth and last section, moduli spaces of Riemann surfaces are obtained. This work is a compilation.

Key Words: Riemann surfaces; moduli spaces.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

JÜRİ ONAY SAYFASI	
TEŞEKKÜR	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	iv
1. MODÜLLER UZAYLARI.....	1
2.DÜZLEMDEKİ DOĞRULAR VE BAZI EĞRİLERİN MODÜLLER UZAYLARI.....	4
3. RIEMANN YÜZEYLERİ VE DÜNYA YAPRAKLARI.....	6
3.1.Schwarz-Cristoffel ve Üç Sicim Etkisi.....	12
4. RIEMANN YÜZEYLERİNİN MODÜLLER UZAYLARI.....	20
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Açık ve kapalı sicimler.....	3
Şekil 3.1: Şeridin konform resmi.....	9
Şekil 3.2: \mathbb{H} yarı düzleminin görüntüsü.....	10
Şekil 3.3: Sicim diyagramı	11
Şekil 3.4: Schwarz-Cristoffel dönüşümü	13
Şekil 3.5: Schwarz-Cristoffel dönüşümü-2.....	16
Şekil 3.6: Dönüş açıları	16
Şekil 3.7: Çeşitli sicimler	19
Şekil 4.1: Üç noktanın resmi	28

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{N}	: Doğal Sayılar Kümesi
\mathbb{Z}	: Tam Sayılar Kümesi
\mathbb{Q}	: Rasyonel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\text{Re}(z)$: z Karmaşık Sayının Reel Kısmı
$\text{Im}(z)$: z Karmaşık Sayının Sanal Kısmı
$\text{dim}(-)$: Boyut

1. MODÜLLER UZAYLARI

Bu bölüm hazırlanırken (Ben-Zvi, 2008) eserinden faydalanılmıştır. Matematikte en önemli problemlerden bir tanesi sınıflandırma problemidir. Nesnelere arasında bir denklik oluşturmak ve böylece birbirine denk olan iki nesnenin özelliklerinin aynı olması ve birbirine denk olmayan iki nesnenin birbirinden farklı özelliklere sahip olması gibi bir ayrım ortaya çıkar. Bunu oluşturmak oldukça önemli bir problemdir.

Modüller uzayları geometrik sınıflandırma problemlerinin geometrik çözümleri olarak düşünülebilir. Bu çalışmada Riemann yüzeylerinin modüller uzayları ele alınmaktadır. Böylece modüller uzaylarının önemli özellikleri incelenebilir.

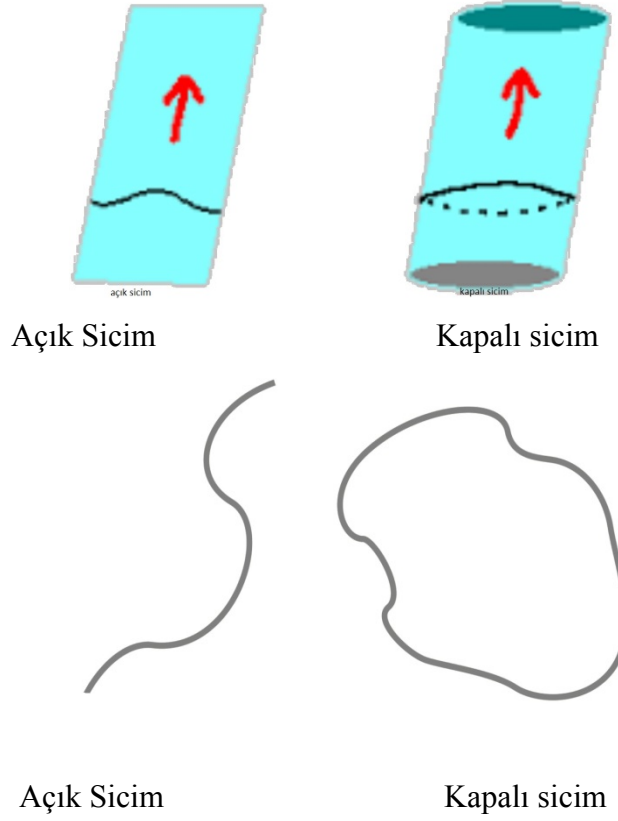
Kabaca modüler uzayları problemi üç bölüme ayrılmıştır:

1. Nesnelere : Hangi geometrik nesnelere tanımlamak ya da parametrize etmek,
2. Denklikler : İki nesne arasında bir bağlantı tanımlayarak hangi nesnelere aynı olduğunu belirlemek,
3. Aileler : Ortak özelliklere sahip nesnelere bir araya getirmek.

Buradaki temel fikir, sınıflandırmaya çalıştığımız nesnelere bütünlüğü için bir geometrik yapı oluşturmadır. Böylece sınıflandırmanın net bir geometrik yapısını koymak istiyoruz. Bu ise nesnelere geometrisinin çok daha güçlü şekilde anlaşılmasına neden olur. O halde modüller uzaylarının kendisi oldukça zengin özelliklere sahip geometrik nesnelere olur. Üstelik modüller uzaylarının son yıllarda fizikte özel olarak sicim teorisiyle yakın ilişkisi konuya olan ilgiyi gittikçe artırmaktadır. Bu ilişki sayesinde çeşitli yeni teknikler ortaya çıkmıştır. Örneğin (Smit, 1988)'de Riemann yüzeylerinin modüller uzayının cebirsel geometrisinin sicim teorisindeki ayırma fonksiyonunu nasıl belirlediği ortaya konmuştur. Öte yandan güncel bir sonuç olarak, (Ji ve Jost, 2016)'da Riemann yüzeylerinin “evrensel” modüller uzayları oluşturulmuştur. Buradaki “evrensel” kelimesi modüller uzayları elde edilen Riemann yüzeylerinin sonlu cinse sahip herhangi kompakt Riemann yüzeyleri olması anlamındadır.

Bu çalışmanın savunma sınavı tarihinin ertesi gününde hayata gözlerini yuman Maryam Mirzakhani, 2014 yılında Seul'de düzenlenmiş olan Uluslararası Matematik Kongresi'nde “*Riemann yüzeylerinin ve bu yüzeylerin modüller uzaylarının dinamiği ve geometrisine yaptığı önemli katkılar*” nedeniyle Field madalyasıyla ödüllendirilmiştir. Bu ödülü kazanan ilk kadın matematikçidir.

Şimdi kısaca Sicim Kuramı'na değinelim; Kendimiz dahil bizi saran, içinde yaşadığımız bütün materyal varlık maddedir. Çevremizde gördüğümüz ne varsa hepsi, evrenin bir parçasıdır ve madde formunda bulunurlar. Dolayısıyla evreni anlamak, maddenin ne olduğunu anlamaktan geçer. Maddeyi anlamak için onu parçalamak gerekir. Onu nereye kadar parçalayabilirsiniz hiç düşündünüz mü? Demokritos gibi atomlara kadar mı? Yok bundan daha iyisini de yapabilirsiniz, çekirdeği oluşturan protona ve nötrona hatta kuarklara kadar inebilirsiniz? Ya sonra? işte Kuark, Elektron, Foton gibi temel parçacıklar kütlelerini ve diğer özelliklerini nasıl kazanmışlardır? Onları birbirlerinden farklı kılan nedir? Kütle denen şey nasıl oluşmuştur? Biz genelde temel parçacıkları 0 boyutlu noktasal cisimler olarak düşünmeyi tercih ederiz. Fakat temel sicim teorisi 1 boyutlu ipler olarak düşünür. Bu teoriye göre kalınlığı yok fakat bir uzunlukları var, yaklaşık 10^{-33} cm civarında. Bu boyut bizim ölçüm yapamayacağımız kadar çok çok küçük bir skaladadır. Sicimler açık veya kapalı olabilirler. Bunlar uzay zamanda hareket ederlerken bir hayali yüzeyi dışarı doğru süpürürler. Bu sicimlerin kendilerine özgü titreşim modları vardır ve bu modlar onlara her temel parçacığın diğer temel parçacıktan farklı olmasını sağlar. Bütün kuvvetleri yani 4 kuvveti birleştirip, bütün bildiğimiz parçacıkları bir sicimle tarif edebilirsiniz. Bunu kemanın tellerine benzetebilirsiniz, her titreşimin farklı bir notayı vermesi gibi. Sicim kuramının ana varsayımı maddenin yapıtaşlarının nokta parçacıklar değil 1-boyutlu sicimler olduğudur. Bu sicimler ayakkabı bağı gibi açık ya da bir halka şeklinde kapalı olabilirler. Sicimler olağanüstü kısadır. Tipik uzunlukları 10^{-33} cm dir. Bu öylesine küçük bir sayıdır ki gündelik hayatımızda bu uzunluğu ihmal edip sicimleri bir noktaymış gibi düşünebiliriz.



Şekil 1.1 Açık ve kapalı sicimler.

Bir keman telinin değişik titreşimlerinin değişik sesler vermesi gibi, bir sicimin de farklı titreşim kipleri (modları) vardır. Her bir kip farklı bir parçacığa karşılık gelmektedir. Böylece doğada gördüğümüz nötron, proton gibi parçacıkları tek bir sicimin değişik titreşimleri gibi düşünebiliriz. Noktasal bir parçacık uzay-zamanda hareket ettiğinde 1 boyutlu bir çizgi (worldline) çizdiği halde bir sicim 2-boyutlu bir yüzeyi (world sheet) tarar. Bu durum kuantum alan kuramı hesaplarında rastlanılan bazı sonsuzluklardan kurtulmamızı sağlar. Noktasal iki parçacık belli bir konumda ve zamanda çarpışır. Buna karşılık sicimlerin etkileştikleri an ve konum artık bir nokta değil bir yüzeydir, yani belirsizdir. Böylece o tekil noktanın hesaplamalarda yarattığı sonsuzluk probleminden kurtulmuş oluruz.

Sicimler; bir kemanın telleri gibi salınan 10^{-33} santimetre uzunluğunda çok küçük iplikçiklerdir. 10^{33} tanesi bir uçtan diğer uca dizilse, sadece 1 santimetre uzunluğunda olacaktır. Sicimler; şimdiye kadar gözlenmedi fakat, büyüklüğü

matematiksel olarak hesaplanabilmektedir. Bir sicimin, bir atomun büyüklüğüne olan oranı; bir atomun tüm Güneş Sistemi'ne olan oranına eşittir (Değer 2002).

Sicim teorisiyle modüler formlar arasında da önemli bir ilişki vardır. Modüler formlar için gerekli bilgiler (İnam, 2011)'de bulunabilir. Modüler formlarla ilgili güncel çalışmalardan birisi de (Özkaya, vd., 2017)'dir.

2. DÜZLEMDEKİ DOĞRULAR VE BAZI EĞRİLERİN MODÜLLER UZAYLARI

Bu bölümde modüller uzayları kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için nispeten daha basit olan düzlemdeki doğruların modüller uzayları elde edilecek ve bu uzayların özellikleri incelenecektir (Zweibach, 2009).

Örnek 2.1. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe doğru kelimesi orijinden geçen doğruyu belirtmektedir.

\mathbb{R}^2 düzleminde, orijinden geçen tüm doğruların koleksiyonunu belirlemek istiyoruz. Problemi çözebilmek için, her bir L doğrusunu, belirli bir parametre ile ya da modülüs adı verilen ve her doğru için kolaylıkla hesaplanabilen ve doğruları birbirinden ayırmaya yarayan bir büyüklükle eşleştirmek yeterlidir. Bunu yapabilmek için düzlemde alışılmış (x, y) koordinatları alınıp L doğrusunun x -ekseniyle saat yönünün tersi yönünde yaptığı $\theta(L)$ açısını ölçmek gerekir. Dikkat edilirse, bu açı $0 \leq \theta < \pi$ eşitsizliğini sağlamalıdır. $0 \leq \theta < \pi$ olmak üzere θ açısının olası değerleri için her bir θ açısına karşılık x -ekseniyle θ açısı yapan bir tek L doğrusu vardır. O halde bir küme olarak sınıflandırma probleminin tam bir çözümüne ulaşılmış oluruz.

Tanım 2.2. Bu özellikteki L doğrularının kümesi \mathbb{RP}^1 ile gösterilir ve bu kümeye *Reel projektif doğru* adı verilir.

Uyarı 2.3. Bu doğrular ile $[0, \pi)$ yarı açık aralık arasında değişen açılar arasında bire-bir karşılık gelme vardır.

Hatırlanacağı gibi bu probleme geometrik bir çözüm aranmakta idi. Tanım gereği θ açısının değiştiği aralık $[0, \pi)$ olduğundan L doğrularının eğim açıları π 'ye yaklaştıkça L doğrusu neredeyse x -eksenine paralel hale gelir. Böylece açılarla doğruları eşleştirmemizdeki “iyi tanımlılık” konusunda bir problem yaşayabiliriz. Gerçekten de bir açıya iki doğru karşılık gibi bir sorun ortaya çıkabilir. Bu problemi aşabilmek için $[0, \pi)$ aralığını π sifıra yaklaşacak şekilde “çevrelemek” gibi bir çözüme ihtiyacımız vardır. Bu ise doğruların koleksiyonunun doğal bir topolojiye sahip olması demektir. Bunu yapabilmemizin bir yolu $[0, \pi)$ yarı açık aralığı yerine $[0, \pi]$ kapalı aralığını alıp $0, \pi$

noktalarını özdeşleştirmektedir. Bu ise ancak ve ancak uygun bir denklik bağıntısının tanımlanması ile mümkündür. Eğer π ve 0 aynı noktalar olarak düşünülürse bu durumda π 'ye yakın olan sayılar aynı zamanda 0 'a yakın olan sayılara yakın olur. Bu ise bir doğru parçasının iki bitim noktasını eşleştirmektedir. Bu durumda topolojik olarak bir çember elde edilir. Bunu yapabilmemizin daha doğal bir yolu \mathbb{RP}^1 reel projektif doğrunun aşağıdaki gibi kurulmasıdır. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ birim çemberini göz önüne alalım. Her bir $s \in S^1$ noktasına bir $L(s)$ doğrusu atanmasının aşikar bir yolu vardır. \mathbb{R}^2 'de iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçtiğinden çember üzerindeki s noktası ile orijinden geçen yalnızca bir $L(s)$ doğrusu vardır. Böylece S^1 tarafından parametrize edilen doğruların bir ailesi elde edilir. O halde $s \rightarrow L(s)$ dönüşümü S^1 'nin iki noktasının birbirine fazlasıyla yakın olması halinde bile herhangi bir problem olmaz. Bununla beraber dikkat edilirse s ve $-s$ noktaları her zaman aynı doğruya karşılık geldiğinden bu dönüşüm örten olmasına rağmen bire-bir değil ikiye-birdir. Bunun çaresi S^1 çemberi üzerindeki her bir s noktasını bu noktanın tam tersi olan $-s$ noktası ile özdeşleştirmektir. Böylece \mathbb{RP}^1 ile şimdi elde ettiğimiz topolojik olarak çember olan bölüm uzayı arasında bire-bir bir karşılık gelme elde edilir. Bu karşılık gelme iki yönlü olarak da süreklidir.

Böylece \mathbb{RP}^1 uzayı düzlemde orijinden geçen doğruların modüller uzayı olur.

Örnek 2.4. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ düzleminde bir eğri olsun C eğrisi üzerindeki her bir c noktasını sıfır ve c noktasından geçen doğru ile eşleştirebiliriz. Bu bize C tarafından parametrize edilen doğruların bir ailesini verir. Üstelik $C \rightarrow \mathbb{RP}^1$ üzerinde tanımlı $c \rightarrow L(c)$ dönüşümü sürekli bir fonksiyon verir. Örneğin C eğrisi yüksekliği 1 olan $(x, 1)$ noktalarının kümesi olsun. C 'nin \mathbb{R} 'nin bir kopyası olduğu açıktır. Bu durumda C 'den \mathbb{RP}^1 'e dönüşümü \mathbb{R} ile $B = \{L: \theta(L) \neq 0\}$ kümesi arasında bir izomorfizm verir. B kümesi \mathbb{RP}^1 'nin x -ekseni dışındaki tüm doğrulardan oluşan bir alt kümesidir. Bunu daha somut şekilde ele alacak olursak orijinden geçen doğruların bir koleksiyonu belli sürekli parametrelere bağlıdır. Bu kavram \mathbb{RP}^1 in geometrisi ile ilişkilidir. Örneğin \mathbb{R}^2 de doğruların 37 sürekli parametreye sahip bir ailesi demek aslında \mathbb{R}^{37} 'den \mathbb{RP}^1 'e $v \in \mathbb{R}^{37}$ noktasını $L(v) \in \mathbb{RP}^1$ doğrusuna resmeden sürekli bir fonksiyon olması demektir.

3. RIEMANN YÜZEYLERİ VE DÜNYA YAPRAKLARI

Bu bölümde sicim dünya yapraklarının Riemann yüzeyleri olduğunu göreceğiz. İlk olarak “dünya yaprakları” kavramını tanıtalım.

Tanım 3.1. (Zweibach, 2009) Bir parçacığın uzay-zamanda izini sürdüğü yola *dünya doğrusu* adı verilir.

Tanım 3.2. (Zweibach, 2009) Bir sicimin uzay-zamanda izini sürdüğü iki boyutlu yüzeye *dünya yaprağı* adı verilir.

Sicim teorisiyle Riemann yüzeyleri arasında oldukça ilgi çekici bir bağlantı vardır. Bu çalışmanın temel amaçlarından birisi de bu ilişkiyi ortaya koymaktır. Bu bağlamda Riemann yüzeylerini tanıtarak devam edelim (Jones ve Singerman, 1987).

Riemann yüzeyleri 2 boyutlu yüzeylerdir. En basit Riemann yüzeyi \mathbb{C} karmaşık düzlemidir. Noktasal olarak \mathbb{C} kümesi ile \mathbb{R}^2 kümesi birbirine homeomorftur. Gerçekten de \mathbb{R}^2 'den alınan her bir (x, y) ikilisine $z = x + iy$ özelliğindeki bir karmaşık sayı karşılık gelir. $z = x + iy$ kompleks koordinatlarıyla düzlem üzerindeki noktalar tarif edilir. Bu dönüşümün bire-bir, örten, kendisi ve tersi sürekli bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir (Başkan, 2012).

Kompleks düzlemin kendisinin bir Riemann yüzeyi olduğu gibi bazı alt bölgeleri de birer Riemann yüzeyi olur. Örneğin, $\mathbb{H} = \{z = x + iy | \text{Im}(z) > 0\}$ olarak tanımlanan üst yarı düzlem oldukça önemli bir Riemann yüzeyidir. Bununla yakından ilişkisi bir yüzey ise üst yarı düzlem x eksenindeki noktaların ve sonsuzdaki noktanın ilave edildiği çerçeveli $\overline{\mathbb{H}}$ üst yarı düzlemidir. O halde

$$\overline{\mathbb{H}} = \{z = x + iy | \text{Im}(z) > 0\} \cup \{i\infty\} \cup \mathbb{Q}$$

kümesi de bir Riemann yüzeyidir.

Daha karmaşık Riemann yüzeyleri de vardır. Örnek olarak tor yüzeyi ve genişletilmiş karmaşık düzlem $\hat{\mathbb{C}}$, yani Riemann küresi verilebilir (Jones ve Singerman, 1987).

Riemann yüzeyini tanımlayabilmek için analitik fonksiyonlar konusuna ihtiyaç duymaktayız.

Tanım 3.3. Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu ve bir $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Eğer z_0 'ın belirli bir komşuluğundaki tüm noktalarda $f'(z)$ türevi varsa $f'(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir (Başkan 2012).

Uyarı 3.4. Eğer $f(z) = u(x + iy) + iv(x, y)$ yazılırsa bu durumda $f(z)$ analitik olduğu bölge üzerinde u ve v fonksiyonları *Cauchy–Riemann eşitlikleri* adı verilen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

eşitliğini sağlamaktadır (Başkan, 2012).

Tanım 3.5. Bir Riemann yüzeyi kompleks haritalar tarafından donatılmış 2 boyutlu bir reel manifolddur. Buradaki kompleks haritalar aşağıdaki gibi tanımlanır. Bu haritalar U_α açık kümelerini kompleks düzleminin açık alt kümelerine resmeden homeomorfizmlerdir. Burada α manifoldtu örten U_α açık kümelerinin etiketidir. $U_\alpha \cap U_\beta$ kesişimleri üzerinde $Z_\alpha \cup Z_\beta^{-1}$ fonksiyonlarında analitik olmak zorundadır (Jones ve Singerman, 1987).

Tanım 3.6. Eğer iki Riemann yüzeyi arasında sürekli, birebir, örten ve analitik olacak şekilde bir dönüşüm bulunabilirse bu iki Riemann yüzeyine birbirine denktir denir.

Uyarı 3.7. Bunun anlamı ise bu dönüşümün \mathbb{C} nin bir alt kümesinden \mathbb{C} nin belli bir alt kümesine tanımlı ve haritalar cinsinden ifade edilen analitik bir fonksiyon olmasıdır.

Tanım 3.8. Açık koruyan analitik dönüşümlere konform dönüşümler denir.

Bu açılar yerel olarak korunsa da Riemann yüzeylerinin konform bir dönüşüm altındaki görüntüsü farklı bir yüzey olabilir. Bu çalışmada kullanabileceğimiz konform dönüşümler için yeter şart analitik ve birebir olmalıdır. Buna göre bir Riemann yüzeyinden diğer bir Riemann yüzeyine konform bir dönüşüm varlığı bu iki Riemann yüzeyinin denk olması gerektirir. Konform olarak birbiriyle ilişkili yüzeyler aynı Riemann yüzeyi olduğundan uzaklık kavramı farklılık gösterebilir. \mathbb{C} kompleks düzlemi ve koordinatları sırasıyla z_1 ve z_2 olan P_1 ve P_2 noktalarını göz önüne alalım. \mathbb{C} üzerinde üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığın standart tanımı bu iki koordinatın farkının mutlak değeri olarak tanımlanır. Yani $|z_1 - z_2|$ dir. $w = 2z$, z -düzleminde w -düzlemine tanımlansın. Bu iki düzlemde aslında aynı iki Riemann yüzeyidir. Konform

dönüşüm uygulandıktan sonra P_1 ve P_2 'nin görüntüleri $w_1 = 2z_1$ ve $w_2 = 2z_2$ koordinatlarına sahiptir. P_1 ve P_2 arasındaki uzaklık böylece $|w_1 - w_2| = 2|z_1 - z_2|$ olur. Böylece iki nokta arasındaki uzaklık iki katına çıkmış olur. Hem z -düzlemi hem w -düzlemi aynı Riemann yüzeyi olduğundan P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık sorulduğunda bir kayıp vardır. Başka bir deyişle uzaklık kavramı konform dönüşümleri tarafından korunmaz. Üstelik konform dönüşümler yerel olarak uzaklıkları ölçeklendirirken gerçekten de yerel olarak tüm yönlerde ölçülen uzaklıklar aynı çarpan yardımıyla ölçeklendirilir. $w = f(z)$ den $dw = f'(z)dz$ her iki tarafın diferensiyelini alırsak $f'(z)dz$ elde edilir. Herhangi bir z_0 noktası için $|dw| = |f'(z_0)||dz|$ $|dw| dz$ vektörünün görüntüsünün uzunluğu olduğundan yerel olarak tüm uzunlukları $|f'(z_0)|$ gibi aynı çarpan tarafından ölçeklendiği görülür.

Sicim teorisinin Riemann yüzeyleriyle olan ilişkisini şu şekilde açıklayabiliriz. Polyakov eklentisinde kullanılan $h_{\alpha\beta}$ dünya yaprağı metriği ve \mathbb{C} üzerinde tanımlı

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 h_{\alpha\beta}$$

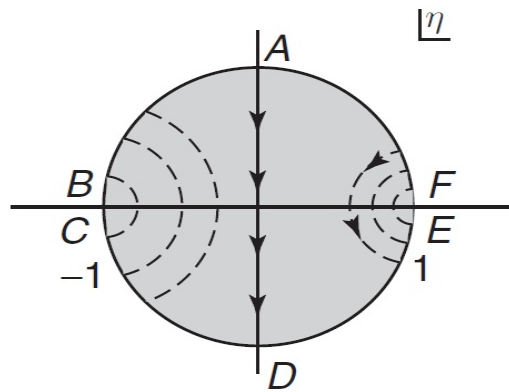
Weyl dönüşümleri dünya sayfaları üzerindeki her noktadaki tüm metrik bileşenlerini aynı çarpan yardımıyla ölçeklendirir. Böylece yerel olarak tıpkı Riemann yüzeylerindeki konform dönüşümlerin yaptığı gibi tüm uzunluklar aynı yönde ölçeklendirilir. Dünya sayfası metriğinin yerel ölçeklendirme dönüşümleri altındaki sicim etkisinin değişmezliği, dünya sayfası üzerindeki fiziksel olmayan uzaklık ölçeklendirmesini gösterir. Bu uzaklıkların ölçeği Riemann yüzeyleri üzerinde iyi tanımlı olmadığından bu bize dünya sayfalarına Riemann yüzeyleriyle bakmanın doğal bir bakış açısı olduğunu gösterir. Uzaklıkların ölçeklendirilmesi benzer davranışları gösterse de bir farklılık vardır. Dünya sayfası metriği $-ds^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$ olarak tanımlanan iki boyutlu $\eta_{\alpha\beta}$ Minkowski metriği ile orantılı olacak şekilde ayarlanabilir. Öte yandan kompleks düzlem üzerindeki alışılmış metrik $ds^2 = |dz|^2 = dx^2 + dy^2$ olarak tanımlanan Öklid metriğidir. Bu işaret farkı nedeniyle dünya sayfalarının Riemann yüzeyi olarak ele alınabileceğini ispatlamak mümkün olmayabilir. Öklid versiyonu yardımıyla Minkowski teorisi hakkında yeteri kadar bilgimiz olduğu için dünya sayfaları ile Riemann yüzeyleri arasındaki benzerlik hala kullanılabilir

Şekilde görüldüğü gibi sonsuz geçmişe yaklaşan sicimler $z = 0$ noktasına yaklaşır. Burada oldukça ilgi çekici bir durum söz konusudur. Şeridin iki sınırı gerçel eksen üzerine resmedilir. Dikkat edilirse $\sigma = 0$ reel eksenin pozitif tarafına resmedilirken $\sigma = 2\pi\alpha'p'$ sınırı gerçel eksenin negatif tarafına resmeder. Sonsuz geçmişteki sınırlar arasındaki açı değişmiştir. Sınırları sonsuz geçmişten ortaya çıkan doğrular olarak düşünülebilir. Şeritte bu sınırlar 0° açısı yaparken görüntü uzayında 180° lik bir açı yaparlar. Böylece şerit \mathbb{H} üzerine resmedilir ve sicimler $z = 0$ merkezli yarı çemberler olarak görünürler. $\tau = 0$ daki sicim birim çemberdir. Uzak geçmişteki sicimler z -düzleminde çok büyük yarı çemberler olurlar. Sicimler sonsuz geleceğe yaklaşırken sınırsız olarak büyürler.

Bir serbest açık sicimin Riemann yüzeyi için kullanılan bir yararlı gösterim daha vardır. \mathbb{H} yarı düzlemini

$$\eta = \frac{1+iz}{1-iz} \quad (3.3)$$

olmak üzere η -düzlemindeki birim diske dönüştürürler. Bu dönüşüm aşağıdaki gibi gösterilmiştir.



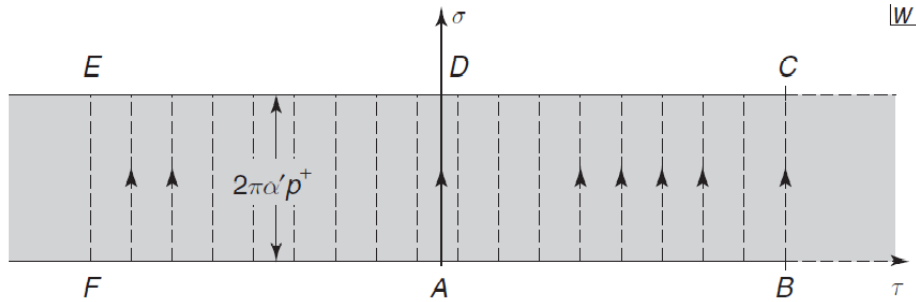
Şekil 3.2. \mathbb{H} yarı düzleminin görüntüsü.

Dikkat edilirse bu dönüşüm $im(z) = 0$ gerçel doğrusunu birim çembere resmeder. Gerçekten de yukarıdaki dönüşümde $z = x \in \mathbb{R}$ alınırsa

$$|\eta| = \eta\eta^* = \frac{1+ix}{1-ix} \frac{1-ix}{1+ix} = 1$$

dir. Bu dönüşüm yardımıyla $z = 0$ sonsuz geçmiş $\eta = 1$ ' e resmedilir. $z = \infty$ sonsuz geleceği $\eta = -1$ ' resmeder. İki sınır bileşeni ise BAF ve CDE birim yarım çemberleri olur.

Yukarıdaki dönüşümler dikkate alınacak olursa aşağıdaki sonuçlar görülür. Eğer bir şerit bir sınırlı bölge üzerine resmedilirse bu durumda sonsuz geçmiş ve sonsuz gelecek tam sicimler sınırlı bölgenin sınırı üzerindeki iki noktaya resmedilirler. Daha kesin olarak bu noktalar herhangi sonlu zaman sicimine ulaşamayan limit noktalarıdır. Dolayısıyla topolojik olarak bu noktalar sınırlı bölgenin sınırından çıkarılan noktalardır. Bu noktalara *delikler* denir. Bu durumda sicimlerin deliklere eklendiğini söyleriz. Sonsuz sicimde gösterilen konform dönüşümlerimiz konform olarak diske denktir ki bu disk sınır üzerinde 2 kez delinmiştir. Bu delikler, birim diskin sınırını 2 ayrı bileşene bölerler. $\bar{\mathbb{H}}$ resmedilen şerit uzak gelecekteki herhangi bir sicim için $z = 0$ noktasına ulaşmaz. Şerit üzerinde uzak gelecek yeterince büyük z değerleri için bir sonraki bölümde anlatılacak sonsuzdaki noktaya ulaşamazlar. Böylece $\bar{\mathbb{H}}$ resmedilen sonsuz şeride iki nokta çıkarılmış olur. Bir serbest kapalı sicim Şekil (3.3) da yer alan sicim diyagramı tarafından gösterilebilir.



Şekil 3.3. Sicim diyagramı.

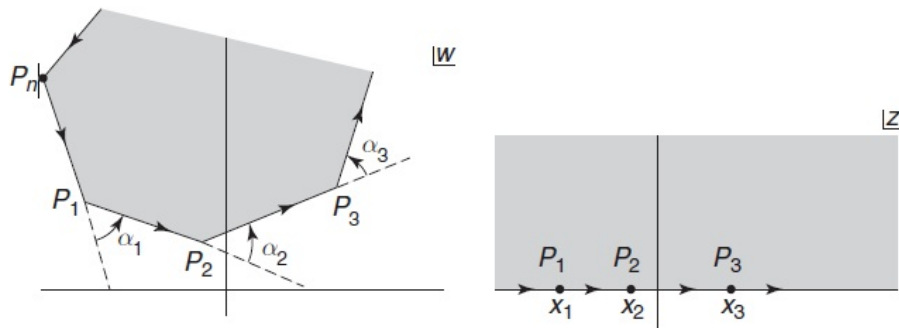
Burada sonsuz şeridin üst ve alt noktalarının birbiriyle özdeşleştirildiği anlaşılır. Daha kesin olarak $\text{Re}(\tau)$ nun aynı değerlerine sahip olan noktalar birbirleriyle özdeşleştirilir. Bu özdeşleştirme sonucunda çevresi $2\pi a'p^+$ olan bir sonsuz silindir elde edilir.

3.1 Schwarz-Cristoffel Ve Üç Sicim Etkisi

Bu bölüme kadar serbestçe yayılan açık sicim dünya sayfasının bazı konform dönüşümlerini inceledik. Bu bölümde etkileşimli sicimlere döneceğiz. En basit etkileşim Şekil 3.3.'de görülen bir açık sicimin iki açık sicime dönüşme örneğidir. Bir önceki bölümde gösterilen sezgi yardımıyla bu yüzeyin sınır üzerinde 3 deliğe sahip bir diske konform olarak denk olması gerektiği düşünülür. Gerçekten de Riemann dönüşüm teoremi gereği bu etkileşimli dünya yaprağı açık sicimin sınırları gerçel eksene resmedilecek olan $\bar{\mathbb{H}}$ 'ne konform olarak resmedilebilir. $\bar{\mathbb{H}}$ farklı Riemann yüzeylerini karşılaştırma olanağı veren kanonik temsil verdiği için dünya yaprağını $\bar{\mathbb{H}}$ 'e resmeden dönüşümler 3'ten fazla sicimlerin etkileşimlerinin çalışmasında önemli bir oynayacaktır.

Şekil 3.3'de verilen dünya yaprağını $\bar{\mathbb{H}}$ ne resmetmek kolay değildir. Buna rağmen bir dünya yaprağına bir çokgenin limit gözüyle bakılabilir. Diğer yandan bir çokgen $\bar{\mathbb{H}}$ ' ne resmeden dönüşümü oluşturmak için bilinen iyi bir metot vardır. Bu dönüşüm çokgenin köşeleri hariç konformdur. Genelde bu konform dönüşümü açık şekilde yazma mümkün değildir. Ancak dönüşüm için bir diferansiyel denklem yazmak her zaman mümkündür. Çokgenlerde ve $\bar{\mathbb{H}}$ ile ilgili bu dönüşümler Schwarz-Cristoffel dönüşümleri olarak adlandırılır.

Karmaşık w -düzleminde bir çokgeni göz önüne alalım. Çokgenin n tane kenarı ve böylece $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ tane köşesi olsun. Bu durumda $w(z)$ Schwarz-Cristoffel dönüşümü $z \in \bar{\mathbb{H}}$ noktasını bir çokgene resmeder. Bu durum Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Schwarz-Cristoffel dönüşümü.

Çokgenin sınırı çokgenin içi yönlendirilmiş sınırın solunda kalacak şekilde yönlendirilmiştir.

Bu dönüşüm artan değerlerin z - düzlemindeki gerçel eksenini çokgenin yönlendirilmiş sınırı içine resmeder. Bu çokgenin P_i köşesinde sahip olduğu dönme açısına α_i diyelim. α_i açıları şekildeki gibidir. Tanım gereği bu dönme açılarını $[-\pi, \pi]$ na kısıtlanır. O halde $-\pi \leq \alpha_i \leq \pi$ olur. Eğer dönme açısı π' ye yakın ancak π' den küçük değer ise bu açı çokgenin küçük bir dilimi örttüğünü gösterir. Diğer yandan dönüş açısının değeri $-\pi'$ ye yakın ancak bu değerden küçükse çokgenin küçük bir dilimini resmedemediği bir köşeyi temsil eder. π ve $-\pi$ 'deki dönme açılarının değerleri dejenere çokgenleri verir. Gerçekten de ışık konisi sicim diyagramları dejenere çokgenlerdir. π ve $-\pi$ açıları tamamen farklı tipteki köşeleri verir. $w(z)$ fonksiyonu için diferansiyel denklemin

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} \quad (3.5)$$

olduğunu iddia edilir. Burada

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}, \quad (3.6)$$

Sıralı gerçel sayılarının bir koleksiyonu olup $z(w)$ dönüşümü $i = 1, 2, 3, \dots, x_{n-1}$ için köşeleri

$$z(P_i) = x_i, i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ dır.} \quad (3.7)$$

için köşeleri $z(P_i) = x_i$ olacak şekilde resmeden dönüşümdür.

Dikkat edilirse α_n dönme açısı (3.5) diferansiyel denkleminde yer almaz. Gerçekten de (3.7) de elde edilen dönüşüm P_n köşesini $z = \alpha$ 'a resmeder. O halde

$$z(P_n) = \infty \quad (3.8)$$

dur. Çokgen kapalı olduğundan dönme açılarının toplamı 2π olmak zorundadır. O halde

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n = 2\pi \quad (3.9)$$

olur. Böylece α_n açısı diğer dönme açıları tarafından belirlenir.

Şimdi (3.5) eşitliğinin Schwarz-Cristoffel dönüşümü için doğru diferansiyel denklemi olduğunu gösterelim. Bunu yapabilmek için eşitliğin her iki tarafının argümentini alalım. Dikkat edilirse r reel sayısı için $z = r \exp(i\theta)$ karmaşık sayısının argümenti $\arg(z)$ ile gösterilir ve $\arg(z)=0$ tanımlanır. Bu açılar çok değerli olduğundan argüment fonksiyonu toplamsal bir belirsizliğe sahiptir. Bu açılara 2π nin herhangi bir katını toplayıp çıkarabiliriz. Bu durumda aynı açıları elde ederiz (Başkan, 2012).

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ve

$$\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

özelliklerini sağlar. Argüment fonksiyonu bu özellikleri kullanarak ve (3.5) eşitliğinin her iki yanının argümenti alınarak

$$\arg(dw) - \arg(dz) = \arg A + \arg(z - x_1)^{-\alpha n/\pi} + \dots + \arg(z - x_{n-1})^{-\alpha n-1/\pi} \quad (3.10)$$

elde edilir. Argüment fonksiyonunun temel değeri olan Arg temel değeri alınarak fonksiyon tek değerli hale gelir.

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi \quad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlar. Öte yandan dikkat edilirse pozitif bir reel sayı için $\text{Arg} = 0$ iken $-r$ nin $\text{Arg}(-r) = \pi$ olur. z^β 'yi $z^\beta = \exp[\beta (\ln |z| + i\text{Arg}(z))]$ olarak tanımlansın. Burada dikkat edilirse logaritmanın esas dalı alınmıştır. Böylece $|\beta| \leq 1$ için

$$\text{Arg}(z^\beta) = \beta \text{Arg}(z) \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. $|\beta| \leq 1$ koşulu yukarıdaki tartışmayı anlamlı hale getirir. $|\alpha_i/\pi| \leq 1$ olduğundan (3.12) yi sadeleştirmek için (3.10) kullanılabilir. Böylece:

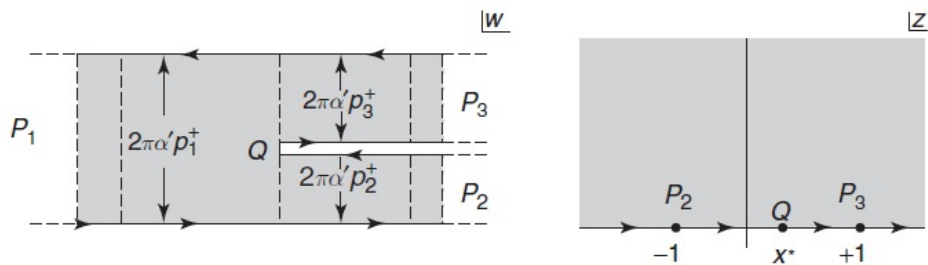
$$\arg(dw) - \arg(dz) = \operatorname{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \operatorname{Arg}(z - x_1) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \operatorname{Arg}(z - x_{n-1}) \quad (3.13)$$

elde edilir.

$z = w$ gerçel eksen alındığında $dz = dx > 0$ olduğundan (3.13) eşitliği (3.14) ya dönüşür.

$$\arg(dw) = \operatorname{Arg} A - \frac{\alpha_1}{\pi} \operatorname{Arg}(x - x_1) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\pi} \operatorname{Arg}(x - x_{n-1}). \quad (3.14)$$

z -düzlemindeki reel eksen çokgenin sınırına resmedildiğinden $\arg(dw)$ tam olarak çokgenin bir kenarının yatay eksenle yaptığı açıdır. x x_i dönüm noktasını seçmediği sürece sağ kenarda bir değişiklik olmaz. Pozitif büyüklüklerin argümentleri 0 (sıfır) olarak kalır. Negatif büyüklüklerin argümentleri π olarak kalır. Bu ise w düzleminde düz bir kenar üretir. Diğer yandan x , x_i dönüm noktası sol kenardan sağ kenara giderken $\operatorname{Arg}(x - x_i) \pi \rightarrow 0$ a doğru $-\pi$ lik bir değişime uğrar. Böylece yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $(-\alpha_i/\pi)(-\pi) = \alpha_i$ lik bir değişime uğrar. Böylece yeni kenar boyunca dw açısı α_i kadar büyür ki bu da tam olarak beklenilendir. Bu ise yukarıdaki diferansiyel denklemlerle ilişkilendirilir. Özel bir çokgen verildiğinden x_i dönüm noktaları kadar A sabiti de hesaplanmak zorundadır. Bu büyüklükler çokgenin kenar uzunluklarına bağlıdır.

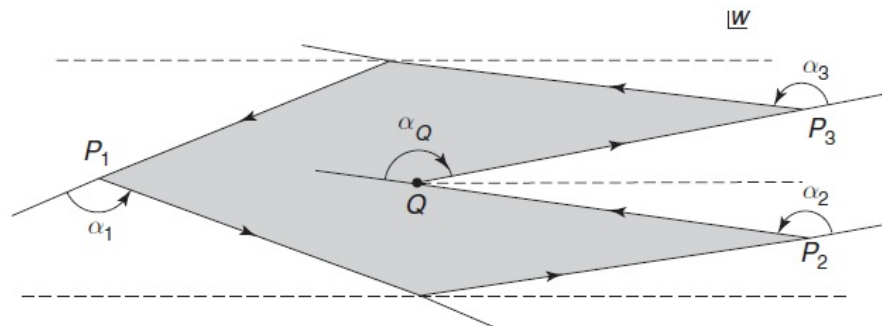


Şekil 3.5. Schwarz-Cristoffel dönüşümü-2.

Şekil 3.5’de gösterildiği gibi açık sicimin 2 parçaya bölündüğü sicim durumuna Schwarz-Cristoffel dönüşümlerini uygulayalım. Bu dünya yaprağına 4 köşeli dejenere çokgen gözüyle bakılabilir. Eğer çokgenin sınırını alttaki yatay doğrudan itibaren yönlendirirsek sonsuz gelecekteki 2 sicimin ilk tepe noktası P_2 olur. Buradaki dönüş açısı $+\pi$ dir. Sıradaki kenar bu etki altında Q etkileşim noktasına bu tam olarak 2.tepe noktasıdır ve buradaki dönüş açısı $-\pi$ olur. Bir sonraki kenar 3 sicim P_3 sonsuz gelecek noktasına gider. Burada 3. tepe noktasını buluruz ki burada dönüş açısı $+\pi$ olur. Özet olarak aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 P_2 \text{ Dönme Açısı} : \alpha_2 &= +\pi, \\
 Q \text{ Dönme Açısı} : \alpha_Q &= -\pi, \\
 P_3 \text{ Dönme Açısı} : \alpha_3 &= +\pi, \\
 P_1 \text{ Dönme Açısı} : \alpha_1 &= +\pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Dikkat edilirse (3.9)’da olduğu gibi dönüş açılarının toplamı 2π ’dir. Bu dönüş açılarını daha iyi kavramak için Şekil 3.5’e bakılabilir.



Şekil 3.6. Dönüş açıları.

Bu arada dünya yaprağı şematik olarak gösterilmiştir. Şekle dikkat edilirse bu çokgen neredeyse dejenere bir çokgen olup dönüş açıları şekilde görüldüğü gibidir.

\mathbb{H} dönüşümünü, P_2 yi $z = -1$ noktasına P_3 ü $z = +1$ ve P_1 noktası $z = 0$ noktasına resmedecek şekilde tanımlayalım. (3.14) kullanılarak bu dönüşüme karşılık gelen diferansiyel denklemi yazalım. Dönüm noktası olan $z = -1, x^*, +1$ ve dönüm açıları olan $\alpha_2, \alpha_Q, \alpha_3$ sıralanarak (3.5) yazılır.

$$\frac{dw}{dz} = A(z - (-1))^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} (z - x^*)^{-\frac{-\alpha Q}{\pi}} (z - 1)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} \quad (3.16)$$

(3.15)'deki açı değerleri kullanılarak (3.16)'yı elde ederiz.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A(z - x^*)}{(z + 1)(z - 1)} \quad (3.17)$$

z' nin gerçel sayı ve 1 den büyük bir reel sayı olması durumu için dw/dz gerçel ve negatif olmak zorundadır. Çünkü $z > 1$ görüntüsü P_3 ve P_1 den geçen yatay doğrudur. Böylece A sabitinin negatif bir gerçel sayı olduğu sonucuna varılır. (3.16) eşitliğinin sağ tarafı basit kesirlere ayrıldığında (3.18) elde edilir.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A}{2} \left(\frac{1+x^*}{z+1} + \frac{1-x^*}{z-1} \right) \quad (3.18)$$

İntegral ele alınarak (3.19) elde edilir.

$$w = \frac{A}{2} (1 + x^*) \ln(z + 1) + \frac{A}{2} (1 - x^*) \ln(z - 1) \quad (3.19)$$

Buradaki logaritma tanımını $\ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$ şeklindedir. Burada hala A ve x^* ı sicim diyagramının P_2^+ ve P_3^+ parametreleri cinsinden belirlememiz gerekir. P_2' nin görüntüsünde z noktası ile $2\pi\alpha'p_2^+$ kadar arttırmak için $z = -1$ noktasında kesişirken $\sigma = Im(w)$ ye ihtiyaç duymaktayız. $Im(\ln z) = Arg(z)$ ve A gerçel sayı olduğundan

$$\sigma = Im(w) = \frac{A}{2}(1 + x^*)Arg(z + 1) + \frac{A}{2}(1 - x^*)Arg(z - 1) \quad (3.20)$$

elde edilir. z noktası -1 in sağından soluna gittiğinden ve $Arg(z+1)$ π' den $0'$ a gittiğinden böylece

$$\sigma = \frac{A}{2}(1 + x^*)(0 - (\pi)) = 2\pi\alpha' p_2^+ \quad (3.21)$$

elde edilir. Bu ise

$$\frac{A}{2}(1 + x^*) = -2\alpha' p_2^+ \quad (3.22)$$

verir. Benzer olarak $z = 1$ 'in civarında

$$\frac{A}{2}(1 - x^*) = -2\alpha p_3^+ \quad (3.23)$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik (3.19) de yerine yazılarak

$$w = -2\alpha' p_2^+ \ln(z + 1) - 2\alpha' p_3^+ \ln(z - 1) \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur. Bu tam olarak bilinen parametreler cinsinden dönüşümü veren eşitliktir. Buradaki metot yüksek sayıdaki sicim etkileşimlerine genelleştirilebilir.

(3.24) eşitliği x^* noktasını hesaplamadan yazılmıştır. Ancak (3.22) ve (3.23) eşitlikleri taraf tarafa bölünerek x^* sayısı

$$\frac{1 + x^*}{1 - x^*} = \frac{p_2^+}{p_3^+} \rightarrow x^* = \frac{p_2^+ - p_3^+}{p_2^+ + p_3^+} \quad (3.25)$$

olarak bulunur. Eğer $p_2^+ = p_3^+$ ise $x^* = 0$ olacağı açıktır. Bu ise Q noktasını p_2^+ ve p_3^+ noktası arasında kalması nedeniyle beklenen bir sonuçtur. $p_2^+ \gg p_3^+$ ise bu durumda konform olarak Q nın p_3^+ 'e yaklaştığını gösterir. Böylece $x^* \rightarrow 1$ olur. Gerçektende Q noktası p_2^+ yaklaşır. x^* değeri aynı zamanda (3.24) dan da hesaplanabilir. Bunun için $z = x^*$ noktasında $\frac{dw}{dz} = 0$ olduğuna dikkat etmeliyiz. Çünkü Q noktasında $\frac{dw}{dz}$ türevi negatiften pozitive geçer. Böylece τ bir yerel minimum değeri olur. (3.24) kullanılarak

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-2\alpha p_2^+}{x^* + 1} - \frac{2\alpha' p_3^+}{x^* - 1} = 0 \quad (3.26)$$

4. RIEMANN YÜZEYLERİNİN MODÜLLER UZAYLARI

Tanım gereği bir konform dönüşüm yardımıyla birbirine resmedilen yüzeyler aynı Riemann yüzeyi olduğundan hangi koşullar altında birbirine konform olarak resmedilen bir çift yüzeyin varlığını bilmek oldukça önemlidir. Herhangi iki yüzeyi konform olarak birbirine resmedildiği zaman bunların aynı Riemann yüzeyi olduğunu gördük dolayısıyla doğal olarak akla ne zaman bir yüzeyi diğerine konform olarak resmedebiliriz sorusu geliyor. Basit bir örnekle bu soruyu netleştirelim. Reel eksen üzerinde x gibi bir deliği olan \mathbb{H} üst yarı düzlemini göz önüne alalım. Sorulacak ilk soru şudur. Bu yüzey x den farklı bir x' deliğine sahip \mathbb{H} üst yarı düzlemine konform olarak resmedilebilir mi? Bu ikisi aynı Riemann yüzeyi mi olur? Gerçekten de bunu görebiliriz. İlk \mathbb{H} yarı düzlemi için z koordinatını 2. \mathbb{H} yarı düzlemi için z' koordinatlarını kullanalım. Bu durumda $z' = z + (x' - x)$ dönüşümünü göz önüne alalım. Dikkat edilirse z' , z nin bir analitik fonksiyonu olduğundan bu bir konform dönüşüm belirtir. Bu dönüşüm $z = x$ noktasındaki deliği $z' = x'$ deliğine resmeder. Diğer yandan $Im(z') = Im(z)$ \mathbb{H} üst yarı düzlemini korur.

Sonuç olarak bu örnek bize sınır noktasında bir deliği olan \mathbb{H} yarı düzleminin parametresi olamayan bir Riemann yüzeyi olduğunu gösterir. Böylece hangi nokta seçilirse seçilsin Riemann yüzeyi aynı olur. Eğer Riemann yüzeyinin bir geometrisi varsa buna Riemann yüzeyinin modülü eğer birden fazla parametresi varsa bu parametreler Riemann yüzeylerinin modülleri adı verilir. Tekrar örneğe bakacak olursak reel eksen üzerinde tek deliğe sahip \mathbb{H} üst yarı düzleminin modülü yoktur.

Gerçek eksen üzerinde daha fazla delik eklenerek oldukça ilginç bir durum elde edilir. Örneğin reel eksen üzerinde 3 deliği bulunan \mathbb{H} üst yarı düzleminin hala sürekli modülü yoktur. Ancak \mathbb{H} nın sınırında ki deliğin mertebesini açıklayan ayrık bir modülü vardır. Daha fazla delik ekleyecek olursak 4 deliğe sahip \mathbb{H} üst yarı düzleminin bir sürekli bir de ayrık modülü vardır. Bu durumu bu bölümde açıklayacağız. Bu konu üzerindeki analizimize \mathbb{C} karmaşık düzlemi ile başlayıp \mathbb{C} yi genişleterek Riemann küresini tanımlayacağız. Daha sonra ise açık sicim etkileşimlerine kolaylıkla uygulanabilir olan \mathbb{H} üst yarı düzlemine geri döneceğiz. Riemann küresi üzerine yapacağımız çalışmalar kapalı sicimlerle yapacağımız çalışmalara yardımcı olacak. \mathbb{C} -düzlemi $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresi elde edilecek şekilde genişletilebilir (Başkan, 2012).

$\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresi kapalı sicimlerle ilgilidir. Sonsuz silindirden karmaşık z -düzlemine tanımlı (3.4) dönüşümü göz önüne alalım. Burada bir asimetri söz konusudur. Sonsuz geçmiş ve sonsuz gelecek kapalı sicimler silindir resminde simetrik olarak gözükürler. Ancak düzlemde ilk görünen şey $z = 0$ daki deliktir. 2. ise sonsuz çembere resmedilir. Bu simetri durumu düzeltebilmek için çözüm açıktır. Düzlemdeki sonsuz çembere basit bir delik olarak bakılmalıdır. Böylece bir serbest kapalı sicimin bir dünya yaprağı aslında $z = 0$ noktası ve $z = \infty$ noktası çıkarılmış $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemdir. Buna denk olarak bir serbest kapalı sicimin dünya yaprağı iki delikli $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresidir. $z = 0$ ve $z = \infty$ deki delikler $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresinde aynı geometrik yere sahiptir.

Tanım 4.1. $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 'ye tanımlı $w = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümlerine bir lineer kesirli dönüşüm (Möbiüs) dönüşümü adı verilir. Bu dönüşümler z -düzlemindeki sonsuz noktasını $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = w$ noktasına resmeder. Dikkat edilirse w sonlu bir sayıdır. Lineer kesirli dönüşümler $\hat{\mathbb{C}}$ den $\hat{\mathbb{C}}$ ' e bire bir analitik oluşumlardır (Başkan 2012) Sonsuzun bu dönüşüm altındaki görüntüsü $w = \frac{a}{c}$ olması $\hat{\mathbb{C}}$ deki sonsuzdaki noktaya genelleyici bir nokta gözüyle bakmamızla tutarlıdır. Bu dönüşüm bire bir olmasını istediğimizden dönüşümün katsayıları üzerine $ad - bc \neq 0$ koşulu koymamız gerektirir. Örnek olarak $a - b = 0$ ise bu durumda (4.2) koşulu sağlanmaz.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (4.1)$$

Bu durumda (4.1) her z için $w = 0$ olmasını gerektirir.

$$ad - bc \neq 0 \quad (4.2)$$

Böylece w lineer kesirli dönüşümü özdeşliğin sıfırından farklı farklı bir şey olmaz. Bu durumda w 'nın incelenecek ilgi çekici özellikleri kalmaz. Bu yüzden (4.2) koşulu önemlidir.

Teorem 4.2. $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $w = \frac{az+b}{cz+d}$ fonksiyonu birebirdir.

İspat. $\forall z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ için $w(z_1) = w(z_2)$ olsun.

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \text{ den}$$

işlemler yapılıncaya

$$(az + b)(cz_2 + d) = (cz_1 + d)(az_2 + b)$$

elde edilir ve $z_1 = z_2$ olup w birebirdir. Gerçekten de

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2 \quad (4.3)$$

olur.

Teorem 4.3. $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $w = \frac{az+b}{cz+d}$ fonksiyonunun tersi

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a} \quad (4.4)$$

dır.

z dönüşümü bire bir lineer kesirli bir dönüşümdür. İçler dışlar çarpımı yapılarak (4.2) eşitliği belli A, B, C, D karmaşık sabitleri için (4.1) halinde yazılabilir.

$$Awz + Bw + Cz + D = 0 \quad (4.5)$$

Bu ise bir lineer kesirli dönüşümün farklı bir formda yazılmasıdır. Dikkat edilirse eğer $AD - BC \neq 0$ ise (4.5) eşitliği bir lineer kesirli dönüşüm tanımlar.

Sıradaki soru ise şudur: (4.1) dönüşümünün kaç parametresi vardır?

Bu dönüşüm a, b, c, d gibi 4 karmaşık sayı kullanılarak yazılsa da bu dönüşümün aslında sadece 3 parametresi vardır. Eğer a, b, c, d sayıları $\alpha \neq 0$ gibi aynı karmaşık

sayı ile çarpılırsa (4.1) de pay ve payda $\alpha \neq 0$ olduğundan sadeleşir. Böylece tüm katsayıları 0 dan farklı aynı karmaşık sayı ile çarpmak dönüşümü değiştirmeyecektir. $ad - bc \neq 0$ olduğundan a, b, c, d parametrelerini $\sqrt{ad - bc}$ ile bölerek yeniden ölçeklendirebiliriz. Böylece elde edilen yeniden ölçeklenen dirilmiş parametreler $ad - bc = 1$ koşulunu sağlarlar. Böylece a, b, c, d karmaşık parametreleri bilindiğinde (4.6) denklemi yardımıyla d karmaşık sayısında bellidir. O halde w lineer kesirli dönüşümü belirlemek için a, b, c gibi 3 karmaşık parametreyi belirlemek yeterlidir.

$$ad - bc = 1 \quad (4.6)$$

Bir lineer kesirli dönüşüm 3 karmaşık parametreye sahip olduğundan bu dönüşümün z_1, z_2, z_3 de 3 farklı deliği olan bir z küresini w_1, w_2, w_3 gibi 3 keyfi ve farklı koordinattaki 3 deliğe sahip bir w küresine resmedebileceği öngörülebilir. Gerçekten de bu tahmin doğrudur. Bu bize 3 delikli $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresinin modülleri olmayan bir Riemann yüzeyi olduğunu gösterir. Şimdi dönüşümü oluşturalım. $z = z_1$ iken $w = w_1$ olmasını istediğimizden ilk olarak (4.7) eşitliğini yazalım.

$$(z - z_1)(\dots) = (w - w_1)(\dots) \quad (4.7)$$

Buradaki 3 nokta henüz denkleme katılmamış çarpımsal terimleri gösterir. z_1 noktasının w_1 e gitmesini istediğimizden aşıkarak çarpanlardan bağımsız olarak $z = z_1$ ve $w = w_1$ iken (4.7) eşitliğinin sağlanması gerekir. Daha sonra $z = z_2$ iken $w = w_2$ olmasını istiyoruz. Bunu yapabilmek için $w - w_2$ ve $z - z_2$ çarpanlarını yukarıdaki eşitlikte paydaya yazarız böylece:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2}(\dots) = \frac{w - w_2}{w - w_1}(\dots) \quad (4.8)$$

elde edilir. Eğer $w = w_2$ ise bu durumda yukarıdaki eşitlikten $z = z_2$ olması gerektiği elde edilir. $w = w_3$ iken $z = z_3$ elde edebilmek için aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir.

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \quad (4.9)$$

Yukarıdaki eşitlik z_1, z_2 ve z_3 noktalarını sırasıyla w_1, w_2, w_3 noktalarına resmeden dönüşümdür. (4.9) eşitliği içler dışlar çarpımı yapılarak (4.5) deki forma dönüştürülebilir. Bu bir lineer kesirli dönüşüm olur. 3 deliğe sahip kürenin modülü olmadığını görmüştük çünkü bu özellikteki tüm küreler konform olarak birbirine denktir. Gerçekten de (4.9) kullanılarak bu küreler birbirlerine resmedilebilir. (4.9) un $\hat{\mathbb{C}}$ nın 3 farklı noktasının sıralı bir kümesini yine aynı düzlemin 3 farklı noktalarının diğer bir sıralı kümesine resmeden yegane dönüşüm olduğu görülebilir.

Şimdi z_1, z_2, z_3, z_4 gibi 4 deliği olan $\hat{\mathbb{C}}$ -düzlemini ve w_1, w_2, w_3, w_4 noktalarında 4 deliğe sahip olan $\hat{\mathbb{C}}$ diğer bir kopyasını göz önüne alalım. Bu delikleri 1,2,3,4 etiketleriyle etiketlenmiş olduğunu düşünelim acaba $\hat{\mathbb{C}}$ nın bu kopyaları $i = 1,2,3,4$ için $z_i \rightarrow w_i$ şeklinde birbirine resmedebilir mi? Genelde cevap hayırdır. Bu 4 deliği birbirine resmedebilmek için ilk olarak z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla w_1, w_2, w_3 noktalarına resmetmemiz gerekir. Bu koşul yardımıyla (4.9) dönüşümü tek türlü belli olur. 3 nokta yardımıyla dönüşüm belirlendiğinden 4. noktaya ihtiyaç yoktur. Böylece z_4 noktasının kontrolünü kaybederiz. Bu dönüşüm yardımıyla z_4 noktası herhangi bir noktaya resmedilebilir. Kazara z_4, w_4 resmedilebilir. Ancak z_4, w_4 istenilen dönüşümü oluşturulmasında kullanılmadığında bu tesadüften başka bir şey olamaz. Böylece 4 etiketlenmiş deliği olan kürelerin olması gerçekleşmeyebilir.

z küresi ve z' kürelerini göz önüne alalım her iki küreninde p_1, p_2, p_3, p_4 gibi 4 er tane deliği olsun, ne zaman bu iki kürenin birbiriyle konform olarak denk olduğuna karar veririz? Bunu bulabilmek için herhangi bir küreyi alıp p_1, p_2, p_3, p_4 noktalarını sırasıyla 0,1 ve ∞ a resmedelim. Bunu $w = f(s)$ ve $w' = g(s)$ gibi lineer kesirli dönüşüm yardımıyla ifade ederiz. Böylece z ve z' kürelerinin konform olarak denkliği sorusu bu dönüşüm yardımıyla w ve w' kürelerinin konform denkliği sorusuna dönüşür. Şimdi p_2 noktasını göz önüne alalım. Bu durumda yukarıdaki kesirli lineer dönüşümler p_2 noktasını w küresinde $w = \lambda$ noktasına, w' küresinde ise $w' = \lambda'$ noktasına resmettiğini kabul edelim. Bu durumda 4 delikli w ve w' küreleri için konform olarak denk olabilmesi için gerek ve yeter şart $w = w'$ olmasıdır. P_1, P_3 ve P_4 deliklerini koruyan $(0,1 \text{ ve } \infty)$ da koruyan tek bir konform dönüşümü vardır ki bu dönüşüm

özdeşlik dönüşümüdür. Böylece eğer P_2 delikleri birbirlerine resmediliyorsa koordinatları aynı olmak zorundadır. Bu ise iddayı ispatlar. Kanonik gösterimde $(0,1, \infty)$ ve son delikteki λ nın yeri yardımıyla 4 delikli kürenin bir modülü elde edilmiş olur. λ bir karmaşık sayı olduğunda bir karmaşık modül yani buna denk olarak iki gerçel modül elde edilir. 4. deliğin yeri sürekli olarak değiştirildiğinden sürekli parametreler olur.

λ karmaşık modülü $0,1$ ve ∞ değerleri dışındaki tüm değerleri alır. Çünkü tersine λ bu değerlerden birini almış olsaydı bu iki delik çakışırdı. Tanım gereği bu delikler birbirinden farklı olduğu için λ değeri $0,1$ ve ∞ değerini alamaz. Bakış açısını değiştirerek λ koordinatlarına sahip ve $0,1$ ve ∞ noktaları çıkarılmış yeni Riemann küresini göz önüne alalım. Bu durumda bu küre üzerindeki her bir λ_0 noktasına karşılık $0,1, \infty$ ve λ_0' da 4 deliğe sahip bir küre eşler. Bu eşleşme yardımıyla λ küresi üzerindeki farklı nokta 4 delikli iki küreye konform olarak denk olur. Sonuç olarak her bir 4 delikli kürelerin $M_{0,4}$ ile gösterilen modüller uzayı elde edilir. Burada alt indiste yer alan sıfır (0) Riemann küresinin cinsini gösterir ki bu yüzeylerin cinsi (0)'dır. Öte yandan 4 sayısı ise bu yüzeylerin etiketlenmiş olduğu kabul edilen 4 deliği olduğunu gösterir. Bu yüzeyin kendisi 2 boyutlu bir yüzey olduğundan $M_{0,4}'$ dir. O halde

$$\dim(M_{0,4}) = 2 \quad (4.10)$$

4 deliğe sahip Riemann kürelerinin modüller uzayının kendisi de bir Riemann yüzeyi olur. Bu Riemann yüzeyi ise 3 deliğe sahip bir λ küresidir. $M_{0,4}$ modül uzayı kapalı sicim konusunda oldukça önemlidir (Zwiebach, 2009).

Açık sicim saçılmaları gerçel eksen üzerinde delikleri olan \mathbb{H} üst yarı düzlemi ve bu Riemann yüzeylerinin modül uzayları ile ilgili olduğundan aşağıda bu konuyu ele alacağız.

\mathbb{H} tanımı hatırlanacak olursa aslında \mathbb{H} üst yarı düzlemi reel eksenin ve sonsuzdaki bir noktasının eklenmesi ile elde edilmişti. Benzerlik olması açısından sonsuzdaki noktanın etkisini önceki bölümlerde Riemann küresine yapılan eklemelerle benzerlik taşır.

\mathbb{H}' 'da reel eksen üzerindeki ∞ ve $-\infty$ noktaları aslında aynı noktalardır. Böylece $r \rightarrow \infty$ yapılırken $0 \leq \theta \leq \pi$ için bu sonsuz noktası $r \exp(i\theta)$ ' nin limitidir.

Dolayısıyla sonsuzdaki nokta aslında $\bar{\mathbb{H}}$ sınırının bir parçasıdır. Böylece bu sınır bir çember olur. Hatırlanacak olursa $\bar{\mathbb{H}}$ konform olarak birim diske denkti. Bu konform denklik (4.3)'deki dönüşüm yardımıyla verilmişti. Bu dönüşüm $\bar{\mathbb{H}}$ sınırını birim diskin sınırı üzerine resmederken sonsuzdaki noktaya $\eta = -1$ noktasına resmeder. O halde sonsuz şeridin $z = 0$ ve ∞ 'daki noktaları çıkarılmış $\bar{\mathbb{H}}$ düzlemine konform olarak denk olduğu görülür. Burada sonsuzdaki noktanın çıkarılmasının sebebi bu noktanın herhangi bir sonlu zaman sicimi için elde edilmemiş olmasıdır.

Şimdi $\bar{\mathbb{H}}$ 'nin otomorfizm dönüşümlerini göz önüne alalım. $\hat{\mathbb{C}}$ 'nin $\bar{\mathbb{H}}$ üst yarı düzlemini koruyan otomorfizmlerini göz önüne almak oldukça anlamlıdır. Lineer kesirli dönüşümler göz önüne alınarak

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (4.11)$$

biçimindeki dönüşümleri göz önüne alalım. Eğer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ise z –düzlemindeki gerçel eksen w –düzlemindeki gerçel eksene resmedilir (Başkan, 2012). Dikkat edilirse reel eksenin reel eksene resmedilebilmesi için gerekli koşul

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

olmasıdır. Ancak (4.11)'deki dönüşümün birebir olması için gerekli yeterli şart $ad - bc = 0$ olması gerektiğini görmüştük. 0 (sıfır)'dan farklı herhangi bir reel sayı verildiğinde bu sayının ya pozitif yada negatiftir. Böylece (4.13)'de sol tarafın pozitif yada negatif olduğu sonucuna varılır.

$$ad - bc \neq 0 \quad (4.13)$$

Eğer sol taraf pozitif ise

$$ad - bc = 1 \quad (4.14)$$

koşulu, eğer sol taraf negatif ise $ad - bc = -1$ koşulu konabilir. O halde \mathbb{H} 'nin korunması koşulu $ad - bc = 1$ olmasıdır. Gerçekten de (4.11)'in sanal kısmı göz önüne alındığında

$$Im(w) = Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) \quad (4.15)$$

Gerekli sadeleşmeler yapıldığında

$$Im(w) = \frac{1}{2i} \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{ad-bc}{|az+d|^2} Imz \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu son eşitlik dikkate alınırsa $Im(z) \geq 0$ gerektirmesi için gerek ve yeter şartın $ad - bc > 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak \mathbb{H} otomorfizimlerinin (4.14), (4.15) ve (4.16) olduğu görülür. Daha önceki tartışma gereği bu dönüşümler üç gerçel parametre yardımıyla karakterize edilir. Burada \mathbb{H} 'in sonsuzdaki noktasının görüntüsü (4.16) altında ki görüntüsü $w = \frac{a}{c} \lim_{z \rightarrow \infty} z$ olduğundan bu noktaya sıradan bir nokta gözüyle bakılır.

Aşağıda bazı lineer kesirli dönüşüm örnekleri verilecektir.

Örneğin $w = z$ dönüşümü $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ bir dönüşüm olamaz. Gerçekten de $z = zi \in \mathbb{H}$ ' görüntüsü $w = -2i$ dir.

Örnek 4.4. $w = -\frac{1}{z}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Burada $w = \frac{az+b}{cz+d} \rightarrow a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$ olup

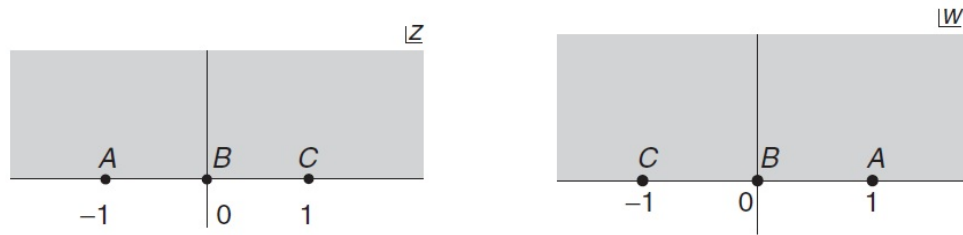
$$w = \frac{0 \cdot z + (-1)}{1 \cdot z + 0}$$

buradan $ad - bc = 1$ olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. \mathbb{H} 'in üç deliği reel eksen üzerinde keyfi sayılar olan gerçel eksen üzerine resmeden üç gerçel parametrelili bir reel lineer kesirli dönüşüm bulunabileceği akla gelebilir. Bu durumun yalnızca koşul dışında doğru olabilmesini söyleyebiliriz. (4.9) kullanılarak bu özellikteki bir dönüşüm elde edilebilir, ancak burada bu dönüşümün $ad - bc = 1$ koşulunu sağlanması açık sicimlerin önemli bir özelliği ile bağlantılı olduğundan bu durumu irdelemek oldukça ilgi çekici olabilir. (4.11)'deki dönüşümlerin

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(ad-bc)}{(cz+d)^2} \quad (4.17)$$

koşulu sağladığını biliyoruz. $ad - bc > 0$ olduğundan bu türev gerçel eksen boyunca pozitif değerler alır. Bu ise bu dönüşümün yönlendirilmiş gerçel eksenini aynı yönlendirmeye sahip bir gerçel eksene resmettiğini gösterir. Gerçekten de $\bar{\mathbb{H}}$ 'daki gerçel eksene sonsuzdaki noktayı bulunduran bir çember gözüyle bakılabilir. Gerçel eksen üzerindeki üç noktanın diğer üç noktaya resmedilebilmesi için gerek ve yeter şartın bu üç noktanın devirli yönlendirmeye sahip olmasıdır. Çember üzerindeki bu noktalar bu koşulu sağlarlar. (p_1, p_2, p_3) 1,2 ve 3'deki delikleri gösterebilir, eğer böyle bir yönlendirme mevcutsa gerçel eksen üzerinde soldan sağa hareket söz konusu olur. Bu devirli yönlendirme korunduğu sürece bu yapı korunur.

Şimdi bir örnek üzerinde duralım. $A = -1$, $B = 0$, $C = 1$ şeklindeki gibi z düzleminde üç nokta olsun.



Şekil 4.1. Üç noktanın resmi.

Bu üç noktayı sırasıyla w –düzlemindeki $1, 0$ ve -1 noktasına resmeden bir dönüşüm oluşturmaya çalışalım. Dikkat edilirse bu dönüşüm yardımıyla z –düzleminde verilen üç noktayı w –düzlemindeki üç noktaya sıralaması bululacak şekilde resmetmek istiyoruz. (4.11) kullanılarak bu dönüşümü elde edebilmek için (4.12) elde ederiz. İçler dışlar çarpımı yaparak $w = -z$ dönüşümü elde edilir. Dikkat edilirse bu dönüşüm $\bar{\mathbb{H}}$ 'ı $\bar{\mathbb{H}}$ 'a resmetmez. Gerçekten de $z = 2i \in \bar{\mathbb{H}}$ 'ın bu dönüşüm altındaki görüntüsü $-2i$ olup $-2i \notin \bar{\mathbb{H}}$ 'dır. Bir diskin sınırı üzerindeki üç noktanın sadece 2 tane denk olmayan devirli yönlendirmesi olduğunda $\bar{\mathbb{H}}$ 'ın sınırı üzerinde 3 deliğe sahip olan \mathcal{N}_3 modüller uzayının iki temsilcisi vardır. Bunlardan birisi (P_1, P_2, P_3) tipini olup değeri (P_1, P_2, P_3)

tipindeki üç delikli \mathbb{H}' 'i temsil eder. İki değeri olan bir ayrık modül'ün var olduğunu söyleyebiliriz.

Üç delikli kürenin $M_{(0,3)}$ modül uzayının ayrık modüllerinin olmadığını görmüştük. Bu özellikteki kürelerin konform olarak denk olduğunu biliyoruz. $M_{(0,3)}$ modüler uzayının sadece bir noktaya sahipken \mathcal{N}_3 modüller uzayının iki noktadan ibaret olduğunu biliyoruz. \mathbb{H}' 'in sınırı olarak bir çember üzerindeki noktalar için yönlendirme aşıkarak yapılabılırken küre noktalarını yönlendirmek için herhangi bir yöntem mevcut değildir.

Gerçel eksen üzerinde (p_1, p_2, p_3, p_4) ile etiketlenmiş dört delikli \mathbb{H}' 'i göz önüne alalım, acaba bu dört noktanın devirli yönlendirmesinin koruyacak şekilde \mathbb{H}' kendi üzerine resmedebilir miyiz? Bu sorunun cevabı herhangi bir lineer kesirli dönüşümü belirleyebilmek için üç parametre yeterli olduğundan yukarıdaki özellikteki bir dönüşümü bulamadığımız açıktır.

Daha önceki aynı strateji takip ederek bu deliklerden üçü w –düzleminde belli noktalara resmedilebilir. Örneğin dönüşümümüz p_1 noktasını $w = 0$ noktasına, p_3 noktasını $w = 1$ ve p_4 'ü $w = \infty$ noktasına resmettirir. Bu durumda λ belirli bir gerçel sayı olmak üzere p_2 noktasını $w = \lambda$ noktasına resmeder. Devirli yönlendirmenin korunması istendiğinden p_2 noktası p_1 ve p_3 arasında kalmaktadır. O halde $0 < \lambda < 1$ olduğu elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ eşitsizliğine sınırında dört sıralı deliğe sahip tüm olası \mathbb{H}' uzaylarını temsil ettiğini söyleyebiliriz. Bu aralıktaki herhangi gerçel sayısı için bu sayı ile eşdeğer ve $0, \lambda_0, 1$ ve ∞ 'da deliğe sahip bir \mathbb{H}' uzayı bulunabilir. Farklı λ değerlerine sahip iki nokta sınırında dört deliği bulunan ve konform olarak birbirine denk olmayan \mathbb{H}' uzaylarını temsil eder. Sonuç olarak sınırında dört deliğe sahip olan \mathbb{H}' uzaylarının tamamı bu aralıktadır. Böylece $0 < \lambda < 1$ 'e sınırı üzerinde etiketlenmiş ve verilen devirli yönlendirmeye sahip dört delikli üst yarı düzlemlerin \mathcal{N}_4 modüller uzayı adı vereceğiz. Bu modüller uzayının bir gerçel parametresi olup bu parametre yalnızca bir açık aralıktır. Böylece bu modüller uzayının bir boyutlu uzay olduğu görülür. O halde

$$\dim(\mathcal{N}_4) = 1 \quad (4.18)$$

olur.

KAYNAKLAR

- Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, *Dora Yayıncılık*, Bursa (Aralık 2012).
- Ben-Zvi, D., D., “Princeton Companion to Mathematics”, T. Gowers, J. Barrow-Green and I. Leader (Eds). *Princeton University Press*, Princeton, NJ-ABD (2008).
- Değer, N., S., “Sicim Kuramı”, **Tübitak Bilim ve Teknik Dergisi**, (2002).
- Demirkol, Ozkaya, Z., Avcı, U. and İnam, İ., “A Cusp Form Example As An Eta Product”, *Scholars Journay of Physics, Mathematics and Statistics*, Yayına kabul edildi (2017).
- İnam, İ., “Modüler Formlar, Eliptik Eğriler ve Uygulamaları”, Doktora Tezi, *Uludağ Üniveristesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa (2011).
- Ji, L., J, Jost, “Universal Moduli Spaces of Riemann Surfaces”, *Journal of Geometry and Physics*, 114: 124-137 (2017).
- Jones, G., A, Singerman, D., “Complex Functions, An Algebraic and Geometric Viewpoint”, *Cambridge University Press*, (1987).
- Smit, D-J., “String Theory and Algebraic Geometry of Moduli Spaces”, *Communications in Mathematical Physics*, 114(4): 645-685 (1988).
- Zweibach, B., “A First Course in String Theory”, *Cambridge University Press*, 2. Baskı, (2009).



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Uygur AVCI

Doğum Yeri ve Tarihi : Bilecik, 27/08/1972

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Fizik Öğretmenliği Bölümü (Almanca)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce, Almanca

Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar :

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Edebali Ortaokulu , Fen Bilgisi Öğretmeni

İletişim

Adres : Edabali Ortaokulu, Merkez/BİLECİK

Tel : (228) 212 8231

E-Posta Adresi : uygar903@hotmail.com

Akademik Çalışmaları

1) Demirkol, Ozkaya, Z., Avcı, U. and İnam, İ., “A Cusp Form Example As An Eta Product”, *Scholars Journey of Physics, Mathematics and Statistics*, Yayına kabul edildi., (2017).

Yabancı Dil Bilgisi : İngilizce (Orta Seviye), Almanca (Orta seviye)

Tarih: 14.06.2017