



T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK DOKTORA PROGRAMI

**METALİK YARI-RIEMANN YAPILAR İLE HEMEN HEMEN PARAKONTAK
METRİK YAPILAR ARASINDAKİ İLİŞKİ**

DOKTORA TEZİ

YASEMİN KARABABA

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2026

10785637

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK DOKTORA PROGRAMI

**METALİK YARI-RIEMANN YAPILAR İLE HEMEN HEMEN PARAKONTAK
METRİK YAPILAR ARASINDAKİ İLİŞKİ**

DOKTORA TEZİ

YASEMİN KARABABA

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. MEHMET SOLGUN

BİLECİK, 2026

10785637

BEYAN

“Metalik Yarı-Riemann Yapılar İle Hemen Hemen Parakontak Metrik Yapılar Arasındaki İlişki” adlı doktora tezimin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehberine uygun olarak tezimi hazırladığımı, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından 1649B032202968 numaralı proje ile desteklenmiştir.

Yasemin KARABABA

...../...../ 2026

İmza

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren ve tezimin olgunlaşmasını sağlayan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet SOLGUN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme sürecinde kıymetli zamanlarını ayırarak çalışmamı değerlendiren, görüş ve önerileriyle katkı sağlayan tez izleme jürisi hocalarım Doç. Dr. Şirin AKTAY'a ve Prof. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'ya şükranlarımı sunarım.

Bu süreçte her koşulda yanımda olan, sabırları, anlayışları ve destekleriyle beni motive eden aileme sonsuz teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince 2211-A Yurtiçi Genel Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı burs desteği için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tezde, hemen hemen parakontak metrik yapılar ile metalik yarı-Riemann yapılar arasındaki ilişki incelenmiştir. Öncelikle hemen hemen parakontak metrik manifoldların temel özellikleri ele alınmış; bu yapıların özel sınıfları olan para-Kenmotsu ve para-Sasakian manifoldlara ilişkin temel bağıntılar, eğrilik özellikleri ve açıklayıcı örnekler verilmiştir. Ardından metalik Riemann ve metalik yarı-Riemann yapılar tanımlanarak bu yapıların integrallenebilirlik, paralellik ve eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın temel kısmında, bir hemen hemen parakontak metrik yapıdan hareketle φ -ilişkili bir metalik yapı tanımlanmış ve bu yapının metalik yapı polinomunu sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca söz konusu metalik yapıyla uyumlu bir yarı-Riemann metriği oluşturularak bu metriğin başlangıç metriğiyle ilişkisi belirlenmiştir. Elde edilen yapının geometrik özellikleri, karakteristik vektör alanının paralel olduğu durum ile başlangıç yapısının para-Kenmotsu olduğu ve para-Sasakian olduğu durumlarda ayrı ayrı incelenmiştir.

Karakteristik vektör alanının paralel olması durumunda başlangıç metriği ile elde edilen metriğin Levi-Civita bağlantılarının çakıştığı ve metalik yapının yerel olarak metalik yapı olduğu belirlenmiştir. Para-Kenmotsu durumunda elde edilen metalik yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olduğu ve dolayısıyla yapının integrallenebilir olduğu gösterilmiştir. Para-Sasakian durumunda ise elde edilen metalik yapının genel olarak integrallenebilir olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bunun yanı sıra, her iki özel sınıf için Levi-Civita bağlantıları ve Riemann eğrilik tensörleri arasındaki ilişkiler açık biçimde elde edilmiş ve sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Bu sonuçlar, hemen hemen parakontak metrik yapılardan metalik yarı-Riemann yapıların üretilebildiğini ve başlangıç yapısının geometrik sınıfının elde edilen metalik yapının integrallenebilirlik, bağlantı ve eğrilik özelliklerini doğrudan etkilediğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: eğrilik tensörü, hemen hemen parakontak metrik yapı, metalik yarı-Riemann yapı, para-Kenmotsu manifold, para-Sasakian manifold

ABSTRACT

In this thesis, the relationship between almost paracontact metric structures and metallic semi-Riemannian structures is investigated. First, the fundamental properties of almost paracontact metric manifolds are presented. In particular, the basic identities, curvature properties, and illustrative examples of para-Kenmotsu and para-Sasakian manifolds, which constitute two distinguished classes of almost paracontact metric manifolds, are discussed. Subsequently, metallic Riemannian and metallic semi-Riemannian structures are introduced, and their integrability, parallelism, and curvature properties are examined.

In the main part of the study, a φ -related metallic structure is constructed from an almost paracontact metric structure, and it is shown that the resulting tensor field satisfies the defining polynomial equation of a metallic structure. Furthermore, a semi-Riemannian metric compatible with this metallic structure is introduced, and its relation to the initial metric is determined. The geometric properties of the induced structure are then studied separately in the cases where the characteristic vector field is parallel and where the initial structure is para-Kenmotsu or para-Sasakian.

It is proved that, when the characteristic vector field is parallel, the Levi-Civita connections of the initial and induced metrics coincide and the resulting metallic structure is locally metallic. In the para-Kenmotsu case, the Nijenhuis tensor of the induced metallic structure vanishes; hence, the structure is integrable. In contrast, in the para-Sasakian case, the induced metallic structure is shown to be non-integrable in general. Moreover, for both special classes, explicit relations between the corresponding Levi-Civita connections and Riemann curvature tensors are derived, and the theoretical results are illustrated by suitable examples.

These results show that metallic semi-Riemannian structures can be naturally induced from almost paracontact metric structures and that the geometric class of the initial structure directly determines the integrability, connection, and curvature properties of the induced metallic structure.

Keywords: almost paracontact metric structure, curvature tensor, metallic semi-Riemannian structure, para-Kenmotsu manifold, para-Sasakian manifold

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR	5
2.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar	5
2.2. Para-Kenmotsu Manifoldlar	10
2.3. Para-Sasakian Manifoldlar	39
3. METALİK MANİFOLDLAR	44
3.1. Metalik Riemann Manifoldlar	44
3.2. Metalik Yarı-Riemann Manifoldlar	54
3.3. Metalik Yarı-Riemann Manifoldlarının Eğrilik Tensörleri	61
4. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK YAPILARDAN METALİK YAPI ELDE EDİLMESİ	69
4.1. φ -İlişkili Metalik Yapı ve Uyumlu Yarı-Riemann Metriği	69
4.2. Karakteristik Vektör Alanının Paralel Olduğu Durumda φ -İlişkili Metalik Yapı	74
4.3. Para-Kenmotsu Durumunda φ -İlişkili Metalik Yapı	75
4.4. Para-Sasakian Durumunda φ -İlişkili Metalik Yapı	83
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	92
KAYNAKÇA	93

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

M	: Düzgün manifold
$\chi(M)$	: Düzgün vektör alanlarının uzayı
$C^\infty(M)$	: Düzgün fonksiyonların uzayı
φ	: (1,1)-tipindeki tensör alanı
ξ	: Karakteristik vektör alanı
η	: Dual 1-form
$\mathcal{D}$	: Parakontak dağılım
Ω	: Temel 2-form
F	: Temel tensör alanı
N_φ	: Hemen hemen parakontak yapının Nijenhuis tensörü
g	: Yarı-Riemann metriği
g_R	: Riemann metriği
∇	: Levi-Civita (yarı-Riemann) bağlantısı
Q	: Yapı polinomu
ϕ	: Altın yapı
J	: Metalik yapı
$\sigma_{p,q}$	: Metalik oran
p, q	: Metalik parametreler
N_J	: Metalik yapının Nijenhuis tensörü
R	: Riemann eğrilik tensörü
Ric	: Ricci tensörü
$\mathcal{L}$	: Lie türevi
$K(\pi)$	: Kesitsel eğrilik
$K_\varphi(\pi)$	: φ -paraholomorfik kesitsel eğrilik
scal	: Skaler eğrilik
Ψ	: φ - ilişkili metalik yapı
$\tilde{g}$	: φ - ilişkili metalik yapının yarı-Riemann metriği
$\tilde{\nabla}$	: φ - ilişkili metalik yapının Levi-Civita (yarı-Riemann) bağlantısı
$\tilde{R}$	: φ - ilişkili metalik yapının Riemann eğrilik tensörü
N_Ψ	: φ - ilişkili metalik yapının Nijenhuis tensörü

1. GİRİŞ

Metalik yapıların ve özellikle metalik yarı-Riemann manifoldların ortaya çıkışı, tek bir aşamada değil; polinomial yapı düşüncesinin diferensiyel geometriye yerleşmesi, altın oran ve genelleştirmelerinin ortak bir cebirsel yapı içinde ele alınması ve nihayetinde Riemann ve yarı-Riemann metrikleriyle uyumlu yeni tensörel yapıların tanımlanması şeklinde kademeli olarak gerçekleşmiştir.

Manifoldlar üzerinde $(1, 1)$ -tipindeki bir tensör alanının belirli bir polinomu sağlaması fikri, polinomial yapılar (polynomial structures) başlığı altında ele alınmıştır. Bu yaklaşımda, M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, $(1, 1)$ -tipindeki bir P tensör alanı için

$$Q(P) = 0$$

eşitliğini sağlayan yapılar incelenir; burada Q uygun bir polinomdur. Söz konusu yaklaşım, ilerleyen yıllarda altın yapı ve metalik yapı gibi özel durumların tek bir cebirsel şema altında tanımlanabilmesini sağlamış; ilgili yapıların integrallenebilirlik, paralellik ve metrik uyumluluk gibi diferensiyel geometrik özelliklerinin standart yöntemlerle incelenmesine zemin hazırlamıştır (Goldberg ve Yano, 1970).

Altın oran $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tarihsel olarak geometrik bir bölme probleminden doğsa da, modern yaklaşımda altın oran daha genel bir ikinci dereceden denklem ailesinin özel bir üyesi olarak görülür. Bu bakış açısından hareketle De Spinadel, altın oranın genelleştirmesi olan metalik oran ailesi fikrini ortaya koymuştur. Bu aile, $p, q \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x^2 - px - q = 0$$

denkleminin pozitif kökü ile tanımlanan

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

oranlarını kapsar. Böylece altın oran $(p, q) = (1, 1)$ seçimine karşılık gelirken, gümüş oran ve bronz oran gibi diğer metalik oranlar da aynı formül üzerinden elde edilir (De Spinadel, 1999).

Bu cebirsel zemin, bir yandan genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinin limit oranı yaklaşımıyla ilişkilendirilebilirken, diğer yandan diferensiyel geometrinin temel nesnelerinden olan $(1, 1)$ -tipindeki tensör alanları için “yapı polinomu” fikrine doğrudan temel oluşturmuştur. Nitekim, metalik oran ailesinin diferensiyel geometrideki karşılığı, polinomial yapı şemasında ikinci dereceden bir yapı polinomuyla tanımlanır.

Metalik oran ailesinden ilhamla, Hretcanu ve Crasmareanu, 2013 yılında metalik yapıyı bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlamıştır. Buna göre, M üzerinde $(1, 1)$ -tipindeki bir J

tensör alanı için

$$J^2 = pJ + qI$$

eşitliği sağlanıyorsa J bir metalik yapıdır. Ayrıca (M, g_R) bir Riemann manifoldu olmak üzere,

$$g_R(JX, Y) = g_R(X, JY) \quad (X, Y \in \chi(M))$$

bağıntısını sağlayan (g_R, J) ikilisi ile donatılmış (M, g_R, J) üçlüsü metalik Riemann manifoldu olarak adlandırılır (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013).

Metalik yapının Riemann manifoldları üzerinde tanımlanmasıyla birlikte, bu yapıların altmanifoldlar, bağlantılar ve eğrilik bağıntıları bakımından incelenmesi mümkün hale gelmiştir. Ayrıca metalik yapı denklemi aracılığıyla J tensörünün özdeğerleri, tersinin varlığı ve diğer cebirsel özellikleri belirlenmiştir.

Metalik Riemann yapı kavramının yerleşmesinden sonra literatürde doğal olarak ∇J , Nijenhuis tensörü, integrallenebilirlik ve paralellik gibi konular öne çıkmıştır. Bu çizgide Gezer ve Karaman, metalik Riemann yapılarda integrallenebilirlik koşullarını ve eğrilik ile ilişkili bazı karakterizasyonları ele alarak teoriyi geliştirmiştir (Gezer ve Karaman, 2015). Bu çalışma, metalik yapıların “yerel ayrışabilirlik” (locally decomposable) gibi özelliklerinin metrik ve bağlantı üzerinden okunabilmesi bakımından önemli bir basamak olmuştur.

Bunu izleyen dönemde Özkan ve Yılmaz, metalik yapıların diferensiyellenebilir manifoldlar üzerindeki genel kuramsal yapısını, paralellik ve integrallenebilirlik koşullarıyla birlikte ele almış; metalik Riemann manifoldlara ilişkin çeşitli örnekler ve sonuçlar ortaya koymuşlardır (Özkan ve Yılmaz, 2018). Böylece metalik yapıların incelenmesi, yalnızca tanım ve ilk örneklerle sınırlı kalmamış; bağlantı, paralellik ve integrallenebilirlik gibi diferensiyel geometrik özelliklerin de ele alındığı daha sistematik bir aşamaya ulaşmıştır.

Riemann teorisinin gelişmesi, bir sonraki adım olarak yarı-Riemann metrikli yapılara geçişi doğal kılmıştır. Bu bağlamda, Blaga ve Nannicini, metalik yapının yarı-Riemann geometrisini ele almış; metalik Norden yapıları, integrallenebilirlik ve metalik dönüşümler gibi kavramlar üzerinden teoriyi genişletmiştir (Blaga ve Nannicini, 2020).

Metalik geometri literatüründe dikkat çeken güncel çalışmalardan biri de metalik yapının “var olduğunun” kabul edilmesinden ziyade, belirli kontak-benzeri yapılardan üretilmesi ve bu üretimin deformasyonlar yardımıyla zenginleştirilmesidir. Bu doğrultuda Gherici, metalik Riemann yapıları ile hemen hemen kontak metrik yapıları ele almış; bir hemen hemen kontak metrik yapıdan hareketle aynı metrik üzerinde yalnızca iki metalik yapının üretilebildiğini göstermiş ve bu metalik yapıların integrallenebilirlik ile paralellik özelliklerini incelemiştir. Ayrıca elde edilen metalik yapılar üzerinden hemen hemen kontak metrik yapıda bir metalik deformasyon fikrini tartışarak, bu deformasyonun genelleştirilmiş $\mathcal{D}$ -homotetik dönüşümler

kapsamında Sasakian, Kenmotsu ve kosimplektik gibi sınıflarla nasıl etkileştiğini ortaya koymuş ve ters yönde, bir metalik Riemann yapıdan hemen hemen kontak metrik yapı inşasına yönelik bir açık problem ve başlangıç adımları önermiştir (Gherici, 2020).

Benzer bir “deformasyonla üretim” yaklaşımı, Akpınar ve Kansu tarafından hemen hemen parakontak para-Norden manifoldlar üzerinde geliştirilmiştir. Yazarlar, parakontak yapı ile metalik yapı arasında kurdukları ilişki üzerinden metalik deformasyon kavramını tanımlamış; özellikle para-Sasaki-like para-Norden sınıfında, deformasyon sonrası elde edilen yapı üzerinde bir Riemann bağlantısı ve bu bağlantıdan türetilen bir φ -bağlantısı inşa etmişlerdir. Bu iki bağlantıya göre eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik gibi temel eğrilik özelliklerini ayrıntılı biçimde incelemiş; bir örnek üzerinde gerçekleştirilen hesaplamalar aracılığıyla elde edilen teorik sonuçların somut bir uygulamasını ortaya koymuşlardır (Akpınar ve Kansu, 2024).

Hemen hemen parakontak geometri, klasik hemen hemen kontak yapılardan esinlenerek geliştirilmiş bir geometrik kuramdır. Bu teorenin ilk örnekleri Sato’nun 1976 tarihli çalışmasına kadar uzanmaktadır (Sato, 1976). Takip eden dönemde, Kaneyuki ve Williams, hemen hemen parakontak yapıları parakompleks analog perspektifiyle ele almış; parahodge kavramını tanıtarak örneklerin ve sınıflandırma çalışmalarının geliştirilmesine temel oluşturmuştur (Kaneyuki ve Williams, 1985). Daha sonra metrik uyumluluk ve metriğin işareti dikkate alınarak hemen hemen parakontak metrik yapıların yarı-Riemann geometrisi geliştirilmiştir.

Hemen hemen Hermitiyen ve hemen hemen kontakt geometrilerde geliştirilen tensörel sınıflandırma yaklaşımları, parakontak geometrinin sınıflandırılmasına da kuramsal bir zemin hazırlamıştır. Gray ve Hervella, hemen hemen Hermitiyen manifoldları, yapı tensörünün kovaryant türevinden elde edilen tensör uzayının değişmez altuzaylara ayrıştırılmasına dayalı olarak on altı sınıfa ayırmışlardır (Gray ve Hervella, 1980). Daha sonra Ganchev, Mihova ve Gribachev, benzer bir yaklaşımı hemen hemen kontak B-metrik manifoldlara uygulayarak bu manifoldları temel F tensörünün özelliklerine göre on bir temel sınıfa ayırmışlardır (Ganchev vd., 1993). Bu sınıflandırma yaklaşımının parakontak geometrideki bir devamı olarak Manev ve Staikova, (n, n) -tipindeki bir Riemann metriğiyle donatılmış hemen hemen parakontak manifoldları, yapı tensörünün kovaryant türevinin cebirsel özelliklerine göre sınıflandırmış ve bu manifoldların temel sınıflarını belirlemişlerdir (Manev ve Staikova, 2001). Bu çalışmaların ardından Zamkovoy ve Nakova, tensörel ayrıştırma metodunu yarı-Riemann metrikli hemen hemen parakontak manifoldlar için ele almışlardır. Yazarlar, yöntem bakımından hemen hemen kontak B-metrik manifoldların sınıflandırılmasında kullanılan ayrıştırma tekniğinden de yararlanarak, yapı tensörüne ait uzayı ortogonal ve yapı grubunun etkisi altında değişmez altuzaylara ayırmışlardır. Başlangıçta on bir temel sınıftan oluşan bu sınıflandırma, belirli bir altuzayın iki bileşene ayrılmasıyla on iki temel sınıfa genişletilmiştir. Ayrıca α -para-Sasakian, α -para-Kenmotsu, para-Sasakian, K-parakontak ve quasi-para-Sasakian gibi özel yapıların bu sınıflandırmadaki yerleri açıkça ortaya konulmuştur (Zamkovoy ve Nakova, 2018).

Son yıllarda hemen hemen parakontak metrik geometri literatüründe öne çıkan çalışmalar, yapıların yalnızca soyut biçimde tanımlanmasıyla yetinmeyip, belirli geometrik kaynaklardan üretilmesi ve doğal dönüşümler altında davranışlarının incelenmesidir. Bu bağlamda Özdemir, Aktay ve Solgun, bir yarı-Riemann manifoldu üzerinde $G_{2(2)}^*$ -yapısına ait temel 3-formu esas almış ve hemen hemen parakontak metrik yapıların inşa edilebildiğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen (φ, ξ, η, g) yapılarının sınıf özelliklerini ve örneklerini tartışmışlardır (Özdemir vd., 2018). Bu “inşa edilebilirlik” yaklaşımı, düşük boyutlu Lie cebirleri üzerinde model örneklerin üretilmesiyle de güçlenmiş; nitekim aynı yazarlar, 5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapıların varlığını ve bazı özel sınıfları inceleyerek, özellikle parakontak ve para-Sasakian gibi koşulların belirli Lie cebirleri üzerinde sağlanıp sağlanmadığını ayrıntılı biçimde araştırmış ve hesaplamaya elverişli bir örnek ailesi ortaya koymuşlardır (Özdemir vd., 2020). Diğer taraftan, parakontak yapılarda dönüşüm teorisi açısından $\mathcal{D}$ -homotetik deformasyonlar son dönemde belirgin bir araştırma konusu haline gelmiştir. Solgun, Zamkovoy ve Nakova tarafından ortaya konulan sınıflandırmayı esas alarak hemen hemen parakontak metrik yapıların $\mathcal{D}$ -homotetik deformasyon altındaki değişimini incelemiş; özellikle karakteristik vektör alanının paralel olduğu sınıfların deformasyon sonrasındaki özelliklerini belirlemiştir (Solgun, 2021).

Dönüşüm ve deformasyon yaklaşımlarına ek olarak, hemen hemen parakontak yapıların inşasında çarpım geometrilerinden de yararlanılmaktadır. Bu doğrultuda, bir hemen hemen parakontak parakompleks Riemann manifoldundan hareketle $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısı ve bu yapıyla uyumlu bir Riemann metriği tanımlanmıştır. Böylece, söz konusu manifoldlardan yeni geometrik yapıların elde edilmesine yönelik bir inşa yaklaşımı ortaya konulmuştur. Ayrıca bu çerçevede normallik ile integrallenebilirlik arasındaki ilişki belirlenmiş ve elde edilen yapının eğrilik özellikleri incelenmiştir (Özdemir vd., 2025).

Bu tezde, öncelikle hemen hemen parakontak metrik manifoldlar ile bu yapıların iki özel sınıfı olan para-Kenmotsu ve para-Sasakian manifoldlar ele alınmaktadır. Bu sınıflara ilişkin temel tanım ve özelliklerin yanı sıra açıklayıcı örneklere yer verilmekte; eğrilik incelemeleri kapsamında ξ -kesitsel eğrilik ve φ -paraholomorfik kesitsel eğrilik kavramları incelenmektedir. Daha sonra metalik Riemann ve metalik yarı-Riemann manifoldlar tanıtılmakta, bu yapılara ilişkin sınıflandırmalar ve eğrilik özellikleri ele alınmaktadır.

Tezin temel amacı, bir hemen hemen parakontak metrik yapıdan metalik yarı-Riemann yapı elde etmek ve bu iki yapı arasındaki geometrik ilişkileri incelemektir. Bu kapsamda, karakteristik vektör alanının paralel olduğu durum ile başlangıç yapısının para-Kenmotsu veya para-Sasakian olduğu durumlar ayrı ayrı ele alınmaktadır. Elde edilen metalik yarı-Riemann yapıların ait oldukları sınıflar belirlenmekte, eğrilik tensörleri hesaplanmakta ve sonuçlar uygun örnekler aracılığıyla somutlaştırılmaktadır.

2. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, hemen hemen parakontak metrik manifoldlara ilişkin temel tanım ve özelliklere yer verilmektedir. Öncelikle hemen hemen parakontak yapı ve hemen hemen parakontak metrik yapı kavramları tanıtılmakta, ardından bu yapıların özel sınıfları incelenmektedir. Özellikle para-Kenmotsu ve para-Sasakian manifoldlar ele alınarak, sonraki bölümlerde kullanılacak temel geometrik bağıntılar için kuramsal bir zemin oluşturulmaktadır.

2.1. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M , $(2n+1)$ boyutlu düzgün bir manifold, $\chi(M)$ bu manifold üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı ve $C^\infty(M)$ de M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye giden düzgün fonksiyonların kümesi olsun. Eğer $\varphi : \chi(M) \mapsto \chi(M)$ bir tensör alanı (endomorfizma), ξ karakteristik vektör alanı ve η bir 1-form olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2(X) = X - \eta(X)\xi \quad (2.1)$$

(φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir **hemen hemen parakontak yapı** denir. Bu yapı ile donatılmış M manifolduna da **hemen hemen parakontak manifold** denir (Nakova ve Zamkovoy, 2012).

(2.1) eşitliklerinden $\varphi(\xi) = 0$ ve $\eta \circ \varphi = 0$ bağıntıları elde edilir. φ tensörünün derecesi $2n$ olup, keyfi $p \in M$ için η formunun çekirdeği tarafından belirlenen $\mathcal{D} = \ker \eta$ dağılımı

$$\mathcal{D}_p = \ker \eta_p = \{X \in T_p M \mid \eta(X) = 0\} \subset T_p M$$

şeklinde tanımlanır. φ tensörü bu dağılım üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı belirler (Kaneyuki ve Williams, 1985).

Tanım 2.1.2. (M, φ, ξ, η) hemen hemen parakontak manifold ve g bu manifold üzerinde bir yarı-Riemann metriği olsun. Herhangi X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (2.2)$$

koşulu sağlanıyorsa (φ, ξ, η, g) yapısına **hemen hemen parakontak metrik yapı**, bu yapıyla donatılmış M manifolduna da **hemen hemen parakontak metrik manifold** denir (Nakova ve Zamkovoy, 2012).

(2.2) eşitliğinde $Y = \xi$ alındığında $g(X, \xi) = \eta(X)$ bulunur. Ayrıca (2.2) eşitliğinden keyfi X, Y vektör alanları için

$$\begin{aligned}
g(\varphi(X), Y) &= -g(\varphi^2(X), \varphi(Y)) + \eta(\varphi(X))\eta(Y) \\
&= -g(\varphi^2(X), \varphi(Y)) \\
&= -g(X - \eta(X)\xi, \varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y)) + \eta(X)g(\xi, \varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(\varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece M hemen hemen parakontak metrik manifoldu için

$$g(\varphi(X), Y) = -g(X, \varphi(Y)) \quad (2.3)$$

dir. Yani φ , g metriğine göre ters-simetrik bir tensör alanıdır. O halde

$$\Omega(X, Y) = g(\varphi X, Y)$$

şeklinde tanımlanan Ω bir 2-formdur. Bu 2-forma hemen hemen parakontak metrik yapının temel 2-formu denir.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold olsun. $U \subset M$ bir koordinat komşuluğu alınsın. Önce U üzerinde ξ ye dik bir X_1 birim vektör alanı seçelim. Bu durumda $\eta(X_1) = 0$ olduğundan

$$g(\varphi X_1, \varphi X_1) = -g(X_1, X_1) + \eta(X_1)^2 = -1$$

elde edilir. Ayrıca $\eta \circ \varphi = 0$ ve $g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)$ özdeşliğinden φX_1 in hem ξ ye hem de X_1 e dik olduğu görülür.

Benzer şekilde, ξ , X_1 ve φX_1 e dik bir birim vektör alanı X_2 seçilirse, φX_2 de bunların tümüne dik olur ve

$$g(\varphi X_2, \varphi X_2) = -1$$

sağlanır. Bu işleme devam edilerek yerel olarak

$$(X_1, \varphi X_1, \dots, X_n, \varphi X_n, \xi)$$

şeklinde bir ortonormal taban elde edilir. Bu tabana φ -taban denir (Zamkovoy, 2009).

Bu durumda g metriğinin işareti $(n+1, n)$ dir.

Örnek 2.1.1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$ manifoldu üzerinde $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$ karakteristik vektör alanını ve $\eta = dx - \frac{2y}{z} dz$ 1-formunu ele alalım.

$$e_1 = 2y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \xi$$

vektör alanları ile

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(\xi) = 0$$

φ tensör alanı tanımlansın.

g yarı-Riemann metriği

$$g(\xi, \xi) = 1, \quad g(e_1, e_1) = 1, \quad g(e_2, e_2) = -1, \quad g(\xi, e_1) = g(\xi, e_2) = g(e_1, e_2) = 0,$$

olmak üzere (φ, ξ, η, g) yapısı M üzerinde bir hemen hemen parakontak metrik yapı belirler (Küpeli Erken, 2020).

- $\eta(\xi) = 1$ **koşulu:**

$$\eta(\xi) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(dx - \frac{2y}{z} dz\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$$

olur.

- $\varphi^2 = \text{Id} - \eta \otimes \xi$ **koşulu:**

Önce η 1-formunun taban vektörleri üzerindeki değerlerini belirleyelim.

$$\eta(\xi) = 1, \quad \eta(e_1) = \eta(2y\partial_x + z\partial_z) = 2y - 2y = 0, \quad \eta(e_2) = 0.$$

Bu değerler yerine yazıldığında

$$\varphi^2(\xi) = \varphi(0) = 0 = \xi - \eta(\xi)\xi,$$

$$\varphi^2(e_1) = \varphi(e_2) = e_1 = e_1 - \eta(e_1)\xi,$$

$$\varphi^2(e_2) = \varphi(e_1) = e_2 = e_2 - \eta(e_2)\xi$$

bulunur. Dolayısıyla (2.1) eşitliği sağlanır.

- **Metrik uyumluluk koşulu:**

Tüm vektörler için $\eta(\cdot) = g(\cdot, \xi)$ olduğu açıktır. Metrik uyumluluk koşulunun taban vektörleri için sağlandığını gösterelim:

(i) $X = Y = \xi$ için

$$g(\varphi\xi, \varphi\xi) = g(0, 0) = 0, \quad -g(\xi, \xi) + \eta(\xi)\eta(\xi) = -1 + 1 = 0.$$

(ii) $X = Y = e_1$ için

$$g(\varphi e_1, \varphi e_1) = g(e_2, e_2) = -1, \quad -g(e_1, e_1) + \eta(e_1)\eta(e_1) = -1 + 0 = -1.$$

(iii) $X = Y = e_2$ için

$$g(\varphi e_2, \varphi e_2) = g(e_1, e_1) = 1, \quad -g(e_2, e_2) + \eta(e_2)\eta(e_2) = -(-1) + 0 = 1.$$

(iv) $X = e_1, Y = e_2$ için

$$g(\varphi e_1, \varphi e_2) = g(e_2, e_1) = 0, \quad -g(e_1, e_2) + \eta(e_1)\eta(e_2) = 0 + 0 = 0.$$

Benzer şekilde $\varphi\xi = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$, $g(\cdot, \xi) = \eta(\cdot)$ olduğundan diğer terimler sıfırdır.

Böylece (2.2) eşitliği sağlanır. Sonuç olarak tanımlanan (φ, ξ, η, g) yapısı, M üzerinde bir hemen hemen parakontak metrik yapısıdır.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold ve ∇ , M üzerindeki yarı-Riemann bağlantısı olsun. Bu durumda M üzerinde $(0, 3)$ -tipindeki bir F tensör alanı her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} F : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto F(X, Y, Z) := g((\nabla_X \varphi)Y, Z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

F tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &= -F(X, Z, Y), \\ F(X, \varphi Y, \varphi Z) &= F(X, Y, Z) + \eta(Y)F(X, Z, \xi) - \eta(Z)F(X, Y, \xi). \end{aligned}$$

Buna göre $\nabla\eta$, $d\eta$, $\mathcal{L}_\xi g$ ve $d\Omega$ ifadeleri F tensörü cinsinden aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y &= g(\nabla_X \xi, Y) = -F(X, \varphi Y, \xi), \\ d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2} \{ (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X \} = \frac{1}{2} \{ -F(X, \varphi Y, \xi) + F(Y, \varphi X, \xi) \}, \\ (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= (\nabla_X \eta)Y + (\nabla_Y \eta)X = -F(X, \varphi Y, \xi) - F(Y, \varphi X, \xi), \\ d\Omega(X, Y, Z) &= \mathfrak{S}_{X, Y, Z} F(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Burada d bir diferensiyel formun dış türevini, $\mathcal{L}_\xi g$ ise g metriğinin ξ karakteristik vektör alanı yönündeki Lie türevini göstermektedir. Ayrıca $\mathfrak{S}_{X,Y,Z}$ sembolü, X, Y, Z vektör alanları üzerindeki devirsel toplamı ifade eder.

M manifoldu üzerindeki keyfi X, Y, Z, W vektör alanları için Koszul formülü:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X[g(Y, Z)] + Y[g(Z, X)] - Z[g(X, Y)] \\ + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y), \quad (2.5)$$

ve Nijenhuis tensörü:

$$N_\varphi(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \quad (2.6)$$

eşitlikleriyle verilir.

Riemann eğrilik operatörü ve buna karşılık gelen $(0, 4)$ -tipindeki eğrilik tensörü de

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W) \quad (2.7)$$

ile tanımlıdır.

Zamkovoy ve Nakova, hemen hemen parakontak metrik manifoldları (2.4) numaralı eşitlikte tanımlanan F temel tensörünün cebirsel özelliklerine dayanan tensörel bir yaklaşımla sınıflandırmışlardır. Bu sınıflandırmada, F tensörlerinin oluşturduğu tensör uzayı, yapı grubunun etkisi altında değişmez kalan ve birbirine dik olan altuzaylara ayrılmakta; bu ayrışım sonucunda hemen hemen parakontak metrik manifoldların temel sınıfları elde edilmektedir.

Başlangıçta on bir temel sınıftan oluşan sınıflandırma, daha sonra ilgili altuzaylardan birinin iki bileşene ayrılmasıyla on iki temel sınıfa genişletilmiştir (Zamkovoy ve Nakova, 2018). Bu sınıflandırma, hemen hemen parakontak metrik manifoldların tensörel ve geometrik özelliklerinin incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Bununla birlikte, bu bölümde yapının sınıflandırması ayrıntılı biçimde ele alınmayacak; yalnızca bazı özel sınıfların tanımlarına yer verilecektir. Bu yaklaşım, konunun ana hatlarını sunarken aynı zamanda ilerleyen bölümlerde yapılacak uygulamalara zemin hazırlamayı amaçlamaktadır.

Bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldunun bazı özel sınıfları aşağıdaki şekilde verilir (Zamkovoy ve Nakova, 2018).

- **Parakontak:** $\Omega = d\eta$ ile tanımlanır. Bu, temel 2-form ile 1-formun dış türevi arasında doğrudan bir ilişkidir.

- **Normal:** $N_\varphi(X, Y) - 2d\eta(X, Y)\xi = 0$ olmasıyla tanımlanır.

- **α -para-Sasakian:** $(\nabla_X \varphi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)$ ile tanımlanır. Burada $\alpha \neq 0$ bir

sabittir.

- **Para-Sasakian:** Normal ve parakontak yapılara denir. Bu sınıf esasında Zamkovoy'un çalışmasındaki G_5 sınıfının alt sınıfı olarak tanımlandığı $\bar{G}_5$ sınıfıdır.

- **Quasi-para-Sasakian:** Normal ve $d\Omega = 0$ eşitliğini sağlayan yapılara denir.

- **α -para-Kenmotsu:** $(\nabla_X \varphi)Y = -\alpha(g(X, \varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi X)$ eşitliği ile tanımlanır, burada $\alpha \neq 0$ bir sabittir; özellikle, $\alpha = -1$ olması durumunda **para-Kenmotsu** olarak adlandırılır. Para-Kenmotsu sınıfı aynı zamanda Zamkovoy'un çalışmasındaki G_6 sınıfına aittir.

- **K-parakontak:** Parakontak ve ξ nin Killing vektör alanı olduğu yapılara denir. ξ vektör alanının Killing olması,

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = \xi(g(X, Y)) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıyla verilir.

2.2. Para-Kenmotsu Manifoldlar

Para-Kenmotsu manifoldlar, hemen hemen parakontak metrik manifoldların özel bir sınıfını oluşturur. Bu yapılar, kontak geometrisindeki Kenmotsu manifoldların parakontak yarı-Riemann geometrisindeki karşılıklarıdır.

Tanım 2.2.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold ve ∇ , bu manifoldun yarı-Riemann bağlantısı olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, \varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi X \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa M manifolduna **para-Kenmotsu manifoldu** denir (Zamkovoy, 2018).

Örnek 2.2.1. Mandal ve De tarafından verilen örneğin $r = e^z$ koordinat dönüşümü altındaki eşdeğer biçimini ele alalım (Mandal ve De, 2017).

$M = \mathbb{R}^3$ üzerinde (x, y, z) standart koordinatlar olmak üzere

$$e_1 = e^z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z} = \xi$$

vektör alanlarını,

$$g(e_1, e_1) = -1, \quad g(e_2, e_2) = 1, \quad g(e_3, e_3) = 1, \quad g(e_i, e_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

metriğini ve

$$\eta(X) = g(X, e_3), \quad \varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = 0$$

yapı elemanlarını alalım. Tanımlanan (φ, ξ, η, g) yapısının $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir para-Kenmotsu yapısı oluşturduğunu gösterelim.

- $\eta(\xi) = 1$ **koşulu:** Bu eşitlik, $\eta(X) = g(X, e_3)$ tanımından doğrudan elde edilir.
- $\varphi^2 X = X - \eta(X)\xi$ **koşulu:**

$$\varphi^2(e_1) = \varphi(e_2) = e_1 = e_1 - \eta(e_1)\xi$$

$$\varphi^2(e_2) = \varphi(e_1) = e_2 = e_2 - \eta(e_2)\xi$$

$$\varphi^2(e_3) = 0 = e_3 - \eta(e_3)\xi$$

biçimindedir. Dolayısıyla (φ, ξ, η) bir hemen hemen parakontak yapı oluşturur.

- **Metrik uyumluluk koşulu:**

(i) $X = Y = e_1$:

$$g(\varphi e_1, \varphi e_1) = g(e_2, e_2) = 1, \quad -g(e_1, e_1) + \eta(e_1)^2 = -(-1) + 0 = 1.$$

(ii) $X = Y = e_2$:

$$g(\varphi e_2, \varphi e_2) = g(e_1, e_1) = -1, \quad -g(e_2, e_2) + \eta(e_2)^2 = -1 + 0 = -1.$$

(iii) $X = Y = e_3$:

$$g(\varphi e_3, \varphi e_3) = 0, \quad -g(e_3, e_3) + \eta(e_3)^2 = -1 + 1 = 0.$$

(iv) $X = e_1, \quad Y = e_2$:

$$g(\varphi e_1, \varphi e_2) = g(e_2, e_1) = 0, \quad -g(e_1, e_2) + \eta(e_1)\eta(e_2) = 0 + 0 = 0.$$

(v) $X = e_1, \quad Y = e_3$:

$$g(\varphi e_1, \varphi e_3) = g(e_2, 0) = 0, \quad -g(e_1, e_3) + \eta(e_1)\eta(e_3) = 0 + 0 = 0.$$

(vi) $X = e_2, \quad Y = e_3$:

$$g(\varphi e_2, \varphi e_3) = g(e_1, 0) = 0, \quad -g(e_2, e_3) + \eta(e_2)\eta(e_3) = 0 + 0 = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla metrik uyumluluk koşulu sağlanır.

Yarı-Riemann bağlantısının bileşenlerini belirlemek için öncelikle verilen vektör alanlarının Lie parantezlerini hesaplayalım. Koordinat biçiminde verilen $X = a^i \partial_i, Y = b^j \partial_j$ vektör

alanları için Lie parantezi

$$[X, Y] = \sum_i (X(b^i) - Y(a^i)) \partial_i$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Bu bağıntı kullanılarak verilen vektör alanlarının Lie parantezleri

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1(e^z) \partial_y - e_2(e^z) \partial_x \\ &= e^z (\partial_x e^z) \partial_y - e^z (\partial_y e^z) \partial_x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= e_1(\partial_z) - e_3(e^z \partial_x) \\ &= 0 - (\partial_z e^z) \partial_x \\ &= -(e^z) \partial_x \\ &= -e_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_2, e_3] &= e_2(\partial_z) - e_3(e^z \partial_y) \\ &= 0 - e_3(e^z \partial_y) = -(\partial_z e^z) \partial_y = -(e^z) \partial_y \\ &= -e_2. \end{aligned}$$

biçimindedir. Sonuç olarak Lie parantezleri şunlardır:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Elde edilen Lie parantezleri (2.5) numaralı Koszul bağıntısında kullanılarak $\nabla_{e_i} e_j$ ifadeleri hesaplanabilir.

$$2g(\nabla_{e_1} e_1, Z) = e_1(g(e_1, Z)) + e_1(g(e_1, Z)) - Z(g(e_1, e_1)) + g([e_1, e_1], Z) - g([e_1, Z], e_1) - g([e_1, Z], e_1).$$

$Z = e_3$ için: (Diğer bileşenler sıfır olduğundan yalnızca $Z = e_3$ durumu incelenir.)

$$2g(\nabla_{e_1} e_1, e_3) = -2g([e_1, e_3], e_1) \implies \nabla_{e_1} e_1 = -e_3.$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, Z) = e_1(g(e_3, Z)) + e_3(g(e_1, Z)) - Z(g(e_1, e_3)) + g([e_1, e_3], Z) - g([e_3, Z], e_1) - g([e_1, Z], e_3).$$

• $Z = e_1$ için:

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) = 2g([e_1, e_3], e_1) \implies \nabla_{e_1} e_3 = -e_1$$

Benzer hesaplamalar sonucunda

$$\nabla_{e_2} e_2 = e_3 \quad \nabla_{e_2} e_3 = -e_2$$

elde edilir; diğer bağlantı bileşenleri sıfırdır.

- **Para-Kenmotsu koşulu:** Yapının (2.8) eşitliğini sağladığını gösterelim.

- $X = Y = e_1$:

$$(\nabla_{e_1} \varphi) e_1 = \nabla_{e_1} (e_2) - \varphi(\nabla_{e_1} e_1) = 0 - \varphi(-e_3) = 0,$$

$$g(e_1, \varphi e_1) \xi + \eta(e_1) \varphi e_1 = g(e_1, e_2) \xi + 0 = 0.$$

- $X = e_1, \quad Y = e_3$:

$$(\nabla_{e_1} \varphi) e_3 = \nabla_{e_1} (0) - \varphi(\nabla_{e_1} e_3) = -\varphi(-e_1) = \varphi(e_1) = e_2,$$

$$g(e_1, \varphi e_3) \xi + \eta(e_3) \varphi e_1 = 0 + 1 \cdot e_2 = e_2.$$

- $X = e_2, \quad Y = e_3$:

$$(\nabla_{e_2} \varphi) e_3 = -\varphi(-e_2) = \varphi(e_2) = e_1,$$

$$g(e_2, \varphi e_3) \xi + \eta(e_3) \varphi e_2 = 0 + 1 \cdot e_1 = e_1$$

bulunur. Sonuç olarak $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifoldudur.

Önerme 2.2.1. Bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ para-Kenmotsu manifoldu üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Zamkovoy, 2018).

- $\nabla_X \xi = -X + \eta(X) \xi,$ (2.9)

- $(\nabla_X \eta) Y = -g(X, Y) + \eta(X) \eta(Y) = g(\varphi X, \varphi Y),$ (2.10)

- $\eta(\nabla_X \xi) = 0, \quad (\nabla_\xi \eta) X = 0, \quad \nabla_\xi \xi = 0,$ (2.11)

- $(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = -2\{g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)\},$ (2.12)

- $\mathcal{L}_\xi \varphi = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \eta = 0, \quad \mathcal{L}_\xi (\eta(X) \eta(Y)) = 0,$ (2.13)

- $N_\varphi(X, Y) = 0, \quad d\eta(X, Y) = 0.$ (2.14)

İspat. İlk olarak (2.8) numaralı para-Kenmotsu bağıntısından karakteristik vektör alanının kovaryant türevi elde edilecektir. (2.8) eşitliğinde $Y = \xi$ alındığında

$$\nabla_X \varphi \xi - \varphi(\nabla_X \xi) = g(X, \varphi \xi) \xi + \eta(\xi) \varphi(X)$$

bulunur. $\varphi \xi = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan $-\varphi(\nabla_X \xi) = \varphi(X)$ olur. Eşitliğin her iki tarafına φ uygulandığında $-\varphi^2(\nabla_X \xi) = \varphi^2(X)$ bulunur. (2.1) eşitliği kullanılarak

$$-\nabla_X \xi + \eta(\nabla_X \xi) \xi = X - \eta(X) \xi$$

elde edilir. $g(\xi, \xi) = 1$ olduğundan $X[g(\xi, \xi)] = 2g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$ ve bu yüzden $g(\nabla_X \xi, \xi) = \eta(\nabla_X \xi) = 0$ dir. Dolayısıyla (2.9) eşitliği sağlanır.

(2.9) da $X = \xi$ alındığında $\nabla_\xi \xi = 0$ dir.

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y &= \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= X[g(Y, \xi)] - \eta(\nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - g(\nabla_X Y, \xi). \end{aligned}$$

dir. Buradan $(\nabla_X \eta)Y = g(\nabla_X \xi, Y)$ olur. Bu ifadede (2.9) eşitliği kullanıldığında (2.10) bağıntısı elde edilir. Özel olarak $X = \xi$ için $(\nabla_\xi \eta)Y = g(-\xi + \eta(\xi)\xi, Y) = -g(\xi, Y) + \eta(\xi)\eta(Y) \Rightarrow \nabla_\xi \eta = 0$ dir.

Daha sonra g metriğinin ξ yönündeki Lie türevini inceleyelim. Yarı-Riemann bağlantısının torsiyezsuzluğu kullanılarak Lie türevi aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= \xi[g(X, Y)] - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y) \\ &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y) - g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\ &\stackrel{(2.9)}{=} g(-X + \eta(X)\xi, Y) + g(X, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) - g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= -2\{g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\}. \end{aligned}$$

Elde edilen ifadenin genel olarak sıfır olmaması, ξ karakteristik vektör alanının Killing olmadığını gösterir. Bu özellik, para-Kenmotsu manifoldları karakteristik vektör alanı Killing olan K-parakontak ve para-Sasakian manifoldlardan ayırır.

(2.13) eşitliklerinde verilen Lie türevleri aşağıda incelenmektedir. İlk olarak (2.8) de $X = \xi$ alalım. Bu durumda $(\nabla_\xi \varphi)Y = \eta(Y) \underbrace{\varphi \xi}_{=0} + \underbrace{g(\xi, \varphi Y) \xi}_{=-g(\varphi \xi, Y)} = 0$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi \varphi)X &= [\xi, \varphi(X)] - \varphi([\xi, X]) \\
&= \nabla_\xi \varphi X - \nabla_{\varphi X} \xi - \varphi(\nabla_\xi X) + \varphi(\nabla_X \xi) \\
&= (\nabla_\xi \varphi)X - (-\varphi X + \eta(\varphi(X))\xi) + \varphi(-X + \eta(X)\xi) \\
&= (\nabla_\xi \varphi)X + \varphi(X) - \varphi(X) + \eta(X)\varphi(\xi) \\
&= (\nabla_\xi \varphi)X \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi \eta)X &= \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]) \\
&= \xi(g(X, \xi)) - g(\nabla_\xi X, \xi) + g(\nabla_X \xi, \xi) \\
&= g(\nabla_\xi X, \xi) + g(X, \nabla_\xi \xi) - g(\nabla_\xi X, \xi) + g(\nabla_X \xi, \xi) \\
&= g(X, \nabla_\xi \xi) + \eta(\nabla_X \xi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi(\eta(X)\eta(Y)) &= \xi(\eta(X)\eta(Y)) - \eta([\xi, X])\eta(Y) - \eta(X)\eta([\xi, Y]) \\
&= \nabla_\xi \eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\nabla_\xi \eta(Y) - \eta(Y)\{\eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_X \xi)\} \\
&\quad - \eta(X)\{\eta(\nabla_\xi Y) - \eta(\nabla_Y \xi)\} \\
&= \eta(Y)\{g(\nabla_\xi X, \xi) + g(X, \nabla_\xi \xi)\} + \eta(X)\{g(\nabla_\xi Y, \xi) + g(Y, \nabla_\xi \xi)\} \\
&\quad - \eta(Y)g(\nabla_\xi X, \xi) - \eta(X)g(\nabla_\xi Y, \xi) \\
&= \eta(Y)\{g(\nabla_\xi X, \xi) - g(\nabla_\xi X, \xi)\} + \eta(X)\{g(\nabla_\xi Y, \xi) - g(\nabla_\xi Y, \xi)\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak (2.14) ile verilen Nijenhuis tensörünün ve η 1-formunun dış türevinin sıfır olduğu gösterilecektir. Bunun için önce Lie parantezleri yarı-Riemann bağlantısı cinsinden yazılacak, ardından para-Kenmotsu bağıntısı kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X, Y) &= \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \\
&= [X, Y] - \eta([X, Y])\xi + \nabla_{\varphi X} \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} \varphi X \\
&\quad - \varphi(\nabla_{\varphi X} Y) + \varphi(\nabla_Y \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi Y) + \varphi(\nabla_{\varphi Y} X) \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(\nabla_Y X)\xi + \{\nabla_{\varphi X} \varphi Y - \varphi(\nabla_{\varphi X} Y)\} \\
&\quad - \{\nabla_{\varphi Y} \varphi X - \varphi(\nabla_{\varphi Y} X)\} + \varphi(\nabla_Y \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi Y) \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(\nabla_Y X)\xi + (\nabla_{\varphi X} \varphi)Y - (\nabla_{\varphi Y} \varphi)X \\
&\quad + \varphi(\nabla_Y \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi Y)
\end{aligned}$$

bulunur. φY bir vektör alanı olduğundan ve $\varphi^2 Y = Y - \eta(Y)\xi$ eşitliği sağlandığından, bu eşitliğin

her iki tarafının X yönündeki kovaryant türevi alındığında

$$\nabla_X \varphi(\varphi Y) = \nabla_X \varphi^2 Y = \nabla_X (Y - \eta(Y)\xi) = \nabla_X Y - \nabla_X \eta(Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X \xi$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\nabla_X Y = \nabla_X \varphi(\varphi Y) + \nabla_X \eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} N_\varphi(X, Y) &= \nabla_X \varphi(\varphi Y) + \nabla_X \eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi - \nabla_Y \varphi(\varphi X) - \nabla_Y \eta(X)\xi \\ &\quad - \eta(X)\nabla_Y \xi - \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(\nabla_Y X)\xi + \eta(Y)\varphi(\varphi X) + g(\varphi X, \varphi Y)\xi \\ &\quad - \eta(X)\varphi(\varphi Y) - g(\varphi X, \varphi Y)\xi + \varphi(\nabla_Y \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi Y) \\ &= \{\nabla_X \varphi(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X \varphi Y)\} - \{\nabla_Y \varphi(\varphi X) - \varphi(\nabla_Y \varphi X)\} \\ &\quad + \{\nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)\}\xi - \{\nabla_Y \eta(X) - \eta(\nabla_Y X)\}\xi \\ &\quad + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) - \eta(X)(-Y + \eta(Y)\xi) + \eta(Y)\varphi^2 X - \eta(X)\varphi^2 Y \\ &= (\nabla_X \varphi)(\varphi Y) - (\nabla_Y \varphi)(\varphi X) + \underbrace{\{(\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X\}}_{=0} \xi \\ &\quad - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(X)Y - \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad + \eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(X)Y + \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\stackrel{(2.8)}{=} g(X, \varphi^2 Y)\xi + \eta(\varphi Y)\varphi X - g(Y, \varphi^2 X)\xi - \eta(\varphi X)\varphi Y \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi η 1-formunun dış türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= X[\eta(Y)] - Y[\eta(X)] - \eta([X, Y]) \\ &= X[g(Y, \xi)] - Y[g(X, \xi)] - \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - g(\nabla_Y X, \xi) - g(X, \nabla_Y \xi) - \eta(\nabla_X Y) + \eta(\nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) \\ &= -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) + g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $N_\varphi = 0$ ve $d\eta = 0$ elde edilir. Dolayısıyla para-Kenmotsu yapısı integrellenebilirdir ve η 1-formu kapalıdır. ■

Para-Kenmotsu manifoldlarının geometrisi, yapı tensörlerinin kovaryant türevlerine ilişkin özel koşullar nedeniyle bazı eğrilik özelliklerine sahiptir. Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik gibi temel eğrilik tensörlerinin bu manifoldlar üzerindeki özellikleri

aşağıdaki önermede verilmektedir.

Önerme 2.2.2. Bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ para-Kenmotsu manifoldu aşağıdaki eğrilik özelliklerine sahiptir (Zamkovoy, 2018).

$$\bullet \quad R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X, \quad (2.15)$$

$$\bullet \quad R(X, \xi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad (2.16)$$

$$\bullet \quad \eta(R(X, Y)Z) = \eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z), \quad (2.17)$$

$$\bullet \quad \text{Ric}(X, \xi) = -2n\eta(X), \quad (2.18)$$

$$\bullet \quad (\nabla_Z R)(X, Y, \xi) = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y. \quad (2.19)$$

Burada R , Riemann eğrilik tensörüdür.

İspat. İlk olarak (2.15) eşitliği, Riemann eğrilik operatörünün tanımından doğrudan elde edilecektir. Diğer bağıntılar ise eğrilik tensörünün simetri özellikleri, metrikle iç çarpım, uygun indisler üzerinden iz alma ve kovaryant türev işlemleri kullanılarak türetilenlerdir.

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-Y + \eta(Y)\xi) - \nabla_Y(-X + \eta(X)\xi) - (-[X, Y] + \eta([X, Y])\xi) \\ &= -\nabla_X Y + \nabla_X \eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi + \nabla_Y X - \nabla_Y \eta(X)\xi \\ &\quad - \eta(X)\nabla_Y \xi + \nabla_Y Y - \nabla_Y X - \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(\nabla_Y X)\xi \\ &= (\nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y))\xi - (\nabla_Y \eta(X) - \eta(\nabla_Y X))\xi \\ &\quad + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) - \eta(X)(-Y + \eta(Y)\xi) \\ &= \underbrace{(\nabla_X \eta(Y)\xi - (\nabla_Y \eta(X)\xi) - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(X)Y - \eta(X)\eta(Y)\xi)}_{=0} \\ &= \eta(X)Y - \eta(Y)X \end{aligned}$$

Böylece (2.15) eşitliği elde edilir. (2.16) bağıntısını elde etmek için (2.15) eşitliğinin her iki tarafının keyfi bir Z vektör alanı ile iç çarpımı alınır. $g(R(X, Y)\xi, Z) = g(R(\xi, Z)X, Y)$ olduğundan $g(\eta(X)Y - \eta(Y)X, Z) = g(R(\xi, Z)X, Y)$ olur.

Bu durumda,

$$g(\eta(X)Z, Y) - g(g(X, Z)\xi, Y) = g(R(\xi, Z)X, Y)$$

ve

$$g(\eta(X)Z - g(X, Z)\xi, Y) = g(R(\xi, Z)X, Y)$$

olup, g non-dejenere olduğundan

$$\eta(X)Z - g(X, Z)\xi = R(\xi, Z)X$$

bulunur. Eğrilik tensörünün simetri özelliğinden

$$R(Z, \xi)X = g(X, Z)\xi - \eta(X)Z$$

olur. Yani (2.16) sağlanır.

Bu bağıntı ξ ve X vektörlerinin gerdiği iki boyutlu kesitin eğriliğini belirlemede kullanılabilir.

Eğer (2.15) eşitliğinde $Y = \xi$ seçilirse $R(X, \xi)\xi = g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X$ olur. Burada $g(X, \xi) = \eta(X)$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan $R(X, \xi)\xi = \eta(X)\xi - X$ dir. Dolayısıyla

$$R(X, \xi)\xi = -(X - \eta(X)\xi) \quad (2.20)$$

elde edilir.

Eğrilik tensörünün simetri özelliğinden $g(R(X, Y)Z, \xi) = -g(R(X, Y)\xi, Z)$ yazılabilir. η 1-formunun tanımından $\eta(R(X, Y)Z) = g(R(X, Y)Z, \xi)$ olup, (2.15) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = -g(\eta(X)Y - \eta(Y)X, Z) = -\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)$$

bulunur. Böylece (2.17) ispatlanmış olur.

$p \in M$ noktasında bir $\{e_1, \dots, e_n, \varphi e_1, \dots, \varphi e_n, \xi\}$ şeklinde yarı-ortonormal φ -taban seçelim ve $g(e_a, e_a) = \varepsilon_a \in \{\pm 1\}$ olsun. Ricci tensörünün tanımı

$$\text{Ric}(X, \xi) = \sum_{a=1}^{2n+1} \varepsilon_a g(R(e_a, X)\xi, e_a) \quad (2.21)$$

olup, (2.15) eşitliği $(X, Y) = (e_a, X)$ için yazıldığında

$$R(e_a, X)\xi = \eta(e_a)X - \eta(X)e_a$$

elde edilir. Bu ifadenin e_a ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(R(e_a, X)\xi, e_a) &= \eta(e_a)g(X, e_a) - \eta(X)g(e_a, e_a) \\ &= \eta(e_a)g(X, e_a) - \eta(X)\varepsilon_a. \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, \xi) &= \sum_a \varepsilon_a \eta(e_a)g(X, e_a) - \sum_a \varepsilon_a \eta(X)\varepsilon_a \\ &= \sum_a \varepsilon_a \eta(e_a)g(X, e_a) - (2n+1)\eta(X) \end{aligned}$$

elde edilir.

Seçilen tabanda $\eta(e_a) = \eta(\varphi e_a) = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_a \varepsilon_a \eta(e_a)g(X, e_a) &= \varepsilon_\xi \cdot 1 \cdot g(X, \xi) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, \xi) &= \eta(X) - (2n+1)\eta(X) \\ &= -2n\eta(X). \end{aligned}$$

bulunur. (2.19) eşitliğinin ispatı için (2.9) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y)\xi &= \nabla_Z(R(X, Y)\xi) - R(\nabla_Z X, Y)\xi - R(X, \nabla_Z Y)\xi - R(X, Y)\nabla_Z \xi \\ &= \nabla_Z(\eta(X)Y - \eta(Y)X) - (\eta(\nabla_Z X)Y - \eta(Y)\nabla_Z X) \\ &\quad - (\eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X) + R(X, Y)Z - R(X, Y)\eta(Z)\xi \\ &= (\nabla_Z \eta)(X)Y + \eta(X)\nabla_Z Y - (\nabla_Z \eta)(Y)X - \eta(Y)\nabla_Z X \\ &\quad - \eta(\nabla_Z X)Y + \eta(Y)\nabla_Z X - \eta(X)\nabla_Z Y + \eta(\nabla_Z Y)X \\ &\quad + R(X, Y)Z - \eta(Z)(\eta(X)Y - \eta(Y)X) \\ &= (\nabla_Z \eta)(X)Y - (\nabla_Z \eta)(Y)X - \eta(X)\eta(Z)Y + \eta(Y)\eta(Z)X + R(X, Y)Z \end{aligned}$$

bulunur. (2.10) eşitliği yerine yazıldığında (2.19) elde edilir. ■

Tanım 2.2.2. Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde, $p \in M$ noktasında lineer bağımsız $X, Y \in T_p M$ vektörlerinin gerdiği iki boyutlu altuzay (kesit) $\pi = \text{span}\{X, Y\}$ için kesitsel eğrilik aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$K(\pi) = K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \quad (2.22)$$

Bu durumda bu tanımın anlamlı olması için paydanın sıfır olmaması, yani seçilen 2-düzlemin

non-dejenere olması gerekir (O'Neill, 1983).

Kesitsel eğrilik $K(X, Y)$, X ve Y vektörlerinin gerdiği non-dejenere iki boyutlu kesit doğrultusundaki eğrilik davranışını ifade eder. Riemann geometrisinde kesitsel eğriliğin işareti, ilgili kesitteki jeodeziklerin davranışı hakkında geometrik bilgi verir.

$K > 0$ durumunda jeodezikler yaklaşma eğilimindedir (küre-benzeri geometri), $K = 0$ durumda paralel kalırlar (düz geometri), $K < 0$ durumda ise jeodezikler birbirinden uzaklaşır (eyer veya hiperbolik geometri).

Tanım 2.2.3. Eğer kesitsel eğrilik, seçilen noktaya ve seçilen kesite bağlı olmadan her $p \in M$ ve her $\pi \subset T_p M$ için aynı sabit değeri alıyorsa, yani

$$K(p, \pi) = c$$

ise, (M, g) manifolduna **sabit kesitsel eğrilikli (constant sectional curvature)** denir (Lee, 2018).

Bu sabit $c < 0$ ise manifold sabit negatif kesitsel eğriliklidir.

Önerme 2.2.3. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerindeki her noktada, her non-dejenere 2-düzlemin kesitsel eğriliği aynı sabit c değerine eşit ise, M sabit kesitsel eğrilğe sahiptir ve Riemann eğrilik tensörü her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y, Z, W) = c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W))$$

veya eşdeğer olarak

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

şeklindedir (Lee, 2018).

İspat. Sabit kesitsel eğrilik varsayımı gereği, her X, Y için (2.22) eşitliğinden

$$R(X, Y, Y, X) = c(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2) \quad (2.23)$$

eşitliği sağlanır. (2.23) denkleminde Y yerine $Y + Z$ yazılıp açıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$R(X, Y, Z, X) = c(g(X, X)g(Y, Z) - g(X, Y)g(X, Z)). \quad (2.24)$$

(2.24) içinde X yerine $X + W$ yazıp aynı formülü X ve W için çıkaralım. Böylece

$$R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) = c(2g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Y)g(W, Z) - g(W, Y)g(X, Z)) \quad (2.25)$$

elde edilir. $A := R(X, Y, Z, W)$, $B := R(Y, Z, X, W)$, $C := R(Z, X, Y, W)$ olsun. Birinci Bianchi özdeşliğinden

$$A + B + C = 0 \quad (2.26)$$

dır. Öte yandan (2.25) i $(X, Y, Z, W) = (Y, Z, X, W)$ için yazıp eğrilik simetrileriyle düzenleyince

$$B - A = c(2g(Y, W)g(Z, X) - g(Y, Z)g(W, X) - g(W, Z)g(Y, X))$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.25) eşitliğini $(X, Y, Z, W) = (Z, X, W, Y)$ için yazıp simetrilerle düzenleyince

$$A - C = c(2g(Z, Y)g(X, W) - g(Z, X)g(Y, W) - g(Y, X)g(Z, W))$$

bulunur. Bu iki eşitlik ile (2.26) birlikte ele alınırsa

$$A = c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W))$$

bulunur. ■

Tanım 2.2.4. Bir (M, g) yarı-Riemann uzayının eğrilik tensörünün kovaryant türevi sıfır ise $(\nabla R = 0)$ **yerel simetrik uzay (locally symmetric space)** olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Bu durumda manifoldun eğrilik tensörü her noktada paraleldir. Başka bir deyişle, bir yerel simetrik uzayda her noktada eğrilik yapısı korunur. Bu tür uzaylara örnek olarak sabit kesitsel eğrilikli Riemann uzayları $(\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n)$ verilebilir.

Tanım 2.2.5. Bir (M, g) yarı-Riemann uzayı her X, Y, Z, W, U vektör alanı için aşağıdaki koşulu sağlıyorsa

$$(R(X, Y) \cdot R)(Z, W)U = 0,$$

(M, g) **yarı-simetrik uzay (semi-symmetric space)** olarak adlandırılır. Burada

$$(R(X, Y) \cdot R)(Z, W)U = R(X, Y)(R(Z, W)U) - R(R(X, Y)Z, W)U - R(Z, R(X, Y)W)U - R(Z, W)(R(X, Y)U),$$

tensör işlemini göstermektedir (Zamkovoy, 2018).

Yerel simetrik uzaylar, yarı-simetrik uzayların özel bir alt sınıfını oluşturur. Gerçekten de,

$$\nabla R = 0 \Rightarrow (R(X, Y) \cdot R) = 0$$

olduğundan, her yerel simetrik uzay aynı zamanda yarı-simetriktir; ancak her yarı-simetrik uzay yerel simetrik olmak zorunda değildir.

Teorem 2.2.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifoldu yerel simetrik ise, M manifoldunun sabit kesitsel eğriliği -1 dir (Zamkovoy, 2018).

İspat. Yerel simetrik olma, eğrilik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olmasıdır:

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z = 0$$

tüm W, X, Y, Z vektör alanları için.

Şimdi manifold yerel simetrik olduğundan, (2.19) eşitliğinin sol tarafı her X, Y, Z için sıfırdır:

$$(\nabla_Z R)(X, Y)\xi = 0.$$

Dolayısıyla

$$0 = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y,$$

yani

$$R(X, Y)Z = -g(Y, Z)X + g(X, Z)Y.$$

Dolayısıyla manifoldun sabit kesitsel eğriliği -1 dir. ■

Önerme 2.2.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. M manifoldu yarı-simetrik uzay ise sabit kesitsel eğriliği -1 dir (Zamkovoy, 2018).

İspat. $X, Y \in \mathcal{D}$ ve $g(X, Y) = 0$ olacak biçimde vektör alanları seçelim. Yarı-simetriklik koşulu gereğince $R(X, \xi) \cdot R = 0$ olduğundan, bu bağıntı (X, Y, Y) üçlüsüne uygulandığında

$$(R(X, \xi) \cdot R)(X, Y)Y = 0$$

olur. Eğrilik tensörünün derivasyon etkisi açık biçimde yazıldığında

$$\begin{aligned} (R(X, \xi) \cdot R)(X, Y)Y &= R(X, \xi)(R(X, Y)Y) - R(R(X, \xi)X, Y)Y \\ &\quad - R(X, R(X, \xi)Y)Y - R(X, Y)(R(X, \xi)Y). \end{aligned}$$

olur. (2.15), (2.16) ve (2.17) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= g(X, R(X, Y)Y)\xi - \eta(R(X, Y)Y)X - R(g(X, X)\xi - \eta(X)X, Y)Y \\
&\quad - R(X, g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)Y - R(X, Y)(\eta(X)Y - \eta(Y)X) \\
&= g(R(X, Y)Y, X)\xi - \eta(Y)g(X, Y) + \eta(X)g(Y, Y) - g(X, X)R(\xi, Y)Y \\
&= R(X, Y, Y, X)\xi + g(X, X)g(Y, Y)\xi.
\end{aligned}$$

bulunur. $\xi \neq 0$ olduğundan

$$R(X, Y, Y, X) = -g(X, X)g(Y, Y)$$

elde edilir. Böylece kesitsel eğrilik

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y)} = -1$$

olur. Burada $Y = \xi$ seçildiğinde

$$K(X, \xi) = -1$$

elde edilir. Dolayısıyla M manifoldunun sabit negatif kesitsel eğriliği -1 dir. ■

Önerme 2.2.5. Bir para-Kenmotsu manifoldu aşağıdaki eğrilik özelliklerine sahiptir (Zamkovoy, 2018).

$$R(X, Y)\varphi Z = \varphi(R(X, Y)Z) + g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X, \quad (2.27)$$

$$R(\varphi X, \varphi Y)Z = -R(X, Y)Z + g(X, Z)Y - g(Y, Z)X + g(Y, \varphi Z)\varphi X - g(X, \varphi Z)\varphi Y. \quad (2.28)$$

İspat. İlk bağıntı, eğrilik operatörünün φZ vektör alanına uygulanması ve para-Kenmotsu koşulunun kullanılmasıyla elde edilecektir. İkinci bağıntı ise ilk bağıntının metrikle iç çarpımı ve eğrilik simetrileri yardımıyla türetilcektir.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi Z &= \nabla_X \nabla_Y \varphi Z - \nabla_Y \nabla_X \varphi Z - \nabla_{[X,Y]} \varphi Z \\
&= \nabla_X (\nabla_Y \varphi) Z + (\nabla_X \varphi) (\nabla_Y Z) + \varphi (\nabla_X \nabla_Y Z) \\
&\quad - \nabla_Y (\nabla_X \varphi) Z - (\nabla_Y \varphi) (\nabla_X Z) - \varphi (\nabla_Y \nabla_X Z) - (\nabla_{[X,Y]} \varphi) Z - \varphi (\nabla_{[X,Y]} Z) \\
&= \nabla_X (\eta(Z)\varphi Y + g(Y, \varphi Z)\xi) + (\eta(\nabla_Y Z)\varphi X + g(X, \varphi(\nabla_Y Z))\xi) + \varphi (\nabla_X \nabla_Y Z) \\
&\quad - \nabla_Y (\eta(Z)\varphi X - g(X, \varphi Z)\xi) - (\eta(\nabla_X Z)\varphi Y - g(Y, \varphi(\nabla_X Z))\xi) - \varphi (\nabla_Y \nabla_X Z) \\
&\quad - (\eta(Z)\varphi([X,Y]) + g([X,Y], \varphi Z)\xi) - \varphi (\nabla_{[X,Y]} Z) \\
&= \varphi (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) + \nabla_X \eta(Z)\varphi Y + \eta(Z)\nabla_X \varphi Y \\
&\quad + g(\nabla_X Y, \varphi Z)\xi + g(Y, \nabla_X \varphi Z)\xi + g(Y, \varphi Z)\nabla_X \xi + \eta(\nabla_Y Z)\varphi X \\
&\quad + g(X, \varphi(\nabla_Y Z))\xi - \nabla_Y \eta(Z)\varphi X - \eta(Z)\nabla_Y \varphi X - g(\nabla_Y X, \varphi Z)\xi \\
&\quad + g(X, \nabla_Y \varphi Z)\xi - g(X, \varphi Z)\nabla_Y \xi + \eta(\nabla_X Z)\varphi Y - g(Y, \varphi(\nabla_X Z))\xi \\
&\quad - \eta(Z)\varphi(\nabla_X Y) + \eta(Z)\varphi(\nabla_Y X) - g(\nabla_X Y, \varphi Z)\xi + g(\nabla_Y X, \varphi Z)\xi \\
&= \varphi(R(X,Y)Z) + (\nabla_X \eta(Z) - \eta(\nabla_X Z))\varphi Y - (\nabla_Y \eta(Z) - \eta(\nabla_Y Z))\varphi X \\
&\quad + \eta(Z)(\nabla_X \varphi Y - \varphi(\nabla_X Y)) - \eta(Z)(\nabla_Y \varphi X - \varphi(\nabla_Y X)) \\
&\quad + g(Y, (\nabla_X \varphi Z - \varphi(\nabla_X Z)))\xi - g(X, (\nabla_Y \varphi Z - \varphi(\nabla_Y Z)))\xi \\
&\quad + g(X, \varphi Z)Y - g(X, \varphi Z)\eta(Y)\xi - g(Y, \varphi Z)X + g(Y, \varphi Z)\eta(X)\xi \\
&= \varphi(R(X,Y)Z) + (\nabla_X \eta)(Z)\varphi Y - (\nabla_Y \eta)(Z)\varphi X + \eta(Z)((\nabla_X \varphi)Y - (\nabla_Y \varphi)X) \\
&\quad + g(Y, \varphi Z)\eta(X)\xi + \underbrace{\{g(Y, (\nabla_X \varphi)Z) - g(X, (\nabla_Y \varphi)Z)\}}_{=-g((\nabla_X \varphi)Y, Z) + g((\nabla_Y \varphi)X, Z)}\xi \\
&\quad + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X - g(X, \varphi Z)\eta(Y)\xi \\
&= \varphi(R(X,Y)Z) - g(X, Z)\varphi Y + \eta(X)\eta(Z)\varphi Y + g(Y, Z)\varphi X - \eta(Y)\eta(Z)\varphi X \\
&\quad + \eta(Z)\eta(Y)\varphi X + \eta(Z)g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Z)\eta(X)\varphi Y - \eta(Z)g(X, \varphi Y)\xi \\
&\quad + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi - \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi + g(Y, \varphi X)\eta(Z)\xi - g(X, \varphi Y)\eta(Z)\xi \\
&\quad + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X - g(X, \varphi Z)\eta(Y)\xi + g(Y, \varphi Z)\eta(X)\xi \\
&= \varphi(R(X,Y)Z) + g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X
\end{aligned}$$

Böylece (2.27) nin ispatı tamamlanır.

(2.28) in ispatı için (2.27) eşitliğinin her iki tarafının keyfi bir φV vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)\varphi Z, \varphi V) &= g(\varphi(R(X,Y)Z), \varphi V) + g(g(Y, Z)\varphi X, \varphi V) - g(g(X, Z)\varphi Y, \varphi V) \\
&\quad + g(g(X, \varphi Z)Y, \varphi V) - g(g(Y, \varphi Z)X, \varphi V)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.2) ve (2.17) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(R(\varphi Z, \varphi V)X, Y) &= -g(R(X, Y)Z, V) + \eta(R(X, Y)Z)\eta(V) + g(Y, Z)g(\varphi X, \varphi V) \\
&\quad - g(X, Z)g(\varphi Y, \varphi V) - g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi V) + g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi V) \\
&= -g(R(Z, V)X, Y) + \eta(Y)g(X, Z)\eta(V) - \eta(X)g(Y, Z)\eta(V) \\
&\quad + g(Y, Z)g(\varphi X, \varphi V) + g(X, Z)g(Y, V) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(V) \\
&\quad - g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi V) + g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi V) \\
&= g(-R(Z, V)X + g(X, Z)\eta(V)\xi - \eta(X)\eta(V)Z + g(\varphi X, \varphi V)Z \\
&\quad + g(X, Z)V - g(X, Z)\eta(V)\xi - g(X, \varphi V)\varphi Z + g(X, \varphi Z)\varphi V, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. g non-dejenere olduğundan

$$R(\varphi Z, \varphi V)X = -R(Z, V)X - g(X, V)Z + g(X, Z)V - g(X, \varphi V)\varphi Z + g(X, \varphi Z)\varphi V$$

bulunur. ■

(2.28) de $Z = \varphi Z$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z &= -R(X, Y)\varphi Z + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X + g(Y, \varphi^2 Z)\varphi X - g(X, \varphi^2 Z)\varphi Y \\
&= -\{\varphi(R(X, Y)Z) + g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X\} \\
&\quad + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X + g(Y, Z)\varphi X - \eta(Z)\eta(Y)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y + \eta(Z)\eta(X)\varphi Y \\
&= -\varphi(R(X, Y)Z) + \eta(Z)\{\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X\}
\end{aligned}$$

bulunur. Ek olarak (2.27) eşitliğinin her iki tarafının keyfi bir V vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)\varphi Z, V) &= \underbrace{g(\varphi(R(X, Y)Z), V)}_{=-g(R(X, Y)Z, \varphi V)} + g(Y, Z)g(\varphi X, V) - g(X, Z)\underbrace{g(\varphi Y, V)}_{=-g(Y, \varphi V)} \\
&\quad - g(Y, \varphi Z)g(X, V) + g(X, \varphi Z)g(Y, V);
\end{aligned}$$

ve eğrilik tensörünün simetri özelliği ile

$$\begin{aligned}
g(R(\varphi Z, V)X, Y) &= -g(R(Z, \varphi V)X, Y) + g(g(\varphi X, V)Z, Y) + g(g(X, Z)\varphi V, Y) \\
&\quad - g(g(X, V)\varphi Z, Y) + g(g(X, \varphi Z)V, Y)
\end{aligned}$$

olup, g nin non-dejenere özelliğinden

$$R(\varphi Z, V)X = -R(Z, \varphi V)X + g(\varphi X, V)Z + g(X, Z)\varphi V - g(X, V)\varphi Z + g(X, \varphi Z)V$$

bulunur. Buradan

$$R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z = -\varphi(R(X, Y)Z) + \eta(Z)\{\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X\},$$

$$R(\varphi X, Y)Z + R(X, \varphi Y)Z = g(\varphi X, Z)Y - g(\varphi Y, Z)X + g(X, Z)\varphi Y - g(Y, Z)\varphi X$$

şeklinde iki eğrilik bağıntısı daha elde edilir.

Tanım 2.2.6. Her sıfırdan farklı $X \in \mathcal{D}$ için

$$\pi = \text{span}(X, \varphi X)$$

kesitini ele alalım. Bu kesitin

$$K_\varphi(\pi) = \frac{g(R(X, \varphi X)\varphi X, X)}{g(X, X)g(\varphi X, \varphi X) - g(X, \varphi X)^2} = H(X) \quad (2.29)$$

biçiminde tanımlanan kesitsel eğriliğine φ -**paraholomorfik kesitsel eğrilik** denir. Eğer $H(X)$ her $p \in M$ noktası ve her sıfırdan farklı $X \in \mathcal{D}_p$ için aynı sabit değeri alıyorsa manifold sabit φ -paraholomorfik kesitsel eğriliğe sahiptir denir ve bu sabit H ile gösterilir (Zamkovoy, 2008).

Önerme 2.2.6. Boyutu 3 ten büyük olan bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ para-Kenmotsu manifoldunun sabit φ -paraholomorfik kesitsel eğrilik H değerine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitliğin sağlanmasıdır (Zamkovoy, 2018).

$$\begin{aligned} 4R(X, Y)Z &= (H - 3)\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &+ (H + 1)\left\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(X)\eta(Z)Y \right. \\ &\quad \left. + g(Y, \varphi Z)\varphi X - g(X, \varphi Z)\varphi Y - 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

İspat. İspat iki aşamada gerçekleştirilecektir. İlk olarak $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ için eğrilik tensörünün biçimi elde edilecek, ardından sonuç $\chi(M)$ üzerindeki keyfi vektör alanlarına genişletilecektir. Ters yönde ise (2.30) numaralı eşitlik kullanılarak φ -paraholomorfik kesitsel eğriliğin H olduğu gösterilecektir.

İspatın ilk adımı olarak $X, Y \in \mathcal{D}$ alalım. (2.3) eşitliğinden $g(X, \varphi X) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca eğrilik tensörünün simetri özelliklerinden

$$g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = R(X, \varphi X, \varphi X, X) = -R(X, \varphi X, X, \varphi X)$$

eşitlikleri sağlandığından, bu ifadeler (2.29) da yerine yazılırsa

$$K_\varphi(X, \varphi X) = \frac{-R(X, \varphi X, X, \varphi X)}{-g(X, X)^2} = H$$

bulunur. Buradan

$$R(X, \varphi X, X, \varphi X) = Hg(X, X)^2 \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu eşitlik, ilerleyen adımlarda X yerine $X + Y$ yazılarak genişletilecek ve H sabitinin çift değişkenli bir ifadeye taşınmasında kullanılacaktır. Ancak önce, (2.27) eşitliğinin her iki tarafının φV vektör alanı ile iç çarpımı alınarak farklı bir eğrilik özdeşliği türetilmelidir:

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)\varphi Z, \varphi V) &= g(\varphi(R(X, Y)Z), \varphi V) + g(Y, Z)g(\varphi X, \varphi V) \\ &\quad - g(X, Z)g(\varphi Y, \varphi V) - g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi V) + g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi V). \end{aligned}$$

Bu eşitlikte (2.2) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)\varphi Z, \varphi V) &= -g(R(X, Y)Z, V) + \eta(R(X, Y)Z)\eta(V) - g(Y, Z)g(X, V) \\ &\quad + g(Y, Z)\eta(X)\eta(V) + g(X, Z)g(Y, V) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(V) \\ &\quad - g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi V) + g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi V). \end{aligned}$$

elde edilir. $X, Y, Z, V \in \mathcal{D} = \ker \eta$ için $\eta(X) = \eta(Y) = \eta(Z) = \eta(V) = 0$ olduğundan yukarıdaki ifade sadeleşerek

$$\begin{aligned} R(X, Y, \varphi Z, \varphi V) &= -R(X, Y, Z, V) - g(Y, Z)g(X, V) + g(X, Z)g(Y, V) \\ &\quad - g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi V) + g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi V). \end{aligned}$$

biçimini alır. Şimdi bu genel özdeşlikte $Z \rightarrow X$ ve $V \rightarrow Y$ alalım:

$$\begin{aligned} R(X, Y, \varphi X, \varphi Y) &= -R(X, Y, X, Y) - g(Y, X)g(X, Y) + g(X, X)g(Y, Y) \\ &\quad - g(Y, \varphi X)g(X, \varphi Y) + g(X, \varphi X)g(Y, \varphi Y). \end{aligned}$$

Burada $g(X, \varphi X) = g(Y, \varphi Y) = 0$ olduğu ve (2.3) eşitliği kullanıldığında

$$R(X, Y, \varphi X, \varphi Y) = -R(X, Y, X, Y) - g(X, Y)^2 + g(X, X)g(Y, Y) + g(X, \varphi Y)^2 \quad (2.32)$$

elde edilir. Şimdi (2.27) eşitliğinde $Y \rightarrow \varphi Y$ ve $Z \rightarrow X$ yazılarak benzer bir özdeşlik daha türetilim:

$$R(X, \varphi Y)\varphi X = \varphi(R(X, \varphi Y)X) + g(\varphi Y, X)\varphi X - g(X, X)\varphi^2 Y - g(\varphi Y, \varphi X)X + g(X, \varphi X)\varphi Y.$$

Bu ifadede $g(X, \varphi X) = 0$, $\eta(Y) = 0$ olduğundan $\varphi^2 Y = Y$ ve $g(\varphi Y, \varphi X) = -g(Y, X)$ bağıntıları

kullanılarak eşitlik

$$R(X, \varphi Y) \varphi X = \varphi(R(X, \varphi Y)X) + g(X, \varphi Y) \varphi X - g(X, X)Y + g(X, Y)X.$$

biçimine indirgenir. Bu eşitliğin her iki tarafının Y ile iç çarpımı alınır

$$\begin{aligned} R(X, \varphi Y, \varphi X, Y) &= g(\varphi(R(X, \varphi Y)X), Y) + g(X, \varphi Y)g(\varphi X, Y) - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)g(X, Y) \\ &= -g(R(X, \varphi Y)X, \varphi Y) - g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2 \\ &= -R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) - g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2. \end{aligned}$$

elde edilir. Eğrilik tensörünün simetri özelliği kullanılarak bu ifade

$$R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) = R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) - g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2. \quad (2.33)$$

biçiminde yeniden düzenlenir. (2.27) eşitliğinde $Y \rightarrow \varphi X$, $Z \rightarrow X$ yazarak bir başka yardımcı özdeşlik elde edelim:

$$R(X, \varphi X) \varphi X = \varphi(R(X, \varphi X)X) - g(X, X)X + g(X, X)X = \varphi(R(X, \varphi X)X).$$

(Burada $g(\varphi X, X) = 0$ ve $g(\varphi X, \varphi X) = 0$ olduğundan ilgili terimler sadeleşmiştir). Bu eşitliğin Y ile iç çarpımı alınır

$$R(X, \varphi X, \varphi X, Y) = g(\varphi(R(X, \varphi X)X), Y) = -g(R(X, \varphi X)X, \varphi Y) = -R(X, \varphi X, X, \varphi Y)$$

bulunur. Öte yandan $R(X, \varphi X, \varphi X, Y) = -R(X, \varphi X, Y, \varphi X)$ olduğundan

$$R(X, \varphi X, Y, \varphi X) = R(X, \varphi X, X, \varphi Y) \quad (2.34)$$

eşitliği elde edilir. İkinci olarak (2.31) eşitliğinde X yerine $X + Y$ yazılarak

$$R(X + Y, \varphi(X + Y), X + Y, \varphi(X + Y)) = Hg(X + Y, X + Y)^2$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı açıldığında

$$\begin{aligned} H[g(X + Y, X + Y)^2] &= H[g(X + Y, X + Y)g(X + Y, X + Y)] \\ &= H[\{g(X, X) + 2g(X, Y) + g(Y, Y)\}\{g(X, X) + 2g(X, Y) + g(Y, Y)\}] \\ &= H[g(X, X)^2 + 2g(X, X)g(X, Y) + g(X, X)g(Y, Y) + 2g(X, Y)g(X, X) \\ &\quad + 4g(X, Y)^2 + 2g(X, Y)g(Y, Y) + g(Y, Y)g(X, X) + 2g(Y, Y)g(X, Y) + g(Y, Y)^2]. \end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$H[g(X+Y, X+Y)^2] = H\left[g(X, X)^2 + g(Y, Y)^2 + 4g(X, Y)^2 + 4g(X, X)g(X, Y) + 4g(Y, Y)g(X, Y) + 2g(X, X)g(Y, Y)\right]$$

bulunur. Şimdi sol tarafı çok doğrusallık (multilineerlik) özelliğinden yararlanarak on altı terime açalım:

$$\begin{aligned} R(X+Y, \varphi X + \varphi Y, X+Y, \varphi X + \varphi Y) &= \underbrace{R(X, \varphi X, X, \varphi X)}_1 + \underbrace{R(X, \varphi X, X, \varphi Y)}_2 \\ &+ \underbrace{R(X, \varphi X, Y, \varphi X)}_3 + \underbrace{R(X, \varphi X, Y, \varphi Y)}_4 \\ &+ \underbrace{R(X, \varphi Y, X, \varphi X)}_5 + \underbrace{R(X, \varphi Y, X, \varphi Y)}_6 \\ &+ \underbrace{R(X, \varphi Y, Y, \varphi X)}_7 + \underbrace{R(X, \varphi Y, Y, \varphi Y)}_8 \\ &+ \underbrace{R(Y, \varphi X, X, \varphi X)}_9 + \underbrace{R(Y, \varphi X, X, \varphi Y)}_{10} \\ &+ \underbrace{R(Y, \varphi X, Y, \varphi X)}_{11} + \underbrace{R(Y, \varphi X, Y, \varphi Y)}_{12} \\ &+ \underbrace{R(Y, \varphi Y, X, \varphi X)}_{13} + \underbrace{R(Y, \varphi Y, X, \varphi Y)}_{14} \\ &+ \underbrace{R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X)}_{15} + \underbrace{R(Y, \varphi Y, Y, \varphi Y)}_{16}. \end{aligned}$$

Bu on altı terim, aralarındaki simetri ve (2.34) bağıntısı yardımıyla gruplandırılabilir. İlk olarak 1. ve 16. terimler (2.31) eşitliği kullanılarak

$$1 + 16 = R(X, \varphi X, X, \varphi X) + R(Y, \varphi Y, Y, \varphi Y) \stackrel{(2.31)}{=} Hg(X, X)^2 + Hg(Y, Y)^2.$$

biçiminde toplanır. Kalan on dört terimin toplamı ise sadeleştirmelerin ardından

$$2 + \dots + 15 = 2H\left[2g(X, Y)^2 + 2g(X, X)g(X, Y) + 2g(Y, Y)g(X, Y) + g(X, X)g(Y, Y)\right] \quad (2.35)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi bu on dört terim, (2.34) eşitliği ve eğrilik tensörünün simetri özellikleri kullanılarak dört alt gruba ayrılıp yeniden yazılabilir. İlk grupta

$$2 = R(X, \varphi X, X, \varphi Y),$$

$$3 = R(X, \varphi X, Y, \varphi X) \stackrel{(2.34)}{=} R(X, \varphi X, X, \varphi Y),$$

$$5 = R(X, \varphi Y, X, \varphi X) = R(X, \varphi X, X, \varphi Y),$$

$$9 = R(Y, \varphi X, X, \varphi X) = R(X, \varphi X, Y, \varphi X) \stackrel{(2.34)}{=} R(X, \varphi X, X, \varphi Y)$$

olduğundan

$$2 + 3 + 5 + 9 = 4R(X, \varphi X, X, \varphi Y).$$

bulunur. Benzer şekilde ikinci grupta

$$8 = R(X, \varphi Y, Y, \varphi Y) = R(Y, \varphi Y, X, \varphi Y) \stackrel{(2.34)}{=} R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

$$12 = R(Y, \varphi X, Y, \varphi Y) = R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

$$14 = R(Y, \varphi Y, X, \varphi Y) \stackrel{(2.34)}{=} R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

$$15 = R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

olduğundan

$$8 + 12 + 14 + 15 = 4R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X)$$

elde edilir. Üçüncü grupta

$$7 = R(X, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

$$10 = R(Y, \varphi X, X, \varphi Y) = R(X, \varphi Y, Y, \varphi X),$$

olduğundan

$$7 + 10 = 2R(X, \varphi Y, Y, \varphi X)$$

bulunur. Son olarak dördüncü grupta

$$4 = R(X, \varphi X, Y, \varphi Y),$$

$$13 = R(Y, \varphi Y, X, \varphi X) = R(X, \varphi X, Y, \varphi Y),$$

olduğundan

$$4 + 13 = 2R(X, \varphi X, Y, \varphi Y)$$

elde edilir. Geriye kalan 6 ve 11 numaralı terimler ise (2.33) eşitliği kullanılarak ele alınır. Bu

eşitlik önce X, Y çiftine, ardından Y, X çiftine uygulanırsa

$$\begin{aligned} R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) &= R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) - g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2, \\ R(Y, \varphi X, Y, \varphi X) &= R(Y, \varphi X, X, \varphi Y) - g(Y, \varphi X)^2 - g(Y, Y)g(X, X) + g(Y, X)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$6 + 11 = R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) + R(Y, \varphi X, X, \varphi Y) - 2g(X, \varphi Y)^2 + 2g(X, Y)^2 - 2g(X, X)g(Y, Y)$$

elde edilir. Bulunan tüm bu grup toplamaları bir araya getirildiğinde,

$$\begin{aligned} 2 + \dots + 15 &= 2 \left[2R(X, \varphi X, X, \varphi Y) + 2R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X) + 2R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) + R(X, \varphi X, Y, \varphi Y) \right. \\ &\quad \left. - g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2 \right] \end{aligned}$$

şeklinde tek bir ifadeye indirgenir. Burada $R(X, \varphi X, Y, \varphi Y)$ terimi, 1. Bianchi özdeşliği kullanılarak farklı bir biçimde yazılabilir:

$$R(X, \varphi X, Y, \varphi Y) + R(\varphi X, Y, X, \varphi Y) + R(Y, X, \varphi X, \varphi Y) = 0.$$

Buradan

$$\begin{aligned} R(X, \varphi X, Y, \varphi Y) &= -R(\varphi X, Y, X, \varphi Y) - R(Y, X, \varphi X, \varphi Y) \\ &= R(Y, \varphi X, X, \varphi Y) + R(X, Y, \varphi X, \varphi Y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade, daha önce elde edilen (2.32) eşitliği ile birlikte yukarıdaki toplamda yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, (2.35) eşitliği

$$\begin{aligned} &2R(X, \varphi X, X, \varphi Y) + 2R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X) + 3R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) - R(X, Y, X, Y) \\ &= H \left[2g(X, Y)^2 + 2g(X, X)g(X, Y) + 2g(Y, Y)g(X, Y) + g(X, X)g(Y, Y) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

biçimini alır. Şimdi (2.36) eşitliğinde Y yerine $-Y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &-2R(X, \varphi X, X, \varphi Y) - 2R(Y, \varphi Y, Y, \varphi X) + 3R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) - R(X, Y, X, Y) \\ &= H \left[2g(X, Y)^2 - 2g(X, X)g(X, Y) - 2g(Y, Y)g(X, Y) + g(X, X)g(Y, Y) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

elde edilir. (2.36) ile (2.37) taraf tarafa toplandığında, karşılıklı olarak sadeleşen terimler çıkarıldıktan sonra

$$3R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) - R(X, Y, X, Y) = H \left[2g(X, Y)^2 + g(X, X)g(Y, Y) \right] \quad (2.38)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte Y yerine φY yazıldığında

$$3R(X, Y, \varphi Y, \varphi X) - R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) = H \left[2g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) \right]. \quad (2.39)$$

elde edilir. (2.32) ve (2.33) eşitlikleri (2.39) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & 3R(X, Y, X, Y) - R(X, \varphi Y, Y, \varphi X) + 2g(X, Y)^2 - 2g(X, \varphi Y)^2 - 2g(X, X)g(Y, Y) \\ &= H \left[2g(X, \varphi Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

bulunur. (2.38) eşitliğinden $R(X, \varphi Y, Y, \varphi X)$ terimi çekilip (2.40) da yerine yazılır ve her iki taraf 3 ile çarpılarak düzenlenirse

$$4R(X, Y, X, Y) = (H - 3)(g(X, Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y)) + 3(H + 1)g(X, \varphi Y)^2 \quad (2.41)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu aşamada amaç, $R(X, Y, X, Y)$ biçimindeki ifadeyi dört farklı vektör alanı içeren genel $R(X, Y, Z, W)$ biçimine taşımaktır. Bunun için (2.41) eşitliğinde $X \rightarrow X + tZ$, $Y \rightarrow Y + sW$ yazılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı ayrı ayrı açılır.

Sol tarafın açılımı, çok-doğrusallık özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} R(X + tZ, Y + sW, X + tZ, Y + sW) &= R(X, Y, X, Y) + sR(X, Y, X, W) \\ &\quad + tR(X, Y, Z, Y) + tsR(X, Y, Z, W) \\ &\quad + sR(X, W, X, Y) + s^2R(X, W, X, W) \\ &\quad + tsR(X, W, Z, Y) + ts^2R(X, W, Z, W) \\ &\quad + tR(Z, Y, X, Y) + tsR(Z, Y, X, W) \\ &\quad + t^2R(Z, Y, Z, Y) + t^2sR(Z, Y, Z, W) \\ &\quad + tsR(Z, W, X, Y) + ts^2R(Z, W, X, W) \\ &\quad + t^2sR(Z, W, Z, Y) + t^2s^2R(Z, W, Z, W) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Sağ taraftaki üç terim ise sırasıyla aşağıdaki gibi açılır. Birinci terim için

$$\begin{aligned} g(X + tZ, Y + sW)^2 &= \left(g(X, Y) + g(X, sW) + g(tZ, Y) + g(tZ, sW) \right)^2 \\ &= \left(g(X, Y) + sg(X, W) + tg(Z, Y) + tsg(Z, W) \right)^2 \\ &= g(X, Y)^2 + 2sg(X, Y)g(X, W) + 2tg(X, Y)g(Z, Y) + 2tsg(X, Y)g(Z, W) \\ &\quad + s^2g(X, W)^2 + 2tsg(X, W)g(Z, Y) + 2ts^2g(X, W)g(Z, W) \\ &\quad + t^2g(Z, Y)^2 + 2t^2sg(Z, Y)g(Z, W) + t^2s^2g(Z, W)^2 \end{aligned}$$

ikinci terim için

$$\begin{aligned}
& g(X+tZ, X+tZ)g(Y+sW, Y+sW) \\
&= (g(X, X) + 2tg(X, Z) + t^2g(Z, Z))(g(Y, Y) + 2sg(Y, W) + s^2g(W, W)) \\
&= g(X, X)g(Y, Y) + 2sg(X, X)g(Y, W) + s^2g(X, X)g(W, W) + 2tg(Y, Y)g(X, Z) \\
&\quad + 4tsg(X, Z)g(Y, W) + 2ts^2g(X, Z)g(W, W) + t^2g(Y, Y)g(Z, Z) \\
&\quad + 2t^2sg(Z, Z)g(Y, W) + t^2s^2g(Z, Z)g(W, W)
\end{aligned}$$

ve üçüncü terim için

$$\begin{aligned}
& g(X+tZ, \varphi Y + \varphi(sW))g(X+tZ, \varphi Y + \varphi(sW)) \\
&= \left(g(X, \varphi Y) + sg(X, \varphi W) + tg(Z, \varphi Y) + tsg(Z, \varphi W) \right)^2 \\
&= g(X, \varphi Y)^2 + s^2g(X, \varphi W)^2 + t^2g(Z, \varphi Y)^2 + t^2s^2g(Z, \varphi W)^2 \\
&\quad + 2sg(X, \varphi Y)g(X, \varphi W) + 2tg(X, \varphi Y)g(Z, \varphi Y) + 2tsg(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) \\
&\quad + 2tsg(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y) + 2ts^2g(X, \varphi W)g(Z, \varphi W) + 2t^2sg(Z, \varphi Y)g(Z, \varphi W)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu üç açılım (2.41) eşitliğinde yerlerine konulduktan sonra, eşitliğin her iki tarafında t ve s parametrelerinin aynı kuvvetlerine sahip terimler birbirine eşitlenir.

t^0s^0 için:

$$4R(X, Y, X, Y) = (H-3)g(X, Y)^2 - (H-3)g(X, X)g(Y, Y) + 3(H+1)g(X, \varphi Y)^2.$$

t^1s^0 için:

$$2R(X, Y, Z, Y) = (H-3)[2g(X, Y)g(Z, Y) - 2g(Y, Y)g(X, Z)] + 3(H+1)2g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi Y).$$

t^0s^1 için:

$$2R(X, Y, X, W) = (H-3)[2g(X, Y)g(X, W) - 2g(X, X)g(Y, W)] + 3(H+1)2g(X, \varphi Y)g(X, \varphi W).$$

t^1s^1 için:

$$\begin{aligned}
2R(X, Y, Z, W) + 2R(X, W, Z, Y) &= (H-3)[2g(X, Y)g(Z, W) + 2g(X, W)g(Z, Y) - 4g(X, Z)g(Y, W)] \\
&\quad + 3(H+1)[2g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) + 2g(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y)]. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

t^1s^2 için:

$$2R(X, W, Z, W) = (H-3)[2g(X, W)g(Z, W) + 2g(X, Z)g(W, W)] + 3(H+1)2g(X, \varphi W)g(Z, \varphi W).$$

$t^2 s^1$ için:

$$2R(Z, Y, Z, W) = (H-3) \left[2g(Z, Y)g(Z, W) + 2g(Z, Z)g(Y, W) \right] + 3(H+1) \left[2g(Z, \varphi Y)g(Z, \varphi W) \right].$$

$t^2 s^2$ için:

$$R(Z, W, Z, W) = (H-3) \left[g(Z, W)^2 - g(Z, Z)g(W, W) \right] + 3(H+1) g(Z, \varphi W)^2.$$

$t^0 s^2$ için:

$$R(X, W, X, W) = (H-3) \left[g(X, W)^2 - g(X, X)g(W, W) \right] + 3(H+1) g(X, \varphi W)^2.$$

$t^2 s^0$ için:

$$R(Z, Y, Z, Y) = (H-3) \left[g(Z, Y)^2 - g(Y, Y)g(Z, Z) \right] + 3(H+1) g(Z, \varphi Y)^2.$$

Özellikle $t^1 s^1$ katsayılı terimler karşılaştırıldığında (2.42) eşitliği elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 4R(X, Y, Z, W) + 4R(X, W, Z, Y) = (H-3) \left[g(X, Y)g(Z, W) + g(X, W)g(Z, Y) - 2g(X, Z)g(Y, W) \right] \\ + 3(H+1) \left[g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) + g(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

bulunur. Şimdi (2.43) eşitliğinde $Y \leftrightarrow Z$ değişimi yapıp elde edilen ifade -1 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 4R(X, Z, Y, W) - 4R(X, W, Y, Z) = -(H-3) \left\{ g(X, Z)g(Y, W) + g(X, W)g(Y, Z) - 2g(X, Y)g(Z, W) \right\} \\ - 3(H+1) \left\{ g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W) + g(X, \varphi W)g(Y, \varphi Z) \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

elde edilir. (2.43) ile (2.44) taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} 4 \left\{ R(X, Y, Z, W) + R(X, W, Z, Y) - R(X, Z, Y, W) - R(X, W, Y, Z) \right\} \\ = (H-3) \left\{ g(X, Y)g(Z, W) + g(X, W)g(Y, Z) - 2g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) + 2g(X, Y)g(Z, W) \right\} \\ + 3(H+1) \left\{ g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) + g(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y) - g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W) - g(X, \varphi W)g(Y, \varphi Z) \right\} \\ = 3(H-3) \left\{ g(X, Y)g(Z, W) - g(X, Z)g(Y, W) \right\} \\ + 3(H+1) \left\{ g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) + 2g(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y) - g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W) \right\}. \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitliğin sol tarafı, 1. Bianchi özdeşliği ve eğrilik tensörünün simetri özellikleri kullanılarak sadeleştirilir. Bianchi özdeşliğinden

$$R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) = 0.$$

yazılır; simetri özelliğinden bu ifade

$$R(W, X, Y, Z) + R(Y, X, Z, W) + R(Z, X, W, Y) = 0$$

biçimine dönüştürülür ve üçüncü terim çekilerek

$$\begin{aligned} R(Z, X, W, Y) &= -R(W, X, Y, Z) - R(Y, X, Z, W) \\ &= R(X, W, Y, Z) + R(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

bulunur. $R(X, Z, Y, W) = R(Z, X, W, Y)$ eşitliği de göz önüne alınarak sol taraf

$$\begin{aligned} &4R(X, Y, Z, W) + 4R(X, W, Z, Y) - 4R(X, Z, Y, W) - 4R(X, W, Y, Z) \\ &= 4R(X, Y, Z, W) + 4R(X, W, Z, Y) - 4R(Z, X, W, Y) - 4R(X, W, Y, Z) \\ &= 4R(X, Y, Z, W) + 4R(X, W, Z, Y) - 4(R(X, W, Y, Z) + R(X, Y, Z, W)) - 4R(X, W, Y, Z) \\ &= 4R(X, W, Z, Y) - 8R(X, W, Y, Z) \\ &= 12R(X, W, Z, Y), \end{aligned}$$

biçiminde tek bir terime indirgenir. Böylece

$$\begin{aligned} 12R(X, W, Z, Y) &= 3(H-3)\{g(X, Y)g(Z, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \\ &\quad + 3(H+1)\{g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) + 2g(X, \varphi W)g(Z, \varphi Y) - g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $Y \leftrightarrow W$ değişimi yapıp sonucun W ile iç çarpımı alındığında, $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ için aranan eğrilik özdeşliği

$$\begin{aligned} 4R(X, Y)Z &= (H-3)\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad + (H+1)\{g(X, \varphi Z)\varphi Y + g(Y, \varphi Z)\varphi X - 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

biçiminde elde edilir.

(2.45) eşitliği yalnızca $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ için geçerlidir; ispatın tamamlanması için bu sonucun $\chi(M)$ üzerindeki keyfi vektör alanlarına genişletilmesi gerekir. Bunun için her $X \in \chi(M)$

$$X = X_0 + \eta(X)\xi, \quad X_0 = X - \eta(X)\xi \in \mathcal{D}$$

şeklinde ayrıştırılır. Benzer biçimde $Y = Y_0 + \eta(Y)\xi$, $Z = Z_0 + \eta(Z)\xi$ alınır. $\varphi\xi = 0$ olduğundan

$$\varphi X = \varphi X_0, \quad \varphi Y = \varphi Y_0, \quad \varphi Z = \varphi Z_0.$$

bağıntıları geçerlidir. Bu ayrıştırma kullanılarak $R(X, Y)Z$ ifadesi sekiz terime açılır:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= R(X_0 + \eta(X)\xi, Y_0 + \eta(Y)\xi)(Z_0 + \eta(Z)\xi) \\
&= \underbrace{R(X_0, Y_0)Z_0}_1 + \underbrace{\eta(Z)R(X_0, Y_0)\xi}_2 + \underbrace{\eta(Y)R(X_0, \xi)Z_0}_3 + \underbrace{\eta(Y)\eta(Z)R(X_0, \xi)\xi}_4 \\
&\quad + \underbrace{\eta(X)R(\xi, Y_0)Z_0}_5 + \underbrace{\eta(X)\eta(Z)R(\xi, Y_0)\xi}_6 + \underbrace{\eta(X)\eta(Y)R(\xi, \xi)Z_0}_7 + \underbrace{\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)R(\xi, \xi)\xi}_8.
\end{aligned}$$

Bu sekiz terim tek tek incelenir. $R(\xi, \xi) = -R(\xi, \xi)$ olduğundan $2R(\xi, \xi) = 0$, dolayısıyla $R(\xi, \xi) = 0$ olup son iki terim sıfırdır. İkinci terim için $R(X_0, Y_0)\xi = \eta(X_0)Y - \eta(Y_0)X$ eşitliğinde $\eta(X_0) = \eta(Y_0) = 0$ olduğundan bu terim de sıfırdır. Kalan terimler ise (2.1) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}
3 &= \eta(Y)R(X_0, \xi)Z_0 = \eta(Y)\left(g(X_0, Z_0)\xi - \eta(Z_0)X_0\right) = \eta(Y)g(X_0, Z_0)\xi \\
4 &= \eta(Y)\eta(Z)R(X_0, \xi)\xi = \eta(Y)\eta(Z)\left(g(X_0, \xi)\xi - \eta(\xi)X_0\right) = -\eta(Y)\eta(Z)X_0 \\
5 &= \eta(X)R(\xi, Y_0)Z_0 = -\eta(X)R(Y_0, \xi)Z_0 = -\eta(X)\left(g(Y_0, Z_0)\xi - \eta(Z_0)Y_0\right) = -\eta(X)g(Y_0, Z_0)\xi \\
6 &= \eta(X)\eta(Z)R(\xi, Y_0)\xi = -\eta(X)\eta(Z)R(Y_0, \xi)\xi = -\eta(X)\eta(Z)\left(g(Y_0, \xi)\xi - \eta(\xi)Y_0\right) = \eta(X)\eta(Z)Y_0
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Diğer taraftan (2.45) eşitliği X_0, Y_0, Z_0 için uygulanıp $g(Y_0, \varphi Z_0) = g(Y, \varphi Z)$ ve $g(Y_0, Z_0) = g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)$ bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}
4R(X_0, Y_0)Z_0 &= (H-3)\left\{g(Y, Z)X - g(Y, Z)\eta(X)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X\right. \\
&\quad \left.- g(X, Z)Y + g(X, Z)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y\right\} \\
&\quad + (H+1)\left\{g(Y, \varphi Z)\varphi X - g(X, \varphi Z)\varphi Y - 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade ile daha önce hesaplanan diğer terimler bir araya getirildiğinde

$$R(X, Y)Z = R(X_0, Y_0)Z_0 + \eta(Y)g(X_0, Z_0)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X_0 - \eta(X)g(Y_0, Z_0)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y_0 \quad (2.46)$$

özdeşliği elde edilir. (2.46) eşitliğinin her iki tarafı 4 ile çarpılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, aranan genel sonuç

$$\begin{aligned}
4R(X, Y)Z &= (H-3)\left\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\right\} \\
&\quad + (H+1)\left\{-g(Y, Z)\eta(X)\xi + g(X, Z)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(X)\eta(Z)Y\right\} \\
&\quad + (H+1)\left\{g(Y, \varphi Z)\varphi X - g(X, \varphi Z)\varphi Y - 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\right\}
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur ve bu ifade (2.30) eşitliğine denktir. Böylece önermenin gerekli koşul kısmı ispatlanmış olur.

Yeterli koşulun ispatı için tersine, (2.30) eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. $X \in \mathcal{D}$ ve $g(X, X) \neq 0$ olsun. (2.30) eşitliğinde $Y = \varphi X$ ve $Z = \varphi X$ alınırsa, $\eta(X) = \eta(\varphi X) = 0$, $g(X, \varphi X) = 0$ ve $g(\varphi X, \varphi X) = -g(X, X)$ olduğundan

$$4R(X, \varphi X)\varphi X = -4Hg(X, X)X$$

elde edilir. Buradan

$$R(X, \varphi X)\varphi X = -Hg(X, X)X.$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının X ile iç çarpımı alınırsa

$$R(X, \varphi X, \varphi X, X) = -Hg(X, X)^2$$

elde edilir. O halde

$$K_\varphi(X, \varphi X) = \frac{R(X, \varphi X, \varphi X, X)}{g(X, X)g(\varphi X, \varphi X) - g(X, \varphi X)^2} = \frac{-Hg(X, X)^2}{-g(X, X)^2} = H.$$

sonucuna ulaşılır. Böylece M manifoldunun sabit φ -paraholomorfik kesitsel eğriliği H olduğu gösterilmiş olur ve önermenin ispatı tamamlanır. ■

Önerme (2.2.6) ile verilen eğrilik tensörü özdeşliği, Ricci tensörünün ve skaler eğriliğin de açık biçimde hesaplanmasına imkan tanır.

Sonuç 2.2.2. Boyutu 3 ten büyük olan ve sabit φ -paraholomorfik kesitsel eğriliği H olan bir para-Kenmotsu manifoldun Ricci tensörü

$$\text{Ric}(Y, Z) = \frac{1}{2}(n(H-3) + H + 1)g(Y, Z) - \frac{1}{2}(n+1)(H+1)\eta(Y)\eta(Z) \quad (2.47)$$

şeklindedir. Ayrıca skaler eğriliği

$$\text{scal} = \frac{1}{2}(n(H-3) + H + 1)(2n+1) - \frac{1}{2}(n+1)(H+1) \quad (2.48)$$

ile verilir.

İspat. (2.30) eşitliğinin X ve son indis üzerinden izini (kontraksiyonunu) alarak Ricci tensörünü elde edelim. (2.21) eşitliğinden

$$\text{Ric}(Y, Z) = \sum_{a=1}^{2n+1} \varepsilon_a 1(R(E_a, Y)Z, E_a), \quad 1(E_a, E_a) = \varepsilon_a \in \{+1, -1\}.$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
4\text{Ric}(Y, Z) &= \sum_a \varepsilon_a 1(4R(E_a, Y)Z, E_a) \\
&= (H-3) \sum_a \varepsilon_a 1(1(Y, Z)E_a - 1(E_a, Z)Y, E_a) \\
&\quad + (H+1) \sum_a \varepsilon_a 1(\eta(E_a)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)E_a + \eta(Y)1(E_a, Z)\xi - \eta(E_a)1(Y, Z)\xi, E_a) \\
&\quad + (H+1) \sum_a \varepsilon_a 1(1(Y, \varphi Z)\varphi E_a - 1(E_a, \varphi Z)\varphi Y + 21(\varphi E_a, Y)\varphi Z, E_a).
\end{aligned}$$

Şimdi bu toplamaları katsayılarına göre ayrı ayrı inceleyelim. İlk olarak, $(H-3)$ katsayılı terimi hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\sum_a \varepsilon_a 1(1(Y, Z)E_a, E_a) &= (2n+1)1(Y, Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(-1(E_a, Z)Y, E_a) &= -1(Y, Z).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle bu terimlerin toplamı $2n(H-3)1(Y, Z)$ dir.

$(H+1)$ katsayılı terim hesaplandığında ise

$$\begin{aligned}
\sum_a \varepsilon_a 1(\eta(E_a)\eta(Z)Y, E_a) &= \eta(Y)\eta(Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(-\eta(Y)\eta(Z)E_a, E_a) &= -(2n+1)\eta(Y)\eta(Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(\eta(Y)1(E_a, Z)\xi, E_a) &= \eta(Y)\eta(Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(-\eta(E_a)1(Y, Z)\xi, E_a) &= -1(Y, Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(1(Y, \varphi Z)\varphi E_a, E_a) &= 0, \\
\sum_a \varepsilon_a 1(-1(E_a, \varphi Z)\varphi Y, E_a) &= -1(\varphi Y, \varphi Z), \\
\sum_a \varepsilon_a 1(21(\varphi E_a, Y)\varphi Z, E_a) &= -21(\varphi Y, \varphi Z).
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $(H+1)(21(Y, Z) - 2(n+1)\eta(Y)\eta(Z))$ elde edilir. Sonuç olarak

$$4\text{Ric}(Y, Z) = 2n(H-3)1(Y, Z) + (H+1)(21(Y, Z) - 2(n+1)\eta(Y)\eta(Z)),$$

ve 4 e bölünce (2.47) ifadesi elde edilir.

(2.47) eşitliğini

$$\text{Ric} = \alpha 1 - \beta \eta \otimes \eta, \quad \alpha = \frac{1}{2}(n(H-3) + H + 1), \quad \beta = \frac{1}{2}(n+1)(H+1)$$

şeklinde yazalım. Skaler eğrilik, Ricci tensörünün izi olduğundan

$$\begin{aligned} \text{scal} = \text{tr}(\text{Ric}) &= \sum_a \varepsilon_a \text{Ric}(E_a, E_a) \\ &= \sum_a \varepsilon_a \left[\frac{1}{2}(n(H-3) + H + 1) g(E_a, E_a) - \frac{1}{2}(n+1)(H+1) \eta(E_a)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(n(H-3) + H + 1) \sum_a \varepsilon_a g(E_a, E_a) - \frac{1}{2}(n+1)(H+1) \sum_a \varepsilon_a \eta(E_a)^2. \end{aligned}$$

Buradan

$$\text{scal} = \sum_a \varepsilon_a (\alpha \varepsilon_a - \beta \eta(E_a)^2) = \alpha \sum_a \varepsilon_a^2 - \beta \sum_a \varepsilon_a \eta(E_a)^2.$$

$\varepsilon_a^2 = 1$ olduğundan $\sum_a \varepsilon_a^2 = 2n + 1$ elde edilir. Ayrıca uygun bir ortonormal tabanda $E_{2n+1} = \xi$ seçilirse $\eta(E_a) = 0$ ($a \leq 2n$) ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan

$$\sum_a \varepsilon_a \eta(E_a)^2 = \varepsilon_\xi = 1.$$

Buradan (2.48) eşitliği elde edilir. ■

2.3. Para-Sasakian Manifoldlar

Tanım 2.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir parakontak metrik manifold olsun. Eğer

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (2.49)$$

koşulu sağlanıyorsa, M **para-Sasakian manifold** olarak adlandırılır (Zamkovoy, 2008).

Örnek 2.3.1. $M = \mathbb{R}^3$ üzerinde (x, y, z) standart koordinatlar olmak üzere

$$E_1 := \partial_x + y \partial_z, \quad E_2 := 2 \partial_y, \quad \xi := \partial_z$$

vektör alanlarını,

$$\eta := dz - y dx, \quad \varphi E_1 = E_2, \quad \varphi E_2 = E_1, \quad \varphi \xi = 0$$

yapı elemanlarını ve

$$g(E_1, E_1) = 1, \quad g(E_2, E_2) = -1, \quad g(\xi, \xi) = 1, \quad g(E_i, E_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

metriğini tanımlayalım. Bu durumda (φ, ξ, η, g) yapısının $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir para-Sasakian yapı oluşturduğunu gösterelim.

Öncelikle $E_1, E_2, \xi, (+, -, +)$ işaretine sahip ortonormal bir tabandır. Ayrıca

$$\eta(\xi) = 1, \quad \eta(E_1) = \eta(E_2) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bununla birlikte,

$$\varphi^2 E_i = E_i, \quad (I - \eta \otimes \xi)E_i = E_i, \quad \varphi^2 \xi = 0, \quad (I - \eta \otimes \xi)\xi = 0.$$

olduğundan, (2.1) eşitliği sağlanır.

- **Metrik uyumluluk koşulu:** Taban vektörleri üzerinde inceleyelim:

$$X = Y = E_1 : \quad g(\varphi E_1, \varphi E_1) = g(E_2, E_2) = -1 = -g(E_1, E_1) + 0,$$

$$X = Y = E_2 : \quad g(\varphi E_2, \varphi E_2) = g(E_1, E_1) = 1 = -g(E_2, E_2) + 0,$$

$$X = Y = \xi : \quad g(0, 0) = 0 = -g(\xi, \xi) + \eta(\xi)^2 = -1 + 1.$$

Dolayısıyla metrik uyumluluk koşulu seçilen taban üzerinde sağlanmaktadır.

Verilen vektör alanlarının Lie parantezleri

$$[E_1, E_2] = -2\xi, \quad [E_1, \xi] = [E_2, \xi] = 0.$$

biçimindedir. Bu eşitlikler ve (2.5) bağıntısı yardımıyla bağlantı bileşenlerini hesaplayalım. Örneğin, $W = E_2$ seçildiğinde

$$2g(\nabla_{E_1} \xi, E_2) = -g([E_1, E_2], \xi) = -g(-2\xi, \xi) = 2$$

olur. Buradan

$$g(\nabla_{E_1} \xi, E_2) = 1$$

elde edilir. $g(E_2, E_2) = -1$ olduğundan

$$\nabla_{E_1} \xi = -E_2 = -\varphi E_1$$

bulunur. Benzer şekilde $\nabla_{E_2} \xi = -E_1 = -\varphi E_2$ elde edilir. Böylece $i = 1, 2$ için

$$\nabla_{E_i} \xi = -\varphi E_i$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan, Koszul bağıntısında $X = Y = \xi$ ve $W = E_j$ alınırsa

$$\nabla_{\xi}\xi = 0$$

elde edilir. Benzer hesaplamalar sonucunda yarı-Riemann bağlantısının bileşenleri

$$\nabla_{E_1}E_1 = 0, \quad \nabla_{E_2}E_2 = 0, \quad \nabla_{E_1}E_2 = -\xi, \quad \nabla_{E_2}E_1 = \xi, \quad \nabla_{E_i}\xi = -\varphi E_i \quad (i = 1, 2), \quad \nabla_{\xi}\xi = 0$$

şeklinde elde edilir.

• **Para-Sasakian karakterizasyonu:**

- $X = E_1, Y = E_1 :$

$$(\nabla_{E_1}\varphi)E_1 = \nabla_{E_1}(\varphi E_1) - \varphi(\nabla_{E_1}E_1) = \nabla_{E_1}(E_2) - \varphi(0) = -\xi,$$

öte yandan

$$-g(E_1, E_1)\xi + \eta(E_1)E_1 = -1 \cdot \xi + 0 = -\xi.$$

- $X = E_2, Y = E_2 :$

$$(\nabla_{E_2}\varphi)E_2 = \nabla_{E_2}(\varphi E_2) - \varphi(\nabla_{E_2}E_2) = \nabla_{E_2}(E_1) - \varphi(0) = \xi,$$

öte yandan

$$-g(E_2, E_2)\xi + \eta(E_2)E_2 = -(-1)\xi + 0 = \xi.$$

- $X = E_1, Y = \xi :$

$$(\nabla_{E_1}\varphi)\xi = \nabla_{E_1}(\varphi\xi) - \varphi(\nabla_{E_1}\xi) = \nabla_{E_1}(0) - \varphi(-E_2) = -\varphi(-E_2) = \varphi(E_2) = E_1,$$

öte yandan

$$-g(E_1, \xi)\xi + \eta(\xi)E_1 = 0 + 1 \cdot E_1 = E_1.$$

Yukarıdaki hesaplar, seçilen taban üzerinde (2.49) eşitliğinin sağlandığını gösterir. Eşitliğin her iki tarafı da X ve Y ye göre tensöriyel olduğundan, $\{E_1, E_2, \xi\}$ tabanında doğrulanması tüm vektör alanları X, Y için geçerlidir. Böylece (φ, ξ, η, g) yapısı para-Sasakiandır.

Önerme 2.3.1. Bir M para-Sasakian manifoldu üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Zamkovoy ve Nakova, 2018).

$$\bullet \quad \nabla_X \xi = -\varphi X, \tag{2.50}$$

- $(\nabla_X \eta)Y = d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y),$ (2.51)

- $(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = 0,$ (2.52)

- $N_\varphi(X, Y) - 2d\eta(X, Y)\xi = 0.$ (2.53)

İspat. (2.49) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$(\nabla_X \varphi)\xi = -g(X, \xi)\xi + \eta(\xi)X$$

eşitliği elde edilir. Buradan $-\varphi(\nabla_X \xi) = -\eta(X)\xi + X$ olur. Eşitliğin her iki tarafına φ uygulandığında, $\varphi^2(\nabla_X \xi) = -\varphi X + \eta(X)\varphi\xi$ bulunur. Böylece (2.1) eşitliğinden (2.50) elde edilir.

Ayrıca,

$$(\nabla_X \eta)(Y) = g(Y, \nabla_X \xi) \stackrel{(2.50)}{=} g(X, \varphi Y).$$

Dış türev tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2} \left\{ X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ g(X, \varphi Y) - g(Y, \varphi X) \right\} \\ &= g(X, \varphi Y) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla (2.51) sağlanır.

(2.52) eşitliğini göstermek için Lie türevinin metrikle ilişkisi kullanılır:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\ &= g(-\varphi X, Y) + g(X, -\varphi Y) \\ &= -g(\varphi X, Y) - g(X, \varphi Y) \\ &= -(-g(X, \varphi Y)) - g(X, \varphi Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Böylece (2.52) eşitliği sağlanır. Başka bir ifadeyle, ξ bir Killing vektör alanıdır.

Son olarak, (2.53) eşitliği; (2.1), (2.6) ve (2.49) eşitliklerinin birlikte kullanılmasıyla doğrudan elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda her $X, Y, Z, W \in$

$\chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Zamkovoy, 2009).

- $R(X, Y, \varphi Z, W) + R(X, Y, Z, \varphi W) = -d\eta(X, W)g(Y, Z) + d\eta(X, Z)g(Y, W) \\ -d\eta(Y, Z)g(X, W) + d\eta(Y, W)g(X, Z),$
- $R(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z, \varphi W) - R(X, Y, Z, W) = \eta(X)\eta(W)g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) \\ -\eta(Y)\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)\eta(Z)g(Y, W),$
- $R(X, \varphi X, Y, \varphi Y) = -R(X, Y, X, Y) + R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)g(X, Y) \\ + 2(d\eta(X, Y)^2 - g(X, Y)^2 + |X|^2|Y|^2).$

İspat. (2.49), (2.50), (2.51) eşitliklerinden ve eğrilik tensörünün simetri özelliklerinden yararlanılarak lemma ispatlanır. ■

Bianchi özdeşlikleri ve yukarıdaki lemmadan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. ξ ye dik olan X, Y, Z, W vektör alanları (eşdeğer olarak $\eta(X) = \eta(Y) = \eta(Z) = \eta(W) = 0$) için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Zamkovoy, 2009).

- $R(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z, \varphi W) = R(X, Y, Z, W),$
- $R(X, \varphi X, Y, \varphi Y) = -R(X, Y, X, Y) + R(X, \varphi Y, X, \varphi Y) \\ + 2((d\eta(X, Y))^2 - (g(X, Y))^2 + |X|^2|Y|^2).$

Teorem 2.3.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ boyutu $2n + 1$ olan bir para-Sasakian manifold ve $n > 1$ olsun. Eğer paraholomorfik kesitsel eğrilik bir noktada seçilen paraholomorfik kesitten bağımsız ise, eğrilik tensörü aşağıdaki biçimdedir: Her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{k-3}{4} \left(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W) \right) \\ + \frac{k+1}{4} \left(g(X, Y)\eta(Z)\eta(W) + g(Z, W)\eta(X)\eta(Y) - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) \right. \\ \left. + g(Y, \varphi Z)g(X, \varphi W) - g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W) + 2g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W) \right),$$

burada k bir sabittir (Zamkovoy, 2008).

İspat. Önerme 2.2.6 daki ispata benzer adımlarla hesaplanabilir. ■

3. METALİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde metalik yapılar ile ilgili temel tanım ve özelliklere yer verilecektir.

3.1. Metalik Riemann Manifolds

Tanım 3.1.1. Herhangi bir M düzgün manifoldu üzerinde $(1,1)$ -tipindeki bir tensör alanı P olsun. Eğer her $p \in M$ noktasında $P^{n-1}(p), P^{n-2}(p), \dots, P(p), I(p)$ tensörleri lineer bağımsız olacak şekilde P tensör alanı

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 I = 0$$

cebirsal denklemini sağlıyorsa P tensör alanına bir **polynomial yapı (polynomial structure)** denir. $Q(x)$ monik polinomu ise bir yapı polinomu olarak adlandırılır. Burada I, M manifoldu üzerindeki $(1,1)$ -tipindeki özdeşlik tensör alanını göstermektedir (Goldberg ve Yano, 1970).

Bu genel tanım, ikinci dereceden polinomlar üzerinden elde edilen birçok klasik geometrik yapıyı da (hemen hemen çarpım (almost product) $x^2 - I = 0$, hemen hemen kompleks (almost complex) $x^2 + I = 0$) tek bir çatı altında toplamaktadır.

Bu bakış açısından hareketle, polynomial yapılar içinde özellikle ikinci dereceden bir polinom bağıntısı sağlayan özel bir sınıf seçilerek altın oran geometrisine geçilir: Eğer

$$x^2 = x + I$$

sağlanıyorsa, x altın orana karşılık gelen altın yapı (golden structure) olarak adlandırılır. Böylece polynomial yapı kuramı içerisinde altın oranla ilişkili en temel örnek, doğrudan ikinci dereceden bir polinom seçimiyle elde edilir.

Spinadel'in yaklaşımı ise altın oranı yalnızca tek bir sabit olarak ele almak yerine, onu üreten "ardışık terim oranı limitini" parametrelili bir biçimde genelleştirerek bir aile tanımlamaktır. Bu amaçla Spinadel, $p, q \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş ikincil Fibonacci tipinde (GSFS) dizileri

$$G(n+1) = p G(n) + q G(n-1)$$

bağıntısı ile ele alır ve bu dizilerde ardışık terim oranının limitinin var olup pozitif bir reel sayıya yaklaştığını belirtir.

Bu yineleme, matris formuna

$$\begin{pmatrix} G(n+1) \\ G(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(n) \\ G(n-1) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde taşınır; böylece problem, söz konusu matrisin özdeğerleri üzerinden analiz edilir (De Spinadel, 1999).

Tanım 3.1.2. $p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, (3.1) ile ifade edilen yinelemenin geçiş matrisi

$$A_{p,q} := \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

olup, buna karşılık gelen özdeğerler (kökler)

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad \tau_{p,q} = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilir. (p, q) parametreleri tüm doğal sayılar üzerinde dolaşırken ortaya çıkan pozitif özdeğerlerin oluşturduğu küme

$$\text{MMF} := \{\sigma_{p,q} : p, q \in \mathbb{N}\}$$

metalik oranlar ailesi (metallic means family) olarak adlandırılır (De Spinadel, 1999).

Bu kökler, tanım gereği

$$\sigma^2 = p\sigma + q, \quad \tau^2 = p\tau + q. \quad (3.3)$$

eşitliklerini sağlar.

Bu aile içinde literatürde yerleşmiş bazı özel (p, q) seçimleri ve karşılık gelen adlandırmalar aşağıdaki gibidir:

- **Altın oran (golden mean)** $(p, q) = (1, 1)$:

$$\sigma_{Au} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- **Gümüş oran (silver mean)** $(p, q) = (2, 1)$:

$$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2}.$$

- **Bronz oran (bronze mean)** $(p, q) = (3, 1)$:

$$\sigma_{Br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

- **Bakır oran (copper mean)** $(p, q) = (1, 2)$:

$$\sigma_{Cu} = 2.$$

- **Nikel oran (nickel mean)** $(p, q) = (1, 3)$:

$$\sigma_{Ni} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Metalik oranlar ailesinden ilhamla, Hretcanu ve Crasmareanu 2013 yılında metalik yapıyı Riemann manifoldu üzerinde şu şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3. M düzgün bir manifold ve $J : TM \rightarrow TM$ $(1, 1)$ -tipindeki bir tensör alanı olsun.

J tensör alanı aşağıdaki bağıntıyı sağlıyorsa, J ile belirlenen polinomial yapıya metalik yapı denir:

$$J^2 = pJ + qI, \quad (3.4)$$

burada p, q pozitif tamsayılar, I ise TM üzerindeki özdeşlik (birim) dönüşümüdür.

g_R bir Riemann metriği olsun. Eğer her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g_R(JX, Y) = g_R(X, JY) \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanıyorsa g_R metriğine, J ile uyumlu (ya da J -uyumlu) denir.

Bu koşullar altında (M, g_R, J) manifoldu **metalik Riemann manifoldu** olarak adlandırılır ve (g_R, J) ikilisine M üzerinde bir metalik Riemann yapısı denir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013).

Örnek 3.1.1. $M = \mathbb{R}^3$, (x, y, z) : standart koordinatlar, $g_R = dx^2 + dy^2 + dz^2$ metriğini alalım. Standart koordinat vektör alanlarını

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

ile gösterelim. Bu taban için $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ dir. J yi standart tabana göre şu şekilde tanımlayalım:

$$J(e_1) = \sigma e_1, \quad J(e_2) = \sigma e_2, \quad J(e_3) = \tau e_3,$$

metalik parametreler

$$p = 2, \quad q = 1$$

seçelim. Bu durumda metalik sayılar

$$\sigma = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad \tau = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

şeklindedir. (3.3) eşitliğinin sağlandığını kontrol edelim.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}, & 2\sigma + 1 &= 2(1 + \sqrt{2}) + 1 = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \tau^2 &= (1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}, & 2\tau + 1 &= 2(1 - \sqrt{2}) + 1 = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Bu durumda J nin matris gösterimi ($\{e_1, e_2, e_3\}$ tabanı altında)

$$[J] = \text{diag}(\sigma, \sigma, \tau) = \text{diag}(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$

şeklindedir.

- **Metalik yapı koşulu:**

e_1 için:

$$\begin{aligned} J^2(e_1) &= J(J(e_1)) = J(\sigma e_1) = \sigma J(e_1) = \sigma(\sigma e_1) = \sigma^2 e_1, \\ (pJ + qI)(e_1) &= pJ(e_1) + q e_1 = p(\sigma e_1) + q e_1 = (p\sigma + q)e_1. \end{aligned}$$

(3.3) eşitliğinden sağlanır. Benzer şekilde e_2 ve e_3 için de doğrulanır. Dolayısıyla $J, \mathbb{R}^3$ üzerinde bir $(2, 1)$ -metalik yapıdır.

- **Metrik uyumluluk koşulu:** Herhangi iki vektör alanını standart tabana göre yazalım:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

$$Y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3,$$

burada x_i, y_i düzgün fonksiyonlardır.

Önce JX ve JY yi hesaplayalım:

$$JX = x_1 J(e_1) + x_2 J(e_2) + x_3 J(e_3) = \sigma x_1 e_1 + \sigma x_2 e_2 + \tau x_3 e_3,$$

$$JY = \sigma y_1 e_1 + \sigma y_2 e_2 + \tau y_3 e_3.$$

İç çarpımı hesapladığımızda

$$\begin{aligned} g_R(JX, Y) &= g_R(\sigma x_1 e_1 + \sigma x_2 e_2 + \tau x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) \\ &= \sigma x_1 y_1 + \sigma x_2 y_2 + \tau x_3 y_3, \\ g_R(X, JY) &= g_R(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \sigma y_1 e_1 + \sigma y_2 e_2 + \tau y_3 e_3) \\ &= \sigma x_1 y_1 + \sigma x_2 y_2 + \tau x_3 y_3. \end{aligned}$$

bulunur. Bu da (M, J, g_R) nin bir metalik Riemann manifoldu olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.1. Bir J metalik yapısı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$J^n = G(n)J + qG(n-1)I, \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada $(G(n))_{n \geq 0}$ genelleştirilmiş ikincil Fibonacci dizisi (GSFS) olup

$$G(0) = 0, \quad G(1) = 1$$

başlangıç şartlarına sahiptir.

2. J , her $x \in M$ için teğet uzay $T_x M$ üzerinde bir izomorfizmadır. Dolayısıyla J tersinirdir ve tersi

$$\bar{J} := J^{-1} = \frac{1}{q}J - \frac{p}{q}I \quad (3.7)$$

şeklinde verilir. Bununla birlikte $\bar{J}$ bir metalik yapı değildir; ancak ikinci dereceden bir polinomial yapı olup

$$q\bar{J}^2 + p\bar{J} - I = 0$$

eşitliğini sağlar.

3. J nin özdeğerleri metalik sayılar

$$\sigma_{p,q} \quad \text{ve} \quad p - \sigma_{p,q}$$

şeklindedir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2013).

İspat. (1) $(G(n))$ dizisi

$$G(0) = 0, \quad G(1) = 1, \quad G(n+1) = pG(n) + qG(n-1) \quad (n \geq 1)$$

şeklinde tanımlansın. (3.6) eşitliği tümevarım metoduyla ispatlanabilir.

$n = 1$ için:

$$G(1)J + qG(0)I = 1 \cdot J + q \cdot 0 \cdot I = J = J^1$$

sağlanır.

$n = 2$ için:

$G(2) = pG(1) + qG(0) = p$ ve $G(1) = 1$ olduğundan

$$G(2)J + qG(1)I = pJ + qI = J^2$$

sağlanır.

n için doğru olsun. $n + 1$ için doğru olduğu gösterilir:

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n J \\ &= (G(n)J + qG(n-1)I)J \\ &= G(n)J^2 + qG(n-1)J \\ &= G(n)(pJ + qI) + qG(n-1)J \quad (3.4 \text{ kullanıldı}) \\ &= (pG(n) + qG(n-1))J + qG(n)I \\ &= G(n+1)J + qG(n)I \quad (\text{dizi bağıntısı}) \\ &= G(n+1)J + qG((n+1)-1)I. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $n + 1$ için de sağlandığından (1) ispatlanır.

(2)

(3.4) eşitliği $J^2 - pJ = qI \iff J(J - pI) = qI \iff (J - pI)J = qI$ şeklinde düzenlendiğinde ve $q > 0$ olduğundan

$$J \cdot \frac{1}{q}(J - pI) = I, \quad \frac{1}{q}(J - pI) \cdot J = I$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla J her teğet uzayda hem sağdan hem soldan tersinir olup bir izomorfizmadır ve tersi

$$J^{-1} = \frac{1}{q}(J - pI) = \frac{1}{q}J - \frac{p}{q}I$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi $\bar{J} := J^{-1}$ için kuadratik polinomial bağıntıyı çıkaralım. (3.4) eşitliği J^{-2} ile soldan ve sağdan çarpıldığında

$$I = pJ^{-1} + qJ^{-2}$$

elde edilir. Buradan

$$qJ^{-2} + pJ^{-1} - I = 0$$

ve $\bar{J} = J^{-1}$ yazılınca

$$q\bar{J}^2 + p\bar{J} - I = 0 \quad (3.8)$$

sonucuna ulaşılır. Yani $\bar{J}$ ikinci dereceden polinomialdır.

Ayrıca $\bar{J}$ nin metalik yapı olmaması şu anlamdadır: genel olarak $\bar{J}^2 = p\bar{J} + qI$ eşitliği sağlanmaz. Gerçekten, metalik yapı olduğunu varsayalım: $\bar{J}^2 = p\bar{J} + qI$. Bu ifade q ile çarpıldığında

$$q\bar{J}^2 = pq\bar{J} + q^2I$$

elde edilir. Öte yandan (3.8) eşitliğinden

$$q\bar{J}^2 = I - p\bar{J}$$

yazılır. Bu iki ifade eşitlenince

$$I - p\bar{J} = pq\bar{J} + q^2I \implies (1 - q^2)I = p(1 + q)\bar{J}$$

bulunur. Dolayısıyla $p > 0$ ve $q > 0$ için bu eşitliğin sağlanması genel olarak mümkün değildir. Özellikle $q \geq 1$ iken sol taraf ya 0 ya da negatif katsayılı I iken sağ taraf $\bar{J}$ ye bağlıdır. Dolayısıyla $\bar{J}$ metalik yapı olmak zorunda değildir. Böylece (2) ispatlanır.

(3)

Her $x \in M$ için $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ lineer bir dönüşümdür ve (3.4) eşitliği noktasal olarak

$$J_x^2 = pJ_x + qI$$

şeklinde geçerlidir. Eğer λ , J_x nin bir özdeğeri ise, (3.4) eşitliğini bir özvektör üzerinde uygulayarak

$$\lambda^2 = p\lambda + q \iff \lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

sonucu elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin kökleri

$$\lambda_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

dir. Pozitif kök $\sigma_{p,q} := \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olduğundan diğer kök

$$\frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = p - \sigma_{p,q}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla J nin özdeğerleri $\sigma_{p,q}$ ve $p - \sigma_{p,q}$ dır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Önerme 3.1.2. Metalik yapılar ikililer şeklindedir. Yani J_1 bir metalik yapı ise $J_2 = pI - J_1$ de bir metalik yapıdır (Özkan ve Yılmaz, 2018).

İspat. J_1 bir metalik yapı olsun. J_2 nin bir metalik yapı olduğunu gösterelim. Keyfi X vektör alanı için

$$\begin{aligned} J_2^2 X &= J_2(J_2 X) \\ &= J_2(pX - J_1 X) \\ &= pJ_2 X - J_2(J_1 X) \\ &= p(pX - J_1 X) - (pJ_1 X - J_1^2 X) \\ &= p^2 X - pJ_1 X - pJ_1 X + J_1^2 X \\ &= p^2 X - pJ_1 X - pJ_1 X + pJ_1 X + qX \\ &= p^2 X - pJ_1 X + qX \\ &= p(pX - J_1 X) + qX \\ &= pJ_2 X + qX \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece J_2 bir metalik yapıdır. ■

Tanım 3.1.4. (M_1, g_R^1, J_1) ve (M_2, g_R^2, J_2) metalik Riemann manifoldları ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ düzgün bir harita olsun. Her $p \in M_1$ için f nin diferensiyeli $f_{*p} : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ ile gösterilsin.

$$f_{*p} \circ J_1 = J_2 \circ f_{*p} \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanıyorsa f haritasına **metalik dönüşüm** denir (Akyol, 2019).

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla (x_1, x_2, x_3, x_4) ve (y_1, y_2) standart koordinatlarını alalım. Koordinat vektör alanları

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

olmak üzere $\mathbb{R}^4$ üzerinde J_1 ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde J_2 metalik yapılarını standart tabanlara göre aşağıdaki

gibi tanımlayalım:

$$J_1(E_1) = \sigma_{p,q}E_1, \quad J_1(E_2) = \sigma_{p,q}E_2, \quad J_1(E_3) = (p - \sigma_{p,q})E_3, \quad J_1(E_4) = (p - \sigma_{p,q})E_4,$$

$$J_2(\varepsilon_1) = \sigma_{p,q}\varepsilon_1, \quad J_2(\varepsilon_2) = (p - \sigma_{p,q})\varepsilon_2.$$

Buradan

$$\begin{aligned} J_1^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= J_1\left(\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \sigma J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= (p\sigma + q) \frac{\partial}{\partial x_1} = p\left(\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + q \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= p J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + q I\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \end{aligned}$$

biçimindedir. Aynı işlem $\frac{\partial}{\partial x_2}$ için σ , $\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\frac{\partial}{\partial x_4}$ için $(p - \sigma_{p,q})$ kullanılarak yapılır ve sonuçta

$$J_1^2 = pJ_1 + qI, \quad J_2^2 = pJ_2 + qI$$

elde edilir. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım.

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2} \right).$$

$$f_*(E_1) = \frac{1}{2}\varepsilon_1, \quad f_*(E_2) = \frac{1}{2}\varepsilon_1, \quad f_*(E_3) = \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad f_*(E_4) = \frac{1}{2}\varepsilon_2$$

elde edilir. (3.9) eşitliğini doğrulayalım.

• E_1 için:

$$f_*(J_1E_1) = f_*(\sigma_{p,q}E_1) = \sigma_{p,q}f_*(E_1) = \sigma_{p,q} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{p,q}}{2}\varepsilon_1,$$

$$J_2(f_*E_1) = J_2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\right) = \frac{1}{2}J_2(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}\sigma_{p,q}\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{p,q}}{2}\varepsilon_1.$$

Benzer şekilde E_2, E_3, E_4 için de sağlanır. Sonuç olarak f bir metalik dönüşümdür.

Teorem 3.1.1. (M_1, g_R, J) bir metalik Riemann manifoldu ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold olsun. $f : M_1 \rightarrow M$ düzgün bir dönüşüm olup keyfi X vektör alanı için

$$f_*(JX) = \varphi f_*(X) \tag{3.10}$$

koşulu sağlansın. Eğer

$$p^2 \neq (q-1)^2$$

ise, f sabit bir dönüşümdür (Akyol, 2019).

İspat. (3.10) eşitliğinin her iki tarafında $X \rightarrow JX$ yazıldığında

$$f_*(J(JX)) = \varphi f_*(JX) \implies \varphi f_*(JX) = f_*(J^2 X) \quad (*)$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinden

$$f_*(J^2 X) = f_*(pJX + qX) = pf_*(JX) + qf_*(X)$$

bulunur. (3.10) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanınca

$$\begin{aligned} \varphi f_*(JX) &= \varphi^2 f_*(X) \\ pf_*(JX) + qf_*(X) &= f_*(X) - \eta(f_*(X))\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$pf_*(JX) + (q-1)f_*(X) = -\eta(f_*(X))\xi \quad (**)$$

sonucuna ulaşılır. (**) eşitliğine tekrar φ uygulanıp ve (*) eşitliği de ifadede yerine yazıldığında

$$p(pf_*(JX) + qf_*(X)) + (q-1)f_*(JX) = 0$$

bulunur ve buradan

$$(p^2 + q - 1)f_*(JX) = -pq f_*(X)$$

elde edilir. $f_*(JX)$ terimi yalnız bırakılıp

$$f_*(JX) = -\frac{pq}{p^2 + q - 1} f_*(X)$$

ve (**) da yerine yazıldığında

$$-\frac{p^2 q}{p^2 + q - 1} f_*(X) + (q-1)f_*(X) = -\eta(f_*(X))\xi \implies \frac{(q-1)^2 - p^2}{p^2 + q - 1} f_*(X) = -\eta(f_*(X))\xi$$

bulunur. Tekrar φ uygulanınca

$$\frac{(q-1)^2 - p^2}{p^2 + q - 1} \varphi f_*(X) = -\eta(f_*(X)) \varphi(\xi) = 0$$

elde edilir. (3.10) eşitliğinden $f_*(JX) = 0$ olur.

Varsayım gereği $p^2 \neq (q-1)^2$ olduğundan, katsayılar sıfır değildir; dolayısıyla her $X \in \chi(M)$ için $f_*(X) = 0$ elde edilir. Bu, f nin diferensiyelinin her noktada sıfır olduğunu, dolayısıyla f nin sabit olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.1.2. f , bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifolddan bir (M_1, g_R, J) metalik Riemann manifolduna giden düzgün bir dönüşüm olsun. Eğer

$$f_* \circ \varphi = J \circ f_*$$

eşitliği sağlanıyorsa, o halde $p^2 \neq (q-1)^2$ koşulu altında f sabit bir dönüşümdür (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.1 de verilen eşitlik koşulunun, bakır (copper) durumu için $p = 1$ ve $q = 2$ seçimiyle sağlanabildiği görülmektedir. Bu nedenle, söz konusu manifoldlar arasında sabit olmayan (non-constant) dönüşümlerin varlığı mümkündür.

3.2. Metalik Yarı-Riemann Manifoldlar

Metalik Riemann manifoldu kavramı, pozitif tanımlı bir metrik altında tanımlanmıştır. Bu kavramı, non-dejenere metrikleri kapsayacak biçimde genişletmek amacıyla metalik yarı-Riemann manifoldları aşağıda tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.1. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve J , M üzerinde tanımlı bir metalik yapı olsun. Eğer g yarı-Riemann metriği, J ile uyumlu ise; yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, Y) = g(X, JY) \quad (3.11)$$

koşulu sağlanıyorsa, (g, J) ikilisine M üzerinde bir metalik yarı-Riemann yapısı ve (M, g, J) manifolduna da **metalik yarı-Riemann manifoldu** denir. Burada metalik parametreler $p, q \in \mathbb{R}$ şeklindedir (Blaga ve Nannicini, 2020).

Tanım 3.2.2. (M, J, g) bir metalik yarı-Riemann manifoldu olsun.

1. M üzerindeki bir lineer bağlantı ∇_1 olsun. Eğer J nin bu bağlantıya göre kovaryant türevi sıfır ise, $(\nabla_1 J = 0)$ bu bağlantı bir J -bağlantısı (J -connection) olarak adlandırılır.
2. Eğer g metriğine ait yarı-Riemann bağlantısı ∇ , aynı zamanda bir J -bağlantısı ise başka bir deyişle

$$\nabla J = 0 \quad (3.12)$$

sağlanıyorsa, bu durumda (M, J, g) ye **yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu** (**locally metallic pseudo-Riemannian manifold**) denir (Blaga ve Nannicini, 2020).

Her yarı-Riemann manifoldu yerel olarak metalik yarı-Riemann yapılarına sahiptir. Gerçekten, $p^2 + 4q \geq 0$ olmak üzere

$$J = \mu I$$

seçelim. Burada $\mu = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olup I özdeşlik dönüşümünü göstermektedir. Bu durumda J , (3.4) bağıntısını sağladığından, (M, J, g) yerel olarak metalik yarı-Riemann bir yapı örneği verir (Blaga ve Nannicini, 2020).

Tanım 3.2.3. $p^2 + 4q \geq 0$ olmak üzere

$$J := \mu I, \quad \mu = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

şeklinde tanımlanan metalik yapı **trivial (banal) metalik yapı** olarak adlandırılır (Blaga ve Nannicini, 2020).

Tanım 3.2.4. (M, J, g) bir metalik yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da yarı-Riemann bağlantısı olsun. Eğer her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \quad (3.13)$$

koşulu sağlanıyorsa, (M, J, g) manifolduna **neredeyse yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu** (**nearly locally metallic pseudo-Riemannian manifold**) denir (Blaga ve Nannicini, 2020).

Tanım 3.2.5. Bir J metalik yapısının, Nijenhuis tensörü

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y], \quad X, Y \in \chi(M),$$

sıfır ise **integrallenebilir (integrable)** olarak adlandırılır (Blaga ve Nannicini, 2020).

Lemma 3.2.1. Eğer (M, J, g) bir yerel metalik yarı-Riemann manifold ise, o halde J integrallenebilirdir (Blaga ve Nannicini, 2020).

İspat. (3.12) den $\nabla J = 0$ elde edilir. Ayrıca her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_J(X, Y) = (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y \quad (3.14)$$

yazılabildiğinden, $\nabla J = 0$ altında sağ taraf sıfır olur ve dolayısıyla $N_J = 0$ bulunur. ■

Önerme 3.2.1. (M, J, g) bir neredeyse yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu olsun. O halde $p^2 + 4q > 0$ olmak üzere (M, J, g) yerel olarak metaliktir ($\nabla J = 0$) ancak ve ancak J integrallenebilirdir (Blaga ve Nannicini, 2020).

İspat. ($\Rightarrow$:) Eğer $\nabla J = 0$ ise, J paraleldir ve özellikle $(\nabla_X J)Y = 0$ her X, Y için sağlanır. Bu durumda N_J tensörünün ∇J cinsinden ifadesindeki tüm terimler sıfır olacağından $N_J = 0$ elde edilir. Dolayısıyla J integrallenebilirdir.

($\Leftarrow$:) Şimdi (M, J, g) neredeyse yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu ve ayrıca J integrallenebilir olsun. (3.14) eşitliğine (3.13) koşulu uygulanınca

$$(\nabla_{JX} J)Y = -(\nabla_Y J)(JX), \quad (\nabla_{JY} J)X = -(\nabla_X J)(JY)$$

bulunur. Bu ifadeler (3.14) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$N_J(X, Y) = -(\nabla_Y J)(JX) + (\nabla_X J)(JY) + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y \quad (3.15)$$

elde edilir.

(3.15) eşitliğindeki birinci ve üçüncü terimleri birlikte ele alalım. Öncelikle $(\nabla_Y(J^2X))$ ifadesini kovaryant türevin çarpım kuralını kullanarak açalım:

$$\nabla_Y(J^2X) = \nabla_Y(J(JX)) = (\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y(JX)).$$

Sağ taraftaki ikinci terime çarpım kuralı bir kez daha uygulandığında

$$\nabla_Y(JX) = (\nabla_Y J)X + J\nabla_Y X$$

olduğundan,

$$\nabla_Y(J^2X) = (\nabla_Y J)(JX) + J((\nabla_Y J)X + J\nabla_Y X) = (\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y J)X + J^2\nabla_Y X$$

eşitliği elde edilir. Buradan $((\nabla_Y J)(JX))$ terimi yalnız bırakılırsa

$$(\nabla_Y J)(JX) = \nabla_Y(J^2X) - J(\nabla_Y J)X - J^2\nabla_Y X$$

bulunur. Dolayısıyla

$$-(\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y J)X = -\nabla_Y(J^2X) + 2J(\nabla_Y J)X + J^2\nabla_Y X \quad (3.16)$$

olur. Benzer şekilde, X ve Y değişkenlerinin rolleri değiştirilerek

$$(\nabla_X J)(JY) - J(\nabla_X J)Y = \nabla_X(J^2Y) - 2J(\nabla_X J)Y - J^2\nabla_X Y \quad (3.17)$$

bağıntısı elde edilir. (3.16) ve (3.17) eşitlikleri (3.15) ifadesinde yerine yazıldığında, J yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_J(X, Y) = -\nabla_Y(J^2X) + 2J(\nabla_YJ)X + J^2\nabla_YX + \nabla_X(J^2Y) - 2J(\nabla_XJ)Y - J^2\nabla_XY \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Şimdi (3.4) beğintisi kullanılarak

$$\nabla_Y(J^2X) = \nabla_Y(pJX + qX) = p\nabla_Y(JX) + q\nabla_YX = p(\nabla_YJ)X + pJ\nabla_YX + q\nabla_YX$$

olur. Öte yandan,

$$J^2\nabla_YX = (pJ + qI)\nabla_YX = pJ\nabla_YX + q\nabla_YX$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadeler (3.18) eşitliğindeki Y değişkenine bağlı ilk üç terimde yerine yazıldığında

$$-\nabla_Y(J^2X) + 2J(\nabla_YJ)X + J^2\nabla_YX = -\left(p(\nabla_YJ)X + pJ\nabla_YX + q\nabla_YX\right) + 2J(\nabla_YJ)X + \left(pJ\nabla_YX + q\nabla_YX\right).$$

Burada $pJ\nabla_YX$ ve $q\nabla_YX$ terimleri karşılıklı olarak birbirini götürür. Böylece

$$-\nabla_Y(J^2X) + 2J(\nabla_YJ)X + J^2\nabla_YX = -p(\nabla_YJ)X + 2J(\nabla_YJ)X = (2J - pI)(\nabla_YJ)X \quad (3.19)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $p^2 + 4q > 0$ olduğundan $t^2 - pt - q$ polinomunun iki farklı gerçekte kökü vardır; bu nedenle $\frac{p}{2}$ değeri bu polinomun kökü değildir ve dolayısıyla J nin bir özdeğeri olamaz. Böylece $2J - pI$ her noktada tersinirdir. (3.19) ve $N_J \equiv 0$ birlikte

$$(2J - pI)(\nabla_YJ)X = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla_YJ)X = 0 \quad (\forall X, Y)$$

sonucunu verir; yani $\nabla J = 0$.

Ters yönde, $\nabla J = 0$ ise (3.14) doğrudan $N_J = 0$ verir. Dolayısıyla $\nabla J = 0 \iff N_J = 0$ ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.1. (M, J, g) bir metalik yarı-Riemann manifoldu ve $\Delta := p^2 + 4q \neq 0$ olsun. g ye ait yarı-Riemann bağlantısını ∇ ile gösterelim. Manifold üzerinde bir D lineer bağlantısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$D := \nabla + \frac{2}{\Delta} J(\nabla J) - \frac{p}{\Delta} (\nabla J), \quad (3.20)$$

O halde

$$DJ = 0 \quad \text{ve} \quad Dg = 0$$

sağlanır. Başka bir deyişle D , hem J yi hem de g yi koruyan bir bağlantıdır (Blaga ve Nannicini, 2020).

İspat. Metalik yapı bağıntısı her noktada geçerli olduğundan ve p, q sabit olduğundan, ∇ ile türev alarak

$$\nabla_X(J^2) = \nabla_X(pJ + qI) = p \nabla_X J \quad (3.21)$$

elde edilir. Öte yandan

$$(\nabla_X(J^2))(Y) := \nabla_X(J^2 Y) - J^2(\nabla_X Y) = \nabla_X(J(JY)) - J^2(\nabla_X Y) \quad (3.22)$$

yazılır. Şimdi $(\nabla_X J)J + J(\nabla_X J)$ ifadesinin Y üzerindeki etkisini ayrı ayrı hesaplayalım.

$$((\nabla_X J)J)(Y) = (\nabla_X J)(JY) = \nabla_X(J(JY)) - J(\nabla_X(JY)). \quad (3.23)$$

Diğer taraftan

$$(J(\nabla_X J))(Y) = J((\nabla_X J)(Y)) = J(\nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)) = J(\nabla_X(JY)) - J^2(\nabla_X Y). \quad (3.24)$$

(3.23) ve (3.24) eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} ((\nabla_X J)J + J(\nabla_X J))(Y) &= \nabla_X(J(JY)) - J(\nabla_X(JY)) + J(\nabla_X(JY)) - J^2(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(J(JY)) - J^2(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

bulunur. Sağ taraftaki ifade ise (3.22) ile tam olarak $(\nabla_X(J^2))(Y)$ dir. Dolayısıyla her Y vektör alanı için

$$(\nabla_X(J^2))(Y) = ((\nabla_X J)J + J(\nabla_X J))(Y)$$

elde edilir. Bu, tensör eşitliği olarak

$$\nabla_X(J^2) = (\nabla_X J)J + J(\nabla_X J)$$

şeklinde yazılır. (3.21) ile

$$(\nabla_X J)J + J(\nabla_X J) = p(\nabla_X J)$$

eşitliği sağlanır. Özellikle her Y vektör alanı için

$$(\nabla_X J)(JY) = p(\nabla_X J)Y - J((\nabla_X J)Y) \quad (3.25)$$

olur. Her X, Y vektör alanları için

$$(D_X J)Y := D_X(JY) - J(D_X Y)$$

tanımını kullanalım. (3.20) ile

$$\begin{aligned} D_X(JY) &= \nabla_X(JY) + \frac{2}{\Delta} J((\nabla_X J)(JY)) - \frac{p}{\Delta} (\nabla_X J)(JY), \\ J(D_X Y) &= J(\nabla_X Y) + \frac{2}{\Delta} J^2((\nabla_X J)Y) - \frac{p}{\Delta} J((\nabla_X J)Y). \end{aligned}$$

Bu son iki eşitliğin farkını alıp düzenlediğimizde

$$\begin{aligned} (D_X J)Y &= (\nabla_X J)Y + \frac{2}{\Delta} \left(J((\nabla_X J)(JY)) - J^2((\nabla_X J)Y) \right) \\ &\quad - \frac{p}{\Delta} \left((\nabla_X J)(JY) - J((\nabla_X J)Y) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

bulunur. Şimdi (3.25) i (3.26) da yerine yazıp sadeleştirelim. (3.25) gereği

$$J((\nabla_X J)(JY)) = p J((\nabla_X J)Y) - J^2((\nabla_X J)Y),$$

$$(\nabla_X J)(JY) - J((\nabla_X J)Y) = p(\nabla_X J)Y - 2J((\nabla_X J)Y)$$

olur. Bunları (3.26) denkleminde yazıp Δ ile çarptığımızda

$$\Delta(D_X J)Y = \Delta(\nabla_X J)Y + 2pJ((\nabla_X J)Y) - 4J^2((\nabla_X J)Y) - p^2(\nabla_X J)Y + 2pJ((\nabla_X J)Y)$$

elde edilir. Δ nın tanımından

$$\Delta(\nabla_X J)Y - p^2(\nabla_X J)Y = 4q(\nabla_X J)Y$$

olur ve dolayısıyla

$$\Delta(D_X J)Y = 4 \left(q(\nabla_X J)Y + pJ((\nabla_X J)Y) - J^2((\nabla_X J)Y) \right).$$

Metalik yapı tanımı gereği parantez içi sıfırdır. Böylece $(D_X J)Y = 0$ yani $DJ = 0$ dır.

Her X, Y, Z vektör alanları için

$$(D_X g)(Y, Z) := X(g(Y, Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z)$$

olsun. yarı-Riemann bağlantısı için $\nabla g = 0$ olduğundan,

$$X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

ve bu nedenle (3.20) kullanılarak

$$(D_X g)(Y, Z) = -\frac{2}{\Delta} g(J((\nabla_X J)Y), Z) + \frac{p}{\Delta} g((\nabla_X J)Y, Z) - \frac{2}{\Delta} g(Y, J((\nabla_X J)Z)) + \frac{p}{\Delta} g(Y, (\nabla_X J)Z) \quad (3.27)$$

elde edilir. J , g -simetrik olduğundan

$$g(J((\nabla_X J)Y), Z) = g((\nabla_X J)Y, JZ), \quad g(Y, J((\nabla_X J)Z)) = g(JY, (\nabla_X J)Z)$$

olur. Böylece (3.27) denklemi

$$(D_X g)(Y, Z) = \frac{1}{\Delta} \left(2g((\nabla_X J)Y, JZ) - p g((\nabla_X J)Y, Z) + 2g(JY, (\nabla_X J)Z) - p g(Y, (\nabla_X J)Z) \right) \quad (3.28)$$

şeklini alır. Şimdi $g(JY, Z) = g(Y, JZ)$ özdeşliğinin X yönünde türevini alalım. $\nabla g = 0$ kullanırsa

$$g((\nabla_X J)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X J)Z)$$

elde edilir. Ayrıca $g(JY, JZ) = g(Y, J^2 Z)$ olduğundan

$$X(g(JY, JZ)) = g((\nabla_X J)Y, JZ) + g(JY, (\nabla_X J)Z).$$

Dolayısıyla (3.28) denklemi şu biçime dönüşür:

$$(D_X g)(Y, Z) = \frac{1}{\Delta} \left(2X(g(JY, JZ)) - pX(g(Y, JZ)) - pX(g(JY, Z)) \right). \quad (3.29)$$

Burada $g(JY, Z) = g(Y, JZ)$ olduğundan $X(g(JY, Z)) = X(g(Y, JZ))$ ve böylece

$$(D_X g)(Y, Z) = \frac{2}{\Delta} \left(X(g(JY, JZ)) - pX(g(Y, JZ)) \right).$$

Son olarak $g(JY, JZ) = g(Y, J^2 Z)$ ve (3.4) ile

$$g(JY, JZ) = g(Y, pJZ + qZ) = p g(Y, JZ) + q g(Y, Z).$$

Bunun X yönünde türevi

$$X(g(JY, JZ)) = pX(g(Y, JZ)) + qX(g(Y, Z))$$

olur. Bu eşitlik bir önceki ifadede yerine yazıldığında

$$(D_X g)(Y, Z) = \frac{2}{\Delta} \left(pX(g(Y, JZ)) + qX(g(Y, Z)) - pX(g(Y, JZ)) \right) = \frac{2q}{\Delta} X(g(Y, Z)).$$

bulunur.

Ancak (3.29) yazımında zaten $\nabla g = 0$ kullanıldığından, kalan $X(g(Y, Z))$ terimleri tam olarak dengelenir ve sonuçta $(D_X g)(Y, Z) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $Dg = 0$. ■

Tanım 3.2.6. (3.20) bağıntısı ile tanımlanan D lineer bağlantısı (M, J, g) manifoldunun **metalik doğal bağlantısı (metallic natural connection)** olarak adlandırılır (Blaga ve Nannicini, 2020).

3.3. Metalik Yarı-Riemann Manifoldlarının Eğrilik Tensörleri

(M, J, g) bir yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da g nin yarı-Riemann bağlantısı olsun. (2.7) ile önce $R(X, Y)Z$ ile J nin birbirleriyle değişmeli olduğunu gösterelim. Genel durumda aşağıdaki ayrışım yazılabilir:

$$\begin{aligned} R(X, Y)JZ &= J(R(X, Y)Z) + \nabla_X(\nabla_Y J)Z - \nabla_Y(\nabla_X J)Z - (\nabla_{[X, Y]}J)Z \\ &\quad + (\nabla_X J)\nabla_Y Z - (\nabla_Y J)\nabla_X Z. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Yerel olarak metalik yapı varsayımı altında $\nabla J = 0$ olduğundan, (3.30) eşitliğinde $J(R(X, Y)Z)$ dışındaki tüm terimler sıfır olur ve

$$R(X, Y)JZ = J(R(X, Y)Z) \quad (3.31)$$

elde edilir.

J yapısının g -simetrikliğini ve eğrilik tensörünün standart simetrileri kullanılarak (1)–(5) eşitlikleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

(1) $R(JX, Y, Z, W) = R(X, JY, Z, W)$.

$$\begin{aligned} R(JX, Y, Z, W) &= g(R(JX, Y)Z, W) = g(R(Z, W)JX, Y) \\ &= g(J(R(Z, W)X), Y) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} &= g(R(Z, W)X, JY) \quad (J, g\text{-simetrik}) \\ &= g(R(X, JY)Z, W) = R(X, JY, Z, W). \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$(2) R(X, Y, JZ, W) = R(X, Y, Z, JW).$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, JZ, W) &= g(R(X, Y)JZ, W) = g(J(R(X, Y)Z), W) \quad (3.31) \\ &= g(R(X, Y)Z, JW) \quad (J, g\text{-simetrik}) \\ &= R(X, Y, Z, JW). \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$(3) R(JX, JY, Z, W) = pR(X, JY, Z, W) + qR(X, Y, Z, W).$$

$$\begin{aligned} R(JX, JY, Z, W) &= g(R(JX, JY)Z, W) = g(R(Z, W)JX, JY) \\ &= g(J(R(Z, W)X), JY) \quad (3.31) \\ &= g(R(Z, W)X, J^2Y) \quad (g(JU, JV) = g(U, J^2V)) \\ &= g(R(Z, W)X, pJY + qY) \quad ((3.4)) \\ &= p g(R(Z, W)X, JY) + q g(R(Z, W)X, Y) \\ &= pR(X, JY, Z, W) + qR(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

$$(4) R(X, Y, JZ, JW) = pR(X, Y, Z, JW) + qR(X, Y, Z, W).$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, JZ, JW) &= g(R(X, Y)JZ, JW) = g(J(R(X, Y)Z), JW) \quad (3.31) \\ &= g(R(X, Y)Z, J^2W) \quad (g(JU, JV) = g(U, J^2V)) \\ &= g(R(X, Y)Z, pJW + qW) \quad ((3.4)) \\ &= p g(R(X, Y)Z, JW) + q g(R(X, Y)Z, W) \\ &= pR(X, Y, Z, JW) + qR(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

$$(5) R(X, JY, JZ, W) = R(JX, Y, JZ, W) = R(JX, Y, Z, JW) = R(X, JY, Z, JW).$$

Önce (3.32) eşitliği $(X, Y, Z, W) \mapsto (X, Y, JZ, W)$ için uygulanır.

$$R(JX, Y, JZ, W) = R(X, JY, JZ, W).$$

Ardından (3.33) eşitliği $(X, Y, Z, W) \mapsto (JX, Y, Z, W)$ için uygulanır.

$$R(JX, Y, JZ, W) = R(JX, Y, Z, JW).$$

Son olarak (3.32) eşitliği $(X, Y, Z, W) \mapsto (X, Y, Z, JW)$ için uygulandığında

$$R(JX, Y, Z, JW) = R(X, JY, Z, JW)$$

elde edilir. Bu üç eşitlik birlikte

$$R(X, JY, JZ, W) = R(JX, Y, JZ, W) = R(JX, Y, Z, JW) = R(X, JY, Z, JW)$$

zincirini verir.

Yukarıda elde edilen (1)–(5) numaralı özdeşlikler için aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 3.3.1. (M, J, g) yerel olarak metalik yarı-Riemann manifold olsun. O halde, keyfi X, Y, Z, W vektör alanları için

$$\begin{aligned} R(JX, Y, Z, W) &= R(X, JY, Z, W), \\ R(X, Y, JZ, W) &= R(X, Y, Z, JW), \\ R(JX, JY, Z, W) &= p R(X, JY, Z, W) + q R(X, Y, Z, W), \\ R(X, Y, JZ, JW) &= p R(X, Y, Z, JW) + q R(X, Y, Z, W), \\ R(X, JY, JZ, W) &= R(JX, Y, JZ, W) = R(JX, Y, Z, JW) = R(X, JY, Z, JW) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir (Blaga ve Nannicini, 2019).

Tanım 3.3.1. (M, J, g) metalik yarı-Riemann manifoldu üzerinde sıfır olmayan bir X vektör alanını ve $\pi_{X, JX} := \text{span}\{X, JX\}$ ile gösterilen J -düzlemini göz önüne alalım. Bu düzlem, g metriğine göre non-dejenere ise, yani $g(X, X)g(JX, JX) - (g(X, JX))^2 \neq 0$, bu durumda $\pi_{X, JX}$ boyunca J -kesitsel eğrilik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K_J(X) := \frac{g(R(X, JX)X, JX)}{g(X, X)g(JX, JX) - (g(X, JX))^2}. \quad (3.34)$$

Eğer K_J sabit bir sayı ise, M manifoldunun sabit J -kesitsel eğriliğe sahiptir denir.

Ayrıca hesap kolaylığı için

$$k_J(X) := R(X, JX, X, JX)$$

kısaltması kullanılır (Blaga ve Nannicini, 2019).

Önerme 3.3.2. (M, J, g) yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her X vektör alanı için

$$k_J(X) = 0$$

dır.

Özellikle $\pi_{X, JX}$ non-dejenere ise, (3.34) ile tanımlanan J -kesitsel eğrilik

$$K_J(X) = 0$$

dır (Blaga ve Nannicini, 2019).

İspat. Tanım gereği $k_J(X) = R(X, JX, X, JX)$ dir. Yerel olarak metalik yapı varsayımı altında

eğrilik tensörü için (3.32) özdeşliği geçerlidir. Bu özdeşlikte $Y \rightarrow X, Z \rightarrow X, W \rightarrow JX$ seçersek

$$R(JX, X, X, JX) = R(X, JX, X, JX) = k_J(X)$$

elde edilir. Öte yandan, Riemann eğrilik tensörü ilk iki değişkende ters-simetriye sahip olduğundan

$$R(JX, X, X, JX) = -R(X, JX, X, JX) = -k_J(X)$$

olur. Dolayısıyla $k_J(X) = -k_J(X)$ ve buradan $k_J(X) = 0$ sonucu çıkar. Son olarak, $\pi_{X, JX}$ non-dejenere ise (3.34) de pay

$$g(R(X, JX)X, JX) = R(X, JX, X, JX) = k_J(X)$$

olduğundan, $k_J(X) = 0$ ile birlikte $K_J(X) = 0$ elde edilir. ■

Tanım 3.3.2. (M, J, g) bir metalik yarı-Riemann manifoldu, X ve Y , lineer bağımsız iki teğet vektör alanı olsun. X ve JX tarafından, ayrıca Y ve JY tarafından üretilen düzlemleri sırasıyla

$$\pi_{X, JX} := \text{span}\{X, JX\}, \quad \pi_{Y, JY} := \text{span}\{Y, JY\}$$

ile gösterelim. Eğer $\pi_{X, JX}$ ve $\pi_{Y, JY}$ düzlemleri g ye göre non-dejenere ise, yani;

$$g(X, X)g(JX, JX) - (g(X, JX))^2 \neq 0, \quad g(Y, Y)g(JY, JY) - (g(Y, JY))^2 \neq 0,$$

J -bikesitsel eğrilik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K^J(X, Y) :=$$

$$\frac{g(R(X, JX)Y, JY) \sqrt{|g(X, X)g(JX, JX) - (g(X, JX))^2|} \sqrt{|g(Y, Y)g(JY, JY) - (g(Y, JY))^2|}}{(g(X, X)g(JX, JX) - (g(X, JX))^2) (g(Y, Y)g(JY, JY) - (g(Y, JY))^2)} \quad (3.35)$$

Eğer $K^J(X, Y)$ uygun tüm X, Y seçimleri için sabit bir değere eşit ise, M nin sabit J -bikesitsel eğrilğe sahip olduğu söylenir (Blaga ve Nannicini, 2019).

Önerme 3.3.3. (M, J, g) yerel metalik yarı-Riemann manifoldu olsun. Ayrıca

$$k^J(X, Y) := R(X, JX, Y, JY)$$

olsun. O halde her X, Y vektör alanı için

$$k^J(X, Y) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, non-dejenere düzlem kesitleri için tanımlanan J -bikesitsel eğrilik $K^J(X, Y)$ sıfırdır.

İspat. Yerel olarak metalik yapı olma koşulundan $\nabla J = 0$ elde edilir. Öte yandan metalik yapıda J nin g -simetrik olması nedeniyle her $U, V, Z, W \in \chi(M)$ için

$$R(U, V, JZ, W) = g(R(U, V)(JZ), W) = g(J(R(U, V)Z), W) = g(R(U, V)Z, JW) = R(U, V, Z, JW)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $U = X, V = JX, Z = Y$ ve $W = Y$ seçilirse

$$R(X, JX, JY, Y) = R(X, JX, Y, JY)$$

elde edilir. Bununla birlikte Riemann eğrilik tensörü son iki değişkende antisimetrik olduğundan

$$R(X, JX, JY, Y) = -R(X, JX, Y, JY)$$

bulunur. Dolayısıyla aynı ifade hem kendisine hem de negatifine eşittir; bu da

$$R(X, JX, Y, JY) = 0$$

demektir. Tanım gereği $k^J(X, Y) = R(X, JX, Y, JY)$ olduğundan $k^J(X, Y) = 0$ bulunur.

Son olarak, non-dejenere düzlemler için tanımlanan J -bikesitsel eğrilikte

$$K^J(X, Y) = g(R(X, JX)Y, JY) = R(X, JX, Y, JY) = k^J(X, Y)$$

oldüğundan, pay sıfırdır ve bu nedenle $K^J(X, Y) = 0$ elde edilir. ■

Tanım 3.3.3. (M, J, g) yapısına sahip manifold, her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$R(JX, JY, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W)$$

eşitliğini sağlıyorsa **RM-manifold** olarak adlandırılır (Blaga ve Nannicini, 2019).

Bu koşul, eğriliğin J ile taşınan teğet vektörlerde aynı değeri verdiğini, başka bir deyişle J nin Riemann eğrilik tensörü için bir değişmezlik oluşturduğunu belirtir. Dolayısıyla J ile taşınan düzlemler üzerinde ölçülen eğrilik, tensör düzeyinde korunmuş olur.

Önerme 3.3.4. (M, J, g) bir metalik yarı-Riemann manifoldu ve ayrıca M bir RM-manifold

olsun. Eğer $q^2 \neq 1$ ise, her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$k_J(X) = 0 \quad \text{ve} \quad k_J(X, Y) = 0$$

olur. Özellikle $q^2 \neq 1$ şartı altında, tüm non-dejenere düzlem kesitlerinde J -kesitsel eğrilik ile J -bikesitsel eğrilik sıfırdır (Blaga ve Nannicini, 2019).

İspat. Öncelikle $k_J(X)$ ifadesine RM-koşulunu $(X, Y, Z, W) = (X, JX, X, JX)$ seçimiyle uygulanınca

$$k_J(X) = R(JX, J(JX), JX, J(JX)) = R(JX, J^2X, JX, J^2X)$$

elde edilir. Metalik yapı ve multilineerlik ile eğrilik tensörünün simetri özelliklerinden

$$\begin{aligned} R(JX, J^2X, JX, J^2X) &= R(JX, pJX + qX, JX, pJX + qX) \\ &= p^2 R(JX, JX, JX, JX) + pq R(JX, JX, JX, X) \\ &\quad + pq R(JX, X, JX, JX) + q^2 R(JX, X, JX, X) \\ &= q^2 R(JX, X, JX, X). \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $R(JX, X, JX, X) = R(X, JX, X, JX) = k_J(X)$ olduğundan

$$k_J(X) = q^2 k_J(X)$$

olur. $q^2 \neq 1$ olduğundan $k_J(X) = 0$ sonucu çıkar. Benzer biçimde

$$k_J(X, Y) = 0$$

elde edilir.

Son olarak, J -kesitsel ve J -bikesitsel eğriliklerin paylarında sırasıyla $k_J(X)$ ve $k_J(X, Y)$ bulunduğu (paydalar non-dejenere durumda sıfır olmadığından) bu eğrilikler de sıfırdır. ■

Teorem 3.3.1. $J^2 = pJ + qI$ bağıntısını sağlayan (M, J, g) , bir yerel olarak metalik yarı-Riemann manifoldu ve aynı zamanda bir RM-manifold olsun. Eğer

$$q[p^2 - (q-1)^2] \neq 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq -1,$$

ise (M, g) nin Riemann eğrilik tensörü sıfırdır; yani $R \equiv 0$ (Blaga ve Nannicini, 2019).

İspat. Önerme 3.3.1 ve eğrilik tensörünün ilk iki değişkendeki ters simetrisinden

$$R(X, JX, Y, JY) = R(JX, X, Y, JY) = -R(X, JX, Y, JY)$$

yazılır; dolayısıyla $R(X, JX, Y, JY) = 0$ dır. Diğer taraftan Bianchi özdeşliğinden

$$R(X, JX, Y, JY) + R(JX, Y, X, JY) + R(Y, X, JX, JY) = 0.$$

eşitliği geçerlidir. İlk terim sıfır olduğundan

$$R(JX, Y, X, JY) + R(Y, X, JX, JY) = 0$$

olur. Şimdi eğrilik tensörünün standart simetrileri kullanılarak

$$R(JX, Y, X, JY) = R(X, JY, X, JY) \quad \text{ve} \quad R(Y, X, JX, JY) = -R(X, Y, JX, JY) = -R(X, Y, X, J^2Y)$$

yazılabilir. Böylece

$$0 = -R(X, JY, X, JY) + R(X, Y, X, J^2Y)$$

olup, metalik yapı tanımından

$$R(X, JY, X, JY) = p R(X, Y, X, JY) + q R(X, Y, X, Y) \quad (3.36)$$

sonucu elde edilir. J tersinir olduğundan RM-koşulu $R(JU, JV, JW, JZ) = R(U, V, W, Z)$ şeklinde kullanılıp $U = J^{-1}X$, $V = Y$, $W = J^{-1}X$, $Z = Y$ olarak alındığında

$$R(X, JY, X, JY) = R(J(J^{-1}X), JY, J(J^{-1}X), JY) = R(J^{-1}X, Y, J^{-1}X, Y)$$

elde edilir. (3.7) ile

$$R(J^{-1}X, Y, J^{-1}X, Y) = \frac{1}{q^2} R(JX, Y, JX, Y) - \frac{2p}{q^2} R(X, Y, JX, Y) + \frac{p^2}{q^2} R(X, Y, X, Y)$$

yazılır. Buradan önerme 3.3.1 ile

$$R(X, JY, X, JY) = \frac{1}{q^2} R(X, JY, X, JY) - \frac{2p}{q^2} R(X, Y, X, JY) + \frac{p^2}{q^2} R(X, Y, X, Y) \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. (3.37) yi düzenlenip

$$\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) R(X, JY, X, JY) = -\frac{2p}{q^2} R(X, Y, X, JY) + \frac{p^2}{q^2} R(X, Y, X, Y). \quad (3.38)$$

(3.36) yerine yazıldığında

$$\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \left(q R(X, Y, X, Y) + p R(X, Y, X, JY)\right) = -\frac{2p}{q^2} R(X, Y, X, JY) + \frac{p^2}{q^2} R(X, Y, X, Y).$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$(q^3 - q - p^2) R(X, Y, X, Y) = -p(q^2 + 1) R(X, Y, X, JY)$$

bulunur. Buradan $R(X, Y, X, JY)$ çekilerek (3.36) da yazıldığında

$$R(X, JY, X, JY) = \frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} R(X, Y, X, Y) \quad (3.39)$$

sonucuna ulaşılır.

(3.39) da X yerine JX yazıp ayrıca önerme 3.3.1 ile $R(JX, Y, JX, Y) = R(X, JY, X, JY)$ eşitliği kullanılarak

$$R(JX, JY, JX, JY) = \frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} R(JX, Y, JX, Y) = \left(\frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} \right) R(X, JY, X, JY).$$

Öte yandan RM-koşulundan ve (3.39) den

$$R(X, Y, X, Y) = \left(\frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} \right)^2 R(X, Y, X, Y).$$

Dolayısıyla

$$\left[\left(\frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} \right)^2 - 1 \right] R(X, Y, X, Y) = 0.$$

Eğer

$$\left(\frac{p^2 + 2q}{q^2 + 1} \right)^2 \neq 1$$

ise buradan her X, Y için $R(X, Y, X, Y) = 0$ elde edilir. Bu koşul, $p \neq 0$ ve $q \neq -1$ altında, eşdeğer olarak $p^2 \neq (q - 1)^2$ demektir; dolayısıyla teorem varsayımı $q[p^2 - (q - 1)^2] \neq 0$ tam olarak bunu sağlar.

Sonuç olarak $R(X, Y, X, Y) = 0$ tüm X, Y için geçerlidir. Eğrilik tensörü multilineer olup standart simetrilere sahip olduğundan, kutuplaştırma (polarizasyon) argümanı ile bu eşitlik $R(X, Y, Z, W) = 0$ sonucunu verir. Yani $R \equiv 0$. ■

4. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK YAPILARDAN METALİK YAPI ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde, hemen hemen parakontak metrik yapılardan hareketle metalik yapıların nasıl elde edilebileceği incelenecektir. Öncelikle bir φ -ilişkili metalik yapı ve bu yapıya uygun yarı-Riemann metriği tanımlanacak, daha sonra ξ vektör alanının paralel olduğu durumda, para-Kenmotsu ve para-Sasakian yapılarda φ -ilişkili metalik yapının özellikleri incelenecektir.

4.1. φ -İlişkili Metalik Yapı ve Uyumlu Yarı-Riemann Metriği

Teorem 4.1.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold ve $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p^2 + 4q > 0$ olsun. M üzerinde $(1, 1)$ -tipindeki bir Ψ tensör alanı,

$$\begin{aligned} \Psi : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M), \\ X &\longmapsto \Psi X := \sigma X + (p - 2\sigma)\eta(X)\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\sigma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ ve $\sigma^* = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olsun. Bu durumda Ψ , M üzerinde

$$\Psi^2 = p\Psi + qI \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlayan bir metalik yapıdır.

Ayrıca, Ψ metalik yapısının ikilisi $\tilde{\Psi}$,

$$\tilde{\Psi}X = \sigma^*X + (p - 2\sigma^*)\eta(X)\xi$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte, ξ vektör alanı Ψ ve $\tilde{\Psi}$ yapılarının ortak bir özvektörü olup sırasıyla σ^* ve σ özdeğerlerine karşılık gelir. Başka bir ifadeyle,

$$\Psi\xi = \sigma^*\xi, \quad \tilde{\Psi}\xi = \sigma\xi$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Her $X \in \chi(M)$ için (4.1) eşitliğinden

$$\Psi^2X = \Psi(\Psi X) = \sigma\Psi X + (p - 2\sigma)\eta(X)\Psi\xi$$

yazılır. Diğer taraftan, $\eta(\xi) = 1$ ve $p - \sigma = \sigma^*$ olduğundan

$$\Psi\xi = \sigma\xi + (p - 2\sigma)\eta(\xi)\xi = \sigma^*\xi$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\Psi^2 X &= \sigma(\sigma X + (p - 2\sigma)\eta(X)\xi) + (p - 2\sigma)\sigma^* \eta(X)\xi \\ &= \sigma^2 X + (p - 2\sigma)(\sigma + \sigma^*)\eta(X)\xi \\ &= \sigma^2 X + p(p - 2\sigma)\eta(X)\xi\end{aligned}$$

bulunur. (3.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Psi^2 X &= p\sigma X + qX + p(p - 2\sigma)\eta(X)\xi \\ &= p(\sigma X + (p - 2\sigma)\eta(X)\xi) + qX \\ &= p\Psi X + qX\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.2) eşitliği sağlandığından Ψ bir metalik yapıdır.

Benzer şekilde, $p - \sigma^* = \sigma$ olduğundan $\widetilde{\Psi}\xi = \sigma\xi$ elde edilir. Dolayısıyla ξ , Ψ ve $\widetilde{\Psi}$ yapılarının ortak bir özvektörü olup sırasıyla σ^* ve σ özdeğerlerine karşılık gelir. ■

Bundan sonra Ψ metalik yapısına φ -ilişkili metalik yapı adı verilecektir.

Önerme 4.1.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold ve Ψ , M üzerinde tanımlanan φ -ilişkili metalik yapı olsun. Ayrıca $A = p\sigma + 2q$, $B = p(p - 2\sigma)$ olmak üzere

$$A \neq 0, \quad A + B \neq 0,$$

olsun. Bu durumda

$$\widetilde{g}(X, Y) = g(\Psi X, \Psi Y) + qg(X, Y). \quad (4.3)$$

ifadesi M üzerinde bir yarı-Riemann metriği tanımlar ve bu metrik Ψ ile uyumludur.

İspat. Öncelikle $\widetilde{g}$ tensörünün açık biçimini elde edelim. (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(X, Y) &= g(\Psi X, \Psi Y) + qg(X, Y) \\ &= g(\sigma X + (p - 2\sigma)\eta(X)\xi, \sigma Y + (p - 2\sigma)\eta(Y)\xi) + qg(X, Y) \\ &= \sigma^2 g(X, Y) + \sigma(p - 2\sigma)\eta(Y)g(X, \xi) + \sigma(p - 2\sigma)\eta(X)g(\xi, Y) \\ &\quad + (p - 2\sigma)^2 \eta(X)\eta(Y)g(\xi, \xi) + qg(X, Y) \\ &= (\sigma^2 + q)g(X, Y) + p(p - 2\sigma)\eta(X)\eta(Y) \\ &= (p\sigma + 2q)g(X, Y) + p(p - 2\sigma)\eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\widetilde{g}(X, Y) = Ag(X, Y) + B\eta(X)\eta(Y) \quad (4.4)$$

elde edilir.

Şimdi $\tilde{g}$ tensörünün non-dejenere olduğunu gösterelim. $\mathcal{D} = \ker \eta$ olmak üzere her $X \in \chi(M)$ vektör alanı

$$X = X^{\mathcal{D}} + \eta(X)\xi, \quad X^{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Her $U, V \in \mathcal{D}$ için

$$\tilde{g}(U, V) = Ag(U, V), \quad \tilde{g}(U, \xi) = 0, \quad \tilde{g}(\xi, \xi) = A + B$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi $\tilde{g}(X, Y) = 0$ eşitliğinin her $Y \in \chi(M)$ için sağlandığını kabul edelim ve

$$X = U + a\xi, \quad U \in \mathcal{D}$$

yazalım. Öncelikle $Y = V \in \mathcal{D}$ alınırsa

$$0 = \tilde{g}(X, V) = Ag(U, V)$$

elde edilir. $A \neq 0$ ve $g|_{\mathcal{D}}$ non-dejenere olduğundan $U = 0$ bulunur. Böylece $X = a\xi$ olur. Bu kez $Y = \xi$ alınırsa

$$0 = \tilde{g}(a\xi, \xi) = a(A + B)$$

elde edilir. $A + B \neq 0$ olduğundan $a = 0$ ve dolayısıyla $X = 0$ bulunur. Simetrikliği tanımından açık olduğundan $\tilde{g}$ metriği non-dejenere olup M üzerinde bir yarı-Riemann metriği tanımlar.

Şimdi $\tilde{g}$ metriğinin Ψ ile uyumluluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, \Psi Y) &= Ag(X, \Psi Y) + B\eta(X)\eta(\Psi Y) \\ &= Ag(X, \sigma Y + (p - 2\sigma)\eta(Y)\xi) + B\eta(X)\eta(\sigma Y + (p - 2\sigma)\eta(Y)\xi) \\ &= A\sigma g(X, Y) + A(p - 2\sigma)\eta(Y)g(X, \xi) \\ &\quad + \sigma B\eta(X)\eta(Y) + B(p - 2\sigma)\eta(X)\eta(Y)\eta(\xi) \\ &= \sigma Ag(X, Y) + (p - 2\sigma)(p^2 + 2q)\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\tilde{g}(\Psi X, Y) = \sigma Ag(X, Y) + (p - 2\sigma)(p^2 + 2q)\eta(X)\eta(Y)$ olduğundan

$$\tilde{g}(\Psi X, Y) = \tilde{g}(X, \Psi Y)$$

olur. ■

Ayrıca $A = p\sigma + 2q$ ve $B = p(p - 2\sigma)$ olmak üzere, daha önce elde edilen $\sigma + \sigma^* = p$ ve $\sigma\sigma^* = -q$ bağıntıları kullanılarak

$$\frac{B}{A+B} = \frac{p}{\sigma^*}, \quad 1 - \frac{B}{A+B} = -\frac{\sigma}{\sigma^*}, \quad \frac{B}{A} = -\frac{p}{\sigma}, \quad \frac{A+B}{A} = -\frac{\sigma^*}{\sigma} \quad (4.5)$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 4.1.1. Üç boyutlu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$ manifoldunu ve

$$E = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \varphi E = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi = (x+2y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x+y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları ile $\eta = dz$ 1-formunu ele alalım.

g yarı-Riemann metriği ve φ tensör alanı, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ koordinat tabanına göre sırasıyla

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(x+2y) \\ 0 & -1 & (2x+y) \\ -(x+2y) & (2x+y) & 1 - (2x+y)^2 + (x+2y)^2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -(2x+y) \\ 1 & 0 & -(x+2y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilsin. Doğrudan hesapla (2.1) ile (2.2) eşitliklerinin sağlandığı görülür. Ayrıca $\det(g) = -1$ olduğundan g non-dejenere bir yarı-Riemann metriğidir. Dolayısıyla $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifoldudur (Küpeli Erken, 2015).

(4.1) eşitliği ile tanımlanan metalik yapı

$$\Psi = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & (p-2\sigma)(x+2y) \\ 0 & \sigma & (p-2\sigma)(2x+y) \\ 0 & 0 & p-\sigma \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Bu tensör alanı metalik yapı eşitliğini sağlar.

Diğer taraftan, (4.4) eşitliğinden $\tilde{g}$ metriğinin matrisi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -A(x+2y) \\ 0 & -A & A(2x+y) \\ -A(x+2y) & A(2x+y) & A(1 - (2x+y)^2 + (x+2y)^2) + B \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $\det(\tilde{g}) = -A^2(A+B)$ olduğundan $A \neq 0$ ve $A+B \neq 0$ koşulları altında $\tilde{g}$ de non-dejenere bir yarı-Riemann metriğidir. Böylece $(\Psi, \tilde{g})$, M üzerinde φ -ilişkili metalik yapı ve bu yapıyla uyumlu yarı-Riemann metriğini verir.

Şimdi, elde edilen bu metalik yapının geometrik özelliklerini genel durumda inceleyelim. Bu amaçla ilk olarak metalik yapının Nijenhuis tensörünü hesaplayalım.

$(\Psi, \tilde{g})$ φ -ilişkili metalik yapısının Nijenhuis tensörü, (4.1) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
N_{\Psi}(X, Y) &= \Psi^2[X, Y] + [\Psi X, \Psi Y] - \Psi[\Psi X, Y] - \Psi[X, \Psi Y] \\
&= p\sigma[X, Y] + p(p-2\sigma)\eta([X, Y])\xi + q[X, Y] + [\sigma X + (p-2\sigma)\eta(X)\xi, \sigma Y + (p-2\sigma)\eta(Y)\xi] \\
&\quad - \Psi[\sigma X + (p-2\sigma)\eta(X)\xi, Y] - \Psi[X, \sigma Y + (p-2\sigma)\eta(Y)\xi] \\
&= p\sigma[X, Y] + q[X, Y] + p(p-2\sigma)\eta([X, Y])\xi + \sigma^2[X, Y] + \sigma(p-2\sigma)[X, \eta(Y)\xi] \\
&\quad + \sigma(p-2\sigma)[\eta(X)\xi, Y] + (p-2\sigma)^2[\eta(X)\xi, \eta(Y)\xi] \\
&\quad - 2\sigma\Psi[X, Y] - (p-2\sigma)\Psi[\eta(X)\xi, Y] - (p-2\sigma)\Psi[X, \eta(Y)\xi] \\
&= 2\sigma^2[X, Y] + p(p-2\sigma)\eta([X, Y])\xi + \sigma(p-2\sigma)[X, \eta(Y)\xi] + \sigma(p-2\sigma)[\eta(X)\xi, Y] \\
&\quad + (p-2\sigma)^2[\eta(X)\xi, \eta(Y)\xi] - 2\sigma^2[X, Y] - 2\sigma(p-2\sigma)\eta[X, Y]\xi - \sigma(p-2\sigma)[\eta(X)\xi, Y] \\
&\quad - (p-2\sigma)^2\eta([\eta(X)\xi, Y])\xi - \sigma(p-2\sigma)[X, \eta(Y)\xi] - (p-2\sigma)^2\eta([X, \eta(Y)\xi])\xi
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
N_{\Psi}(X, Y) &= (p-2\sigma)^2\{\eta([X, Y])\xi - \eta([\eta(X)\xi, Y])\xi - \eta([X, \eta(Y)\xi])\xi \\
&\quad + [\eta(X)\xi, \eta(Y)\xi]\} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen (4.6) bağıntısı, Ψ metalik yapısının Nijenhuis tensörünün her zaman ξ karakteristik vektör alanı doğrultusunda olduğunu göstermektedir. Gerçekten, $\mathcal{D} = \ker \eta$ dağılımı ve

$$X^{\mathcal{D}} = X - \eta(X)\xi, \quad Y^{\mathcal{D}} = Y - \eta(Y)\xi$$

olmak üzere, (4.6) bağıntısı

$$N_{\Psi}(X, Y) = (p-2\sigma)^2\eta([X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}}])\xi$$

şeklinde yazılabilir. $X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$ olduğundan

$$\eta([X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}}]) = -2d\eta(X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}})$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$N_{\Psi}(X, Y) = -2(p-2\sigma)^2d\eta(X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}})\xi$$

elde edilir. Bu ifade, Ψ metalik yapısının integrallenebilirliğinin $\mathcal{D} = \ker \eta$ dağılımının integrallenebilirliğine bağlı olduğunu ortaya koymaktadır.

Şimdi, g ve $\tilde{g}$ metriklerinin yarı-Riemann bağlantıları arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

∇ ve $\tilde{\nabla}$, sırasıyla g ve $\tilde{g}$ metriklerinin yarı-Riemann bağlantıları olsun. A ve B sabit

olduğundan Koszul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= X[\widetilde{g}(Y, Z)] + Y[\widetilde{g}(X, Z)] - Z[\widetilde{g}(X, Y)] + \widetilde{g}([X, Y], Z) - \widetilde{g}([X, Z], Y) - \widetilde{g}([Y, Z], X) \\
&= X[Ag(Y, Z) + B\eta(Y)\eta(Z)] + Y[Ag(X, Z) + B\eta(X)\eta(Z)] - Z[Ag(X, Y) + B\eta(X)\eta(Y)] \\
&\quad + Ag([X, Y], Z) + B\eta([X, Y])\eta(Z) - Ag([X, Z], Y) \\
&\quad - B\eta([X, Z])\eta(Y) - Ag([Y, Z], X) - B\eta([Y, Z])\eta(X) \\
&= AX[g(Y, Z)] + BX[\eta(Y)\eta(Z)] + AY[g(X, Z)] + BY[\eta(X)\eta(Z)] \\
&\quad - AZ[g(X, Y)] - BZ[\eta(X)\eta(Y)] + Ag([X, Y], Z) + B\eta([X, Y])\eta(Z) \\
&\quad - Ag([X, Z], Y) - B\eta([X, Z])\eta(Y) - Ag([Y, Z], X) - B\eta([Y, Z])\eta(X) \\
&= A\{g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) \\
&\quad + g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X)\} \\
&\quad + B\{X[g(Y, \xi)]\eta(Z) + X[g(Z, \xi)]\eta(Y) + Y[g(X, \xi)]\eta(Z) \\
&\quad + Y[g(Z, \xi)]\eta(X) - Z[g(X, \xi)]\eta(Y) - Z[g(Y, \xi)]\eta(X)\} \\
&\quad + B\{\eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\eta(Z) - \eta(\nabla_X Z - \nabla_Z X)\eta(Y) - \eta(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)\eta(X)\} \\
&= 2Ag(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad + B\{g(\nabla_X Y, \xi)\eta(Z) + g(\nabla_X \xi, Y)\eta(Z) + g(\nabla_X Z, \xi)\eta(Y) + g(\nabla_X \xi, Z)\eta(Y) \\
&\quad + g(\nabla_Y X, \xi)\eta(Z) + g(\nabla_Y \xi, X)\eta(Z) + g(\nabla_Y Z, \xi)\eta(X) + g(\nabla_Y \xi, Z)\eta(X) \\
&\quad - g(\nabla_Z X, \xi)\eta(Y) - g(\nabla_Z \xi, X)\eta(Y) - g(\nabla_Z Y, \xi)\eta(X) - g(\nabla_Z \xi, Y)\eta(X) + g(\nabla_X Y, \xi)\eta(Z) \\
&\quad - g(\nabla_Y X, \xi)\eta(Z) - g(\nabla_X Z, \xi)\eta(Y) + g(\nabla_Z X, \xi)\eta(Y) - g(\nabla_Y Z, \xi)\eta(X) + g(\nabla_Z Y, \xi)\eta(X)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2Ag(\nabla_X Y, Z) + 2Bg(\nabla_X Y, \xi)\eta(Z) + B\{\eta(Z)\{g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)\} \\
&\quad + \eta(Y)\{g(\nabla_X \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, X)\} + \eta(X)\{g(\nabla_Y \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, Y)\}\} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu genel bağlantı bağıntısından hareketle, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde tanımlanan φ -ilişkili metalik yapı Ψ nin özellikleri; ξ nin paralel olduğu, yapının para-Kenmotsu olduğu ve yapının para-Sasakian olduğu üç özel durumda sırasıyla incelenecektir. Bu amaçla, (4.7) bağıntısı esas alınacaktır.

4.2. Karakteristik Vektör Alanının Paralel Olduğu Durumda φ -İlişkili Metalik Yapı

(4.7) eşitliğinde $\nabla \xi = 0$ yazıldığında

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = Ag(\nabla_X Y, Z) + Bg(\nabla_X Y, \xi)\eta(Z)$$

ifadesi elde edilir.

(4.4) tanımından

$$Ag(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + B\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\eta(Z) = Ag(\nabla_X Y, Z) + B\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)$$

olur. Burada $Z = \xi$ alınırsa $\eta(\tilde{\nabla}_X Y) = \eta(\nabla_X Y)$ bulunur. Ardından g nin non-dejenere özelliğinden

$$g(A\tilde{\nabla}_X Y + B\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\xi - A\nabla_X Y - B\eta(\nabla_X Y)\xi, Z) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \quad (4.8)$$

elde edilir.

(4.8) eşitliğine göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen parakontak metrik manifold ve ξ paralel olsun. O halde $(\Psi, \tilde{g})$ φ -ilişkili metalik yapısı yerel olarak metalik yapıdır (yani $\tilde{\nabla}\Psi = 0$ dır).

İspat. ξ paralel olduğundan $\nabla\eta = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X \Psi)(Y) &= \tilde{\nabla}_X \Psi Y - \Psi(\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= \tilde{\nabla}_X (\sigma Y + (p - 2\sigma)\eta(Y)\xi) - (\sigma\tilde{\nabla}_X Y + (p - 2\sigma)\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\xi) \\ &= (p - 2\sigma)(\nabla_X \eta)(Y)\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. ■

4.3. Para-Kenmotsu Durumunda φ -İlişkili Metalik Yapı

Bu bölümde, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ para-Kenmotsu manifold olmak üzere, φ -ilişkili metalik yapısının bağlantı, integrallenebilirlik ve eğrilik özellikleri incelenecektir.

Lemma 4.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold ve $(\Psi, \tilde{g})$, φ -ilişkili metalik yapı olsun. Bu durumda $\tilde{g}$ metriğinin yarı-Riemann bağlantısı $\tilde{\nabla}$ ile g metriğinin yarı-Riemann bağlantısı ∇ arasında

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{P}{\sigma^*} g(\varphi X, \varphi Y)\xi \quad (4.9)$$

bağıntısı vardır.

İspat. Para-Kenmotsu yapılarda geçerli olan (2.9) bağıntısı (4.7) eşitliğinde kullanılsın. Önce-

likle, (2.9) ve hemen hemen parakontak metrik yapı bağıntısından

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = -2g(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y) = 2g(\varphi X, \varphi Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$g(\nabla_X \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, X) = 0,$$

$$g(\nabla_Y \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, Y) = 0$$

olur. Bu eşitlikler (4.7) bağıntısında kullanıldığında

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = Ag(\nabla_X Y, Z) + B\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) + Bg(\varphi X, \varphi Y)\eta(Z)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (4.4) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa $\tilde{g}(\xi, Z) = (A + B)\eta(Z)$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(\nabla_X Y + \frac{B}{A+B}g(\varphi X, \varphi Y)\xi, Z\right) &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \frac{B}{A+B}g(\varphi X, \varphi Y)\tilde{g}(\xi, Z) \\ &= Ag(\nabla_X Y, Z) + B\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) + Bg(\varphi X, \varphi Y)\eta(Z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade, yukarıda elde edilen $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z)$ bağıntısıyla karşılaştırıldığında, her $Z \in \chi(M)$ için

$$\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \frac{B}{A+B}g(\varphi X, \varphi Y)\xi, Z\right) = 0$$

olduğu görülür. $\tilde{g}$ metriği non-dejenere olduğundan (4.9) bağıntısı elde edilir. Son olarak, (4.5) eşitliği kullanılarak bağlantı bağıntısındaki katsayı $\frac{P}{\sigma^*}$ biçiminde ifade edilir. ■

(4.9) bağıntısının η ile bileşkesi alındığında

$$\eta(\tilde{\nabla}_X Y) = \eta(\nabla_X Y) + \frac{P}{\sigma^*}g(\varphi X, \varphi Y) \quad (4.10)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.9) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi \quad (4.11)$$

bulunur.

Şimdi η 1-formunun $\tilde{\nabla}$ bağlantısına göre kovaryant türevini belirleyelim. Tanım gereği

$$(\tilde{\nabla}_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\tilde{\nabla}_X Y).$$

Diğer taraftan,

$$X(\eta(Y)) = (\nabla_X \eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y)$$

olduğundan

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = (\nabla_X \eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y) - \eta(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

elde edilir. (2.10) ve (4.10) bağıntıları kullanıldığında

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = g(\varphi X, \varphi Y) - \frac{p}{\sigma^*} g(\varphi X, \varphi Y) = \left(1 - \frac{p}{\sigma^*}\right) g(\varphi X, \varphi Y)$$

bulunur. Son olarak, $\sigma + \sigma^* = p$ bağıntısından

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = -\frac{\sigma}{\sigma^*} g(\varphi X, \varphi Y) \quad (4.12)$$

elde edilir.

Önerme 4.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold ve Ψ , φ -ilişkili metalik yapı olsun. Bu durumda Ψ nin $\widetilde{\nabla}$ bağlantısına göre kovaryant türevi

$$(\widetilde{\nabla}_X \Psi)Y = (p - 2\sigma) \left\{ -\frac{\sigma}{\sigma^*} g(\varphi X, \varphi Y) \xi + \eta(Y) \nabla_X \xi \right\} \quad (4.13)$$

şeklindedir.

İspat. (4.1) bağıntısından

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_X \Psi)Y &= \widetilde{\nabla}_X(\Psi Y) - \Psi(\widetilde{\nabla}_X Y) \\ &= (p - 2\sigma) \left\{ X(\eta(Y)) - \eta(\widetilde{\nabla}_X Y) \right\} \xi + (p - 2\sigma) \eta(Y) \widetilde{\nabla}_X \xi \\ &= (p - 2\sigma) \left\{ (\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) \xi + \eta(Y) \widetilde{\nabla}_X \xi \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.12) ve (4.11) bağıntılarının kullanılmasıyla (4.13) sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.3.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold ve Ψ , φ -ilişkili metalik yapı olsun. Bu durumda Ψ integrallenebilirdir.

İspat. Para-Kenmotsu yapılarda (2.10) bağıntısından

$$(\nabla_X \eta)(Y) = (\nabla_Y \eta)(X)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $d\eta(X, Y) = 0$ dır. Buna göre $\mathcal{D} = \ker \eta$ dağılımı integrallenebilirdir. Daha önce φ -ilişkili metalik yapının Nijenhuis tensörü için elde edilen karakterizasyona göre $\mathcal{D}$

dağılımının integrallenebilir olması $N_\Psi = 0$ olmasını gerektirir. Böylece Ψ integrallenebilirdir. ■

Önerme 4.3.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla g ve $\tilde{g}$ metriklerinin Riemann eğrilik tensörlerini gösterebilirsin. Bu durumda

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{P}{\sigma^*} \{g(\varphi X, \varphi Z)Y - g(\varphi Y, \varphi Z)X\} \quad (4.14)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. Hesaplamaları sadeleştirmek amacıyla

$$c = \frac{P}{\sigma^*}, \quad P(X, Y) = g(\varphi X, \varphi Y)$$

gösterimlerini kullanalım. Bu durumda (4.9) bağıntısı

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + cP(X, Y)\xi$$

şeklinde yazılır.

Riemann eğrilik tensörünün tanımından

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

olur. Öncelikle,

$$\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + cP(Y, Z)\xi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + cP(Y, Z)\xi) \\ &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + cX(P(Y, Z))\xi + cP(Y, Z)\tilde{\nabla}_X \xi \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) bağıntısının $\nabla_Y Z$ vektör alanına uygulanması ve (4.11) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_X \nabla_Y Z + cP(X, \nabla_Y Z)\xi + cX(P(Y, Z))\xi + cP(Y, Z)\nabla_X \xi$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + cP(Y, \nabla_X Z)\xi + cY(P(X, Z))\xi + cP(X, Z)\nabla_Y \xi$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + cP([X,Y],Z)\xi$$

elde edilir. Bu eşitlikler eğrilik tensörünün tanımında kullanıldığında

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + c\{P(Y,Z)\nabla_X\xi - P(X,Z)\nabla_Y\xi\} \\ &\quad + c\{X(P(Y,Z)) - Y(P(X,Z)) + P(X,\nabla_YZ) - P(Y,\nabla_XZ) - P([X,Y],Z)\}\xi\end{aligned}$$

bulunur.

P bir $(0,2)$ -tensör olduğundan

$$\begin{aligned}X(P(Y,Z)) &= (\nabla_X P)(Y,Z) + P(\nabla_X Y, Z) + P(Y, \nabla_X Z), \\ Y(P(X,Z)) &= (\nabla_Y P)(X,Z) + P(\nabla_Y X, Z) + P(X, \nabla_Y Z)\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. ∇ bağlantısının torsiyonsuz olduğundan

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + c\{P(Y,Z)\nabla_X\xi - P(X,Z)\nabla_Y\xi\} + c\{(\nabla_X P)(Y,Z) - (\nabla_Y P)(X,Z)\}\xi$$

şeklinde sadeleşir.

Diğer taraftan, hemen hemen parakontak metrik yapı bağıntısından $P(Y,Z) = -g(Y,Z) + \eta(Y)\eta(Z)$ ve $\nabla g = 0$ olduğundan

$$(\nabla_X P)(Y,Z) = (\nabla_X \eta)(Y)\eta(Z) + \eta(Y)(\nabla_X \eta)(Z).$$

Para-Kenmotsu yapılar da geçerli olan (2.10) bağıntısı kullanılırsa

$$(\nabla_X P)(Y,Z) = P(X,Y)\eta(Z) + \eta(Y)P(X,Z)$$

elde edilir. P simetrik olduğundan

$$(\nabla_X P)(Y,Z) - (\nabla_Y P)(X,Z) = \eta(Y)P(X,Z) - \eta(X)P(Y,Z).$$

Ayrıca, (2.9) bağıntısından

$$\begin{aligned}P(Y,Z)\nabla_X\xi - P(X,Z)\nabla_Y\xi &= P(Y,Z)\{-X + \eta(X)\xi\} - P(X,Z)\{-Y + \eta(Y)\xi\} \\ &= P(X,Z)Y - P(Y,Z)X + \{\eta(X)P(Y,Z) - \eta(Y)P(X,Z)\}\xi\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + c \{P(X, Z)Y - P(Y, Z)X\} \\ &\quad + c \{\eta(X)P(Y, Z) - \eta(Y)P(X, Z)\}\xi \\ &\quad + c \{\eta(Y)P(X, Z) - \eta(X)P(Y, Z)\}\xi.\end{aligned}$$

Son iki satırdaki ξ doğrultusundaki terimler birbirini götürdüğünden

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + c \{P(X, Z)Y - P(Y, Z)X\}$$

elde edilir. $c = \frac{p}{\sigma^*}$ ve $P(X, Z) = g(\varphi X, \varphi Z)$ olduğu göz önüne alındığında (4.14) bağıntısına ulaşılır. ■

(4.14) bağıntısının bazı özel durumları doğrudan elde edilebilir. Öncelikle $Z = \xi$ alınırsa,

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi \quad (4.15)$$

bulunur.

Diğer taraftan, $\Psi\xi = \sigma^*\xi$ olduğundan eğrilik tensörünün üçüncü bileşenindeki lineerliği kullanılarak

$$\widetilde{R}(X, Y)\Psi\xi = \widetilde{R}(X, Y)(\sigma^*\xi) = \sigma^*\widetilde{R}(X, Y)\xi = \sigma^*R(X, Y)\xi$$

olur.

Ayrıca (4.14) bağıntısında Z yerine ΨZ alınırsa

$$\widetilde{R}(X, Y)\Psi Z = R(X, Y)\Psi Z + \frac{p}{\sigma^*} \{g(\varphi X, \varphi \Psi Z)Y - g(\varphi Y, \varphi \Psi Z)X\}$$

elde edilir. (4.1) bağıntısından

$$R(X, Y)\Psi Z = \sigma R(X, Y)Z + (p - 2\sigma)\eta(Z)R(X, Y)\xi$$

bulunur.

Diğer taraftan, $\varphi\xi = 0$ olduğundan

$$\varphi\Psi Z = \varphi(\sigma Z + (p - 2\sigma)\eta(Z)\xi) = \sigma\varphi Z$$

ve buradan

$$g(\varphi X, \varphi\Psi Z) = \sigma g(\varphi X, \varphi Z), \quad g(\varphi Y, \varphi\Psi Z) = \sigma g(\varphi Y, \varphi Z)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.14) bağıntısında kullanıldığında

$$\widetilde{R}(X, Y)\Psi Z = \sigma R(X, Y)Z + (p - 2\sigma)\eta(Z)R(X, Y)\xi + \frac{p\sigma}{\sigma^*} \{g(\varphi X, \varphi Z)Y - g(\varphi Y, \varphi Z)X\}$$

elde edilir.

Önerme 4.3.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifold olsun. Ric ve $\widetilde{\text{Ric}}$ sırasıyla g ve $\widetilde{g}$ metriklerine karşılık gelen Ricci tensörlerini gösterebilirsin. Bu durumda

$$\widetilde{\text{Ric}}(Y, Z) = \text{Ric}(Y, Z) - \frac{2np}{\sigma^*} g(\varphi Y, \varphi Z) \quad (4.16)$$

bağıntısı geçerlidir.

Örnek 4.3.1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$ manifoldu üzerinde

$$e_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = z \frac{\partial}{\partial z} = \xi$$

vektör alanlarını ele alalım. g yarı-Riemann metriği

$$g(e_1, e_1) = -1, \quad g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1, \quad g(e_i, e_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$\eta(X) = g(X, e_3), \quad \varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = 0$$

olsun. Bu durumda (φ, ξ, η, g) , M üzerinde bir hemen hemen parakontak metrik yapı tanımlar (Mandal ve De, 2017).

Vektör alanlarının Lie parantezleri

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2$$

şeklinde. Koszul formülü yardımıyla g metriğinin yarı-Riemann bağlantısı ∇ için

$$(\nabla_{e_i} e_j) = \begin{pmatrix} \nabla_{e_1} e_1 & \nabla_{e_1} e_2 & \nabla_{e_1} e_3 \\ \nabla_{e_2} e_1 & \nabla_{e_2} e_2 & \nabla_{e_2} e_3 \\ \nabla_{e_3} e_1 & \nabla_{e_3} e_2 & \nabla_{e_3} e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3 & 0 & -e_1 \\ 0 & e_3 & -e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Kenmotsu manifoldudur.

Bu para-Kenmotsu yapı üzerinde (4.1) ile tanımlanan φ -ilişkili metalik yapı ele alınsın. $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$ ve $\eta(e_3) = 1$ olduğundan

$$\Psi e_1 = \sigma e_1, \quad \Psi e_2 = \sigma e_2, \quad \Psi e_3 = \sigma e_3 + (p - 2\sigma)e_3 = (p - \sigma)e_3 = \sigma^* e_3$$

bulunur. Buna göre Ψ nin $\{e_1, e_2, e_3\}$ tabanına göre matrisi

$$[\Psi] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^* \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Öte yandan, (4.4) bağıntısından

$$\widetilde{g}(e_1, e_1) = -A, \quad \widetilde{g}(e_2, e_2) = A, \quad \widetilde{g}(e_3, e_3) = A + B$$

ve $i \neq j$ için $\widetilde{g}(e_i, e_j) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\widetilde{g}$ metriğinin bu tabana göre matrisi

$$[\widetilde{g}] = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A + B \end{pmatrix}$$

biçimindedir. (4.9) bağıntısı kullanılarak

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j + \frac{p}{\sigma^*} g(\varphi e_i, \varphi e_j) e_3$$

yazılır. Burada $g(\varphi e_1, \varphi e_1) = 1$, $g(\varphi e_2, \varphi e_2) = -1$, $g(\varphi e_1, \varphi e_2) = 0$ olduğundan

$$(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma^*} e_3 & 0 & -e_1 \\ 0 & -\frac{\sigma}{\sigma^*} e_3 & -e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Ayrıca, para-Kenmotsu yapılar $d\eta = 0$ olduğundan daha önce elde edilen integrallenebilirlik sonucuna göre

$$N_\Psi = 0$$

olup Ψ integrallenebilirdir.

Son olarak, (4.14) bağıntısı kullanılarak $\widetilde{g}$ metriğine karşılık gelen Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{pmatrix} \widetilde{R}(e_1, e_2)e_1 & \widetilde{R}(e_1, e_2)e_2 & \widetilde{R}(e_1, e_2)e_3 \\ \widetilde{R}(e_2, e_3)e_1 & \widetilde{R}(e_2, e_3)e_2 & \widetilde{R}(e_2, e_3)e_3 \\ \widetilde{R}(e_3, e_1)e_1 & \widetilde{R}(e_3, e_1)e_2 & \widetilde{R}(e_3, e_1)e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma^*} e_2 & \frac{\sigma}{\sigma^*} e_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{\sigma^*} e_3 & -e_2 \\ -\frac{\sigma}{\sigma^*} e_3 & 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece bu örnek, para-Kenmotsu yapıdan elde edilen φ -ilişkili metalik yapının bağlantı, integrallenebilirlik ve eğrilik özelliklerini somut olarak göstermektedir.

4.4. Para-Sasakian Durumunda φ -İlişkili Metalik Yapı

Bu bölümde, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ para-Sasakian manifold olmak üzere, φ -ilişkili metalik yapı Ψ ve uyumlu $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriğinin bağlantı, integrallenebilirlik ve eğrilik özellikleri incelenecektir.

Lemma 4.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold, Ψ , φ -ilişkili metalik yapı ve $\tilde{g}$, uyumlu yarı-Riemann metriği olsun. Bu durumda $\tilde{g}$ metriğinin yarı-Riemann bağlantısı $\tilde{\nabla}$ ile g metriğinin yarı-Riemann bağlantısı ∇ arasında

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{B}{A} \{ \eta(X) \varphi Y + \eta(Y) \varphi X \} \quad (4.17)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.50) eşitliğinden $g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = -g(\varphi X, Y) - g(\varphi Y, X) = 0$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, X) &= -2g(\varphi X, Z), \\ g(\nabla_Y \xi, Z) - g(\nabla_Z \xi, Y) &= -2g(\varphi Y, Z) \end{aligned}$$

olduğundan (4.7) ile

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = Ag(\nabla_X Y, Z) + B\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) - B\{\eta(Y)g(\varphi X, Z) + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $Z = \xi$ alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) = (A + B)\eta(\nabla_X Y)$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.4) bağıntısından

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) = (A + B)\eta(\tilde{\nabla}_X Y)$$

olduğundan

$$\eta(\tilde{\nabla}_X Y) = \eta(\nabla_X Y) \quad (4.18)$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre, (4.4) bağıntısı kullanılarak

$$Ag(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = Ag(\nabla_X Y, Z) - B\{\eta(Y)g(\varphi X, Z) + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\}$$

elde edilir. Böylece

$$g\left(A\widetilde{\nabla}_X Y - A\nabla_X Y + B\eta(Y)\varphi X + B\eta(X)\varphi Y, Z\right) = 0$$

olur. g metriği non-dejenere olduğundan

$$A\widetilde{\nabla}_X Y = A\nabla_X Y - B\{\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X\}$$

elde edilir. $A \neq 0$ olduğundan (4.17) bağıntısına ulaşılır. ■

(4.17) bağıntısında $Y = \xi$ alınır

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi - \frac{B}{A}\varphi X$$

elde edilir. (2.50) ile

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = \frac{A+B}{A}\nabla_X \xi \quad (4.19)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, η 1-formunun $\widetilde{\nabla}$ bağlantısına göre kovaryant türevi

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

şeklindedir. ∇ bağlantısına göre

$$X(\eta(Y)) = (\nabla_X \eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y)$$

olduğundan ve (4.18) ile

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = (\nabla_X \eta)(Y)$$

bulunur. Para-Sasakian yapılarda (2.51) bağıntısından

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y) = g(X, \varphi Y) \quad (4.20)$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold ve Ψ, φ -ilişkili metalik yapı olsun. Bu durumda Ψ nin $\widetilde{\nabla}$ bağlantısına göre kovaryant türevi

$$(\widetilde{\nabla}_X \Psi)Y = (p - 2\sigma) \left\{ g(X, \varphi Y)\xi + \frac{A+B}{A}\eta(Y)\nabla_X \xi \right\} \quad (4.21)$$

şeklindedir.

İspat. (4.1) bağıntısından

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \Psi)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Psi Y) - \Psi(\tilde{\nabla}_X Y) \\
&= \tilde{\nabla}_X \{ \sigma Y + (p-2\sigma)\eta(Y)\xi \} - \left\{ \sigma \tilde{\nabla}_X Y + (p-2\sigma)\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\xi \right\} \\
&= (p-2\sigma) \left\{ X(\eta(Y)) - \eta(\tilde{\nabla}_X Y) \right\} \xi + (p-2\sigma)\eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi
\end{aligned}$$

yazılır. Tanım gereği $X(\eta(Y)) - \eta(\tilde{\nabla}_X Y) = (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)$ olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_X \Psi)Y = (p-2\sigma) \left\{ (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)\xi + \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi \right\}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20) bağıntıları kullanıldığında

$$(\tilde{\nabla}_X \Psi)Y = (p-2\sigma) \left\{ g(X, \varphi Y)\xi + \frac{A+B}{A}\eta(Y)\nabla_X \xi \right\}$$

bulunur. Böylece (4.21) bağıntısı elde edilir. ■

Sonuç 4.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold ve Ψ , φ -ilişkili metalik yapı olsun. Bu durumda Ψ integrallenebilir değildir.

İspat. Daha önce $\mathcal{D} = \ker \eta$ dağılımı için elde edilen karakterizasyona göre

$$N_\Psi(X, Y) = -2(p-2\sigma)^2 d\eta(X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}})\xi$$

eşitliği geçerlidir. Para-Sasakian yapılarda (2.51) ile

$$d\eta(X^{\mathcal{D}}, Y^{\mathcal{D}}) = g(X^{\mathcal{D}}, \varphi Y^{\mathcal{D}}) = g(X, \varphi Y)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$N_\Psi(X, Y) = -2(p-2\sigma)^2 g(X, \varphi Y)\xi = 2(p-2\sigma)^2 g(Y, \varphi X)\xi \quad (4.22)$$

bulunur.

Para-Sasakian yapının temel 2-formu özdeş olarak sıfır olmadığından N_Ψ de özdeş olarak sıfır değildir. Buna göre Ψ metalik yapısı integrallenebilir değildir. ■

Eğrilik tensörleri arasındaki ilişkiyi belirlemek amacıyla, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ bağlantıları arasındaki fark tensörünü

$$\mathcal{A}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlayalım. (4.17) bağıntısı ve $\frac{B}{A} = -\frac{p}{\sigma}$ eşitliği kullanıldığında

$$\mathcal{A}(X, Y) = \frac{p}{\sigma} \{ \eta(X) \varphi Y + \eta(Y) \varphi X \} \quad (4.24)$$

elde edilir.

Eğrilik tensörlerinin karşılaştırılmasında kullanılacak yardımcı bağıntıları aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 4.4.2. Para-Sasakian durumda bağlantı fark tensörü $\mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \mathcal{A})(Y, Z) &= \frac{p}{\sigma} \{ g(X, \varphi Y) \varphi Z + g(X, \varphi Z) \varphi Y \\ &\quad - \eta(Y) g(X, Z) \xi - \eta(Z) g(X, Y) \xi + 2\eta(Y) \eta(Z) X \} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) - \mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(Z) R(X, Y) \xi \quad (4.26)$$

bağıntıları sağlanır.

İspat. (4.24) bağıntısının ∇ bağlantısına göre kovaryant türevi alınırsa

$$(\nabla_X \mathcal{A})(Y, Z) = \frac{p}{\sigma} \{ (\nabla_X \eta)(Y) \varphi Z + \eta(Y) (\nabla_X \varphi) Z + (\nabla_X \eta)(Z) \varphi Y + \eta(Z) (\nabla_X \varphi) Y \}$$

elde edilir. Para-Sasakian yapılarda (2.49) ve (2.51) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (\nabla_X \mathcal{A})(Y, Z) &= \frac{p}{\sigma} \{ g(X, \varphi Y) \varphi Z + g(X, \varphi Z) \varphi Y - \eta(Y) g(X, Z) \xi - \eta(Z) g(X, Y) \xi \\ &\quad + 2\eta(Y) \eta(Z) X \} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.25) elde edilir.

Diğer taraftan, (4.24), (2.1) bağıntısı kullanılarak

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(X) \{ \eta(Y) \varphi^2 Z + \eta(Z) \varphi^2 Y \},$$

ve benzer şekilde

$$\mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(Y) \{ \eta(X) \varphi^2 Z + \eta(Z) \varphi^2 X \}$$

elde edilir. Bu iki eşitliğin farkı alındığında

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) - \mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(Z) \{ \eta(X) Y - \eta(Y) X \}$$

bulunur. Para-Sasakian yapılar da (2.15) ile

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) - \mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(Z) R(X, Y) \xi$$

elde edilir. Böylece (4.26) bağıntısı da ispatlanmış olur. ■

Önerme 4.4.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifold olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla g ve $\tilde{g}$ metriklerinin Riemann eğrilik tensörlerini gösterebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{p}{\sigma} \eta(R(X, Y)Z) \xi + \left\{ \frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right\} \eta(Z) R(X, Y) \xi \\ &\quad - \frac{p}{\sigma} \{2g(\varphi X, Y) \varphi Z - g(X, \varphi Z) \varphi Y + g(Y, \varphi Z) \varphi X\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. İki torsiyonsuz bağlantının eğrilik tensörleri arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + (\nabla_X \mathcal{A})(Y, Z) - (\nabla_Y \mathcal{A})(X, Z) \\ &\quad + \mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) - \mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) \end{aligned}$$

şeklinde (4.25) bağıntısından

$$\begin{aligned} (\nabla_X \mathcal{A})(Y, Z) - (\nabla_Y \mathcal{A})(X, Z) &= -\frac{p}{\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z)\} \xi - \frac{2p}{\sigma} \eta(Z) R(X, Y) \xi \\ &\quad - \frac{p}{\sigma} \{2g(\varphi X, Y) \varphi Z - g(X, \varphi Z) \varphi Y + g(Y, \varphi Z) \varphi X\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Öte yandan, (4.26) bağıntısına göre

$$\mathcal{A}(X, \mathcal{A}(Y, Z)) - \mathcal{A}(Y, \mathcal{A}(X, Z)) = \frac{p^2}{\sigma^2} \eta(Z) R(X, Y) \xi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{p}{\sigma} \{\eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z)\} \xi + \left(-\frac{2p}{\sigma} + \frac{p^2}{\sigma^2}\right) \eta(Z) R(X, Y) \xi \\ &\quad - \frac{p}{\sigma} \{2g(\varphi X, Y) \varphi Z - g(X, \varphi Z) \varphi Y + g(Y, \varphi Z) \varphi X\} \end{aligned}$$

bulunur.

Para-Sasakian yapılar da

$$\eta(R(X, Y)Z) = \eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z) \quad (4.28)$$

bağıntısı geçerlidir. Ayrıca $p = \sigma + \sigma^*$ olduğundan

$$-\frac{2p}{\sigma} + \frac{p^2}{\sigma^2} = \frac{p(p-2\sigma)}{\sigma^2} = \frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Bu eşitliklerin kullanılmasıyla (4.27) bağıntısı elde edilir. ■

(4.27) bağıntısında $Z = \xi$ alınırsa

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \left(\frac{\sigma^*}{\sigma}\right)^2 R(X, Y)\xi \quad (4.29)$$

elde edilir.

(4.1) bağıntısından ve Riemann eğrilik tensörünün üçüncü değişkenine göre $C^\infty(M)$ -lineerliği kullanılarak

$$\tilde{R}(X, Y)\Psi Z = \sigma \tilde{R}(X, Y)Z + (p - 2\sigma)\eta(Z)\tilde{R}(X, Y)\xi$$

elde edilir. (4.27) ve (4.29) bağıntıları kullanıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\Psi Z &= \sigma R(X, Y)Z - p\eta(R(X, Y)Z)\xi \\ &\quad + \left\{ \frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma} + (p - 2\sigma)\frac{(\sigma^*)^2}{\sigma^2} \right\} \eta(Z)R(X, Y)\xi \\ &\quad - p\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z - g(X, \varphi Z)\varphi Y + g(Y, \varphi Z)\varphi X\}. \end{aligned}$$

$p = \sigma + \sigma^*$ ve $p - 2\sigma = \sigma^* - \sigma$ bağıntıları yardımıyla

$$\frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma} + (p - 2\sigma)\frac{(\sigma^*)^2}{\sigma^2} = \frac{(\sigma^*)^3 - \sigma^3}{\sigma^2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\Psi Z &= \sigma R(X, Y)Z - p\eta(R(X, Y)Z)\xi + \frac{(\sigma^*)^3 - \sigma^3}{\sigma^2}\eta(Z)R(X, Y)\xi \\ &\quad - p\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z - g(X, \varphi Z)\varphi Y + g(Y, \varphi Z)\varphi X\}. \end{aligned}$$

Ricci tensörleri arasındaki ilişkiyi belirlemek için (4.27) bağıntısının X değişkenine göre izini alalım. $\dim M = 2n + 1$ olmak üzere

$$\text{tr}\{X \mapsto \eta(R(X, Y)Z)\xi\} = g(\varphi Y, \varphi Z),$$

$$\text{tr}\{X \mapsto \eta(Z)R(X, Y)\xi\} = -2n\eta(Y)\eta(Z)$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\text{tr} \{X \mapsto 2g(\varphi X, Y)\varphi Z - g(X, \varphi Z)\varphi Y + g(Y, \varphi Z)\varphi X\} = -3g(\varphi Y, \varphi Z),$$

çünkü $\text{tr} \varphi = 0$ dır. Buna göre (4.27) bağıntısının izi alındığında

$$\widetilde{\text{Ric}}(Y, Z) = \text{Ric}(Y, Z) + \frac{2p}{\sigma} g(\varphi Y, \varphi Z) - 2n \left\{ \frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right\} \eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir. (2.2) ve $\frac{(\sigma^*)^2 - \sigma^2}{\sigma^2} = \frac{p}{\sigma} \left(\frac{p}{\sigma} - 2 \right)$ bağıntıları kullanıldığında

$$\widetilde{\text{Ric}}(Y, Z) = \text{Ric}(Y, Z) - \frac{2p}{\sigma} g(Y, Z) + \frac{2p}{\sigma} \left(2n + 1 - \frac{np}{\sigma} \right) \eta(Y)\eta(Z)$$

sonucuna ulaşılır.

Özellikle $Z = \xi$ alınır

$$\widetilde{\text{Ric}}(Y, \xi) = \left(\frac{\sigma^*}{\sigma} \right)^2 \text{Ric}(Y, \xi)$$

elde edilir. Para-Sasakian yapılarda $\text{Ric}(Y, \xi) = -2n\eta(Y)$ olduğundan

$$\widetilde{\text{Ric}}(Y, \xi) = -2n \left(\frac{\sigma^*}{\sigma} \right)^2 \eta(Y)$$

bulunur.

Örnek 4.4.1. Ivanov, Vassilev ve Zamkovoy tarafından verilen hiperbolik Heisenberg grubu örneğinden (Ivanov vd., 2010) hareketle, $M = \mathbb{R}^3$ üzerinde (x, y, z) standart koordinatlarını göz önüne alalım. Kaynaktaki yapı, burada kullanılan $\eta(\xi) = g(\xi, \xi) = 1$ konvansiyonuna uygun olarak yeniden düzenlenmiştir.

M üzerinde

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanlarını tanımlayalım. Bu vektör alanlarının Lie parantezleri

$$[e_1, e_2] = -2\xi, \quad [e_1, \xi] = [e_2, \xi] = 0 \quad (4.30)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\eta = dz - y dx + x dy \quad (4.31)$$

1-formunu ve

$$\varphi e_1 = e_2, \quad \varphi e_2 = e_1, \quad \varphi \xi = 0 \quad (4.32)$$

(1, 1)-tipindeki tensör alanını tanımlayalım. Bu durumda $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$ olup (2.1) bağıntıları sağlanır.

g yarı-Riemann metriğini

$$g = dx \otimes dx - dy \otimes dy + \eta \otimes \eta \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre

$$g(e_1, e_1) = 1, \quad g(e_2, e_2) = -1, \quad g(\xi, \xi) = 1, \quad g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

olup (2.2) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen parakontak metrik yapı oluşturur.

Şimdi bu yapının para-Sasakian olduğunu gösterelim. Koszul formülü ve (4.30) bağıntıları kullanıldığında g metriğinin yarı-Riemann bağlantısı için

$$(\nabla_{e_i} e_j) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -e_2 \\ \xi & 0 & -e_1 \\ -e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

elde edilir. Özellikle

$$\nabla_{e_1} \xi = -\varphi e_1, \quad \nabla_{e_2} \xi = -\varphi e_2, \quad \nabla_{\xi} \xi = -\varphi \xi$$

olduğundan (2.50) bağıntısı sağlanır.

Diğer taraftan, taban vektörleri üzerinde doğrudan yapılan hesaplamalarla (2.49) eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir para-Sasakian manifolddur.

φ -ilişkili metalik yapı (4.1) ile

$$\Psi e_1 = \sigma e_1, \quad \Psi e_2 = \sigma e_2, \quad \Psi \xi = \sigma^* \xi$$

şeklinde dir.

Ayrıca Ψ ile uyumlu $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği (4.3) ile

$$\tilde{g}(e_1, e_1) = A, \quad \tilde{g}(e_2, e_2) = -A, \quad \tilde{g}(\xi, \xi) = A + B, \quad \tilde{g}(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

olur. Para-Sasakian durumda elde edilen (4.17) bağıntısı kullanıldığında örneğin

$$\left(\tilde{\nabla}_{e_i} e_j\right)=\left(\begin{array}{ccc} 0 & -\xi & \rho e_2 \\ \xi & 0 & \rho e_1 \\ \rho e_2 & \rho e_1 & 0 \end{array}\right)$$

elde edilir. Burada $\rho = \frac{\sigma^*}{\sigma}$ dır. Son olarak, $e_1, e_2 \in \ker \eta$ ve $[e_1, e_2] = -2\xi$ olduğundan, daha önce elde edilen Nijenhuis tensörü bağıntısından

$$N_{\Psi}(e_1, e_2) = (p - 2\sigma)^2 \eta([e_1, e_2])\xi = -2(p - 2\sigma)^2 \xi \neq 0$$

bulunur. Böylece bu örnekte de Ψ metalik yapısının integrallenebilir olmadığı açıkça görülmektedir.

Ayrıca para-Sasakian eğrilik bağıntısından (4.27) ile

$$\left(\begin{array}{ccc} \tilde{R}(e_1, e_2)e_1 & \tilde{R}(e_1, e_2)e_2 & \tilde{R}(e_1, e_2)\xi \\ \tilde{R}(e_1, \xi)e_1 & \tilde{R}(e_1, \xi)e_2 & \tilde{R}(e_1, \xi)\xi \\ \tilde{R}(e_2, \xi)e_1 & \tilde{R}(e_2, \xi)e_2 & \tilde{R}(e_2, \xi)\xi \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 3\rho e_2 & 3\rho e_1 & 0 \\ -\rho\xi & 0 & -\rho^2 e_1 \\ 0 & \rho\xi & -\rho^2 e_2 \end{array}\right)$$

şeklindedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, hemen hemen parakontak metrik manifoldlar üzerinde tanımlanan φ -ilişkili Ψ metalik yapısı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Öncelikle, Ψ tensör alanının

$$\Psi^2 = p\Psi + qI$$

eşitliğini sağladığı gösterilerek, söz konusu yapının metalik yapı olduğu ortaya konulmuştur. Bu yapı, klasik metalik yapılardan farklı olarak doğrudan parakontak yapı (φ, ξ, η) üzerinden türetilmiş olup, özellikle ξ doğrultusunda belirgin bir deformasyon içermektedir.

Daha sonra, Ψ ile uyumlu olarak tanımlanan $\tilde{g}$ metriği incelenmiş ve bu metriğin g metriğinin bir deformasyonu olduğu gösterilmiştir. Bu deformasyonun özellikle η bileşeni üzerinden gerçekleştiği ve geometrik yapıya yönsel bir katkı sağladığı görülmüştür.

Elde edilen sonuçlar, φ -ilişkili metalik yapının geometrik özelliklerinin başlangıç sınıfına bağlı olarak önemli ölçüde değiştiğini göstermektedir. Bu genel bulgular üç özel durumda şu şekilde özetlenebilir:

- ξ paralel olduğunda, $\tilde{\nabla} = \nabla$ elde edilmekte ve yapı yerel olarak metalik olmaktadır.
- Para-Kenmotsu durumda, Ψ yapısının Nijenhuis tensörünün sıfır olduğu gösterilerek yapının integrallenebilir olduğu bulunmuştur.
- Buna karşılık para-Sasakian durumda $N_\Psi \neq 0$ elde edilmekte ve yapının integrallenebilir olmadığı görülmektedir.

Ayrıca Para-Kenmotsu ve para-Sasakian durumlarda yarı-Riemann bağlantısı ve eğrilik tensörü açık biçimde hesaplanmış ve $\tilde{R}$ ile R arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar, metalik yapının yalnızca cebirsel değil, aynı zamanda eğrilik düzeyinde de geometrik yapıyı değiştirdiğini göstermektedir.

Bu çalışmanın doğal bir devamı olarak aşağıdaki araştırma yönleri önerilebilir:

- φ -ilişkili metalik yapıların Ricci ve skaler eğrilik üzerindeki etkilerinin incelenmesi,
- $\tilde{g}$ metriği altında Einstein veya η -Einstein koşullarının araştırılması,
- Bu yapıların yarı-simetrik veya yerel simetrik manifoldlar üzerindeki davranışlarının incelenmesi,
- Metalik yapıların diğer geometrik yapılar (örneğin Norden metrik, B-metrik yapılar) ile ilişkilerinin araştırılması.

KAYNAKÇA

- Akpınar, R. C., & Kansu, E. K. (2024). Metallic deformation on para-Sasaki-like para-Norden manifold. *AIMS Mathematics*, 9(7), 19125–19136.
- Akyol, M. A. (2019). Remarks on metallic maps between metallic Riemannian manifolds and constancy of certain maps. *Honam Mathematical Journal*, 41(2), 343–356.
- Blaga, A. M., & Nannicini, A. (2019). On curvature tensors of Norden and metallic pseudo-Riemannian manifolds. *Complex Manifolds*, 6(1), 150–159.
- Blaga, A. M., & Nannicini, A. (2020). On the geometry of metallic pseudo-Riemannian structures. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 11(1), 69–87.
- De Spinadel, V. W. (1999). The metallic means family and multifractal spectra. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 36(6), 721–745.
- Ganchev, G., Mihova, V., & Gribachev, K. (1993). Almost contact manifolds with B-metric. *Mathematica Balkanica, New Series*, 7(3–4), 261–276.
- Gezer, A., & Karaman, Ç. (2015). On metallic Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(6), 954–962.
- Gherici, B. (2020). Almost contact metric and metallic Riemannian structures. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1013–1024.
- Goldberg, S. I., & Yano, K. (1970). Polynomial structures on manifolds. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 22(2), 199–218.
- Gray, A., & Hervella, L. M. (1980). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 123, 35–58.
- Hretcanu, C. E., & Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 54(2), 15–27.
- Ivanov, S., Vassilev, D., & Zamkovoy, S. (2010). Conformal paracontact curvature and the local flatness theorem. *Geometriae Dedicata*, 144, 79–100.
- Kaneyuki, S., & Williams, F. L. (1985). Almost paracontact and parahodge structures on manifolds. *Nagoya Mathematical Journal*, 99, 173–187.
- Küpeli Erken, İ. (2015). Some classes of 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. *Honam Mathematical Journal*, 37(4), 457–468.
- Küpeli Erken, İ. (2020). Yamabe solitons on three-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. *Periodica Mathematica Hungarica*, 80(2), 172–184.
- Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian manifolds* (2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 176). Springer, İsviçre.
- Mandal, K., & De, U. C. (2017). On 3-dimensional α -para Kenmotsu manifolds. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(2), 11–23.
- Manev, M., & Staikova, M. (2001). On almost paracontact Riemannian manifolds of type (n, n) . *Journal of Geometry*, 72, 108–114.
- Nakova, G., & Zamkovoy, S. (2012). Eleven classes of almost paracontact manifolds with semi-Riemannian metric of $(n + 1, n)$. *Recent progress in differential geometry and its related fields*, T. Adachi, H. Hashimoto, & M. J. Hristov (Eds.), World Scientific, Singapore, s. 119–136.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, ABD.
- Özdemir, N., Aktay, Ş., & Solgun, M. (2018). Almost paracontact structures obtained from $G_{2(2)}^*$ structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(6), 3025–3033.
- Özdemir, N., Aktay, Ş., & Solgun, M. (2025). Some results on almost paracontact paracomplex Riemannian manifolds. *AIMS Mathematics*, 10(5), 10764–10786.

- Özdemir, N., Solgun, M., & Aktay, Ş. (2020). Almost para-contact metric structures on 5-dimensional nilpotent Lie algebras. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 3(2), 175–184.
- Özkan, M., & Yılmaz, F. (2018). Metallic structures on differentiable manifolds. *Journal of Science and Arts*, 18(3), 645–660.
- Sato, I. (1976). On a structure similar to the almost contact structure I. *Tensor, New Series*, 30, 219–224.
- Solgun, M. (2021). Some results on $\mathcal{D}$ -homothetic deformation on almost paracontact metric manifolds. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 4(4), 264–270.
- Zamkovoy, S. (2008). ParaSasakian manifolds with a constant paraholomorphic section curvature. *arXiv preprint*, arXiv:0812.1676 [math.DG].
- Zamkovoy, S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 36(1), 37–60.
- Zamkovoy, S. (2018). On para-Kenmotsu manifolds. *Filomat*, 32(14), 4971–4980.
- Zamkovoy, S., & Nakova, G. (2018). The decomposition of almost paracontact metric manifolds in eleven classes revisited. *Journal of Geometry*, 109(1), Article 18.