T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEONARDO SAYI BİLEŞENLİ HİPER-DUAL VE BİKOMPLEKS SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT TURAN

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SIDDIKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2024

10606354

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEONARDO SAYI BİLEŞENLİ HİPER-DUAL VE BİKOMPLEKS SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT TURAN

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SIDDIKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2024

10606354

BEYAN

"Leonardo Sayı Bileşenli Hiper-Dual ve Bikompleks sayıların Bazı Özellikleri" adlı yüksek lisansta yeterlik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="2">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR |</td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR | X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td>Desteğin Türü</td><td>Proje Numarası</td></tr>
<tr><td>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2-TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td>Diğer;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL onayı var
ise;</td></tr>
<tr><td>ETİK KURUL karar tarih/
sayı:</td><td>........................./
...................</td></tr>
</table>

Murat TURAN
Tarih .…/…../ …..
İmza

ÖN SÖZ

Bana sevgi ve güvenleriyle beni bugünlere getirebilmek adına bir ömür adayan başta annem ve babam olmak üzere, lisans hayatımdan bu yana her zaman bana destek olan bilgi, birikim ve tecrübelerinden faydalanarak severek çalışmamı sağlayan bugüne kadar çok fazla şey öğrendiğim çok kıymetli hocam Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ bu tezin gerçek yazarlarıdır.

Tezimin bir çok kısmında destek aldığım Uşak Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Semra KAYA ve Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. İlkay ARSLAN GÜVEN hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans hayatımdan bu yana ders aldığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ayrıca teşekkür ederim.

Murat TURAN
2024

ÖZET

LEONARDO SAYI BİLEŞENLİ HYPER-DUAL VE BİKOMPLEKS SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, hiper dual Leonardo sayıları ve bikompleks Leonardo sayılarını daha iyi anlayabilmemiz adına gerekli temel tanım ve kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, tezin orijinal kısımlarından biri olan hiper dual Leonardo sayıları tanımlanarak hiper dual Leonardo sayıları için yineleme bağıntısı, Binet benzeri formül, toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, D'ocagne's özdeşliği elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, tezin bir diğer orijinal kısmı olan bikompleks Leonardo sayıları tanımlanarak Binet benzeri formül, toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, D'ocagne's özdeşliği ve bazı önemli eşitlikleri bikompleks Leonardo sayıları için elde edilmiştir. Son kısım ise sonuç, tartışma ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Leonardo sayıları, Hiper dual Leonardo sayıları, Bikompleks Leonardo sayıları.

ABSTRACT

SOME PROPERTİES OF HYPER-DUAL AND BİCOMPLEX NUMBERS WİTH LEONARDO NUMBER COMPONENTS

This thesis consists of five chapters. The first chapter is mentioned to introduction of thesis. In the second part, we mentioned the basic definitions and concepts necessary to better understand the hyper dual Leonardo numbers structure and bicomplex Leonardo numbers. In the third chapter, hyper dual Leonardo numbers, which is one of the original parts of the thesis, are defined and for hyper dual Leonardo numbers, the recurrence relation, Binet's like formula, sum formulas, Catalan's identity, Cassini's identity, D'ocagne's identity are obtained. In the fourth chapter, bicomplex Leonardo numbers, which is another original part of the thesis, is defined and the Binet's like formula, sum formulas, Catalan's identity, Cassini's identity, D'ocagne's identity and some important identity are obtained for bicomplex Leonardo numbers. The last part is mentioned for results, discussions and suggestions.

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Leonardo numbers, Hyper-Dual Leonardo numbers, Leonardo numbers.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

BL_{e_n}	:	n. Bikompleks Leonardo sayısı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{\mathbf{2}}$	:	Bikompleks sayılar kümesi
F_n	:	n. Fibonacci sayısı
$\mathbb{HD}$	:	Hiper-Dual sayılar kümesi
HDL_{e_n}	:	n. Hiper-Dual Leonardo sayısı
L_n	:	n. Lucas sayısı
L_{e_n}	:	n. Leonardo sayısı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
U_{k_r}	:	n. Hiper-Dual Fibonacci sayısı
V_{k_r}	:	n. Hiper-Dual Lucas sayısı

1. GİRİŞ

Literatürde bir çok büyüleyici asal sayı dizisi vardır. Bunların en önde gelenleri ise Fibonacci ve Lucas dizileridir. Asırlar önce Fibonacci bir tavşan popülasyonun büyümesini içeren bir problem ortaya koyup çözdüğü yöntem, şuan Fibonacci olarak bildiğimiz dizinin kendisidir. Her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamıyla elde edilen Fibonacci dizisi, literatürde en çok dikkat çeken diziler arasındadır. Fibonacci dizisinin bir diğer özelliği ise her terimi bir önceki terimle oranlanıp yazıldığında oluşan serinin altın orana yaklaştığının görülmesidir.

Lucas dizisi Fibonacci dizisine çok benzerdir. Hatta bazı kaynaklarda Fibonacci dizisinin kardeşi olarak adlandırılır. Lucas dizisinde de yine bir terim bulunurken kendinden önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta ise Fibonacci ve Lucas dizilerinin başlangıç değerlerinin farklı olmasıdır. Lucas ve Fibonacci dizileri $n \geq 0$ için tanımlıdır. n.dereceden Fibonacci dizisi F_n, n.dereceden Lucas dizisi L_n şeklinde gösterilir. Literatürde Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgili bir çok çalışma bulunabilir. Örneğin : (Hoggatt, 1969) (Horadam, 1965) (Koshy, 2019).

Leonardo dizisi de Fibonnaci ve Lucas dizisi gibi matematik için önemli dizilerden bir tanesidir. Bu çalışmada Leonardo dizisini Fibonacci dizisiyle aynı özelliklere sahip olduğunu kabul edeceğiz ve n.dereceden Leonardo sayılarını L_{e_n} ile göstereceğiz. Leonardo sayılarının bazı özellikleri Catarino ve Borges tarafından verilmiştir (Catarino ve Borges, 2020: 5). Catarino ve Borges Leonardo sayılarının yineleme bağıntısı ve matris temsilini verirken bunların yanında Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği ve D'ocagne's özdeşliği gibi önemli teoremlerin ispatınıda vermiştir (Catarino ve Borges, 2020: 2). Ayrıca Shannon Hannon Asveld'in uzantısı ve Horadam'ın genelleştirilmiş dizisi olarak kabul edilen genelleştirilmiş Leonardo sayılarını tanımlamıştır (Shannon, 2019: 99). Yasemin Alp ve E. Gökçen Koçer Fibonnaci, Lucas ve Leonardo sayıları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Leonardo sayılarının Binet benzeri formülünü kullanarak bazı önemli eşitlikleri elde etmiştir (Alp ve Kocer, 2021).

Dual sayılar cebiri 1873'de W. Clifford tarafından tanımlanmıştır (Clifford, 1873). Bunların biri de dual sayıların bir genişlemesi olan hiper dual sayılardır. Dual sayılarınn bir genişlemesi olan hiper dual sayılar, kompleks adımlı türev yaklaşımında ikinci türev problemini çözmek için Fike tarafından tanımlanmıştır (Fike, 2009). Fike ve Alonso ikinci türev hesaplamaları için hiper dual sayıları kullanmıştır (Fike ve Alonso, 2011: 4). Hiper dual sayılar türev hesaplamada ve karmaşık yazılımlarda en az hata ile sonuç verdiğinden oldukça kullanışlıdır (Cohen ve Shoham, 2017) (Fike ve Alonso, 2011). Hiper dual sayılar HD ile gösterilir.

Bu tezde hiper dual sayıları tanımlayıp ayrıca hiper dual Leonardo sayıları için üreteç fonksiyonu, Binet benzeri formülü, yineleme bağıntısı, toplam formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve diğer bazı özellikleri inceleceğiz.

Bu tezin diğer bir orijinal kısmı bikompleks Leonardo sayılardır. Mevcut literatürde kompleks sayıların bir çok genişlemesi vardır ve bunlardan biri de dört boyutlu uzayda bazı fizik problemlerini formüle etmek için 1892' de C. Segre tarafından tanımlanan bikompleks sayılardır (Segre, 1892). Bu tezde "bikompleks Leonardo sayıları" başlığı altında bikompleks Leonardo sayılarının tanımı başta olmak üzere üreteç fonksiyonu, Binet's formülü, yineleme bağıntısı, toplam formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve diğer bazı özellikleri bikompleks Leonardo sayıları için elde edilmiştir. Kompleks sayıların bir diğer genişlemesi ise S.W. Hamilton tarafından tanımlanan kuaterniyonlardır (Hamilton, 1853: 46). Bikompleks sayıların kuaterniyonlara benzediği fark edilerek bikompleks sayıların reel ve kompleks matris temsilleri kuaterniyonlara benzer şekilde elde edilmiştir. Bikompleks sayılar ve kuaterniyonlar arasında bazı farklılıklar vardır ve en önemlisi de kuaterniyonlar değişmeli değil iken bikompleks sayılar değişmelidir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Fibonacci Dizisi

Tanım 2.1.1. Fibonacci dizisi $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

eşitliği ile tanımlıdır. Burada $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve F_n n. dereceden Fibonacci sayısıdır (Koshy, 2001: 4).

Teorem 2.1.1. (**Fibonacci Dizisi İçin Binet benzeri formülü**)
Fibonnaci dizisi için Binet benzeri formülü $n \geq 0$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi},$$

dır. Burada ϕ ve ψ $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin karakteristik kökleridir ve F_n n. dereceden Fibonacci sayısıdır (Koshy, 2001: 8).

2.2. Lucas Dizisi

Tanım 2.2.1. Lucas dizisi $n \geq 0$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,$$

eşitliği ile tanımlıdır. Burada $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve L_n n. dereceden Lucas sayısıdır (Koshy, 2001: 4).

Teorem 2.2.1. (**Lucas Dizisi İçin Binet benzeri formülü**)
Lucas dizisi için Binet benzeri formülü $n \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n = \phi^n + \psi^n, \tag{2.1}$$

dir. Burada ϕ ve ψ $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin karakteristlik kökleridir ve L_n n. dereceden Lucas sayısıdır (Koshy, 2001: 8).

2.3. Leonardo Dizisi

Tanım 2.3.1. (**Leonardo Dizisi**)
Leonardo dizisi $n \geq 2$ olmak üzere,

$$L_{e_n} = L_{e_{n-1}} + L_{e_{n-2}} + 1, \tag{2.2}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Burada başlangıç koşulları $L_{e_0} = L_{e_1} = 1$ ve L_{e_n} n. dereceden Leonardo sayısıdır (Catarino ve Borges, 2020: 77).

Teorem 2.3.1. (**Leonardo Sayıları için Yineleme Bağıntısı**)
Leonardo sayıları için yineleme bağıntısı $n \geq 2$ olmak üzere,

$$L_{e_{n+1}} = 2L_{e_n} - L_{e_{n-2}}, \tag{2.3}$$

dır. Burada L_{e_n} n. dereceden Leonardo sayısıdır (Catarino ve Borges, 2020: 77).

Teorem 2.3.2. (**Leonardo Sayıları için Binet benzeri formülü**)
Leonardo sayıları için Binet benzeri formülü,

$$L_{e_n} = \frac{2\phi^{n+1} - 2\psi^{n+1} - \phi + \psi}{\phi - \psi}, \tag{2.4}$$

dir. ϕ ve ψ, $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ denkleminin karakteristlik kökleridir. Burada L_{e_n} n. dereceden Leonardo sayısıdır (Catarino ve Borges, 2020: 78).

Teorem 2.3.3. Binet benzeri formülünden elde edilen Leonardo ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$L_{e_n} = 2F_{n+1} - 1. \tag{2.5}$$

Burada F_n n. dereceden Fibonacci sayısı ve L_{e_n} n. dereceden Leonardo sayısıdır (Catarino ve Borges, 2020: 77).

Fibonacci, Lucas ve Leonardo sayıları ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

$$F_r + L_r = 2F_{r+1}, \tag{2.6}$$

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^n F_iF_j, \tag{2.7}$$

$$L_{e_{r+s}} + (-1)^s L_{e_{r-s}} = L_s(L_{e_r} + 1) - 1 - (-1)^s, \tag{2.8}$$

$$L_{e_{r+s}} - (-1)^s L_{e_{r-s}} = L_{r+1}(L_{e_{s-1}} + 1) - 1 + (-1)^s, \tag{2.9}$$

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2, \tag{2.10}$$

$$L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m} = 5F_nF_m, \tag{2.11}$$

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} F_{r+1} = (-1)^{m-1} F_m, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n} L_{e_{2j+1}} = L_{e_{2n+2}} - (n+2) \tag{2.13}$$

(Alp ve Kocer, 2021: 183-184).

Burada F_n n. dereceden Fibonacci sayısı, L_n n. dereceden Lucas sayısı ve L_{e_n} n. dereceden Leonardo sayısıdır.

2.4. Kompleks Sayılar

Tanım 2.4.1. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini temsil etmek üzere, kompleks sayılar $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$x = x_1 + x_2 i,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ dir (Yaglom, :1968: 2).

2.5. Dual Sayılar

ID dual sayılar kümesini temsil etmek üzere, $\forall x_0$ ve $x_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere dual sayılar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ID = \left\{ \begin{array}{c} x_0 + x_1\varepsilon_1 : x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon_1^2 = 0 \end{array} \right\}.$$

2.6. Bikompleks Sayılar

Tanım 2.6.1. $\mathbb{C}_2$ bikompleks sayılar kümesini temsil etmek üzere, $x \in \mathbb{C}_2$

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $1, i, j$ ve ij bikompleks sayıların birimleridir ve x_1, x_2, x_3 ve $x_4 \in \mathbb{R}$ dır. Bikompleks sayıların birimleri için $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$ ve $(ij)^2 = 1$ eşitlikleri vardır (Luna ve Shapiro, 2012: 64).

Tanım 2.6.2. (**Bikompleks Sayıların Birim Çarpım Tablosu**)

Bikompleks sayıların birimlerinin çarpımını gösteren birim çarpım tablosu aşağıda verilmiştir.

.	**1**	**i**	**j**	**ij**
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	-j
j	j	ij	-1	-i
ij	ij	-j	-i	1

Tanım 2.6.3. (**Bikompleks Sayıların Toplamı**)
$z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij$ ve $w = w_1 + w_2 i + w_3 j + w_4 ij$ iki bikompleks sayı olmak üzere, iki bikompleks sayının toplamı

$$z + w = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2)\, i + (z_3 + w_3)\, j + (z_4 + w_4)\, ij,$$

dir (Luna ve Shapiro, 2012: 64).

Tanım 2.6.4. (**Bikompleks Sayılarda Skalar İle Çarpma**)
$c \in \mathbb{R}$ ve $z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 ij$ bikompleks sayı olmak üzere herhangi bir bikompleks sayının bir skaler ile çarpımı

$$cz = cz_1 + cz_2 i + cz_3 j + cz_4 ij,$$

olarak tanımlanır (Luna ve Shapiro, 2012: 64).

Literatürde Fibonacci ve Lucas sayılarının bir çok genişleşmesi mevcuttur. Tezimizde ihtiyaç duyduğumuz bu genişlemelerden bazıları olan bikompleks Fibonacci ve bikompleks Lucas sayılarının tanımları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

Tanım 2.6.5. F_n ve L_n sırasıyla n.dereceden Fibonacci ve Lucas sayısı olmak üzere,

$$BF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}ij,$$

n. bikompleks Fibonacci sayısı

ve

$$BL_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}ij,$$

n. bikompleks Lucas sayısı olarak tanımlanır. Burada $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$ ve $(ij)^2 = 1$ eşitlikleri Fibonacci ve Lucas sayıları için sağlanır (Omur ve Koparal, 2020: 193).

2.7. Hiper Dual Sayılar

Tanım 2.7.1. Hiper dual sayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$HD = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2 : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0, \varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0, \ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \neq 0 \end{array} \right\},$$

(Fike ve Alonso, :2011: 7).

Tanım 2.7.2. (**Hiper Dual Sayılarda Toplama**)
x ve y iki hiper dual sayı olmak üzere $x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ için iki hiper dual sayının toplamı

$$x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\varepsilon_1 + (x_2 + y_2)\varepsilon_2 + (x_3 + y_3)\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

dır (Fike ve Alonso, :2011: 7).

Tanım 2.7.3. (**Hiper Dual Sayılarda Eşitlik**)
x ve y iki hiper dual sayı olmak üzere $x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ için $x = y$ ancak ve ancak $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ sağlanmalıdır (Fike ve Alonso, :2011: 7).

Tanım 2.7.4. (**Hiper Dual Sayılarda Skalar İle Çarpma**)
$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ bir hiper dual sayı olmak üzere, bir hiper dual sayının skaler ile çarpma işlemi:

$$kx = kx_0 + kx_1\varepsilon_1 + kx_2\varepsilon_2 + kx_3\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

dır. Burada $k \in \mathbb{R}$ dır (Fike ve Alonso, :2011: 7).

Tanım 2.7.5. (**Hiper Dual Sayılarda Çarpma**)
$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_1\varepsilon_2$ iki hiper dual sayı olmak üzere, iki hiper dual sayının çarpımı

$$x \cdot y = (x_0y_0) + (x_0y_1 + x_1y_0)\varepsilon_1 + (x_0y_2 + x_2y_0)\varepsilon_2 + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 + x_2y_1)\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

dır (Fike ve Alonso, :2011: 7).

Literatürde Fibonacci ve Lucas sayılarının bir çok genişleşmesi mevcuttur. Tezimizde ihtiyaç duyduğumuz bu genişlemelerden bazıları olan hiper dual Fibonacci ve hiper dual Lucas sayılarının tanımları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

Tanım 2.7.6. $\{U_{k_r}\}$ ve $\{V_{k_r}\}$ sırasıyla n. Fibonacci ve n. Lucas sayıları olmak üzere,

$$\widetilde{U_{k_r}} = U_{k_r} + U_{k_{(r+1)}}\varepsilon_1 + U_{k_{(r+2)}}\varepsilon_2 + U_{k_{(r+3)}}\varepsilon_1\varepsilon_2, \tag{2.14}$$

n. hiper dual Fibonnaci sayısı ve

$$\widetilde{V_{k_r}} = V_{k_r} + V_{k_{(r+1)}}\varepsilon_1 + V_{k_{(r+2)}}\varepsilon_2 + V_{k_{(r+3)}}\varepsilon_1\varepsilon_2, \tag{2.15}$$

n. hiper dual Lucas sayısıdır. Burada ve $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0, \varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0,\ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \neq 0$ dir (Omur ve Koparal, 2020: 193).

3. HİPER DUAL LEONARDO SAYILARI

Bu bölümde hiper dual Leonardo sayılarını tanımlayıp hiper dual Leonardo sayılarıyla Leonardo sayılarının arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Sonrasında ise üreteç fonksiyonu, Binet benzeri formülü, toplam formüllerini, Catalan özdeşliğini, Cassini özdeşliğini ve diğer eşitlikleri elde edeceğiz.

3.1. Hiper Dual Leonardo Sayıları

$n \geq 1$ olmak üzere n.dereceden hiper dual Leonardo sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$HDL_{e_n} = L_{e_n} + L_{e_{n+1}}\varepsilon_1 + L_{e_{n+2}}\varepsilon_2 + L_{e_{n+3}}\varepsilon_1\varepsilon_2. \tag{3.1}$$

Bu tez boyunca n.dereceden hiper dual Leonardo sayılarını HDL_{e_n} ile göstereceğiz.

Yineleme bağıntısı (2.2) ve hiper dual Leonardo sayılarının tanımından (3.1) Leonardo sayıları için yineleme bağıntısı $n \geq 2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
HDL_{e_n} &= (L_{e_{n-1}} + L_{e_{n-2}} + 1) + (L_{e_n} + L_{e_{n-1}} + 1)\varepsilon_1 \\
&\quad + (L_{e_{n+1}} + L_{e_n} + 1)\varepsilon_2 + (L_{e_{n+2}} + L_{e_{n+1}} + 1)\varepsilon_1\varepsilon_2, \\
&= HDL_{e_{n-1}} + HDL_{e_{n-2}} + A,
\end{aligned}
$$

dir. Burada $A = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ dir. A yı tez boyunca bu şekilde kabul edeceğiz. Ayrıca başlangıç koşulları $HDL_{e_0} = 1 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $HDL_{e_1} = 1 + 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 9\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir.

Hiper dual Leonardo sayılarının ilk bir kaç terimi şu şekildedir:

$$HDL_{e_0} = 1 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$HDL_{e_1} = 1 + 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 9\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$HDL_{e_2} = 3 + 5\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 15\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$HDL_{e_3} = 5 + 9\varepsilon_1 + 15\varepsilon_2 + 25\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$HDL_{e_4} = 9 + 15\varepsilon_1 + 25\varepsilon_2 + 41\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$HDL_{e_5} = 15 + 25\varepsilon_1 + 41\varepsilon_2 + 67\varepsilon_1\varepsilon_2$$

Hiper dual Leonardo sayıların bir diğer yineleme ilişkisi de

$$HDL_{e_{n+1}} = 2HDL_{e_n} - HDL_{e_{n-2}}, \tag{3.2}$$

dir.

Hiper dual Leonardo sayıların tanımını (3.1) ve Leonardo sayılarının yineleme bağıntısını (2.3) kullanarak $n \geqslant 2$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
HDL_{e_{n+1}} &= 2L_{e_n} - L_{e_{n-2}} + (2L_{e_{n+1}} - L_{e_{n-1}})\varepsilon_1 \\
&\quad + (2L_{e_{n+2}} - L_{e_n})\varepsilon_2 + (2L_{e_{n+3}} - L_{e_{n+1}})\varepsilon_1\varepsilon_2, \\
&= L_{e_{n+1}} + L_{e_{n+2}}\varepsilon_1 + L_{e_{n+3}}\varepsilon_2 + L_{e_{n+4}}\varepsilon_1\varepsilon_2, \\
&= 2HDL_{e_n} - HDL_{e_{n-2}},
\end{aligned}
$$

dir. Burada başlangıç koşulları $HDL_{e_0} = 1 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $HDL_{e_1} = 1 + 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 9\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir.

Teorem 3.1.1. Hiper dual Leonardo sayıları için üreteç fonksiyonu

$$gHDL_{e_n}(t) = \frac{HDL_{e_0} + t(-1+\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) + t^2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-3\varepsilon_1\varepsilon_2)}{1-2t+t^3},$$

dir.

İspat. $\{HDL_{e_n}\}_{n=0}^{\infty}$ için kuvvet serisinin formal temsili

$$gHDL_{e_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HDL_{e_n} t^n \tag{3.3}$$

dir.

$$gHDL_{e_n}(t) = HDL_{e_0} + HDL_{e_1}t + HDL_{e_2}t^2 + ... + HDL_{e_k}t^k + ...$$

yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını $\left(1-2t+t^3\right)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
\left(1-2t+t^3\right) gHDL_{e_n}(t) &= \left(1-2t+t^3\right) \begin{pmatrix} HDL_{e_0} + HDL_{e_1}t \\ +HDL_{e_2}t^2 + ... + HDL_{e_k}t^k + ... \end{pmatrix} \\
\left(1-2t+t^3\right) gHDL_{e_n}(t) &= HDL_{e_0} + HDL_{e_1}t + HDL_{e_2}t^2 + ... + \\
&\quad -2HDL_{e_0}t - 2HDL_{e_1}t^2 - 2HDL_{e_2}t^3 - ... \\
&\quad +HDL_{e_0}t^3 + HDL_{e_1}t^4 + HDL_{e_2}t^5 + ... \\
&= HDL_{e_0} + t\left(HDL_{e_1} - 2HDL_{e_0}\right) + t^2\left(HDL_{e_2} - 2HDL_{e_1}\right) \\
&\quad +t^3\left(HDL_{e_3} - 2HDL_{e_2} + HDL_{e_0}\right) + ... \\
&\quad +t^{k+1}\left(HDL_{e_{k+1}} - 2HDL_{e_k} + HDL_{e_{k-2}}\right) + ...
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Hiper dual Leonardo sayıların yineleme bağıntısı (3.2) ve başlangıç koşullarını kullanarak

$$\begin{aligned}
gHDL_{e_n}(t)(1-2t+t^3) &= (1+\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_1\varepsilon_2) \\
&\quad +t(-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2) + t^2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-3\varepsilon_1\varepsilon_2),
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\{HDL_{e_n}\}_{n=0}^{\infty}$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HDL_{e_n} t^n = \frac{HDL_{e_0} + t(-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2) + t^2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-3\varepsilon_1\varepsilon_2)}{1-2t+t^3},$$

dir. ∎

Teorem 3.1.2. $n \geqslant 0$ olmak üzere hiper dual Leonardo ve hiper dual Fibonnaci sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$HDL_{e_n} = 2\widetilde{U}_{n+1} - A. \tag{3.4}$$

Burada $\widetilde{U}_n$ n.dereceden hiper dual Fibonacci sayısıdır.

İspat. Hiper dual Leonardo sayıların tanımı (3.1) ve Leonardo ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişki (2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
HDL_{e_n} &= L_{e_n} + L_{e_{n+1}}\varepsilon_1 + L_{e_{n+2}}\varepsilon_2 + L_{e_{n+3}}\varepsilon_1\varepsilon_2, \\
&= (2F_{n+1} - 1) + (2F_{n+2} - 1)\varepsilon_1 \\
&\quad +(2F_{n+3} - 1)\varepsilon_2 + (2F_{n+4} - 1)\varepsilon_1\varepsilon_2, \\
&= 2(F_{n+1} + F_{n+2}\varepsilon_1 + F_{n+3}\varepsilon_2 + F_{n+4}\varepsilon_1\varepsilon_2) - A, \\
&= 2\widetilde{U}_{n+1} - A,
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.3. Hiper dual Leonardo sayıları için Binet benzeri formülü,

$$HDL_{e_n} = 2(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi - \psi}) - A, \tag{3.5}$$

dir. Burada $n \geqslant 0$ olmak üzere ϕ ve ψ $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ denkleminin karakteristlik kökleridir. $\underline{\Phi} = 1 + \phi\varepsilon_1 + \phi^2\varepsilon_2 + \phi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\underline{\Psi} = 1 + \psi\varepsilon_1 + \psi^2\varepsilon_2 + \psi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir.

İspat.

Hiper dual Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve Leonardo sayıları için Binet benzeri formülü (2.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
HDL_{e_n} &= L_{e_n} + L_{e_{n+1}}\varepsilon_1 + L_{e_{n+2}}\varepsilon_2 + L_{e_{n+3}}\varepsilon_1\varepsilon_2 \\
&= \left(\frac{2\phi^{n+1} - 2\psi^{n+1} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right) + \left(\frac{2\phi^{n+2} - 2\psi^{n+2} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right)\varepsilon_1 \\
&+ \left(\frac{2\phi^{n+3} - 2\psi^{n+3} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right)\varepsilon_2 + \left(\frac{2\phi^{n+4} - 2\psi^{n+4} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2
\end{aligned}$$

$$HDL_{e_n} = 2\left(\begin{array}{c} \frac{\phi^{n+1}-\psi^{n+1}}{\phi-\psi} + \frac{\phi^{n+2}-\psi^{n+2}}{\phi-\psi}\varepsilon_1 \\ +\frac{\phi^{n+3}-\psi^{n+3}}{\phi-\psi}\varepsilon_2 + \frac{\phi^{n+4}-\psi^{n+4}}{\phi-\psi}\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{array}\right) - (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$$

eşitliği elde edilir.

$\underline{\Phi} = 1 + \phi\varepsilon_1 + \phi^2\varepsilon_2 + \phi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\underline{\Psi} = 1 + \psi\varepsilon_1 + \psi^2\varepsilon_2 + \psi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ eşitliklerini son eşitlikte yerine koyarsak hiper dual Leonardo sayıları için Binet benzeri formülünü elde ederiz. ■

Teorem 3.1.4. $n \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere hiper dual Leonardo sayıları için toplam formülleri aşağıdaki gibidir.

$$1) \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_r} = HDL_{e_{n+2}} - (n+2)A - (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$2) \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r}} = HDL_{e_{2n+1}} - nA - (2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$3) \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+1}} = HDL_{e_{2n+1}} - (n+2)A - (2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$4) \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r-1} HDL_{e_r} = \begin{cases} -\left(HDL_{e_{n-1}} + 2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right), & n \text{ çift} \\ HDL_{e_{n-1}} - 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2, & n \text{ tek} \end{cases}.$$

İspat. Leonardo dizisinin toplam ve çarpım formüllerini kullanarak ve ayrıca hiper dual Leonardo sayıların tanımını kullanarak (1), (2), (3) ve (4)'ün ispatı aşağıda verilmiştir.

(1) hiper dual Leonardo sayılarının tanımından (3.1) ve Leonardo sayılarının yineleme bağıntısından (2.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_r} &= \sum_{r=0}^{n} \left(HDL_{e_r} + \varepsilon_1 HDL_{e_{r+1}} + \varepsilon_2 HDL_{e_{r+2}} + \varepsilon_1\varepsilon_2 HDL_{e_{r+3}}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_r} + \varepsilon_1 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{r+1}} + \varepsilon_2 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{r+2}} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{r+3}} \\
&= HDL_{e_{n+2} - (n+2)[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2] - (2\varepsilon_1+4\varepsilon_2+8\varepsilon_1\varepsilon_2)} \\
&= HDL_{e_{n+2}} - (n+2)A - (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2) hiper dual Leonardo sayılarının tanımından (3.1)ve (2.13) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r}} &= \sum_{r=0}^{n} \left(HDL_{e_{2r}} + \varepsilon_1 HDL_{e_{2r+1}} + \varepsilon_2 HDL_{e_{2r+2}} + \varepsilon_1\varepsilon_2 HDL_{e_{2r+3}}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r}} + \varepsilon_1 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+1}} + \varepsilon_2 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+2}} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+3}} \\
&= HDL_{e_{2n+1}} - n + \varepsilon_1 \left(HDL_{e_{2n+2}} - (n+2)\right) + \varepsilon_2 \left(HDL_{e_{2n+3}} - n - 2\right) \\
&+ \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(HDL_{e_{2n+4}} - 2 - (n+2)\right) \\
&= HDL_{e_{2n+1}} - nA - (2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3) hiper dual Leonardo sayılarının tanımından (3.1) ve Leonardo sayılarının yineleme bağıntısından (2.2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+1}} &= \sum_{r=0}^{n}\left(HDL_{e_{2r+1}}+\varepsilon_1 HDL_{e_{2r+2}}+\varepsilon_2 HDL_{e_{2r+3}}+\varepsilon_1\varepsilon_2 HDL_{e_{2r+4}}\right)\\
&= \sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+1}}+\varepsilon_1\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+2}}+\varepsilon_2\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+3}}+\varepsilon_1\varepsilon_2\sum_{r=0}^{n} HDL_{e_{2r+4}}\\
&= HDL_{e_{2n+2}}-(n+2)+\varepsilon_1\left(HDL_{e_{2n+3}}-n-2\right)+\varepsilon_2\left(HDL_{e_{2n+4}}-(n+2)-2\right)\\
&+\varepsilon_1\varepsilon_2\left(HDL_{e_{2n+5}}-n-6\right)\\
&= HDL_{e_{2n+1}}-(n+2)A-(2\varepsilon_2+4\varepsilon_1\varepsilon_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(4) hiper dual Leonardo sayılarının tanımından

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} HDL_{e_r} &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} L_{e_r}+\varepsilon_1\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} L_{e_{r+1}}\\
&+\varepsilon_2\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} L_{e_{r+2}}+\varepsilon_1\varepsilon_2\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} L_{e_{r+3}},
\end{aligned}
$$

dır.

(2.2), (2.5) ve (2.12) kullanılarak

$$
\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} HDL_{e_r} = \{-2\widetilde{U}_n-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad n \text{ çift} 2\widetilde{U}_n-2-2\varepsilon_2-2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad n \text{ tek}
$$

elde edilir. Burada $\widetilde{U}_n$ n.dereceden hiper dual Fibonacci sayısıdır. (3.4) den istenen sonuca ulaşırız. ■

Teorem 3.1.5. **(Catalan Özdeşliği)**

n ve r pozitif tam sayılar ve $n \geq r$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&HDL_{e_n}^2-HDL_{e_{n-r}}HDL_{e_{n+r}} \\
&= (HDL_{e_{n-r}}+HDL_{e_{n+r}}-2HDL_{e_n})A \\
&+4(-1)^{n-r+1}(2(\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2)+A)F_r^2,
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

dir. Burada F_n n.dereceden Fibonacci sayısıdır ve $A = 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir.

İspat. Tez boyunca, SK eşitliğin sol kısmını ifade edecektir.

Kabul edelim ki $HDL_{e_n}^2-HDL_{e_{n-r}}HDL_{e_{n+r}} = SK$ olsun. SK için Binet benzeri formülü

(3.5) kullanılarak

$$SK = \left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi - \psi}\right) - A\right)\left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi - \psi}\right) - A\right) \tag{3.7}$$
$$- \left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n-r+1} - \underline{\Psi}\psi^{n-r+1}}{\phi - \psi}\right) - A\right)\left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+r+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+r+1}}{\phi - \psi}\right) - A\right),$$

eşitliği elde edilir.

ϕ, ψ, $\underline{\Phi} = 1 + \phi\varepsilon_1 + \phi^2\varepsilon_2 + \phi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ve $\underline{\Psi} = 1 + \psi\varepsilon_1 + \psi^2\varepsilon_2 + \psi^3\varepsilon_1\varepsilon_2$ ifadeleri dikkate alınırsa

$$\underline{\Phi\Psi} = 1 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2, \tag{3.8}$$

dır. Son olarak SK için (2.10) ve (3.8) kullanılarak

$$SK = (HDL_{e_{n-r}} + HDL_{e_{n+r}} - 2HDL_{e_n})A$$
$$+4(-1)^{n-r+1}(2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + A)F_r^2.$$

elde edilir. ■

Yukarıdaki teoremde (3.6) $r = 1$ alınırsa hiper dual Leonardo sayıları için Cassini özdeşliği aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.1.6. (Cassini Özdeşliği)

$n \geq 1$ olmak üzere hiper dual Leonardo sayıları için Cassini özdeşliği

$$HDL_{e_n}^2 - HDL_{e_{n-1}}HDL_{e_{n+1}} = (HDL_{e_{n-1}} - HDL_{e_n-2})A$$
$$+4(-1)^n(2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + A),$$

dir.

Teorem 3.1.7. k, m, ve s pozitif tam sayılar olmak üzere Fibonacci sayıları ve hiper dual Leonardo sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$HDL_{e_{k+m}}HDL_{e_{k+s}} - HDL_{e_k}HDL_{e_{k+m+s}}$$
$$= (HDL_{e_k} - HDL_{e_{k+m}} + HDL_{e_{k+m+s}} - HDL_{e_{k+s}})A$$
$$+4(-1)^{k+1}F_mF_s\left(2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right) + A\right).$$

Burada F_n n.dereceden Fibonacci sayısıdır.

İspat.

Kabul edelim ki $SK = HDL_{e_{k+m}}HDL_{e_{k+s}} - HDL_{e_k}HDL_{e_{k+m+s}}$ olsun. SK için Binet benzeri formülü (3.5) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
SK = & \left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+m+1}-2\underline{\Psi}\psi^{k+m+1}}{\phi-\psi}-A\right)\left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+s+1}-2\underline{\Psi}\psi^{k+s+1}}{\phi-\psi}-A\right) \\
& -\left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+1}-2\underline{\Psi}\psi^{k+1}}{\phi-\psi}-A\right)\left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+m+s+1}-2\underline{\Psi}\psi^{k+m+s+1}}{\phi-\psi}-A\right), \\
= & \left(HDL_{e_k}-HDL_{e_{k+m}}+HDL_{e_{k+m+s}}-HDL_{e_{k+s}}\right)A \\
& +\frac{4\underline{\Phi\Psi}}{(\phi-\psi)^2}\left(\phi^{k+1}\psi^{k+1}\left(-\phi^m\psi^s-\phi^s\psi^m+\psi^{m+s}+\phi^{m+s}\right)\right),
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Sonrasında ise Fibonacci sayıları için Vajda eşitliği (2.7) ve (3.8) den

$$
\begin{aligned}
SK = & \left(HDL_{e_k}-HDL_{e_{k+m}}+HDL_{e_{k+m+s}}-HDL_{e_{k+s}}\right)A \\
& +4(-1)^{k+1}F_mF_s\left(2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)+A\right),
\end{aligned}
$$

dır. ■

Teorem 3.1.8. n ve m pozitif tam sayılar ve $n \geq m$ olmak üzere Lucas, Leonardo, hiper dual Lucas ve hiper dual Leonardo sayılarını arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$HDL_{e_{n+m}}+(-1)^m HDL_{e_{n-m}} = L_m HDL_{e_n}+(L_m-(-1)^m-1)A. \tag{3.9}$$

$$HDL_{e_{n+m}}-(-1)^m HDL_{e_{n-m}} = (L_{e_{m-1}}+1)\widetilde{V}_{n+1}+((-1)^m-1)A. \tag{3.10}$$

Burada L_n n. dereceden Lucas sayısı , L_{e_n} n.dereceden Leonardo sayısı ve $\widetilde{V}_n$ n.dereceden hiper dual Leonardo sayısıdır.

İspat.

(3.9) in ispatı için kabul edelim ki $HDL_{e_{n+m}}+(-1)^m HDL_{e_{n-m}} = SK$ olsun. SK için hiper dual Leonardo sayıların tanımını kullanarak

$$
\begin{aligned}
SK = & \left(L_{e_{n+m}}+(-1)^m L_{e_{n-m}}\right)+\left(L_{e_{n+m+1}}+(-1)^m L_{e_{n-m+1}}\right)\varepsilon_1 \\
& +\left(L_{e_{n+m+2}}+(-1)^m L_{e_{n-m+2}}\right)\varepsilon_2+\left(L_{e_{n+m+3}}+(-1)^m L_{e_{n-m+3}}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan da (2.8) kullanılarak

$$SK = L_m HDL_{e_n}+A(L_m-(-1)^m-1)$$

elde edilir.

(3.10)' in ispatı da aynı şekilde yapılır. ■

Teorem 3.1.9. m, r ve s pozitif tam sayılar $m \geq r$ ve $m \geq s$ olmak üzere Fibonacci ve hiper dual Leonardo sayıları için

$$\begin{aligned}
&HDL_{e_{m+r}} HDL_{e_{m-r}} - HDL_{e_{m+s}} HDL_{e_{m-s}} \\
=& \left(HDL_{e_{m+s}} - HDL_{e_{m+r}} + HDL_{e_{m-s}} - HDL_{e_{m-r}}\right)A \\
&+4\left(A + 2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right)\left((-1)^{m-r}F_r^2 - (-1)^{m-s}F_s^2\right),
\end{aligned}$$

dır. Burada F_n n.dereceden Fibonacci sayısıdır.

İspat.

Kabul edelim ki $HDL_{e_{m+r}} HDL_{e_{m-r}} - HDL_{e_{m+s}} HDL_{e_{m-s}} = SK$ olsun. SK için hiper dual Leonardo sayıların Binet benzeri formülü (3.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
SK =& \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m+r+1} - \underline{\Psi}\psi^{m+r+1}}{\phi - \psi} - A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m-r+1} - \underline{\Psi}\psi^{m-r+1}}{\phi - \psi} - A\right) \\
&- \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m+s+1} - \underline{\Psi}\psi^{m+s+1}}{\phi - \psi} - A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m-s+1} - \underline{\Psi}\psi^{m-s+1}}{\phi - \psi} - A\right), \\
=& \left(HDL_{e_{m+s}} - HDL_{e_{m+r}} + HDL_{e_{m-s}} - HDL_{e_{m-r}}\right)A \\
&+ \frac{4\underline{\Phi\Psi}}{(\phi - \psi)^2}\left(\phi^m\psi^m\left(\phi^r\psi^{-r} + \psi^r\phi^{-r} - \phi^s\psi^{-s} - \psi^s\phi^{-s}\right)\right),
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da SK için (2.10) ve (3.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}
SK =& \left(HDL_{e_{m+s}} - HDL_{e_{m+r}} + HDL_{e_{m-s}} - HDL_{e_{m-r}}\right)A \\
&+4\left(2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right) + A\right)\left((-1)^{m-r}F_r^2 - (-1)^{m-s}F_s^2\right),
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.10. n, m, s, ve r pozitif tam sayılar $n \geq m$ ve $s \geq r$ olmak üzere $n + m = s + r$ Lucas ve hiper dual Leonardo sayıları için

$$\begin{aligned}
&HDL_{e_n} HDL_{e_m} - HDL_{e_s} HDL_{e_r} \\
=& \left(HDL_{e_s} - HDL_{e_n} + HDL_{e_r} - HDL_{e_m}\right)A \\
&+\frac{4}{5}\left(2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + A\right)\left((-1)^m L_{n-m} - (-1)^r L_{s-r}\right),
\end{aligned}$$

dir. Burada L_n n.dereceden Lucas sayısıdır.

İspat.

$HDL_{e_n} HDL_{e_m} - HDL_{e_s} HDL_{e_r} = SK$ olsun. SK için hiper dual Leonardo sayılarının Binet benzeri formülü (3.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
SK &= \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1}-\underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi-\psi}-A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m+1}-\underline{\Psi}\psi^{m+1}}{\phi-\psi}-A\right)\\
&\quad-\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s+1}-\underline{\Psi}\psi^{s+1}}{\phi-\psi}-A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r+1}-\underline{\Psi}\psi^{r+1}}{\phi-\psi}-A\right).\\
&= (HDL_{e_s}-HDL_{e_n}+HDL_{e_r}-HDL_{e_m})A\\
&\quad+\frac{4\underline{\Phi}\underline{\Psi}}{(\phi-\psi)^2}\left(\phi^n\psi^m+\phi^m\psi^n-\phi^s\psi^r-\phi^r\psi^s\right),
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.11) ve (3.8) eşitliklerinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
SK &= (HDL_{e_s}-HDL_{e_n}+HDL_{e_r}-HDL_{e_m})A\\
&\quad+\frac{4}{5}\left(2(\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2)+A\right)\left((-1)^m L_{n-m}-(-1)^r L_{s-r}\right),
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.11. r ve s pozitif tam sayılar $r\geq 1$ ve $s\geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&HDL_{e_{s+1}}HDL_{e_{r+1}}-HDL_{e_{s-1}}HDL_{e_{r-1}}\\
&= -(HDL_{e_s}+HDL_{e_r})A-2A^2\\
&\quad+8\widetilde{U}_{s+r+2}-4F_{s+r+2}+8\varepsilon_1\varepsilon_2F_{s+r+5},
\end{aligned}$$

dir. Burada F_n ve $\widetilde{U_n}$ sırasıyla n.dereceden Fibonacci ve hiper dual Leonardo sayılarıdır.

İspat.

Kabul edelim ki $HDL_{e_{s+1}}HDL_{e_{r+1}}-HDL_{e_{s-1}}HDL_{e_{r-1}}=SK$ olsun. SK için hiper dual Leonardo sayılarının Binet benzeri formülü (3.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
SK &= \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s+2}-\underline{\Psi}\psi^{s+2}}{\phi-\psi}-A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r+2}-\underline{\Psi}\psi^{r+2}}{\phi-\psi}-A\right)\\
&\quad-\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s}-\underline{\Psi}\psi^{s}}{\phi-\psi}-A\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r}-\underline{\Psi}\psi^{r}}{\phi-\psi}-A\right),\\
&= -(HDL_{e_s}+HDL_{e_r})A-2A^2\\
&\quad+\frac{4}{(\phi-\psi)^2}\left(\underline{\Phi}^2\phi^{s+r}\left(\phi^4-1\right)+\underline{\Psi}^2\psi^{s+r}\left(\psi^4-1\right)\right),
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca Lucas sayıları için Binet benzeri formülü (2.1), (2.11) ve (2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} SK &= -(HDL_{e_s} + HDL_{e_r})A - 2A^2 \\ &\quad + 8\widetilde{U}_{s+r+2} - 4F_{s+r+2} + 8\varepsilon_1\varepsilon_2 F_{s+r+5}, \end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. BİKOMPLEKS LEONARDO SAYILARI

Bu bölümde bikompleks Leonardo sayıları ve Leonardo sayıları arasında bazı temel eşitlikleri elde edeceğiz. İlk olarak yineleme bağıntısı ve üreteç fonksiyonu bikompleks Leonardo sayıları için elde edeceğiz. Sonrasında ise Binet benzeri formülü, toplam formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve bazı önemli eşitlikleri elde edeceğiz.

4.1. Bikompleks Leonardo Sayıları

Tanım 4.1.1. $n \geq 1$ olmak üzere n.dereceden bikompleks Leonardo sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbb{BL}_{e_n} = L_{e_n} + L_{e_{n+1}} i + L_{e_{n+2}} j + L_{e_{n+3}} ij. \tag{4.1}$$

Bikompleks Leonardo sayıları BL_{e_n} ile gösterilir. Bu bölüm boyunca BL_{e_n} n.dereceden bikompleks Leonardo sayısı olarak kabul edeceğiz.

$n \geq 2$ olmak üzere bikompleks Leonardo sayıları için yineleme bağıntısı,

$$\mathbb{BL}_{e_n} = \mathbb{BL}_{e_{n-1}} + \mathbb{BL}_{e_{n-2}} + C \tag{4.2}$$

dir.

Yineleme bağıntısı (2.2) ve bikompleks Leonardo sayılarının tanımını (4.1) kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{BL}_{e_n} &= (L_{e_{n-1}} + L_{e_{n-2}} + 1) + (L_{e_n} + L_{e_{n-1}} + 1)i \\ &\quad + (L_{e_{n+1}} + L_{e_n} + 1)j + (L_{e_{n+2}} + L_{e_{n+1}} + 1)ij, \\ &= \mathbb{BL}_{e_{n-1}} + \mathbb{BL}_{e_{n-2}} + C, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C = 1 + i + j + ij$ dir ve bu bölüm boyunca bu şekilde kabul edilecektir. Ayrıca bikompleks Leonardo sayılarının başlangıç koşulları $\mathbb{BL}_{e_0} = 1 + i + 3j + 5ij$ ve $\mathbb{BL}_{e_1} = 1 + 3i + 5j + 9ij$ dir.

Bikompleks Leonardo sayılarının ilk bir kaç terimi şu şekildedir:

$$\mathbb{BL}_{e_0} = 1 + i + 3j + 5ij$$

$$\mathbb{BL}_{e_1} = 1 + 3i + 5j + 9ij$$

$$\mathbb{BL}_{e_2} = 3 + 5i + 9j + 15ij$$

$$\mathbb{BL}_{e_3} = 5 + 9i + 15j + 25ij$$

$$\mathbb{BL}_{e_4} = 9 + 15i + 25j + 41ij$$

$$\mathbb{BL}_{e_5} = 15 + 25i + 41j + 67ij$$

Bikompleks sayıların birimlerinin çarpımını gösteren birim çarpım tablosu aşağıdaki gibidir.

.	**1**	**i**	**j**	**ij**
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	ij	-1	$-i$
ij	ij	$-j$	$-i$	1

dır.

Bikompleks Leonardo sayıları için bir diğer yineleme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbb{BL}_{e_{n+1}} = 2\mathbb{BL}_{e_n} - \mathbb{BL}_{e_{n-2}}. \tag{4.3}$$

Bikompleks Leonardo sayılarının tanımını (4.1) ve Leonardo sayılarının yineleme bağıntısını (2.3) kullanarak,

$n \geqslant 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathbb{BL}_{e_{n+1}} &= 2L_{e_n} - L_{e_{n-2}} + (2L_{e_{n+1}} - L_{e_{n-1}})i, \\ &\quad + (2L_{e_{n+2}} - L_{e_n})j + (2L_{e_{n+3}} - L_{e_{n+1}})ij \\ &= 2\mathbb{BL}_{e_n} - \mathbb{BL}_{e_{n-2}},\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. Bikompleks Leonardo sayıları için üreteç fonksiyon $g\mathbb{BL}_{e_n}(t)$ ile gösterilir ve

$$g\mathbb{BL}_{e_n}(t) = \frac{\mathbb{BL}_{e_0} + t(-1 + i - j - ij) + t^2(1 - i - j - 3ij)}{1 - 2t + t^3},$$

dir.

İspat.

Kabul edelim ki üreteç fonksiyonun formal kuvvet serisi $\{\mathbb{BL}_{e_n}\}_{n=0}^{\infty}$ için aşağıdaki gibi olsun:

$$g\mathbb{BL}_{e_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{BL}_{e_n} t^n, \tag{4.4}$$

$$g\mathbb{BL}_{e_n}(t) = \mathbb{BL}_{e_0} + \mathbb{BL}_{e_1} t + \mathbb{BL}_{e_2} t^2 + ... + \mathbb{BL}_{e_k} t^k + ...$$

Sonrasında eşitliğin her iki tarafını $\left(1-2t+t^3\right)$ ile çarparsak:

$$\begin{aligned}
\left(1-2t+t^3\right) g\mathbb{BL}_{e_n}(t) &= \left(1-2t+t^3\right) \begin{pmatrix} \mathbb{BL}_{e_0} + \mathbb{BL}_{e_1} t \\ +\mathbb{BL}_{e_2} t^2 + ... + \mathbb{BL}_{e_k} t^k + ... \end{pmatrix} \\
\left(1-2t+t^3\right) g\mathbb{BL}_{e_n}(t) &= \mathbb{BL}_{e_0} + \mathbb{BL}_{e_1} t + \mathbb{BL}_{e_2} t^2 + ... + \\
&\quad -2\mathbb{BL}_{e_0} t - 2\mathbb{BL}_{e_1} t^2 - 2\mathbb{BL}_{e_2} t^3 - ... \\
&\quad +\mathbb{BL}_{e_0} t^3 + \mathbb{BL}_{e_1} t^4 + \mathbb{BL}_{e_2} t^5 + ... \\
&= \mathbb{BL}_{e_0} + t\left(\mathbb{BL}_{e_1} - 2\mathbb{BL}_{e_0}\right) + t^2\left(\mathbb{BL}_{e_2} - 2\mathbb{BL}_{e_1}\right) \\
&\quad +t^3\left(\mathbb{BL}_{e_3} - 2\mathbb{BL}_{e_2} + \mathbb{BL}_{e_0}\right) + ... \\
&\quad +t^{k+1}\left(\mathbb{BL}_{e_{k+1}} - 2\mathbb{BL}_{e_k} + \mathbb{BL}_{e_{k-2}}\right) + ...
\end{aligned}$$

elde edilir. Bikompleks Leonardo sayıların yineleme bağıntısını (4.3) ve başlangıç koşullarını kullanarak

$$\begin{aligned}
g\mathbb{BL}_{e_n}(t)(1-2t+t^3) &= (1+i+3j+5ij) \\
&\quad +t(-1+i-j-ij)+t^2(1-i-j-3ij),
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\{\mathbb{BL}_{e_n}\}_{n=0}^{\infty}$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{BL}_{e_n} t^n = \frac{\mathbb{BL}_{e_0} + t(-1+i-j-ij) + t^2(1-i-j-3ij)}{1-2t+t^3},$$

dir. ■

Teorem 4.1.2. $n \geqslant 0$ olmak üzere

$$\mathbb{BL}_{e_n} = 2BF_{n+1} - C, \tag{4.5}$$

dir. Burada BF_n n.dereceden bikompleks Fibonacci sayısıdır.

İspat.

Bikompleks Leonardo sayıları tanımı (4.1) ve Leonardo ve Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı (2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{BL}_{e_n} &= L_{e_n} + L_{e_{n+1}} i + L_{e_{n+2}} j + L_{e_{n+3}} ij, \\
&= (2F_{n+1} - 1) + (2F_{n+2} - 1)i \\
&\quad + (2F_{n+3} - 1)j + (2F_{n+4} - 1)ij, \\
&= 2(F_{n+1} + F_{n+2} i + F_{n+3} j + F_{n+4} ij) - C, \\
&= 2BF_{n+1} - C,
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.3. $n \geq 0$ olmak üzere bikompleks Leonardo sayıları için Binet benzeri formülü,

$$\mathbb{BL}_{e_n} = 2(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi - \psi}) - C, \tag{4.6}$$

dir. Burada ϕ ve ψ $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ denkleminin karakteristlik kökleridir. $\underline{\Phi} = 1 + \phi i + \phi^2 j + \phi^3 ij$ ve $\underline{\Psi} = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 ij$ dir.

İspat.

Bikompleks Leonardo sayıların tanımını (4.1) ve Leonardo sayıları için Binet benzeri formülünü (2.4) kullanarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{BL}_{e_n} &= L_{e_n} + L_{e_{n+1}} i + L_{e_{n+2}} j + L_{e_{n+3}} ij \\
&= \left(\frac{2\phi^{n+1} - 2\psi^{n+1} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right) + \left(\frac{2\phi^{n+2} - 2\psi^{n+2} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right) i \\
&\quad + \left(\frac{2\phi^{n+3} - 2\psi^{n+3} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right) j + \left(\frac{2\phi^{n+4} - 2\psi^{n+4} - \phi + \psi}{\phi - \psi}\right) ij
\end{aligned}$$

$$\mathbb{BL}_{e_n} = 2\left(\begin{array}{c} \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\phi - \psi} i \\ + \frac{\phi^{n+3} - \psi^{n+3}}{\phi - \psi} j + \frac{\phi^{n+4} - \psi^{n+4}}{\phi - \psi} ij \end{array}\right) - (1 + i + j + ij),$$

$$\mathbb{BL}_{e_n} = 2(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1} - \underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi - \psi}) - C, \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir.

$\underline{\Phi} = 1 + \phi i + \phi^2 j + \phi^3 ij$ ve $\underline{\Psi} = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 ij$ ifadelerini son eşitlikte kullanılırsa kolay bir şekilde eşitliği elde ederiz. ■

Teorem 4.1.4. $n \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere bikompleks Leonardo sayıları için toplam formülleri aşağıdaki gibidir.

1) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_k} = \mathbb{BL}_{e_{n+2}} - (n+2)C - (2i+4j+8ij).$

2) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k}} = \mathbb{BL}_{e_{2n+1}} - nC - (2i+2j+4ij).$

3) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k+1}} = \mathbb{BL}_{e_{2n+2}} - (n+2)C - (2j+4ij).$

burada $n \geq 1$ dir.

4) $\sum_{r=0}^{n} (-1)^{r-1} \mathbb{BL}_{e_r} = \Big\{ -\left(\mathbb{BL}_{e_{n-1}} + 2 + 2j + 2ij\right), \quad n \text{ çift} \mathbb{BL}_{e_{n-1}} - 1 + i - j - ij, \quad n \text{ tek}.$

İspat. Leonardo dizisinin toplam ve çarpım formüllerini kullanarak ve ayrıca Bikompleks Leonardo sayılarının tanımını kullanarak (1), (2) ve (3)'ün ispatı kolayca yapılabilir.

(1) bikompleks Leonardo sayıları tanımını (4.1), Leonardo sayılarının yineleme bağıntısı (2.2) ve (2.13) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathbb{BL}_{e_k} + i\mathbb{BL}_{e_{k+1}} + j\mathbb{BL}_{e_{k+2}} + ij\mathbb{BL}_{e_{k+3}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_k} + i\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{k+1}} + j\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{k+2}} + ij\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{k+3}} \\
&= L_{e_{n+2}} - (n+2) + i\left(L_{e_{n+2}} - (n+2) - 1 + L_{e_{n+1}}\right) + j\left(L_{e_{n+2}} - (n+2) - 2 + L_{e_{n+1}} + L_{e_{n+2}}\right) \\
&+ ij\left(L_{e_{n+2}} - (n+2) - 5 + L_{e_{n+2}} + L_{e_{n+3}} + L_{e_{n+1}}\right) \\
&= \mathbb{BL}_{e_{n+2}} - (n+2)C - (2i+4j+8ij)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(2) bikompleks Leonardo sayıları tanımını (4.1), Leonardo sayılarının yineleme bağıntısı (2.2) ve (2.13) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k}} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathbb{BL}_{e_{2k}} + i\mathbb{BL}_{e_{2k+1}} + j\mathbb{BL}_{e_{2k+2}} + ij\mathbb{BL}_{e_{2k+3}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k}} + i\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k+1}} + j\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k+2}} + ij\sum_{k=0}^{n} \mathbb{BL}_{e_{2k+3}} \\
&= \left(L_{e_{2n+1}} + iL_{e_{2n+2}} + jL_{e_{2n+3}} + ijL_{e_{2n+4}}\right) - nC - (2i+2j+4ij) \\
&= \mathbb{BL}_{e_{2n+1}} - nC - (2i+2j+4ij)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(3) bikompleks Leonardo sayıları tanımını (4.1), Leonardo sayılarının yineleme bağıntısı (2.2) ve (2.13) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathbb{BL}_{e_{2k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\mathbb{BL}_{e_{2k+1}}+i\mathbb{BL}_{e_{2k+2}}+j\mathbb{BL}_{e_{2k+3}}+ij\mathbb{BL}_{e_{2k+4}}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{BL}_{e_{2k+1}}+i\sum_{k=0}^{n}\mathbb{BL}_{e_{2k+2}}+j\sum_{k=0}^{n}\mathbb{BL}_{e_{2k+3}}+ij\sum_{k=0}^{n}\mathbb{BL}_{e_{2k+4}}\\
&=\left(L_{e_{2n+2}}+iL_{e_{2n+3}}+jL_{e_{2n+4}}+ijL_{e_{2n+5}}\right)-(n+2)C-2(j+4ij)\\
&=\mathbb{BL}_{e_{2n+2}}-(n+2)C-(2j+4ij)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(4) bikompleks Leonardo sayıları tanımını kullanarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}\mathbb{BL}_{e_r} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}L_{e_r}+i\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}L_{e_{r+1}}\\
+j\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}L_{e_{r+2}}+ij\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}L_{e_{r+3}},
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Daha sonra ise (2.2), (2.5) ve (2.12) kullanılarak

$$
\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1}\mathbb{BL}_{e_r} = \begin{cases} (-2BF_n-1+i-j-ij), & n \text{ çift},\\ \\ (2BF_n-2-2j-2ij), & n \text{ tek}, \end{cases}
$$

elde edilir.

Son olarak (4.5) kullanarak istenilen eşitlik elde edilir. Burada BF_n n. dereceden Bikompleks Fibonnacci sayısı ve $C=1+i+j+ij$ dir.

■

Teorem 4.1.5. **(Catalan Özdeşliği)** n ve r pozitif tam sayılar $n\geq r$, olmak üzere bikompleks sayılar için Catalan özdeşliği,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{BL}_{e_n}^2-\mathbb{BL}_{e_{n-r}}\mathbb{BL}_{e_{n+r}} &= (\mathbb{BL}_{e_{n-r}}+\mathbb{BL}_{e_{n+r}}-2\mathbb{BL}_{e_n})C\\
&\quad +12(-1)^{n-r+1}(2j+ij)F_r^2,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{BL}_{e_n}^2-\mathbb{BL}_{e_{n-r}}\mathbb{BL}_{e_{n+r}}=SK$ olsun. İlk olarak sol kısım SK için Binet benzeri formülü (4.6) kullanılarak

$$SK = \left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1}-\underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi-\psi}\right)-C\right)\left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1}-\underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi-\psi}\right)-C\right)$$
$$-\left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n-r+1}-\underline{\Psi}\psi^{n-r+1}}{\phi-\psi}\right)-C\right)\left(2\left(\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+r+1}-\underline{\Psi}\psi^{n+r+1}}{\phi-\psi}\right)-C\right), \qquad (4.9)$$

elde edilir.

Daha sonra ise ϕ, ψ, $\underline{\Phi} = 1+\phi i+\phi^2 j+\phi^3 ij$ ve $\underline{\Psi} = 1+\psi i+\psi^2 j+\psi^3 ij$ ifadeleri dikkate alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\underline{\Phi}.\underline{\Psi} = 6j+3ij. \qquad (4.10)$$

Son olarak SK için (2.10) ve (4.10) yi kullanarak eşitlik elde edilir.

$$SK = (\mathbb{BL}_{e_{n-r}}+\mathbb{BL}_{e_{n+r}}-2\mathbb{BL}_{e_n})C$$
$$+12(-1)^{n-r+1}(2j+ij)F_r^2$$

■

Yukarıdaki teoremde (4.8) (Catalan) $r=1$ alınırsa bikompleks Leonardo sayıları sayıları için Cassini özdeşliği aşağıdaki gibi yazılır.

Sonuç 4.1.6. (Cassini Özdeşliği) $n \geq 1$ olmak üzere bikompleks sayılar için Cassini özdeşliği,

$$\mathbb{BL}_{e_n}^2-\mathbb{BL}_{e_{n-1}}\mathbb{BL}_{e_{n+1}} = (\mathbb{BL}_{e_{n-1}}-\mathbb{BL}_{e_{n-2}})C$$
$$+12(-1)^n(2j+ij),$$

dir.

Teorem 4.1.7. *k*, *m* ve *s* pozitif tam sayılar olmak üzere Fibonacci sayıları ve bikompleks Leonardo sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$\mathbb{BL}_{e_{k+m}}\mathbb{BL}_{e_{k+s}}-\mathbb{BL}_{e_k}\mathbb{BL}_{e_{k+m+s}} = (\mathbb{BL}_{e_k}-\mathbb{BL}_{e_{k+m}}+\mathbb{BL}_{e_{k+m+s}}-\mathbb{BL}_{e_{k+s}})C$$
$$+12(-1)^{k+1}F_mF_s(2j+ij).$$

İspat.

Kabul edelim ki $\mathbb{BL}_{e_{k+m}}\mathbb{BL}_{e_{k+s}}-\mathbb{BL}_{e_k}\mathbb{BL}_{e_{k+m+s}} = SK$ olsun.

SK için Binet benzeri formülü (4.6) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
SK = & \left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+m+1} - 2\underline{\Psi}\psi^{k+m+1}}{\phi - \psi} - C \right) \left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+s+1} - 2\underline{\Psi}\psi^{k+s+1}}{\phi - \psi} - C \right) \\
& - \left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+1} - 2\underline{\Psi}\psi^{k+1}}{\phi - \psi} - C \right) \left(\frac{2\underline{\Phi}\phi^{k+m+s+1} - 2\underline{\Psi}\psi^{k+m+s+1}}{\phi - \psi} - C \right), \\
= & (\mathbb{BL}_{e_k} - \mathbb{BL}_{e_{k+m}} + \mathbb{BL}_{e_{k+m+s}} - \mathbb{BL}_{e_{k+s}})C \\
& + \frac{4\underline{\Phi}.\underline{\Psi}}{(\phi - \psi)^2} \left(\phi^{k+1}\psi^{k+1} \left(-\phi^m\psi^s - \phi^s\psi^m + \psi^{m+s} + \phi^{m+s} \right) \right),
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Fibonacci sayıları için Vajda eşitliği (2.7) ve (4.10) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
SK = & (\mathbb{BL}_{e_k} - \mathbb{BL}_{e_{k+m}} + \mathbb{BL}_{e_{k+m+s}} - \mathbb{BL}_{e_{k+s}})C \\
& + 12(-1)^{k+1}F_mF_s(2j + ij),
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.8. m ve n pozitif tam sayılar ve $n \geq m$ olmak üzere Lucas, Leonardo, bicompleks Lucas ve bikompleks Leonardo sayıları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$
\mathbb{BL}_{e_{n+m}} + (-1)^m\mathbb{BL}_{e_{n-m}} = L_m\mathbb{BL}_{e_n} + (L_m - (-1)^m - 1)C. \tag{4.11}
$$

$$
\mathbb{BL}_{e_{n+m}} - (-1)^m\mathbb{BL}_{e_{n-m}} = (L_{e_{m-1}} + 1)BL_{n+1} + ((-1)^m - 1)C. \tag{4.12}
$$

Burada L_n n. dereceden Lucas sayısı, L_{e_n} n.dereceden Leonardo sayısı ve BL_{e_n} n.dereceden bikompleks Leonardo sayısıdır.

İspat.

(4.11) nin ispatı için:

Kabul edelim ki $\mathbb{BL}_{e_{n+m}} + (-1)^m\mathbb{BL}_{e_{n-m}} = SK$ olsun. SK için bikompleks Leonardo sayılarının tanımını (4.1) kullanarak

$$
\begin{aligned}
SK = & (L_{e_{n+m}} + (-1)^m L_{e_{n-m}}) + (L_{e_{n+m+1}} + (-1)^m L_{e_{n-m+1}})i \\
& + (L_{e_{n+m+2}} + (-1)^m L_{e_{n-m+2}})j + (L_{e_{n+m+3}} + (-1)^m L_{e_{n-m+3}})ij.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Daha sonra (2.8) kullanılarak

$$
SK = L_m\mathbb{BL}_{e_n} + C(L_m - (-1)^m - 1).
$$

elde edilir.

(4.12)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

■

Teorem 4.1.9. *n*, *m*, *s* ve *r* pozitif tam sayılar $n \geq m$ ve $s \geq r$ olmak üzere $n+m=s+r$ için

$$\begin{aligned}\mathbb{BL}_{e_n}\mathbb{BL}_{e_m}-\mathbb{BL}_{e_s}\mathbb{BL}_{e_r} &= (\mathbb{BL}_{e_s}-\mathbb{BL}_{e_n}+\mathbb{BL}_{e_r}-\mathbb{BL}_{e_m})C \\ &\quad +\frac{12}{5}(2j+ij)\left((-1)^m L_{n-m}-(-1)^r L_{s-r}\right),\end{aligned}$$

dir. Burada L_n *n*. dereceden Lucas sayısıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{BL}_{e_n}\mathbb{BL}_{e_m}-\mathbb{BL}_{e_s}\mathbb{BL}_{e_r}=SK$ olsun. SK için Bikompleks Leonardo sayılarının Binet benzeri formülü (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}SK &= \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{n+1}-\underline{\Psi}\psi^{n+1}}{\phi-\psi}-C\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{m+1}-\underline{\Psi}\psi^{m+1}}{\phi-\psi}-C\right) \\ &\quad -\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s+1}-\underline{\Psi}\psi^{s+1}}{\phi-\psi}-C\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r+1}-\underline{\Psi}\psi^{r+1}}{\phi-\psi}-C\right), \\ &= (\mathbb{BL}_{e_s}-\mathbb{BL}_{e_n}+\mathbb{BL}_{e_r}-\mathbb{BL}_{e_m})C \\ &\quad +\frac{4\underline{\Phi}.\underline{\Psi}}{(\phi-\psi)^2}\left(\phi^n\psi^m+\phi^m\psi^n-\phi^s\psi^r-\phi^r\psi^s\right),\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.11) ve (4.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}SK &= (\mathbb{BL}_{e_s}-\mathbb{BL}_{e_n}+\mathbb{BL}_{e_r}-\mathbb{BL}_{e_m})C \\ &\quad +\frac{12}{5}(2j+ij)\left((-1)^m L_{n-m}-(-1)^r L_{s-r}\right),\end{aligned}$$

elde edilir.

■

Teorem 4.1.10. *r* ve *s* pozitif tam sayılar $r \geq 1$ ve $s \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbb{BL}_{e_{s+1}}\mathbb{BL}_{e_{r+1}}-\mathbb{BL}_{e_{s-1}}\mathbb{BL}_{e_{r-1}} &= -(\mathbb{BL}_{e_s}+\mathbb{BL}_{e_r}+2C)C \\ &\quad +4\left[\begin{array}{c}-5F_{s+r+3}+5F_{s+r+7}+2i(F_{s+r+3}-F_{s+r+7}) \\ -2jF_{s+r+5}+4ijF_{s+r+5}\end{array}\right],\end{aligned}$$

dir. Burada F_n *n*. dereceden Fibonacci sayısıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{BL}_{e_{s+1}}\mathbb{BL}_{e_{r+1}}-\mathbb{BL}_{e_{s-1}}\mathbb{BL}_{e_{r-1}}=SK$ olsun. SK için bikompleks Leonardo sayılarının Binet benzeri formülü (4.6) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
SK &= \left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s+2}-\underline{\Psi}\psi^{s+2}}{\phi-\psi}-C\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r+2}-\underline{\Psi}\psi^{r+2}}{\phi-\psi}-C\right) \\
&\quad -\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{s}-\underline{\Psi}\psi^{s}}{\phi-\psi}-C\right)\left(2\frac{\underline{\Phi}\phi^{r}-\underline{\Psi}\psi^{r}}{\phi-\psi}-C\right), \\
&= -(\mathbb{BL}_{e_s}+\mathbb{BL}_{e_r}+2C)C \\
&\quad +\frac{4}{(\phi-\psi)^2}\left(\underline{\Phi}^2\phi^{s+r}\left(\phi^4-1\right)+\underline{\Psi}^2\psi^{s+r}\left(\psi^4-1\right)\right),
\end{aligned}
$$

dır.

Burada Lucas sayıları için Binet benzeri formülünü (2.1) kullanırsak

$$
\begin{aligned}
SK &= -(\mathbb{BL}_{e_s}+\mathbb{BL}_{e_r}+2C)C \\
&\quad +\left(-2L_{s+r+5}+L_{s+r+1}+L_{s+r+9}\right)+i\left(4L_{s+r+5}-2L_{s+r+1}-L_{s+r+9}\right) \\
&\quad +j\left(-2L_{s+r+7}+2L_{s+r+3}\right)+k\left(4L_{s+r+7}-4L_{s+r+3}\right),
\end{aligned}
$$

dır.

Son olarak (2.11) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
SK &= -(\mathbb{BL}_{e_s}+\mathbb{BL}_{e_r}+2C)C \\
&\quad +4\left[\begin{array}{c} -5F_{s+r+3}+5F_{s+r+7}+2i(F_{s+r+3}-F_{s+r+7}) \\ -2jF_{s+r+5}+4ijF_{s+r+5} \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tezin ilk orijinal kısmında Leonardo sayıları yardımıyla hiper dual Leonardo sayıları tanımlanmıştır. Bu sayı bu dizisi için karakteristlik denklem, üreteç fonksiyonu ve Binet benzeri formülü gibi temel kavramlar elde edilmiştir. Daha sonra ise hiper dual sayıların özelliklerinden faydalanılarak toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, D'ocagne's eşitliği ve bazı önemli eşitlikler elde edilmiştir.

Tezin diğer orijinal kısmında ise, Leonardo sayıları yardımıyla bikompleks Leonardo sayıları tanımlanmıştır. Bu sayılar için karakteristlik denklem, üreteç fonksiyonu ve Binet benzeri formülü gibi temel kavramlar elde edilmiştir. Daha sonra bikompleks sayıların özelliklerinden faydalanılarak toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, D'ocagne's eşitliği ve bazı önemli eşitlikler elde edilmiştir.

Bu tezi oluşturan iki orijinal kısım, Leonardo sayıların bikompleks Leonardo ve hiper dual Leonardo sayıları gibi birer genellemesidir. Bu iki sayı içinde toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve D'ocagne's eşitliği gibi literatür açısında oldukça önemli eşitlikler elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

Alp, Y., & Kocer, E. G. (2021). Some properties of Leonardo numbers. *Konuralp J Math*, 9(1):183–189.

Alp, Y., & Kocer, E. G. (2021). Hybrid Leonardo numbers. *Chaos, Solitons and Fractals* 150 ; 111–128.

Alves, F. R. V., & Catarino, P. M .M .C. (2020). A forma matricial dos n´umeros de Leonardo Ciencia e natura, 42.

Catarino, P., & Borges, A. (2019). On Leonardo Numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, Vol:89, No.1, 75–86.

Catarino, P., & Borges, A. (2020). A Note on Incomplete Leonardo Numbers. *Integers, Vol:20.*

Clifford, W. K. (1873). Preliminary sketch of biquaternions. *Proc London Mathematical Society. 4(64), 381-395.*

Cohen, A., & Shoham, M. (2015). Application of hyper-dual numbers to multi-body kinematics. *J. Mech. Rob. 8. doi: 10.1115/1.4030588.*

Cohen, A., & Shoham, M. (2017). Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion. *J. Mech. Mach. Theory. 111, 76-84.*

Fike, J. A. (2009). Numerically exact derivative calculations using hyper-dual numbers. *3rd Annual Student Joint Workshop in Simulation-Based Engineering and Design.*

Fike, J. A., & Alonso, J. J. (2011). The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. *49th AIAA Aerodpace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 4-7.*

Halici, S. (2012). On Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras, 22, 321–327.*

Hoggatt, V. E. (1969). Fibonacci and Lucas Numbers . *A publication of the Fibonacci Association University of Santa Clara, Santa Clara, Houghton Mifflin Company.*

Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *Fibonacci Q. 3, 161–176.*

Kızılates, C., & Kone, T. (2021). On higher order Fibonacci quaternions.
J. Anal. DOI: 10.1007/s41478-020-00295-1.

Kızılates, C., & Kone, T. (2021). On higher order Fibonacci hyper complex numbers. *Chaos Solitons and Fractals 148 111044.*

Koshy, T. (2019). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *John Wiley and Sons: Hoboken, NJ, USA.*

Kuruz, F., Dagdeviren, A., & Catarino, P. (2021). On Leonardo Pisano Hybrinomials. *Mathematics, 9, 2923. https:/doi.org/10.3390/math9222923*

Nurkan, S. K., & Guven, I. A. (2015). Dual Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras 25(2), 403–414.*

Omur, N., & Koparal, S. (2020). On hyper-dual generalized Fibonacci numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 26(1), 191–198.*

Shannon, A. G. (2019). A note on generalized Leonardo numbers. *Notes Number Theory Discrete Math 2019; 25(3):97–101. doi: 10.7546/nntdm.25.3.97-101.*

Sloane, N. J. A. (1964). The on-line encyclopedia of integers sequences. *Http.//oeis.org.*

Vajda, S. (1989). Fibonacci and Lucas Numbers and the golden section. *Ellis Horwood Limited Publ., England.*

Halıcı, S. (2019). On Bicomplex Fibonacci Numbers and Their generalization, *In Models and Theories in Social Systems*, 509–524. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00084-426

Hamilton, W. R. (1853). Lectures on Quaternions. *Hodges and Smith, Dublin.*

Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., & Struppa, D. C. (2012). Bicomplex Numbers and Their Elementary Functions, *Cubo* 14, 61–80.

Nurkan, S. K., & Guven, I. A. (2018). A Note On Bicomplex Fibonacci and Lucas Numbers. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 120(3), 365–377.

Price, G. B. (1991). An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, New York, NY, USA.*

Rochon, D., & Shapiro, M. (2004). On Algebraic Properties of Bicomplex and Hyperbolic Numbers.*Anal. Univ. Oradea Fasc. Math.* 11, 71–110.

Segre, C. (1892). The Real Representation of Complex Elements and Hyperalgebraic entities (Italian), *Math. Ann.*, 40, 413–467.

Tan, E., & Leung H. H. (2022) On Leonardo p-Numbers, *Integers* .

Torunbalcı, A. (2018). Bicomplex Fibonacci Quaternions. *Chaos, Solitons and Fractals* 106, 147–153. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.11.026

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *A WileyInterscience Publication.*

Luna, M.E., & Shapiro, M. (2012). Bicomplex Numbers and their Elemantary Functions. *CUBO A Mathematical Journal.14 (61-80).*

Yaglom, I.M. (1968). Complex Numbers in Geometry. *Academic Press*.