T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU GÜRSAÇ

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2023

10516720

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU GÜRSAÇ

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2023

10516720

BEYAN

'Çatılandırılmış İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri Üzerine' adlı yüksek lisans hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2- TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;…………………………………………………
………………</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">…………………………………/………
………………..</td></tr>
</table>

Ebru Gürsaç

Tarih

İmza

ÖN SÖZ

Bu tezin yazılmasında emeği geçen, her zaman olumlu tavrıyla beni destekleyen, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemi asla unutmayacağım başta saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ olmak üzere kıymetli hocalarıma, her fırsatta beni destekleyen bugünlere gelmemi sağlayan başta annem Arzu GÜRSAÇ ve babam Zafer GÜRSAÇ olmak üzere aileme, nişanlıma ve değerli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum.

Ebru GÜRSAÇ

2023

ÖZET

ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid uzayı ve çatılandırılmış eğriler ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ve dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğrilerin involüt - evolüt eğri çifti tanımı verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış involüt – evolüt eğri çifti ile ilgili bazı karakterizasyonlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğrilerin involüt - evolüt eğri çifti tanımı verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış involüt – evolüt eğri çifti ile ilgili bazı karakterizasyonlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İnvolüt Eğri, Evolüt Eğri, Çatılandırılmış Eğri, Singüler Nokta, $w-$eğrisi.

ABSTRACT

ON FRAMED INVOLUTE-EVOLUTE CURVE PAIRS

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction and literature reviews are given.In the second chapter, basic concepts about Euclidean space and framed curves are given.The third and fourth chapters are the original chapters of the thesis.In the third chapter, definitions of the framed involute-evolute curve partner in 3-dimensional Euclidean space are given.In addition, some characterizations of the involute-evolute curve pair framed in 3-dimensional Euclidean space are given.In the fourth chapter, definitions of the framed involute-evolute curve partner in 4-dimensional Euclidean space are given.In addition, some characterizations of the involute-evolute curve pair framed in 4-dimensional Euclidean space are given.

Keywords: Involute Curves, Evolute Curves, Framed Curves, Singular Points, $w-$curves.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖN SÖZ i

ÖZET ii

ABSTRACT iii

İÇİNDEKİLER iv

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ v

1.GİRİŞ 1

2.TEMEL KAVRAMLAR 2

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar 2

2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti 7

2.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti 15

2.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler 21

2.5. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler 23

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ 28

4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ 38

KAYNAKÇA 46

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^4$	: 4- Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^3$	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\lVert , \rVert$	: Norm
I	: Öklid Uzayında Bir Açık Aralık
$\times$	: Vektörel Çarpım
V_j	: $\mathbb{R}^n$, Öklid Uzayında $j-$yinci Frenet Vektörü
k_j	: $\mathbb{R}^n$, Öklid Uzayında $j-$yinci Frenet Eğriliği
κ, τ	: $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Eğrinin Eğrilik ve Burulması
κ, τ, σ	: $\mathbb{R}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Eğrinin Eğrilikleri
$\{T, N, B\}$	: $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Eğrinin Frenet Vektörleri
$\{T, N, B, E\}$	: $\mathbb{R}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Eğrinin Frenet Vektörleri
$\{\nu, \mu_1, \mu_2\}$	: $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğrinin Uyarlanmış Çatısı
$\{p, q\}$	: $\mathbb{R}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğrinin Çatılandırılmış Eğrilikleri

$\{v, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$: $\mathbb{R}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğrinin Uyarlanmış Çatısı

$\{p, q, r\}$: $\mathbb{R}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğrinin Çatılandırılmış Eğrilikler

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin geniş çalışma alanlarından biri eğriler teorisidir. Özel eğriler araştırmacılar için önemli bir uygulama alanı olmuştur. Bazı özel eğriler teğet vektörlerinin ortogonal olması durumuna göre involüt-evolüt eğri çiftleri olarak adlandırılırlar. Bu tür eğrilerle Öklid uzayında farklı çatılar kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır.

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında involüt-evolüt eğri çiftlerinin özelliği her noktasında teğet vektörleri ortogonal olan eğrilerdir. İnvolüt eğri kavramı optik çalışmaları sırasında daha doğru ölçüm yapmaya çalışırken C.Huygens tarafından 1658 yılında keşfedilmiştir. Daha sonra involüt - evolüt eğri çiftleri ile ilgili bilinen temel teorem ve sonuçlara Hacısalihoğlu (1983) ve Sabuncuoğlu (2014) açıklık getirmiştir. $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında involüt - evolüt eğri çiftleri tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir (Özyılmaz & Yılmaz, 2009: 169-174). Günümüze kadar farklı uzaylarda ve farklı boyutlarda involüt - evolüt eğri çiftleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Bir $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için $t \in I$ ve $\beta'(t) = 0$ ise t noktasına β eğrisinin singüler noktası denir. Bir eğrinin singüler noktaları varsa, eğrinin o noktalarda ki Frenet çatısı oluşturulamaz. S.Honda ve M.Takahashi Öklid uzayında çatılandırılmış eğrileri tanımlamıştır (Honda & Takahashi, 2016: 1-71). Böylece singüler noktaları olan eğrilerin belirli koşullar altında Frenet çatısı oluşturuLmuştur. Y.Wang ve arkadaşları $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler için tanımlanmış olan Serret-Frenet tipli çatıdan hareketle uyarlanmış çatıyı tanımlamıştırlar (Wang vd., 2019: 2-12). Daha sonra Ö.G.Yıldız ve M.Akyiğit $\mathbb{R}^4$'de uyarlanmış çatıyı verdiler (Akyiğit & Yıldız, 2021: 258-263).

Bu tez çalışmasında, ilk olarak $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında ve $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında involüt - evolüt eğri çiftinin tanımı ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler ve $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda üçüncü bölümde çatılandırılmış eğriler için $\mathbb{R}^3$'de çatılandırılmış involüt - evolüt eğri çiftinin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilmiştir ve dördüncü bölümde çatılandırılmış eğriler için $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış involüt - evolüt eğri çiftinin tanımı ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ ve $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$(u,v)\to\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona, $\mathbb{R}^n$ de Öklid iç çarpım veya doğal çarpım denir (Sabuncuoğlu, 2014:1).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $\forall u=(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$ için u vektörünün normu

$$\|u\|=\sqrt{<u,u>}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında $u=(u_1,u_2,u_3)$ ve $v=(v_1,v_2,v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$u\times v=(u_2v_3-v_2u_3,u_3v_1-v_3u_1,u_1v_2-v_1u_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^4$ uzayının doğal bir tabanı $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ olmak üzere $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ ve $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ vektörleri için vektörel çarpım,

$$x\times y\times z=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Özyılmaz &Yılmaz , 2009: 171).

Tanım 2.1.6. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ düzgün (C^∞ sınıfından) bir dönüşüm olmak üzere $\alpha(I)$ ya $\mathbb{R}^n$ de bir eğri denir (O'Neil, 2006: 16).

Tanım 2.1.7. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olmak üzere

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx\big|_t}\right)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve $\alpha'(t)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014:46).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$, Öklid uzayında bir eğri olmak üzere $\forall t \in I$ için $\alpha(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir (Hacısalihoğlu 2000:150).

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\left\|\alpha'(s)\right\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri ve s parametresine ise eğrinin yay-parametresi adı verilir.

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\psi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$ kümesi lineer bağımsız bir küme olmak üzere ψ kümesinden elde edilen $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ ortonormal kümeye, α eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı ve $s \in I$ için $\{v_1(s), v_2(s), ..., v_r(s)\}$ ye α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir. Her bir v_j, $1 \leq j \leq r$ vektörüne ise $j-$yinci Serret-Frenet vektör alanı adı verilir.

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}^n$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı $\{v_1(s), v_2(s), ..., v_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_j : I \to \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq r,$$
$$s \to k_j(s) = \langle v_j'(s), v_{j+1}(s)\rangle$$

biçiminde tanımlı k_j fonksiyonuna α eğrisinin $j-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_j(s)$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $j-$yinci eğriliği adı verilir.

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $s \in I$ Serret-Frenet $r-$ ayaklısı $\{v_1(s), v_2(s), ..., v_n(s)\}$ biçiminde verilsin. α eğrisinin eğrilikleri $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &v_1'(s) = k_1(s) v_2(s) \\ &v_j'(s) = -k_{j-1}(s) v_{j-1}(s) + k_j(s) v_{j+1}(s), \qquad 1 \leq j \leq n \\ &v_n'(s) = -k_{n-1}(s) v_{n-1}(s) \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu formüllere Serret-Frenet türev formülleri adı verilir. Serret-Frenet türev formülleri matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} v_1'(s) \\ v_2'(s) \\ \vdots \\ v_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ \vdots \\ v_n(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir (Hacısalihoğlu 2000:155).

$n = 3$ için

$v_1 = T$ (Teğet vektör alanı),
$v_2 = N$ (Normal vektör alanı),
$v_3 = B$ (Binormal vektör alanı)

olmak üzere aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} &T(s) = \alpha'(s), \\ &N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \\ &B(s) = T(s) \times N(s) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t), \\ N(t) &= B(t) \times T(t), \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2014: 82).

Teorem 2.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği ve burulması

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ \tau(t) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

dir (Yüce, 2020: 143).

Teorem 2.1.4. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olmak üzere, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki $\{T(t), N(t), B(t)\}$ Frenet vektörleri ve eğrilik ve burulması κ ve τ olsun. $\|\alpha'(t)\| = \upsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T'(t) &= \upsilon\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= \upsilon(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \\ B'(t) &= -\upsilon\tau(t)N(t) \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2014: 82).

$n = 4$ için

$v_1 = T$ (Teğet vektör alanı),
$v_2 = N$ (Normal vektör alanı),
$v_3 = B_1$ (Birinci binormal vektör alanı),
$v_4 = B_2$ (İkinci binormal vektör alanı)

olmak üzere aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.5. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ regüler bir eğri olmak üzere β eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{\|\beta'(t)\|}\beta'(t), \\
N(t) &= \frac{\|\beta'(t)\|^2 \beta''(t) - \langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle \beta'(t)}{\left\| \|\beta'(t)\|^2 \beta''(t) - \langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle \beta'(t) \right\|}, \\
B_1(t) &= \varepsilon B_2(t) \times T(t) \times N(t), \\
B_2(t) &= \varepsilon \frac{T(t)\times N(t)\times \beta'''(t)}{\|T(t)\times N(t)\times \beta'''(t)\|} \qquad (\varepsilon = \pm 1)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

şeklinde hesaplanır (Soyfidan, 2011: 8).

Teorem 2.1.6. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ regüler bir eğri olmak üzere, β eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki eğrilikleri, sırasıyla $\kappa(t), \tau(t)$ ve $\sigma(t)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\left\| \|\beta'(t)\|^2 \beta''(t) - \langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle \beta'(t) \right\|}{\|\beta'(t)\|^4}, \\
\tau(t) &= \frac{\|T(t)\times N(t)\times \beta'''(t)\| \|\beta'(t)\|}{\|\beta'(t)\|^2 \beta''(t) - \langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle \beta'(t)}, \\
\sigma(t) &= \frac{\langle \beta^{(iv)}(t), B_2(t)\rangle}{\|T(t)\times N(t)\times \beta'''(t)\| \|\beta'(t)\|}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

dir (Hacısalihoğlu, 2000: 81).

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin eğrilikleri sabit ise α eğrisine $w-eğrisi$ denir. (Soyfidan, 2011: 12)

2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti

Tanım 2.2.1. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile regüler $\alpha^* : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü denir (Sabuncuoğlu, 2014: 102).

Teorem 2.2.1. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü ise c sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)T(s) \tag{2.5}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2014: 102).

İspat: α^* eğrisi $\forall s \in I$ için $\alpha^*(s) = \alpha(s) + u(s)T(s)$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\alpha^*)'(s) &= \alpha'(s) + u'(s)T(s) + u(s)T'(s) \\ &= (1 + u'(s))T(s) + u(s)\kappa(s)N(s)\end{aligned}$$

elde edilir. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olduğundan $\langle (\alpha^*)'(s), T(s) \rangle = 0$ dır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $T(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle (1 + u'(s))T(s) + u(s)\kappa(s)N(s), T(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$1 + u'(s) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin s parametresine göre integrali alınırsa

$$u(s) = -s + c$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ile α^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*\}$ arasında

$$\begin{aligned} T^* &= N, \\ N^* &= \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B, \\ B^* &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B \end{aligned} \tag{2.6}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2014: 102).

İspat: (2.5) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\alpha^*\right)'(s) &= \alpha'(s) + (c-s)' T(s) + (c-s) T'(s) \\ &= (c-s)\kappa(s) N(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin normu alınırsa

$$\left\| \left(\alpha^*\right)'(s) \right\| = \left| (c-s)\kappa(s) \right|$$

elde edilir. Yukarıda elde edilenler $T^*(s) = \dfrac{1}{\left\| \left(\alpha^*\right)'(s) \right\|} \left(\alpha^*\right)'(s)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^*(s) = -N(s) \text{ veya } T^*(s) = N(s)$$

elde edilir. Kabul edelim ki $T^*(s) = N(s)$ olsun. $\mathbb{R}$ üstündeki koordinat fonksiyonunu x olmak üzere $\forall s \in I$ için $x(s) = s$ dir. Bu durumda $\left(\alpha^*\right)'(s) = (c-s)\kappa(s)N(s)$ eşitliği $\left(\alpha^*\right)' = (c-x)\kappa N$ olarak yazılır. $x' = 1$ dir. α^* eğrisi için Frenet formüllerinden yararlanarak

$$\left(\alpha^*\right)' = -\left(c-x\right)\kappa^2 T + \left[-\kappa + \left(c-x\right)\kappa'\right] N + \left(c-x\right)\kappa\tau B,$$
$$\left(\alpha^*\right)'' = \left[2\kappa^2 - 3\left(c-x\right)\kappa\kappa'\right] T + \left[-2\kappa' + \left(c-x\right)\left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)\right] N + \left[-2\kappa\tau + \left(c-z\right)\left(-2\kappa'\tau + \kappa\tau'\right)\right] B$$

elde edilir. Buradan da

$$\left(\alpha^*\right)' \times \left(\alpha^*\right)'' = \left(c-x\right)^2 \kappa^2 \tau T + \left(c-x\right)^2 \kappa^3 B$$

ve

$$\left\| \left(\alpha^*\right)' \times \left(\alpha^*\right)'' \right\| = \left(c-x\right)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

bulunur. Elde edilenler kullanılırsa

$$B^* = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\left\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\right\|} = \frac{\left(c-x\right)^2 \kappa^2 \tau T + \left(c-x\right)^2 \kappa^3 B}{\left(c-x\right)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

bulunur. $N^* = B^* \times T^*$ eşitliğinden de

$$N^* = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin eğrilik ve burulması κ, τ ile α^* eğrisinin eğrilik ve burulması κ^*, τ^* arasında

$$\begin{aligned} \kappa^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}{\left|\left(c-s\right)\kappa(s)\right|}, \\ \tau^*(s) &= \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{\left|\left(c-s\right)\kappa(s)\right|\left(\kappa^2(s) + \tau^2(s)\right)} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2014: 104).

İspat: (2.2) ve (2.5) denklemlerinden

$$\kappa^*(s)=\frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2(s)}}{|(c-s)|\kappa(s)}$$

$$\tau^*(s)=\frac{(\kappa\tau^{'}-\kappa^{'}\tau)(s)}{(c-s)\kappa(\kappa^2+\tau^2)(s)}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2. $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ birim hızlı ve $\alpha^*: I\to\mathbb{R}^3$ regüler eğri olmak üzere her $s\in I$ için α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T(s),T^*(s)\rangle=0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir evolütü denir (Sabuncuoğlu, 2014: 104).

Teorem 2.2.4. α^* eğrisi α eğrisinin bir evolütü ise $c\in\mathbb{R}$ ve $\theta(s)=\int_0^s\tau^*(u)du$ olmak üzere

$$\alpha^*(s)=\alpha(s)+\rho(s)N(s)\text{-}\rho(s)\tan[\varphi(s)+c]B(s), \tag{2.8}$$

dir. Burada, $\alpha^*(s)$ noktasındaki normal düzlemde, birinci kenarı $\alpha^*(s)-\alpha(s)$, ikinci kenarı $N^*(s)$ olan yönlü açının ölçüsü $\theta(s)+c$ ve $\rho(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik yarıçapıdır (Sabuncuoğlu, 2014: 105).

İspat: α^* eğrisi α eğrisinin bir evolütü olsun. O halde $\alpha^*(s)-\alpha(s)$ vektörü $T(s)$ vektörüne ortogonaldir. O halde

$$\alpha^*(s)=\alpha(s)+\lambda(s)N(s)+\mu(s)B(s)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$(\alpha^*)^{'}=(1-\lambda\kappa)T+(\lambda^{'}-\mu\tau)N+(\lambda\tau+\mu^{'})B$$

bulunur. $\langle(\alpha^*)^{'},T\rangle=0$ olduğundan $1-\lambda\kappa=0$ olur. Yukarıdaki eşitlik tekrar düzenlenirse

$$(\alpha^*)^{'}=(\lambda^{'}-\mu\tau)N+(\lambda\tau+\mu^{'})B$$

elde edilir. $1-\lambda\kappa=0$ eşitliğinden $\lambda=\dfrac{1}{\kappa}$ bulunur ve $\dfrac{1}{\kappa}=\rho$ olduğundan $\lambda=\rho$ dir. Evolüt tanımından $\left(\alpha^*\right)'$ vektör alanı, $\alpha^*-\alpha$ vektör alanına paraleldir. O halde

$$\tau=\frac{\mu\rho'-\mu'\rho}{\mu^2+\rho^2}=\left[\arctan\left(-\frac{\mu}{\rho}\right)\right]'$$

dır. Buradan da

$$\int_0^s \tau(u)\,d(u)+C=\arctan\left(-\frac{\mu(s)}{\rho(s)}\right)$$

bulunur. $\int_0^s \tau(u)\,d(u)=\theta(s)$ olarak alınırsa

$$\alpha^*(s)=\alpha(s)+\rho(s)N(s)\text{-}\rho(s)\tan\left[\theta(s)+c\right]B(s)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5. $\alpha^*:I\to\mathbb{R}^3$ eğrisi $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$eğrisinin bir evolütü olsun. α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T,N,B\}$ ile α^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*,N^*,B^*\}$ arasında

$$\begin{aligned}
T^*&=\cos(\theta+c)N-\sin(\theta+c)B,\\
N^*&=-T,\\
B^*&=\sin(\theta+c)N+\cos(\theta+c)B
\end{aligned}\tag{2.9}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2014: 107).

İspat: Teorem 2.2.4 den

$$\alpha^*=\alpha+\rho N-\rho\tan\left[\theta+c\right]B$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınırsa

$$\left(\alpha^*\right)'=\frac{\rho'+\rho\tau\tan(\theta+C)}{\cos(\theta+C)}\left[\cos(\theta+C)N-\sin(\theta+C)B\right]$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\| = \frac{\rho' + \rho\tau\tan\left(\theta + C\right)}{\cos\left(\theta + C\right)}$$

olduğu görülür. $T^* = \frac{1}{\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|}\left(\alpha^*\right)'$ olduğundan

$$T^* = \cos\left(\theta + C\right)N - \sin\left(\theta + C\right)B$$

şeklinde elde edilir. α^* eğrisi birim hızlı değildir. Yukarıdaki eşitliğin türevi alınırsa

$$\left(T^*\right)' = -\kappa\cos\left(\theta + c\right)T$$

bulunur. Teorem 2.1.4'e göre $\left(T^*\right)' = \left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\kappa^* N^*$ dır. Öyleyse

$$\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\kappa^* N^* = -\kappa\cos\left(\theta + c\right)T$$

olmak zorundadır. N^* ve T vektörleri birim uzunlukta vektörler olduğundan buradan $N^* = -T$ veya $N^* = T$ bulunur. $N^* = -T$ olarak kabul edilebilir. $B^* = T^* \times N^*$ eşitliğinde

$$B^* = \sin\left(\theta + C\right)N^* + \cos\left(\theta + C\right)B^* \tag{2.10}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.6. α^* eğrisi birim hızlı α eğrisinin bir evolütü olsun. α eğrisinin eğrilik ve burulması κ, τ ile α^* eğrisinin eğrilik ve burulması κ^*, τ^* arasında

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \frac{\kappa^3\cos^3\left(\theta + c\right)}{\kappa\tau\sin\left(\theta + c\right) - \kappa'\cos\left(\theta + c\right)}, \\ \tau^* &= \frac{-\kappa^3\sin\left(\theta + c\right)\cos^2\left(\theta + c\right)}{\kappa\tau\sin\left(\theta + c\right) - \kappa'\cos\left(\theta + c\right)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2014: 108).

İspat: (2.9) denklemi ve $\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\kappa^* N^* = -\kappa\cos\left(\theta + c\right)T$ eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\kappa^* = \kappa\cos\left(\theta + c\right)$$

elde edilir. Burada κ^* yalnız bırakılır ve Teorem 2.2.5 in ispatında elde edilen $\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|$ kullanılırsa

$$\kappa^* = \frac{\kappa\cos\left(\theta + c\right)}{\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|} = \frac{\kappa\cos\left(\theta + c\right)}{\dfrac{\rho' + \rho\tau\tan\left(\theta + c\right)}{\cos\left(\theta + c\right)}} = \frac{\kappa^3\cos^3\left(\theta + c\right)}{\kappa\tau\sin\left(\theta + c\right) - \kappa'\cos\left(\theta + c\right)}$$

bulunur. (2.10) denklemindeki $B^* = \sin\left(\theta + C\right)N + \cos\left(\theta + C\right)B$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\left(B^*\right)' = -\kappa\sin\left(\theta + c\right)T$$

elde edilir. Frenet türev formüllerinden $\left(\alpha^*\right)' = -\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\tau^* N^*$eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$-\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|\tau^* N^* = -\kappa\sin\left(\theta + c\right)T$$

elde edilir. Burada τ^* yalnız bırakılıp Teorem 2.2.5'deki hesapladığımız $\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|$ nin eşiti yerine yazılırsa

$$\tau^* = \frac{-\kappa\sin\left(\theta + c\right)}{\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|} = \frac{-\kappa\sin\left(\theta + c\right)}{\dfrac{\rho' + \rho\tau\tan\left(\theta + c\right)}{\cos\left(\theta + c\right)}} = \frac{-\kappa^3\sin\left(\theta + c\right)\cos^2\left(\theta + c\right)}{\kappa\tau\sin\left(\theta + c\right) - \kappa'\cos\left(\theta + c\right)}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.7. $\alpha^* : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$eğrisinin bir evolütü olsun. α^* eğrisinin eğrilik ve burulması κ^*ve τ^* olmak üzere

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = -\tan(\theta + c)$$

dir. Burada c yerine c_1 ve c_2 sayıları konularak elde edilen iki evolüt eğrisinin $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ noktalarındaki teğetleri $\alpha^*(s)$ noktasında kesişir. Bu teğetler arasındaki açının ölçüsü $c_1 - c_2$ dir (Sabuncuoğlu, 2014: 109).

2.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti

Tanım 2.3.1. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı bir eğri ve $\beta^* : I \to \mathbb{R}^4$ regüler bir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki teğeti $T(s)$ ve β^* eğrisinin $\beta^*(s)$ noktasındaki teğeti $T^*(s)$ olmak üzere $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$ ise β^* eğrisine β eğrisinin bir involütü, β eğrisine de β^* eğrisinin bir evolütü denir.

Teorem 2.3.1. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı bir eğri ve β^* regüler bir eğri olsun. β^* eğrisi, β eğrisinin bir involütü ise $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\beta^*(s) = \beta(s) + (c - s)T(s) \tag{2.12}$$

dir (Özyılmaz &Yılmaz , 2009: 170).

İspat: β^* eğrisi $\forall s \in I$ için $\beta^*(s) = \beta(s) + u(s)T(s)$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\beta^*)'(s) &= \beta'(s) + u'(s)T(s) + u(s)T'(s) \\ &= (1 + u'(s))T(s) + u(s)\kappa(s)N(s) \end{aligned}$$

elde edilir. β^* eğrisi, β eğrisinin bir involütü olduğundan $\langle \beta^*(s), T(s) \rangle = 0$ dır. O halde yukarıdaki eşitliğin her iki taraf $T(s)$ ile iç çarpım yapılırsa

$$\langle (1 + u'(s))T(s) + u(s)\kappa(s)N(s), T(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten,

$$1 + u'(s) = 0$$

elde edilir. Burada s parametresine göre integral alınırsa

$$u(s) = -s + c$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2. β^* eğrisi β eğrisinin bir involütü olsun. β eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B, E\}$ ile β^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*, E^*\}$ arasında

$$T^*(s) = \pm N(s)$$

$$N^*(s) = \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}} T(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}} B(s)$$

$$B^*(s) = \frac{\begin{array}{c}\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)\left(\tau(s)T(s)+\kappa(s)B(s)\right) \\ -\tau(s)\sigma(s)\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)E(s)\end{array}}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}\sqrt{\begin{array}{c}\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s) \\ +\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2\end{array}}}$$

$$E^*(s) = \frac{\begin{array}{c}\tau^2(s)\sigma(s)T(s)+\kappa(s)\tau(s)\sigma(s)B(s) \\ +\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)E(s)\end{array}}{\sqrt{\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2}}$$

bağıntıları vardır (Özyılmaz &Yılmaz , 2009: 170).

İspat: $\beta^* : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi, $s \in I$ yay parametresi ile verilen $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisinin bir involütü olsun. (2.12) denkleminin $s \in I$ parametresine göre 1. 2. 3. ve 4. mertebeden türevleri sırasıyla

$$\left(\beta^*\right)'(s) = (c-s)\kappa(s)N(s),$$

$$\left(\beta^*\right)''(s) = -(c-s)\kappa^2(s)T(s) + \left[(c-s)\kappa'(s)-\kappa(s)\right]N(s) + (c-s)\kappa(s)\tau(s)B(s),$$

$$\begin{aligned}\left(\beta^*\right)'''(s) = {} & \left[2\kappa^2(s) - 3(c-s)\kappa(s)\kappa'(s)\right]T(s) \\ & + \left[-(c-s)\kappa(s)\left[\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right] - 2\kappa'(s) + (c-s)\kappa''(s)\right]N(s), \\ & + \left[2(c-s)\kappa'(s)\tau(s) - 2\kappa(s)\tau(s) + (c-s)\kappa(s)\tau'(s)\right]B(s) \\ & + (c-s)\kappa(s)\tau(s)\sigma(s)E(s)\end{aligned}$$

$$\left(\beta^*\right)^{(4)}(s)=\left[9\kappa(s)\kappa'(s)-3(c-s)\left(\kappa'\right)^2(s)-4(c-s)\kappa(s)\kappa''(s)+(c-s)\kappa^2(s)\left[\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right]\right]T(s)$$
$$+\begin{bmatrix}3\kappa^3(s)-6(c-s)\kappa^2(s)\kappa'(s)+3\kappa(s)\tau^2(s)-3(c-s)\kappa'(s)\tau^2(s)\\ -3(c-s)\kappa'(s)\tau(s)\tau'(s)-3\kappa''(s)+(c-s)\kappa'''(s)\end{bmatrix}N(s)$$
$$+\begin{bmatrix}-6\kappa'(s)\tau(s)+3(c-s)\kappa''(s)\tau+3(c-s)\kappa'(s)\tau'(s)-3\kappa(s)\tau'(s)\\ +(c-s)\kappa(s)\tau''(s)-(c-s)\kappa(s)\tau(s)\sigma^2(s)-(c-s)\kappa(s)\tau(s)\left[\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right]\end{bmatrix}B(s)$$
$$+\begin{bmatrix}3(c-s)\kappa'(s)\tau(s)\sigma(s)-3\kappa(s)\tau(s)\sigma(s)\\ +2(c-s)\kappa(s)\tau'(s)\sigma(s)+(c-s)\kappa(s)\tau(s)\sigma'(s)\end{bmatrix}E(s)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla β^* eğrisinin Frenet vektörleri hesaplanabilir. $T^*(s)$ vektörünü hesaplamak için (2.11) denkleminin normu alınırsa

$$\left\|\left(\beta^*\right)'(s)\right\|=\left|(c-s)\kappa(s)\right|$$

bulunur. Buradan da (2.3) Frenet denklemleri ve (2.11), (2.15) denklemleri yardımıyla $T^*(s)$ vektörü

$$T^*(s)=\pm N(s)$$

şeklinde elde edilir. Buradan sonra işlemlere $T^*(s)=N(s)$ olarak devam edilecektir. (2.3) Frenet denklemleri yardımıyla, sırasıyla, $N^*(s),B^*(s),E^*(s)$ vektörleri

$$N^*(s)=\frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}T(s)+\frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}B(s)$$

$$B^*(s)=\frac{\begin{array}{c}\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)\left(\tau(s)T(s)+\kappa(s)B(s)\right)\\ -\tau(s)\sigma(s)\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)E(s)\end{array}}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}\sqrt{\begin{array}{c}\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)\\ +\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2\end{array}}}$$

$$E^*(s)=\frac{\begin{array}{c}\tau^2(s)\sigma(s)T(s)+\kappa(s)\tau(s)\sigma(s)B(s)\\ +\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)E(s)\end{array}}{\sqrt{\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2}}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.3. β^* eğrisi β eğrisinin bir involütü olsun. β eğrisinin eğrilikleri κ,τ,σ ile β^* eğrisinin eğrilikleri κ^*,τ^*,σ^* arasında

$$\kappa^*(s)=\frac{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}{|(c-s)\kappa(s)|},$$

$$\tau^*(s)=\frac{\sqrt{\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2}}{|(c-s)\kappa(s)|\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)},$$

$$\sigma^*(s)=\frac{\begin{bmatrix}-(c-s)\kappa(s)\kappa'(s)\tau^2(s)\sigma(s)+2(c-s)\kappa(s)\kappa'(s)\tau\ (s)\tau'(s)\sigma(s)\\ +(c-s)\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)\sigma(s)-2(c-s)\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma(s)\\ -(c-s)\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)\sigma'(s)-(c-s)\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^3(s)\end{bmatrix}}{\frac{(c-s)^2\kappa^2(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left[\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2\right]}$$

bağıntıları vardır (Özyılmaz &Yılmaz, 2009: 170).

İspat: Kabul edelim ki $\beta^*: I\to\mathbb{R}^4$ eğrisi $s\in I$ yay parametresi ile verilen $\beta: I\to\mathbb{R}^4$ eğrisinin bir involütü olsun. $\kappa^*(s),\tau^*(s),\sigma^*(s)$ eğrilikleri (2.4) formülleri kullanılırsa

$$\kappa^*(s)=\frac{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}{|(c-s)\kappa(s)|}$$

$$\tau^*(s)=\frac{\sqrt{\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2}}{|(c-s)\kappa(s)|\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)}$$

$$\sigma^*(s)=\frac{\begin{bmatrix}-(c-s)\kappa(s)\kappa'(s)\tau^2(s)\sigma(s)+2(c-s)\kappa(s)\kappa'(s)\tau\ (s)\tau'(s)\sigma(s)\\ +(c-s)\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)\sigma(s)-2(c-s)\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma(s)\\ -(c-s)\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)\sigma'(s)-(c-s)\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^3(s)\end{bmatrix}}{\frac{(c-s)^2\kappa^2(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left[\tau^4(s)\sigma^2(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)\sigma^2(s)+\left(\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)\right)^2\right]}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.4. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. β eğrisinin evolütü, $\beta^* : I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi $w-$eğrisi olmak üzere

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \rho(s)N(s) - \rho(s)\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}E(s)$$

dir. Burada $\rho(s)$, $\beta(s)$ eğrisinin eğrilik yarıçapıdır (Özyılmaz &Yılmaz, 2009: 170).

Teorem 2.3.5. β^* ve β eğrileri verilsin. β^* eğrisi ile bu eğrinin evolütü, β eğrisi $w-$eğrisi olarak alınırsa β eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B, E\}$ ile β^* eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T^*, N^*, B^*, E^*\}$ arasında

$$\begin{aligned}
T^*(s) &= B(s), \\
N^*(s) &= \frac{-\tau(s)}{\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}}N(s) + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}}E(s), \\
B^*(s) &= \eta\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}T(s), \\
E^*(s) &= \eta\left[-\frac{\sigma(s)}{\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}}N(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}}E(s)\right]
\end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

Teorem 2.3.6. β^* eğrisi, β eğrisinin bir evolütü olsun. β^* eğrisi ile bu eğrinin evolütü, β eğrisi $w-$eğrisi olarak alınırsa β eğrisinin eğrilikleri κ, τ, σ ile β^* eğrisinin eğrilikleri $\kappa^*, \tau^*, \sigma^*$ arasında

$$\begin{aligned}
\kappa^*(s) &= \frac{\kappa(s)\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)} - \tau(s)\sigma(s)}{\tau(s)}, \\
\tau^*(s) &= \frac{\kappa(s)\sqrt{\left(\tau^2(s)+\sigma^2(s)\right)^3}}{\tau(s)\left(\tau^2(s)+\sigma^2(s)+\kappa(s)\sigma(s)\right)}, \\
\sigma^*(s) &= \frac{\kappa^2(s)\sigma(s)\sqrt{\tau^2(s)+\sigma^2(s)}}{\tau(s)\left(\left(\tau^2(s)+\sigma^2(s)+\kappa(s)\sigma(s)\right)\right)}
\end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

2.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Δ_2 kümesi

$$\left\{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \middle| \langle \mu_i, \mu_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2\right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. Δ_2, $3-$boyutlu düzgün bir manifolddur. v birim vektörü $v = \mu_1 \times \mu_2$ eşitliğiyle tanımlanabilir. Bu v nin μ_1 ve μ_2 ye dik olduğu anlamına gelir.

Tanım 2.4.1. $\forall t \in I$ ve $i = 1, 2$ için $\langle \gamma', \mu_i \rangle = 0$ ise $(\gamma, \mu) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ikilisine bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer (γ, μ) bir çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\mu : I \to \Delta_2$ varsa $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisine de bir çatılandırılmış taban eğrisi denir (Honda, 2018: 7).

$(\gamma, \mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve $v(t) = \mu_1(t) \times \mu_2(t)$ olsun. O halde (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin hareketli ortonormal çatısının Frenet-Serret tipli türev formülleri

$$\begin{cases} \mu_1' = l(t)\mu_2(t) + m(t)v(t) \\ \mu_2' = -l(t)\mu_1(t) + n(t)v(t) \\ v' = -m(t)\mu_1(t) - n(t)\mu_2(t) \end{cases}$$

şeklindedir. Bu formüller matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} \mu_1'(t) \\ \mu_2'(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l(t) & m(t) \\ -l(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca diferensiyellenebilir $\alpha : I \to \mathbb{R}$ dönüşüm vardır öyle ki

$$\gamma'(t) = \alpha(t)v(t)$$

dir. Burada $l(t), m(t), n(t)$ ve $\alpha(s)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. $(l(t), m(t), n(t), \alpha(t)) : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $(l(t), m(t), n(t), \alpha(t))$ ye $\gamma(t)$ nin çatılandırılmış eğrilikleri denir. $\alpha(t_0) = 0$ dır gerek ve yeter şart t_0 ın γ nın bir singüler noktasıdır. Singüler noktası olan eğriyi incelemek eğriyi analiz etmek için çatılandırılmış eğriliklerden yararlanılabilir (Honda, 2018: 7).

Not: Lineer bağımsızlık koşuluyla birlikte regüler eğriler, çatılandırılmış eğriler için tipik bir örnektir. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I$ için $\gamma'(t)$ ve $\gamma''(t)$ lineer bağımsız olan regüler bir eğri olsun. Eğer $\mu_1(t) = N(t)$ ve $\mu_2(t) = B(t)$ olarak alınırsa $\nu(t) = \mu_1(t) \times \mu_2(t) = T(t)$ olur ve bu da $(\gamma, \mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ nin bir çatılandırılmış eğri olduğu anlamına gelir. Bu tarz bir eğrinin eğrilikleriyle çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{m(t)n'(t) - m'(t)n(t) + \left(m^2(t) + n^2(t)\right)l(t)}{\alpha(t)\left(m^2(t) + n^2(t)\right)}$$

şeklindedir.

Teorem 2.4.1. (γ, μ) ve $(\overline{\gamma}, \overline{\mu})$ çatılandırılmış eğrilerinin eğrilikleri sırası ile (l, m, n, α) ve $(\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}, \overline{\alpha})$ olsun. (l, m, n, α) ve $(\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}, \overline{\alpha})$ eğrilikleri çakışık ise (γ, μ) ve $(\overline{\gamma}, \overline{\mu})$ çatılandırılmış eğriler konguренttirler (Honda, 2018: 7).

$(\gamma, \mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış bir eğri ve eğrilikleri $l(t), m(t), n(t)$ ve $\alpha(t)$ olsun, μ_1 ve μ_2, regüler eğriler için Bishop çatısına benzer bir şekilde, $\gamma(t)$ nin normal düzleminin baz vektörleridir. $(\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ vektörleri

$$\begin{pmatrix} \overline{\mu_1}(t) \\ \overline{\mu_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\theta(t)$ düzgün fonksiyondur. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğridir ve

$$\overline{\nu}(t) = \mu_1(t) \times \mu_2(t) = \overline{\mu_1}(t) \times \overline{\mu_2}(t) = \nu(t)$$

olduğu kolayca görülür. $\theta(s)$ düzgün fonksiyonu için basit hesaplamalarla

$$\overline{\mu_1}'(t) = \left(l(t) - \theta'(t)\right)\sin\theta(t)\mu_1(t) + \left(l(t) - \theta'(t)\right)\cos\theta(t)\mu_2(t)$$
$$+\left(m(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t)\right)v(t),$$
$$\overline{\mu_2}'(s) = -\left(l(t) - \theta'(t)\right)\cos\theta(t)\mu_1(t) + \left(l(t) - \theta'(t)\right)\sin\theta(t)\mu_2(t)$$
$$+\left(m(t)\sin\theta(t) + n(t)\cos\theta(t)\right)v(t)$$

dir. Bu durumda $(v, \mu_1, \mu_2), (\gamma, \mu)$ boyunca uyarlanmış bir çatı oluşturur ve bu uyarlamış çatı için türev formülleri

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ \overline{\mu_1}'(t) \\ \overline{\mu_2}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p(t) & 0 \\ -p(t) & 0 & q(t) \\ 0 & -q(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \overline{\mu_1}(t) \\ \overline{\mu_2}(t) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. v, μ_1, μ_2 vektörleri sırasıyla genelleştirilmiş teğet vektörü, genelleştirilmiş asli normal vektörü ve genelleştirilmiş binormal vektörü olarak adlandırılır. Burada $p(t), q(t)$ düzgün fonksiyonları $\gamma(t)$ in çatılandırılmış eğrilikleri olarak adlandırılır.

Not: Eğer $\left(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}\right): I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir regüler eğri ise $\left(p(t), q(t), \alpha(t)\right)$ çatılandırılmış eğrilikleri ile $\left(\kappa(t), \tau(t)\right)$ Frenet eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\kappa(t) = \frac{p(t)}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{q(t)}{\alpha(t)} \tag{2.14}$$

şeklindedir.

2.5. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Δ_3 kümesi

$$\left\{\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \middle| \langle\mu_i,\mu_j\rangle=\delta_{ij}, i,j=1,2,3\right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. Δ_3, 6-boyutlu düzgün bir manifolddur. v birim vektörü $v=\mu_1\times\mu_2\times\mu_3$ eşitliğiyle tanımlanabilir. Bu v nin μ_1,μ_2 ve μ_3 e dik olduğu anlamına gelir ve $\det(v,\mu_1,\mu_2,\mu_3)=1$ dir (Honda, 2018: 7).

Tanım 2.5.1. $\forall t\in I$ ve $i=1,2,3$ için $\langle\gamma'(t),\mu_i(t)\rangle=0$ ise $(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ ikilisine bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer (γ,μ) bir çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\mu:I\to\Delta_3$ varsa $\gamma:I\to\mathbb{R}^4$ eğrisine de bir çatılandırılmış baz eğrisi denir (Honda, 2018: 7).

$(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri ve $v=\mu_1\times\mu_2\times\mu_3$ olsun. O halde (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin Serret-Frenet tipli türev formülleri

$$\begin{aligned}
\mu_1'(t)&=f(t)\mu_2(t)+g(t)\mu_3(t)+h(t)v(t),\\
\mu_2'(t)&=-f(t)\mu_1(t)+j(t)\mu_3(t)+k(t)v(t),\\
\mu_3'(t)&=-g(t)\mu_1(t)-j(t)\mu_2(t)+l(t)v(t),\\
v'(t)&=-h(t)\mu_1(t)-k(t)\mu_2(t)-l(t)\mu_3(t)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu formüller matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix}\mu_1'(t)\\ \mu_2'(t)\\ \mu_3'(t)\\ v'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & f(t) & g(t) & h(t)\\ -f(t) & 0 & j(t) & k(t)\\ -g(t) & -j(t) & 0 & l(t)\\ -h(t) & -k(t) & -l(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1(t)\\ \mu_2(t)\\ \mu_3(t)\\ v(t)\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $\alpha:I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir dönüşüm vardır ve

$$\gamma'(t)=\alpha(t)v(t)$$

dir. Burada $f(t), g(t), h(t), j(t), k(t)$ ve $l(t)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. $(f,g,h,j,k,l,\alpha): I \to \mathbb{R}^4$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $(f(t), g(t), h(t), j(t), k(t), l(t), \alpha(t))$ ye $\gamma(t)$ nin çatılandırılmış eğrilikleri denir. $\alpha(t_0)=0$ olması için gerek ve yeter şart t_0 ın γ nın bir singüler noktası olmasıdır. Singüler noktalarda eğriyi analiz etmek için çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri kullanılabilir (Akyiğit & Yıldız, 2021: 259).

Teorem 2.5.2. (γ,μ) ve $(\tilde{\gamma},\tilde{\eta}): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrilerinin eğrilikleri sırası ile (f,g,h,j,k,l,α) ve $(\tilde{f},\tilde{g},\tilde{h},\tilde{j},\tilde{k},\tilde{l},\tilde{\alpha})$ olsun. (f,g,h,j,k,l,α) ve $(\tilde{f},\tilde{g},\tilde{h},\tilde{j},\tilde{k},\tilde{l},\tilde{\alpha})$ eğrilikleri çakışık ise (γ,μ) ve $(\tilde{\gamma},\tilde{\eta})$ çatılandırılmış eğriler kongurenttirler (Honda, 2018: 7).

$(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış bir eğri ve eğrilikleri $f(s), g(s), h(s), j(s), k(s), l(s)$ ve $\alpha(s)$ olsun, Euler açılarını kullanarak ve ϑ, φ, ψ düzgün fonksiyonlar olmak üzere $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Delta_3$,

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\ \theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta & \sin\varphi sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\ -\cos\ \theta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\sin\theta \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Basit hesaplamalar ile

$$\tilde{v} = \eta_1 \times \eta_2 \times \eta_3 = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = v$$

olduğu kolayca görülür. $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğridir. θ, φ ve ψ (Euler açı) düzgün fonksiyonları için

$$\frac{\tan\psi}{\cos\theta} = l\sin\varphi - k\cos\varphi,$$
$$h = \cot\theta(l\cos\varphi + k\sin\varphi)$$

denklemleri sağlansın, bu durumda (v,η_1,η_2,η_3), (γ,η) boyunca uyarlanmış bir çatı oluşturur ve uyarlamış çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ \eta_1'(t) \\ \eta_2'(t) \\ \eta_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p(t) & 0 & 0 \\ -p(t) & 0 & q(t) & 0 \\ 0 & -q(t) & 0 & r(t) \\ 0 & 0 & -r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. $v, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ vektörleri sırasıyla genelleştirilmiş teğet, asli normal, genelleştirilmiş binormal ikinci binormal vektörleri olarak ve $\left(p(t), q(t), r(t)\right)$ düzgün fonksiyonları da $\gamma(t)$ in çatılandırılmış eğrilikleri olarak adlandırılır. Eğrinin çatılandırılmış eğrilikleri ile Euler açıları arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} p &= -h \sec\theta \sec\psi, \\ q &= -(j-\varphi)\sin\theta - \psi, \\ r &= \frac{-\cos\theta}{\cos\psi}(j-\varphi) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} f &= -\sin\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right), \\ g &= -\cos\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right), \\ j &= \gamma\frac{\cos\psi}{\cos\theta}, \end{aligned}$$

dir (Akyiğit & Yıldız, 2021:260).

Not: Lineer bağımsızlık koşuluyla birlikte regüler eğriler, çatılandırılmış eğriler için tipik bir örnektir. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I$ için $\gamma'(t)$ ve $\gamma''(t)$ lineer bağımsız olan regüler bir eğri olsun. Eğer $\mu_1(t) = N(t)$ ve $\mu_2(t) = B(t)$ olarak alınırsa $v(t) = \mu_1(t) \times \mu_2(t) = T(t)$ olur ve bu da $(\gamma, \mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ nin bir çatılandırılmış eğri olduğu anlamına gelir. Bu tarz bir eğrinin eğrilikleriyle çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{m(t)n'(t) - m'(t)n(t) + \left(m^2(t) + n^2(t)\right)l(t)}{\alpha(t)\left(m^2(t) + n^2(t)\right)}$$

şeklindedir

Not: Eğer $\left(\gamma,\overline{\mu_1},\overline{\mu_2}\right): I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir regüler eğri ise $\left(p(t), q(t), \alpha(t)\right)$ çatılandırılmış eğrilikleri ile $\left(\kappa(t), \tau(t)\right)$ Frenet eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\kappa(t) = \frac{p(t)}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{q(t)}{\alpha(t)} \tag{2.16}$$

şeklindedir.

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler için involüt-evolüt eğri çifti tanımı ve bu eğri çiftine ait bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 3.1 $(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ çatılandırlmış eğrisi ile $(\gamma^*,\mu^*):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ eğrisi verilsin ((γ^*,μ^*) eğrisi singüler noktalı eğri olmak zorunda değildir). Her $t\in I$ için (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki genelleştirilmiş teğeti, $\gamma^*(t)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle v(t),v^*(t)\rangle=0$ ise (γ^*,μ^*) eğrisine (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin bir involütü denir.

Teorem 3.1. (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü ise $\int\alpha(t)dt=\beta(t)$ olmak üzere

$$\gamma^*(t)=\gamma(t)-\beta(t)v(t) \tag{3.1}$$

dir.

İspat: (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. $\gamma^*(t)$ eğrisi $\forall t\in I$ için

$$\gamma^*(t)=\gamma(t)+u(t)v(t) \tag{3.2}$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\gamma^*)'(t)&=\gamma'(t)+u'(t)v(t)+u(t)v'(t)\\&=(\alpha(t)+u(t))v(t)+u(t)p(t)\mu_1(t)\end{aligned}$$

elde edilir. (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) eğrisinin involütü olduğundan $\left\langle(\gamma^*)'(t),v(t)\right\rangle=0$ dır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $v(t)$ ile iç çarpılırsa

$$\left\langle(\alpha(t)+u(t))v(t)+u(t)p(t)\mu_1(t),v(t)\right\rangle=0$$

elde edilir. Buradan da

$$\alpha(t)+u'(t)=0$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin integrali alınırsa

$$u(t)=-\int\alpha(t)\,dt=-\beta(t)$$

elde edilir. (3.2) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\gamma^*(t)=\gamma(t)-\beta(t)v(t) \tag{3.3}$$

elde edilir.

Uyarı: (3.3) denklemi kullanılarak (γ^*,μ^*) eğrisinin singüler noktalı eğri olma ihtimali incelenebilir. (3.3) denkleminin her iki yanının türevi alınır ve düzenlenirse

$$\alpha^*(t)v^*(t)=-\beta(t)p(t)\mu_1(t) \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğini her iki tarafının normu alınırsa

$$\alpha^*(t)=\left|\beta(t)p(t)\right| \tag{3.5}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $t_0\in I$, (γ^*,μ^*) eğrisinin bir singüler noktası olsun. Bu durumda (3.5) denklemi ve $p(t_0)>0$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\beta(t_0)=0$ elde edilir. Buradan da $\beta'(t_0)=\alpha(t_0)=0$ olduğundan $t_0\in I$ noktası (γ,μ) eğrisinin de bir singüler noktası olduğu anlamına gelir ve (3.1) denkleminden

$$\gamma^*(t_0)=\gamma(t_0)$$

eşitliği görülür. O halde (γ^*,μ^*) involüt eğrisi için iki durum söz konusudur. (γ^*,μ^*) eğrisi ya çatılandırılmış (singüler noktalı) eğridir ya da regüler eğridir.

Eğer (γ^*,μ^*) çatılandırılmış eğri ise (γ^*,μ^*) eğrisinin t_0 singüler noktası aynı zamanda (γ,μ) eğrsinin de singüler noktasıdır ve bu iki eğri t_0 singüler noktasında birbirlerine değerler.

Eğer (γ^*,μ^*) regüler eğri ise $\forall t\in I$ için $\alpha^*(t)\neq 0$ dır ve α^*, (γ^*,μ^*) regüler eğrisinin hız vektörüdür.

Bu bölümün geri kalan kısmında (γ^*,μ^*) eğrisi tipik bir regüler eğri olarak ele alınacak ve $\{v^*,\mu_1^*,\mu_2^*,p^*,q^*\}$ elemanları hesaplanırken $\{T^*,N^*,B^*,\kappa^*,\tau^*\}$ Frenet çatı elamanlarından yararlanılacaktır.

Teorem 3.2. (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin hareketli ortonormal çatı vektörleri $\{v(t),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)\}$ ile (γ^*,μ^*) eğrisinin hareketli ortonormal çatı vektörleri $\{v^*(t),\ \mu_1^*(t),\ \mu_2^*(t)\}$ arasında

$$
\begin{aligned}
v^*(t) &= \mu_1(t),\\
\mu_1^*(t) &= \frac{-p(t)}{\sqrt{q^2(t)+p^2(t)}}v(t)+\frac{q(t)}{\sqrt{q^2(t)+p^2(t)}}\mu_2(t),\\
\mu_2^*(t) &= \frac{q(t)}{\sqrt{q^2(t)+p^2(t)}}v(t)+\frac{p(t)}{\sqrt{q^2(t)+p^2(t)}}\mu_2(t)
\end{aligned}
$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. (3.4) ve (3.5) denklemleri kullanılırsa

$$v^*(t)=\pm\mu_1(t)$$

elde edilir. $\beta(t)<0$ ve $\alpha^*(t)=-\beta(t)p(t)$ olarak kabul edilirse $v^*(t)=\mu_1(t)$ olur. γ^* regüler eğri olduğundan (2.1.1) denkleminin son eşitliğinden yararlanarak μ_2^* hesaplanabilir. γ^* eğrisinin 1. ve 2. merteben türevleri alınırsa

$$\left(\gamma^*\right)'' = \left(-\beta' p - \beta p'\right)\mu_1 - \beta p\left(pv + q\mu_2\right)$$
$$= \beta p^2 v + \left(-\alpha p + \beta p'\right)\mu_1 + \left(-\beta pq\right)\mu_2,$$

ve

$$\left(\gamma^*\right)''' = \left(2\alpha p^2 + 3\beta pp'\right)v + \left(\beta p^3 - 2\alpha p' - \alpha' p + \beta p'' + \beta pq^2\right)\mu_1$$
$$+ \left(-2\alpha pq + 2\beta p' q + \beta pq'\right)\mu_2$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\gamma^*\right)' \times \left(\gamma^*\right)'' = \begin{vmatrix} v & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & -\beta p & 0 \\ \beta p^2 & -\alpha p - \beta p' & -\beta pq \end{vmatrix} = \beta^2 p^2 qv + \beta^2 p^3 \mu_2$$

ve

$$\left\| \left(\gamma^*\right)' \times \left(\gamma^*\right)'' \right\| = \beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + q^2}$$

dir. Elde edilenler $\mu_2^* = \dfrac{\left(\gamma^*\right)' \times \left(\gamma^*\right)''}{\left\| \left(\gamma^*\right)' \times \left(\gamma^*\right)'' \right\|}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mu_2^* = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} v + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mu_2$$

bulunur. $\mu_1^* = \mu_2^* \times v^*$ olduğundan

$$\mu_1^* = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2}} v + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mu_2$$

elde edilir.

Teorem 3.3. (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $(p(t),q(t))$ ile (γ^*,μ^*) eğrisinin eğrilikleri $(p^*(t),q^*(t))$ arasında

$$p^*(t)=\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)},$$
$$q^*(t)=\frac{p'(t)q(t)-p(t)q'(t)}{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. (γ^*,μ^*) regüler bir eğri olduğundan γ^* nın κ^* ve τ^* eğrilikleri (2.1.2) denklemi yardımıyla

$$\kappa^*(t)=\frac{\left\|(\gamma^*(t))'\times(\gamma^*(t))''\right\|}{\left\|(\gamma^*(t))'\right\|^3}=-\frac{\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}}{\beta(t)\,p(t)}$$

ve

$$\tau^*(t)=\frac{\left\langle(\gamma^*(t))'\times(\gamma^*(t))'',(\gamma^*(t))'''\right\rangle}{\left\|(\gamma^*(t))'\times(\gamma^*(t))''\right\|^2}=\frac{p(t)q'(t)-p'(t)q(t)}{\beta(t)\,p(t)\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}$$

şeklinde elde edilir. (2.4.2) denklemi ve $\alpha^*(t)=-\beta(t)\,p(t)$ eşitliği kullanılırsa

$$p^*(t)=\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}$$

ve

$$q^*(t)=\frac{p'(t)q(t)-p(t)q'(t)}{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}$$

elde edilir.

Tanım 3.2. $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisi ile regüler $(\gamma^*,\mu^*): I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için (γ^*,μ^*) eğrisinin $\gamma^*(t)$ noktasındaki genelleştirilmiş teğeti $\gamma(t)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle v(t), v^*(t)\rangle = 0$ ise (γ^*,μ^*) eğrisine (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin bir evolütü denir.

Teorem 3.4. (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü ise $c \in \mathbb{R}$ ve $\varphi(t) = \int_0^t q(u)du$ ve $\rho(t) = \dfrac{\alpha(t)}{p(t)}$ olmak üzere

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \rho(t)\mu_1(t) - \rho(t)\tan\left[\varphi(t)+c\right]\mu_2(t)$$

(3.6)

dir.

İspat: Kabul edelim ki γ^* regüler eğrisi γ eğrisinin evolütü olsun. O halde $\gamma^*(t)-\gamma(t)$ vektörü $v(t)$ vektörüne ortogonaldir. O halde

$$\gamma^*(t)-\gamma(t) = \lambda(t)\mu_1(t) + \chi(t)\mu_2(t)$$

şeklinde yazılabilir. Öyleyse $\gamma^*(t)$ vektörü

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \lambda(t)\mu_1(t) + \chi(t)\mu_2(t)$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin t parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}(\gamma^*)'(t) &= \left(\alpha(t) - \lambda(t)p(t)\right)v(t) + \left(\lambda'(t) - \chi(t)q(t)\right)\mu_1(t)\\ &\quad + \left(\lambda(t)q(t) + \chi'(t)\right)\mu_2(t)\end{aligned}$$

elde edilir. $\left\langle (\gamma^*)'(t), v(t)\right\rangle = 0$ olduğundan $\alpha - \lambda p = 0$ olur. Yukarıdaki eşitlikler tekrar düzenlenirse

$$(\gamma^*)'(t) = \left(\lambda'(t) - \chi(t)q(t)\right)\mu_1(t) + \left(\lambda(t)q(t) + \chi'(t)\right)\mu_2(t)$$

elde edilir. $\alpha - \lambda p = 0$ eşitliğinden $\lambda = \dfrac{\alpha}{p}$ bulunur ve $\dfrac{\alpha}{p} = \rho$ olduğundan $\lambda = \rho$ dır. Evolüt tanımından $\left(\gamma^*\right)'$ vektör alanı ile $\gamma^* - \gamma$ vektör alanına paraleldir. O halde

$$\left(\gamma^*\right)' = \left(\lambda' - \chi q\right)\mu_1 + \left(\lambda q + \chi'\right)\mu_2$$

ve

$$\gamma^* - \gamma = \lambda\mu_1 + \chi\mu_2$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{\lambda' - \chi q}{\lambda} = \frac{\lambda q + \chi'}{\chi}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\lambda = \rho$ yazalım ve q yu hesaplayalım.

$$\frac{\rho' - \chi q}{\rho} = \frac{\rho q + \chi'}{\chi}$$

eşitliğinden gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$q = \frac{\rho'\chi - \chi\rho}{\rho^2 + \chi^2} = \left[\arctan\left(-\frac{\chi}{\rho}\right)\right]'$$

elde edilir. $q = \left[\arctan\left(-\dfrac{\chi}{\rho}\right)\right]'$ eşitliği,

$$\int_0^s q(u)\,du + C = \arctan\left(-\frac{\chi}{\rho}\right)$$

olduğunu gösterir. $\varphi(s) = \int_0^s q(u)\,du$ diyelim. Böylece $\chi = -\rho\tan\left(\varphi(t) + c\right)$ bulunur. Buradan

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \rho(t)\mu_1(t) - \rho(t)\tan\left[\varphi(t) + c\right]\mu_2(t)$$

dir. Her $c \in \mathbb{R}$ için bir evolütü eğrisi elde edilir. Buradaki $\gamma(t)+\rho(t)\mu_1(t)$ noktası γ çatılandırılmış eğrisinin $\gamma(t)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezidir ve $\varphi'(t)=q(t)$ dir.

Teorem 3.5. (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü olsun. (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri $\{v(t),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)\}$ ile (γ^*,μ^*) eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri $\{v^*(t),\ \mu_1^*(t),\ \mu_2^*(t)\}$ arasında

$$\begin{aligned} v^* &= \cos(\varphi+c)\mu_1 - \sin(\varphi+c)\mu_2, \\ \mu_1^* &= v, \\ \mu_2^* &= \sin(\varphi+c)\mu_1 + \cos(\varphi+c)\mu_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki (γ^*,μ^*) regüler eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü olsun. Teorem 3.4'deki (3.6) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha^* v^* &= \alpha v + k'\mu_1 + \rho(-pv+q\mu_2) - \left[\rho'\tan(\varphi+c)+\rho q\left(1+\tan^2(\varphi+c)\right)\right]\mu_2 \\ &\quad + \left(1+\tan^2(\varphi+c)\right)q\mu_1 \\ &= \left(\rho'+\rho\tan(\varphi+c)q\right)\left(\mu_1 - \mu_2\tan(\varphi+c)\right) \\ &= \frac{\rho'+\rho\tan(\varphi+c)q}{\cos(\varphi+c)}\left[\cos(\varphi+c)\mu_1 - \sin(\varphi+c)\mu_2\right] \end{aligned}$$

elde edilir, burada norm alınırsa

$$\alpha^* = \left\|\left(\gamma^*\right)'\right\| = \left|\frac{\rho'+kq\tan(\varphi+c)}{\cos(\varphi+c)}\right|$$

elde edilir. Yukarıda elde edilenler $v^*(t) = \dfrac{1}{\left\|\left(\gamma^*\right)'(t)\right\|}\left(\gamma^*\right)'(t)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$v^* = \cos(\varphi+c)\mu_1 - \sin(\varphi+c)\mu_2$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki eşitlikle türev alınırsa

$$\left(v^*\right)' = -p\cos(\varphi+c)v$$

bulunur. (2.4.1) den $\left(v^*\right)' = p^*\mu_1^*$ dir. Öyleyse

$$p^*\mu_1^* = -p\cos(\varphi+c)v$$

olmak zorundadır. μ_1^* ve v vektörleri birim uzunlukta vektörler olduğundan $\mu_1^* = v$ veya $\mu_1^* = -v$ bulunur. $\mu_1^* = -v$ olarak kabul edilebilir. $\mu_2^* = v \times \mu_1^*$ olduğundan

$$\mu_2^* = \sin(\varphi+c)\mu_1 + \cos(\varphi+c)\mu_2$$

elde edilir.

Teorem 3.6. (γ^*, μ^*) regüler eğrisi (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü olsun. (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p(t)$, $q(t)$ ile (γ^*, μ^*) eğrisinin eğrilikleri $p^*(t), q^*(t)$ arasında

$$p^*(t) = p(t)\cos(\varphi(t)+c),$$
$$q^*(t) = p(t)\sin(\varphi(t)+c)$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki (γ^*, μ^*) regüler eğrisi (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü olsun. (γ^*, μ^*) regüler bir eğri olduğundan γ^* nın κ^* ve τ^* eğrilikleri (2.1.2) denklemi yardımıyla hesaplanıp (2.4.2) denklemi kullanılırsa

$$p^*(t) = p(t)\cos(\varphi(t)+c)$$

ve

$$q^*(t) = p(t)\sin(\varphi(t)+c)$$

elde edilir.

Teorem 3.7. (γ^*, μ^*) çatılandırılmış eğrisi (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin evolütü olsun. (γ^*, μ^*) çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri p^* ve q^* olduğuna göre

$$\frac{q^*}{p^*} = -\tan(\varphi + c)$$

dir.

İspat: Teorem 3.6 dan ispatı kolayca görülebilir.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLERİN İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ

Bu kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler için involüt-evolüt eğri çifti tanımı ve bu eğri çiftine ait bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 4.1. $(\gamma,\mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırlmış eğrisi ile $(\gamma^*,\mu^*): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ eğrisi verilsin

((γ^*,μ^*) eğrisi singüler noktalı eğri olmak zorunda değildir). Her $t \in I$ için (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki genelleştirilmiş teğeti $v(t)$ ve (γ^*,μ^*) eğrisinin $\gamma^*(t)$ noktasındaki genelleştirilmiş teğeti $v^*(t)$ olmak üzere $\langle v(t), v^*(t)\rangle = 0$ ise (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü, (γ,μ) çatılandırılmış eğrisine de (γ^*,μ^*) eğrisinin bir evolütü denir.

Teorem 4.1. (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü ise $\int \alpha(t)\,dt = \beta(t)$ olmak üzere

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) - \beta(t)v(t) \tag{4.1}$$

dir.

İspat: (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. $\gamma^*(t)$ eğrisi $\forall t \in I$ için

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + u(t)v(t) \tag{4.2}$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(\gamma^*)'(t) &= \gamma'(t) + u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\\ &= (\alpha(t) + u(t))v(t) + u(t)p(t)\mu_1(t)\end{aligned}$$

elde edilir. (γ^*,μ^*) eğrisi (γ,μ) eğrisinin involütü olduğundan $\left\langle (\gamma^*)'(t), v(t)\right\rangle = 0$ dır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $v(t)$ ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \left(\alpha(t)+u(t)\right)v(t)+u(t)\,p(t)\,\mu_1(t),v(t)\right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\alpha(t)+u'(t)=0$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin integrali alınırsa

$$u(t)=-\int \alpha(t)\,dt=-\beta(t)$$

elde edilir. (4.2) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\gamma^*(t)=\gamma(t)-\beta(t)v(t) \tag{4.3}$$

elde edilir.

Uyarı: (4.3) denklemi kullanılarak (γ^*,μ^*) eğrisinin singüler noktalı eğri olma ihtimali incelenebilir. (4.3) denkleminin her iki yanının türevi alınır ve düzenlenirse

$$\alpha^*(t)v^*(t)=-\beta(t)\,p(t)\,\mu_1(t) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitliğini her iki tarafının normu alınırsa

$$\alpha^*(t)=\left|\beta(t)\,p(t)\right| \tag{4.5}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $t_0 \in I$, (γ^*,μ^*) eğrisinin bir singüler noktası olsun. Bu durumda (4.5) denklemi ve $p(t_0)>0$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\beta(t_0)=0$ elde edilir. Buradan da $\beta'(t_0)=\alpha(t_0)=0$ olduğundan $t_0 \in I$ noktası (γ,μ) eğrisinin de bir singüler noktası olduğu anlamına gelir ve (4.1) denkleminden

$$\gamma^*(t_0)=\gamma(t_0)$$

eşitliği görülür. O halde (γ^*,μ^*) involüt eğrisi için iki durum söz konusudur. (γ^*,μ^*) eğrisi ya çatılandırılmış (singüler noktalı) eğridir ya da regüler eğridir.

Eğer $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ çatılandırılmış eğri ise $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ eğrisinin t_0 singüler noktası aynı zamanda (γ,μ) eğrsinin de singüler noktasıdır ve bu iki eğri t_0 singüler noktasında birbirlerine değerler.

Eğer $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ regüler eğri ise $\forall t\in I$ için $\alpha^{*}(t)\neq 0$ dır ve α^{*}, $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ regüler eğrisinin hız vektörüdür.

Bu bölümün geri kalan kısmında $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ eğrisi tipik bir regüler eğri olarak ele alınacak ve $\left\{v^{*},\mu_1^{*},\mu_2^{*},\mu_3^{*},p^{*},q^{*},r^{*}\right\}$ elemanları hesaplanırken $\left\{T^{*},N^{*},B^{*},E^{*},\kappa^{*},\tau^{*},\sigma^{*}\right\}$ Frenet çatı elamanlarından yararlanılacaktır.

Teorem 4.2. $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri $\left\{v(t),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t),\mu_3(t),\mu_4(t)\right\}$ ile $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri $\left\{v^{*}(t),\ \mu_1^{*}(t),\ \mu_2^{*}(t),\mu_3^{*}(t),\mu_4^{*}(t)\right\}$ arasında

$$
\begin{aligned}
v^{*}(t)&=\mu_1(t),\\
\mu_1^{*}(t)&=\frac{-p(t)v(t)+q(t)\mu_2(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}},\\
\mu_2^{*}(t)&=\frac{\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)q(t)v(t)+\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)p(t)\mu_2(t)+\left(-p^2(t)-q^2(t)\right)q(t)r(t)\mu_3(t)}{\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}\sqrt{p^2(t)q^2(t)r^2(t)+q^4(t)r^2(t)+q^2(t)(p')^2(t)-2(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)}},\\
\mu_3^{*}(t)&=\frac{q^2(t)r(t)v(t)+p(t)q(t)r(t)\mu_2(t)+\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)\mu_3(t)}{\sqrt{\left(p^2(t)\left(q^2(t)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)\left(q^2(t)r^2(t)+(p')^2(t)\right)\right)}},
\end{aligned}
$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki $\left(\gamma^{*},\mu^{*}\right)$ eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. Teorem 4.1'den

$$\gamma^{*}(t)=\gamma(t)-\beta(t)v(t)$$

dir. Buradan $\gamma^{*}(t)$ eğrisinin (2.5.1) göz önünde bulundurularak $t\in I$ parametresine göre 1., 2., 3. ve 4. mertebeden türevleri sırasıyla hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\left(\gamma^*\right)'(t) &= \gamma'(t) - \beta'(t)v(t) - \beta(t)v'(t) \\
&= \alpha(t)v(t) - \alpha(t)v(t) - \beta(t)p(t)\mu_1(t) \\
&= -\beta(t)p(t)\mu_1(t),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\gamma^*\right)''(t) &= \left(-\beta(t)p(t)\mu_1(t)\right)' \\
&= \beta(t)p^2(t)v(t) + \left(-\alpha(t)p(t) - \beta(t)p'(t)\right)\mu_1(t) \\
&\quad \left(-\beta(t)p(t)q(t)\right)\mu_2(t),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\gamma^*\right)'''(t) &= \begin{pmatrix} \beta(t)p^2(t)v(t) + \left(-\alpha(t) - \beta(t)p'(t)\right)\mu_1(t) \\ +\left(\beta(t)p(t)q(t)\right)\mu_2(t) \end{pmatrix}' \\
&= \left(2\alpha(t)p^2(t) + 3\beta(t)p(t)p'(t)\right)v(t) \\
&\quad \begin{pmatrix} \beta(t)p^3(t) + \beta(t)p(t)q^2(t) - \alpha'(t) \\ p(t) - 2\alpha(t)p'(t) - \beta(t)p''(t) \end{pmatrix}\mu_1(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} -2\alpha(t)p(t)q(t) - 2\beta(t)p'(t)q(t) \\ -\beta(t)p(t)q'(t) \end{pmatrix}\mu_2(t) \\
&\quad - \beta(t)p(t)q(t)r(t)\mu_3(t),
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla $\left(\gamma^*, \mu^*\right)$ eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri hesaplanabilir. (4.4) ve (4.5) denklemleri kullanılırsa

$$
v^*(t) = \pm\mu_1(t)
$$

dir. $\beta(t) < 0$ ve $\alpha^*(t) = -\beta(t)p(t)$ olarak kabul edilirse $v^*(t) = \mu_1(t)$ olur. (2.3) denkleminin 2. eşitliğinden

$$
\mu_1^*(t) = \frac{-p(t)v(t) + q(t)\mu_2(t)}{\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}}
$$

elde edilir. Şimdi $\mu_3^*(t)$ vektörü için $\dfrac{v^*(t)\times\mu_1^*(t)\times\left(\gamma^*\right)'''(t)}{\left\|v^*(t)\times\mu_1^*(t)\times\left(\gamma^*\right)'''(t)\right\|}$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\mu_3^*(t)=\frac{q^2(t)r(t)v(t)+p(t)q(t)r(t)\mu_2(t)+\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)\mu_3(t)}{\sqrt{\left(p^2(t)\left(q^2(t)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)\left(q^2(t)r^2(t)+(p')^2(t)\right)\right)}}$$

şeklide elde edilir. Son olarak $\mu_2^*(t)$ vektörü $\mu_2^*(t)=v^*(t)\times\mu_1^*(t)\times\mu_3^*(t)$ eşitliği yardımıyla

$$\mu_2^*(t)=\frac{\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)q(t)v(t)+\left(p'(t)q(t)-p(t)q'(t)\right)p(t)\mu_2(t)+\left(-p^2(t)-q^2(t)\right)q(t)r(t)\mu_3(t)}{\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)}\sqrt{p^2(t)q^2(t)r^2(t)+q^4(t)r^2(t)+q^2(t)(p')^2(t)-2(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)}}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3. $\left(\gamma^*,\mu^*\right)$ eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. $\left(\gamma^*,\mu^*\right)$ eğrisinin eğrilikleri $p^*(t),q^*(t),r^*(t)$, (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p(t),q(t),r(t)$ arasında

$$p^*(t)=\sqrt{p^2(t)-q^2(t)},$$

$$q^*(t)=\frac{\sqrt{\left(q^2(t)\left(\left(p^2(t)+q^2(t)\right)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)\right)}}{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)},$$

$$r^*(t)=\frac{\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)\begin{pmatrix} q(t)\left(-p'(t)\left(2r(t)q'(t)+q(t)r'(t)\right)+q(t)r(t)p''(t)\right) \\ +p(t)\left(q^2(t)r^3(t)+2r(t)(q')^2(t)+q(t)\left(q'(t)r'(t)-r(t)q''(t)\right)\right)\end{pmatrix}}}{\sqrt{\left(q^2(t)\left(\left(p^2(t)+q^2(t)\right)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)\right)}}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Kabul edelim ki $\left(\gamma^*,\mu^*\right)$ eğrisi (γ,μ) çatılandırılmış eğrisinin involütü olsun. Teorem 4.2 ve (2.5.1) denklemi kullanırsa

$$p^*(t)=\sqrt{p^2(t)-q^2(t)},$$
$$q^*(t)=\frac{\sqrt{\left(q^2(t)\left(\left(p^2(t)+q^2(t)\right)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)\right)}}{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)},$$
$$r^*(t)=\frac{\sqrt{\left(p^2(t)+q^2(t)\right)\begin{pmatrix} q(t)\left(-p'(t)\left(2r(t)q'(t)+q(t)r'(t)\right)+q(t)r(t)p''(t)\right) \\ +p(t)\left(q^2(t)r^3(t)+2r(t)(q')^2(t)+q(t)\left(q'(t)r'(t)-r(t)q''(t)\right)\right)\end{pmatrix}}}{\sqrt{\left(q^2(t)\left(\left(p^2(t)+q^2(t)\right)r^2(t)+(p')^2(t)\right)-2p(t)q(t)p'(t)q'(t)+p^2(t)(q')^2(t)\right)}}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1. $\gamma^*(t)$ eğrisinin evolütü $\gamma(t)$ çatılandırılmış eğrisi, çatılandırılmış $w-$eğrisi olarak alınırsa $\gamma(t)$ eğrisinin eğrilikleri sabit olacağından $\gamma^*(t)$ eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri

$$\begin{aligned} v^*(t)&=\mu_1(t), \\ \mu_1^*(t)&=\frac{-p(t)v(t)+q(t)\mu_2(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}, \\ \mu_2^*(t)&=-\mu_3(t), \\ \mu_3^*(t)&=\frac{q(t)v(t)+p(t)\mu_2(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

dir.

Teorem 4.4. $\gamma^*(t)$ eğrisinin evolütü $\gamma(t)$ çatılandırılmış eğrisi, çatılandırılmış $w-$eğrisi olmak üzere

$$\gamma(t)=\gamma^*(t)+\rho^*(t)\mu_1^*(t)-\rho^*(t)\frac{q(t)}{p(t)}\mu_3^*(t)$$

dir. Burada $\rho(t)$, $\gamma(t)$ çatılandırılmış eğrisinin eğrilik yarıçapıdır.

İspat: $\gamma(t)$ çatılandırılmış eğrisinin evolütü olan $\gamma^*(t)$ çatılandırılmış eğrisini $w-$eğrisi olarak alalım. $\gamma^*(t)-\gamma(t)$ vektörü $v(t)$ vektörüne dik olduğundan

$$\begin{aligned}&\gamma^*(t)-\gamma(t)=\lambda(t)\mu_1(t)+\chi(t)\mu_2(t)+\phi(t)\mu_3(t)\\&\quad\Rightarrow\gamma^*(t)=\gamma(t)+\lambda(t)\mu_1(t)+\chi(t)\mu_2(t)+\phi(t)\mu_3(t)\end{aligned}\tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda(t),\chi(t),\phi(t)$ $t\in I$ parametresine bağlı keyfi fonksiyonlardır. (4.8) denkleminin t parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=\left(\gamma^*\right)'(t)+\lambda'(t)\mu_1^*(t)+\lambda(t)\left(\mu_1^*\right)'(t)+\chi'(t)\mu_2^*(t)+\chi(t)\left(\mu_2^*\right)'(t)+\phi'(t)\mu_3^*(t)+\phi(t)\left(\mu_3^*\right)'(t)\\&=\left(\alpha^*(t)-\lambda(t)p^*(t)\right)v^*(t)+\left(\lambda'(t)-\chi(t)q^*(t)\right)\mu_1^*(t)\\&+\left(\lambda(t)q^*(t)+\chi'(t)-\phi(t)r^*(t)\right)\mu_2^*(t)+\left(\chi(t)r^*(t)+\phi(t)\right)\mu_3^*(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik $v^*(t)$ ile iç çarpılırsa

$$\left\langle\gamma'(t),v^*(t)\right\rangle=\alpha^*(t)-\lambda(t)p^*(t)$$

elde edilir. Tanım gereği $\left\langle\gamma'(t),v^*(t)\right\rangle=0$ olduğundan $\rho(t)$ eğrilik yarıçapı olmak üzere

$$\begin{aligned}&\alpha^*(t)-\lambda(t)p^*(t)=0\\&\qquad\Rightarrow\lambda(t)=\frac{\alpha^*(t)}{p^*(t)}=\rho^*(t)\end{aligned}$$

dir. Şimdi $\chi(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonlarını da bulmak için (4.10) denklemi, sırasıyla $\mu_1^*(t),\mu_2^*(t)$ ve $\mu_3^*(t)$ vektörleriyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}&\left\langle\mu_1^*(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle=\lambda(t)=\rho^*(t),\\&\left\langle\mu_2^*(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle=\chi(t),\\&\left\langle\mu_3^*(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle=\phi(t)\end{aligned}\tag{4.12}$$

elde edilir. $\gamma(t)$ çatılandırılmış eğrisi $w-$eğrisi olduğundan (4.10) denklemi dikkate alınarak (4.12) denkleminden

$$\rho(t)=\frac{-p(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle v(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle+\frac{q(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle \mu_2(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle,$$
$$\chi(t)=\left\langle -\mu_3(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle, \tag{4.13}$$
$$\phi(t)=\frac{q(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle v(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle+\frac{p(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle \mu_2(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle$$

elde edilir. $\gamma(t)$ eğrisinin genelleştirilmiş teğeti $\gamma(t)-\gamma^*(t)$ vektörü ile lineer bağımlı olduğundan $\gamma(t)-\gamma^*(t)$ vektörü $\mu_1(t),\mu_2(t)$ ve $\mu_3(t)$ vektörlerine diktir. Buradan (4.14) denklemi

$$\rho^*(t)=\frac{-p(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle v(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle,$$
$$\chi(t)=0, \tag{4.14}$$
$$\phi(t)=\frac{q(t)}{\sqrt{p^2(t)+q^2(t)}}\left\langle v(t),\gamma(t)-\gamma^*(t)\right\rangle$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{-\rho^*(t)}{p(t)}=\frac{\phi(t)}{q(t)}$$
$$\Rightarrow \phi(t)=-\rho^*(t)\frac{q(t)}{p(t)}$$

elde edilir. Sonuç olarak bulduğumuz eşitlikler yerine yazılarak

$$\gamma(t)=\gamma^*(t)+\rho^*(t)\mu_1^*(t)-\rho^*(t)\frac{q(t)}{p(t)}\mu_3^*(t) \tag{4.15}$$

elde edilir.

KAYNAKÇA

Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G. (2021). On the Framed Normal Curves in Euclidean 4-space. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, *4*(4), 258-263.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri I. *Ankara Üniversitesi, Ankara,* 1-270.

Honda, S., & M. Takahashi, M. (2016). Framed Curves in the Euclidean Space, *Advances in Geometry 16,* 265-276.

O'Neill, B. *(2006).* Elementary Differential Geometry Revised Second Edition*, Department of Mathematics University of California, Los Angeles.*

Özyılmaz, E., & Yılmaz, S. (2009). Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math,* 2(2), 168-174.

Sabuncuoğlu, A. (2014). Diferensiyel Geometri V. *Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,* 1-514.

Soyfidan, T. (2011). *Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti*, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Wang, Y., Pei, D., & Gao, R. (2019). Generic Properties of Framed Rectifying Curves, *Mathematics* 7(1), 37.

Yüce, S. (2020). Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri *5. Baskı, Pegem Akademi*