

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ SAMPLİNG DURRMEYER OPERATÖRLER AİLESİ İLE
AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE PARLAK

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ OSMAN ALAGÖZ

BİLECİK, 2022

10462518

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ SAMPLİNG DURRMEYER OPERATÖRLER AİLESİ İLE
AĞIRLIKLİ YAKLAŞIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE PARLAK

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ OSMAN ALAGÖZ

BİLECİK, 2022

10462518

BEYAN

“Genelleştirilmiş Sampling Durrmeyer Operatörler Ailesi ile Ağırlıklı Yaklaşım” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın,	
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	<input checked="" type="checkbox"/> DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum; TÜBİTAK	
Desteğin Türü; 3501	Proje Numarası
TÜBİTAK	119F263
ETİK KURUL onayı var ise;	
ETİK KURUL karar tarih/sayı:	

Öğrenci Adı ve Soyadı

Merve PARLAK

Tarih

...../...../2022

İmza

ÖN SÖZ

Çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübelerini her daim bana aktaran, çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Osman ALAGÖZ'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Tezim için yaptığım tüm çalışmalar boyunca desteğini en başından beri hissettiğim değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tuncer ACAR'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımda her zaman yol gösterici olan, değer veren, güvenen ve başarılı bir birey olacağıma inanan değerli hocam Sayın Halime KIRAÇ TAŞER'e sonsuz şükranlarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen annem, babam ve kardeşime ayrıca anneannem ve dedeme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Tez sürem boyunca 3501 programı kapsamında 119F263 nolu proje ile maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Merve Parlak

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ SAMPLİNG DURRMEYER OPERATÖRLER AİLESİ İLE AĞIRLIKLIL YAKLAŞIM

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yaklaşım teorisi ve bunun önemli bir dalı olan sampling teorisi üzerine literatür hakkında ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar ve notasyonlar matematiksel terminolojiye uygun olarak verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ise ağırlıklı fonksiyon uzayları, ağırlıklı süreklilik modülü ve özellikleri ile birlikte çekirdek fonksiyonlarına ait bilgiler verilmiştir. Tezin orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümünde de ağırlıklı sürekli fonksiyon uzaylarında sampling Durrmeyer tipli operatörler ailesinin lokal ve global yakınsaklık özellikleri incelenerek noktasal ve düzgün yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık hızı incelenmiştir. Son olarak bu yakınsaklıkta bir üst tahmin elde edilebilmesi amacıyla Voronovskaja tipli bir teorem sunulmuştur. Bu bölümde ayrıca bulunan teorik sonuçları destekleyen nümerik örneklere de yer verilmiştir. Tezin son bölümünde, sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sampling Teori, Sampling Durrmeyer Tipli Operatör, Ağırlıklı Uzay, Ağırlıklı Süreklilik Modülü.

ABSTRACT

WEIGHTED APPROXIMATION BY THE FAMILY OF GENERALIZED SAMPLING DURRMEYER OPERATORS

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, preliminary information about approximation theory and sampling theory which is an important branch of approximation theory, is given. In the second chapter, the basic concepts and notations which are appropriate for the mathematical terminology used in the thesis are given. In the third chapter of the thesis, general concepts and properties of kernel functions, weighted continuous spaces of function and weighted modulus of continuity are given. In the fourth chapter, which forms the original part of the thesis, the local and global approximation results of the family of sampling Durrmeyer type operators in weighted continuous function spaces are examined and pointwise and uniform convergence results are obtained. In addition, the rate of convergence has been investigated via weighted modulus of continuity. Finally, a Voronovskaja type theorem is presented in order to obtain an upper estimate for this convergence. In this part numerical examples that are supporting the theoretical results are also presented. In the last chapter of the thesis the results are discussed.

Keywords: Sampling Theory, Sampling Durrmeyer Type Operator, Weighted Space, Weighted Modulus of Continuity.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	v
GRAFİKLER LİSTESİ	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. Operatör Teori	6
2.2. Seriler	19
3. MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1. Fonksiyon Uzayları	21
3.2. Çekirdek Fonksiyonları.....	26
4. DURRMEYER TIPLİ SAMPLİNG SERİLERİNİN AĞIRLIKLIL UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	29
4.1. Sampling Durrmeyer Operatörleri	29
4.2. Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık	33
4.3. Yakınsaklık Hızı.....	39
4.4. Voronovskaja Tipli Teorem	41
4.5. Nümerik Hesaplamalar	47
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	48
KAYNAKÇA	51

TABLULAR LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1. Bazı keyfi x değerlerindeki $ (S_w^{\varphi, \chi} f)(x) - f(x) $ 'in değeri.....	47
Tablo 4.2. Bazı keyfi x değerlerindeki $ (S_w^{\varphi, \chi} g)(x) - g(x) $ 'in değeri	47

GRAFİKLER LİSTESİ

	Sayfa No
Grafik 3.1. 2. 3. ve 4. mertebeden B-Spline çekirdeğinin grafikleri.....	27
Grafik 3.2. Fejer çekirdeğinin grafiği	27
Grafik 3.3. Karakteristik fonksiyonun grafiği.....	28

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{N}_0	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}_+	: Pozitif reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
$\ \cdot\ _\infty$: Supremum normu
$\mathcal{C}([a, b])$: $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _\rho$: Ağırlıklı norm
$\mathcal{C}(I)$: I üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyon uzayı
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$: \mathbb{R} üzerinde tanımlı k -ıncı mertebeye kadar tüm türevleri ve kendisi sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$L^p(I)$: $1 \leq p < +\infty$ için I üzerindeki kompleks değerli Lebesgue ölçülebilir ve p - integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$B_\rho(\mathbb{R})$: ρ ağırlık fonksiyonu ile çarpımı \mathbb{R} üzerinde sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{C}_\rho(\mathbb{R})$: ρ ağırlık fonksiyonu ile çarpımı \mathbb{R} üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$U_\rho(\mathbb{R})$: ρ ağırlık fonksiyonu ile çarpımı \mathbb{R} üzerinde düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Omega(f; \cdot)$: f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$L_n(f; \cdot)$: f fonksiyonunun L_n lineer operatörleri altındaki görüntüsü
$B_n(f; \cdot)$: f fonksiyonunun Bernstein operatörü altındaki görüntüsü
$(G_w^\varphi f)(\cdot)$: f fonksiyonunun genelleştirilmiş sampling serisi altındaki görüntüsü
$(S_w^{\varphi, \psi} f)(\cdot)$: f fonksiyonunun sampling Durrmeyer serisi altındaki görüntüsü
$\mathcal{P}([a, b])$: $[a, b]$ aralığında tanımlı polinomların uzayı

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin çıkış noktası 19. yüzyıla dayanmakta ve günümüzde de birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Yaklaşım teorisi bir fonksiyonun daha kullanışlı başka bir fonksiyon aracılığıyla nasıl ifade edilebileceğini belirleyen bir teoridir. Yaklaşım teorisinin temellerini atan Weierstrass, Weierstrass yaklaşım teoremi ile $P([a, b])$ 'nin $C([a, b])$ 'de yoğun olduğunu göstermiştir (Weierstrass, 1885). Yani, her $f \in C([a, b])$ için $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $(p_n) \in P([a, b])$ ((p_n) , n. dereceden polinomlar dizisi) bulunabilir.

Weierstrass yaklaşım teoremi ortaya atıldığı ilk günden itibaren oldukça dikkat çekmiş, dönemin popüler matematikçileri tarafından farklı ispatlar vermeye çalışılmıştır. (Runge, 1885a), (Runge, 1885b), (Lubinsky, 1993). Verilen birçok ispat topolojik gerçeklere dayandığından anlaşılması güç olarak görülmüştür. Bernstein, kendi adıyla adlandırdığı Bernstein polinomlarını kullanarak Weierstrass yaklaşım teoremi'nin ilk cebirsel ispatını vermiştir (Bernstein, 1912). Bernstein polinomları; f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Bernstein polinomları kendisini oluşturan sürekli f fonksiyonuna $[0, 1]$ aralığı üzerinde düzgün olarak yakınsamaktadır. Ayrıca $[0, 1]$ ve $[a, b]$ aralıkları arasında lineer bir dönüşüm yapılabileceğinden Bernstein polinomları $[a, b]$ kompakt aralıklarına genelleştirilebilmektedir. Bernstein polinomlarının yapısındaki basitlik, popülaritesini hızla arttırmıştır.

Bernstein polinom dizileriyle yaklaşımın sürekli fonksiyonlar için geçerli olduğu bilinmektedir. Sürekli olmayan fonksiyonlar için yaklaşımın $f \in L^1(0,1)$, $x \in [0,1]$ olması halinde var olacağını (Kantorovich, 1930) yaptığı çalışmasında (1.1)'deki polinom dizilerinde $f\left(\frac{k}{n}\right)$ değerlerinin yerine $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ aralığında Steklov ortalama değerini alarak

$$(K_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u) du \quad (1.2)$$

polinomlarını tanımlamıştır.

Bernstein polinomlarının inşasında kullanılan fonksiyon kapalı ve sınırlı olan bir aralıkta tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Tanım kümesi tüm \mathbb{R} olan bir fonksiyona yaklaşım metodlarından birisi ise sampling operatörleridir.

Sampling serilerinin inşasında verilen $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ fonksiyonu için Bernstein polinomlarındaki $\frac{k}{n}$ örneklem değerlerinin uygulandığı $f\left(\frac{k}{n}\right)$ dizilerinin yerine $W > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{k}{W}$ tüm \mathbb{R} 'de eşit aralıklı örneklem noktalar olmak üzere $f\left(\frac{k}{W}\right)$ örneklem değerleri kullanılarak f 'yi tekrar tüm \mathbb{R} 'de inşa edebilmek amaçlanmıştır. (Whittaker, 1915), (Kotel'nikov, 1933), (Shannon, 1949).

Bernstein polinomlarının ardından yaklaşım metodu sunabilmek için birçok yeni operatörler dizisi tanımlanmıştır. Tanımlanan bu yeni operatörler dizilerinin gerçekten bir yaklaşım metodu sunup sunmadığını test etmek için zaman içinde genel bir karakterizasyon ihtiyacı doğmuştur. Bu problem, Bohman tarafından lineer pozitif operatörler dizilerinin $[0, 1]$ aralığında tanımlı sürekli f fonksiyonuna yakınsaması olarak ele alınmış ve bir karakterizasyon (Bohman, 1952: 43) tarafından verilmiştir. Ardından Korovkin, bu karakterizasyonu $[0, 1]$ aralığından $[a, b]$ aralığına genelleştirmiş ve bugün Bohman-Korovkin teoremi adıyla anılan teorem (Korovkin, 1959) tarafından sunulmuştur.

Bohman-Korovkin teoremi, sınırlı aralıklar üzerinde tanımlanmış operatörler dizilerinin yaklaşım metodu sunup sunmadığını test ederken sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı operatörler dizileri için bir karakterizasyon verememektedir. Gadjiev, yaptığı çalışmada tanımladığı ağırlıklı uzaylar ile bu problemi çözmüştür (Gadjiev, 1974). Bu tanımlama ile birlikte artık, sınırsız aralıklarda sunulan operatörler dizilerinin yaklaşım metodu sunup sunmadığını test etmek mümkün olmaktadır. Burada alınan ağırlık fonksiyonu, operatörler dizisinin tanım ve görüntü kümesinde aynı olmalıdır. Fakat Coskun yaptığı çalışmasında, iki farklı ağırlık fonksiyonu olan ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonlarını alarak Gadjiev'in verdiği teoremin sağlanıp sağlanamayacağını (Coskun, 1998) çalışmıştır.

Operatörler dizilerinin yaklaşım metodu sunup sunmadığını test ettikten sonra yaklaşım metodu sunan operatörler dizileri için yaklaşımın hızını elde etmek yeni bir problemdir. Bunun

için süreklilik modülünün ağırlıklı uzaylardaki karşılığı Gadjiev ve Ispir tarafından tanımlanmıştır (Gadjiev ve Ispir, 1999).

Yaklaşımın tüm reel ekseninde olmasını sağlayan genelleştirilmiş sampling serileri olarak da nitelenen sampling operatörleri, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$(G_w^\chi f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{w}\right) \chi(wt - k), w > 0 \quad (1.3)$$

(Butzer ve Stens, 1993) tarafından (1.3) ile tanımlanmıştır. $(G_w^\chi f)$ operatörler ailesi, seriyi yakınsak kılan f fonksiyonları için anlamlıdır ve f fonksiyonunu tüm reel ekseninde yeniden inşa etmeye olanak sağlar. Burada χ uygun şartları sağlayan ve çekirdek olarak adlandırılan bir fonksiyondur.

Sadece genelleştirilmiş sampling operatörleri için değil aynı zamanda Bardaro vd. (Bardaro vd., 2007) tarafından tanımlanan ve uygun şartları sağlayan χ çekirdek fonksiyonu ve her $t \in \mathbb{R}$ için seriyi yakınsak kılan lokal anlamda integrallenebilen f fonksiyonu (sürekli olması gerekmeyen f fonksiyonu) için

$$(K_w^\chi f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(wt - k) \left[w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} f(u) du \right], \quad w > 0, t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

şeklinde verilen sampling operatörler ailesi ile onların Kantorovich formları arasında bir lineerliğin olduğunu göstererek bazı (ters sonuçlar) (Costarelli ve Vinti, 2018) tarafından elde edilmiştir. Bu operatörler ailesinin sürekli fonksiyonlar için yaklaşım özellikleri (Bardaro vd., 2007) ve (Bardaro ve Mantellini, 2012) çalışmalarında verilmiştir.

$(G_w^\chi f)$ operatörler ailesini göz önüne aldığımızda f sinyal fonksiyonu tüm reel ekseninde düzgün sürekli ve sınırlı olduğunda yeniden inşa edilebilmekteydi. Ancak (1.3) serilerinde f fonksiyonu en basitinden x^2 polinomu olarak bile alınamamaktadır. Yani sampling serileri en az 2. dereceden polinom için bile yaklaşım sonucu verememektedir. Çünkü $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ biçimindeki bir polinom tüm reel ekseninde sınırlı olmamasının yanında düzgün sürekli bir fonksiyon da değildir. Bu ise sampling serilerinde yaklaşım veren fonksiyon sınıflarının kısıtlayıcı olduğunu göstermekle beraber büyük bir dezavantajdır.

Genelleştirilmiş sampling operatörlerinin L^1 versiyonu ilk olarak Bardaro ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır. (Bardaro vd., 2007), (Acar vd., 2020), (Bardaro ve Mantellini, 2012), (Costarelli vd., 2017), (Costarelli ve Vinti, 2019a), (Kolomoitsev ve Skopina, 2017) ve (Orlova ve Tamberg, 2016). Öte yandan karşılık gelen operatörlerin Kantorovich modifikasyonu, L^1 uzayına ait fonksiyonları tahmin etme yöntemi iken, L^p uzaylarına (veya daha genel Orlicz ve modüler uzaylara) ait fonksiyonları tahmin etme metodu Durrmeyer modifikasyonudur. Genelleştirilmiş sampling operatörlerinin (1.3) Durrmeyer modifikasyonları ilk olarak (Bardaro ve Mantellini, 2014) tarafından

$$(S_w^{\varphi,\varphi} f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \varphi(wu - k) f(u) du \quad (1.5)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada φ uygun koşulları sağlayan çekirdek fonksiyonudur. Bir polinomsal büyümeye sahip f fonksiyonları için asimptotik bir formül oluşturularak, $(S_w^{\varphi,\varphi})$ operatörleri ailesi için Voronovskaja tipi bir formül (Bardaro ve Mantellini, 2014) tarafından elde edilmiştir.

Genel olarak, Durrmeyer modifikasyonlarının inşasındaki çekirdeklerin aynı olması gerekmez, yani integral ve serideki çekirdekler farklı olabilir. Böyle bir değerlendirme, çekirdekler üzerindeki varsayımları klasik olandan daha zayıf yapmamıza izin verir. Genelleştirilmiş sampling Durrmeyer operatöründe çekirdeklerin farklı olduğu form (Costarelli vd., 2020) tarafından her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) f(u) du \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu seriyi mutlak yakınsak yapan bir fonksiyon olup φ ve ψ fonksiyonları da sürekli olan ve belirli uygun koşulları sağlayan çekirdek fonksiyonlarıdır.

Sürekli özelliklerine sahip fonksiyonlar için genelleştirilmiş sampling serileri (1.3) ile çalışılırken yaklaşım özellikleri verildiğinde genel olarak \mathbb{R} üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı olan $C^0(\mathbb{R})$ uzayı ele alınmıştır. Bu çalışmada sınırlılık şartı yerine sürekli fonksiyonların polinomsal ağırlıklı uzayları ele alınarak genelleştirilmiş sampling serilerinin yaklaşım özelliklerinin çalışmaları daha genel fonksiyon uzaylarına genişletilmiştir.

$(S_w^{\varphi,\psi})$ ailesi $f \in L^p$ (veya Orlicz uzayı, modüler uzay) fonksiyonları için tanımlanmış olsa da sürekli fonksiyonlar için de anlamlıdır.

Bu tez çalışmasında, (1.6) ile tanımlanan $(S_w^{\varphi,\psi})$ ailesinin f fonksiyonunun ağırlıklı sürekli fonksiyon uzayları sınıfından olması durumunda yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde operatör teori ve seriler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Operatör Teori

Bu kısımda operatör teori hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. V boş olmayan bir küme ve \mathbb{F} , reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye \mathbb{F} üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

V , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in V$ için $x + y \in V$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2) Her $x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme özelliği)

G3) Her $x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde $0 \in V$ vardır. (Etkisiz elemanın varlığı)

G4) Her bir $x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde $-x \in V$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

G5) Her $x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)

$x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha \cdot x \in V$ dir.

L2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir.

L4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ dir.

L5) $1 \cdot x = x$ dir. (Burada 1, \mathbb{F} 'nin birim elemanıdır) (Bayraktar, 2006: 66).

Tanım 2.1.2. X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere X uzayından alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve

$$L: X \rightarrow Y, g(x) = L(f; x)$$

gösterimi kullanılarak belirtilir. X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f; x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonlarının kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme ise $R(L)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 10).

Tanım 2.1.3. X ve Y lineer uzaylar olsun. f_1 ve f_2 , X 'den Y 'ye herhangi iki fonksiyon, a_1 ve a_2 keyfi reel sayılar olmak üzere L operatörü her x için

$$L(a_1f_1 + a_2f_2; x) = a_1L(f_1; x) + a_2L(f_2; x)$$

şartını sağlıyorsa L operatörüne lineer operatördür denir. Bu tanımdan da görüleceği üzere $L(0; x) = 0$ dır. (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995: 10).

Tanım 2.1.4. Kabul edelim ki $X_+ = \{f \in X: f(x) \geq 0\}$ ve $Y_+ = \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü, X_+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatörü için $f(x) \geq 0$ ise $L(f; x) \geq 0$ 'dır. Yani $L(X_+) \subset Y_+$ sağlanır. O halde her x için $f(x) \leq g(x)$ ise $L(f; x) \leq L(g; x)$ olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Diğer bir deyişle, lineer pozitif operatörler monotonluk özelliğini sağlamaktadır. (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995: 11).

Tanım 2.1.5. $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $|f(x)| \leq M$, $M > 0$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde sınırlıdır denir. (Musayev vd., 2007).

Tanım 2.1.6. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(X', \|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay, $L: X \rightarrow X'$ bir operatör ve $x_0 \in X$ olsun. O halde $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır öyle ki $\|f - f_0\|_1 < \delta$ olduğunda $\|Lf - Lf_0\|_2 < \varepsilon$ sağlanıyorsa L operatörüne, $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer L operatörü bu eşitsizliği her $x \in X$ için karşılırsa, L operatörüne, X üzerinde süreklidir denir. (Bayraktar, 2017).

Tanım 2.1.7. f , \mathbb{R} üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyon uzayına ait bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\omega(\mu) := \omega(f, \mu) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)|: x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| \leq \mu, \mu > 0\}$$

ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir. (DeVore ve Lorentz, 1993).

Teorem 2.1.8. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

- 1) Herhangi bir $\mu > 0$ için $\omega(f, \mu) \geq 0$ 'dır.
- 2) $\omega(f, \mu)$ azalmayandır.
- 3) Herhangi $\mu > 0$ ve $l \in \mathbb{N}$ için $\omega(f, l\mu) \leq l\omega(f, \mu)$ eşitsizliği sağlanır.
- 4) Herhangi $\mu > 0$ ve $\beta > 0$ reel sayıları için $\omega(f, \beta\mu) \leq (1 + \beta)\omega(f, \mu)$ eşitsizliği sağlanır.

5) Herhangi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left(1 + \frac{|x_1 - x_2|}{\mu}\right) \omega(f, \mu)$ eşitsizliği sağlanır.

6) $\lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(f, \mu) = 0$ 'dır. (DeVore ve Lorentz, 1993).

İspat:

1) f sürekli olduğundan $\mu > 0$, her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $|x_1 - x_2| \leq \mu$ olacak şekilde $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 0$ olur. Böylelikle

$$\omega(f, \mu) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \geq 0$$

sonucu elde edilir.

2) $\mu_1 \leq \mu_2$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ olsun.

Süreklilik modülünün tanımı gereği $\mu_1 \leq \mu_2$ olduğunda, μ_2 'nin supremum için tarayacağı küme μ_1 'nin supremum için tarayacağı kümeden daha kapsamlıdır bu nedenle

$$\omega(f, \mu_1) \leq \omega(f, \mu_2)$$

eşitsizliği sağlanır.

3) $\mu_1 + \dots + \mu_l = \mu > 0$ ve $\omega(f, \mu) = \omega(\mu)$ olsun. O halde

$$\omega(\mu_1 + \dots + \mu_l) \leq \omega(\mu_1) + \dots + \omega(\mu_l)$$

olacaktır. $\mu_1 + \dots + \mu_l = \mu$ ve süreklilik modülü azalan olmadığı için

$$\omega(\mu_1 + \dots + \mu_l) \leq \omega(l\mu) \leq l\omega(\mu)$$

eşitsizliği sağlanır.

4) $\beta > 0$ için $n \leq \beta < n + 1 \leq \beta + 1$ olacak şekilde n doğal sayısı alınır

2) ve 3) özelliklerinden dolayı

$$\omega(n\mu) \leq \omega(\beta\mu) \leq \omega((n + 1), \mu) \leq (n + 1)\omega(\mu) \leq (1 + \beta)\omega(f, \mu)$$

eşitsizliği elde edilir.

5) $\omega(f, \mu) = \omega(f, |x_1 - x_2|)$ olarak alınır ve

$$\omega(f, |x_1 - x_2|) = \omega\left(f, |x_1 - x_2| \frac{\mu}{\mu}\right)$$

olacağı için 3) ve 4) özelliklerinden dolayı,

$$\omega\left(f, |x_1 - x_2| \frac{\mu}{\mu}\right) \leq \left(1 + \frac{|x_1 - x_2|}{\mu}\right) \omega(f, \mu)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca süreklilik modülünün tanımından dolayı $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(f, \mu)$ eşitsizliği de kullanılırsa istenilen ifade elde edilir.

6) f fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan

her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olur. Bu durumda süreklilik modülünün tanımı gereği, $\mu < \delta$ olduğunda $\omega(f, \mu) < \varepsilon$ olur. Buradan

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(f, \mu) = 0$$

elde edilir.

Tanım 2.1.9. C , reel ya da karmaşık sayılar cismini gösterebilir ve X kümesi C cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm denir.

Her $x, y \in X$ ve her $a \in C$ için

$$[N_1] p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

$$[N_2] p(ax) = |a|p(x).$$

Eğer bu ikisine ek olarak,

$$[N_3] x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$$

özellikleri de sağlanıyorsa p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir normdur denir. (Karaçay, 2009).

Tanım 2.1.10. L lineer operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa ve

$$\|L(f)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne ise L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ya da basitçe $\|L\|$ simgeleriyle gösterilir. Yani,

$$\|L\| = \inf\{C: \|L(f)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$$

dir. L lineer operatör olduğu için

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f)\|_Y$$

eşitliği yazılabilir. (Hacısalihioğlu ve Hacıyev, 1995: 12).

Tanım 2.1.11. $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve A üzerinde tanımlı fonksiyonların kümesi $F(A)$ olsun. $x \in A$ için

$$s: \mathbb{N} \rightarrow F(A), s: n \rightarrow s(n) = f_n(x)$$

biçiminde tanımlanan s fonksiyonuna A üzerinde bir fonksiyon dizisi, $f_n(x)$ 'e de bu dizinin n . terimi veya genel terimi denir. Genel terimi $f_n(x)$ olan bir fonksiyon dizisi (f_n) biçiminde gösterilir. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

Önerme 2.1.12. L lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart sürekli olmasıdır. (Bayraktar, 2006: 148).

Tanım 2.1.13. (f_n) , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her bir $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

olacak biçimde $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa (f_n) dizisine, A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Bu, $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların (f_n) dizisi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsaklığı her $\varepsilon > 0$ sayısı, her $n > n_0$ ve her bir $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varlığı şeklinde de ifade edilebilir. Buradaki n_0 doğal sayısı ε sayısına bağlı olacağı gibi aynı zamanda seçilen x noktasına da bağlı olabilir. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

Tanım 2.1.14. (f_n) , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n > n_0$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε sayısına bağlı bir n_0 doğal sayısı ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa (f_n) dizisine, A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir. Noktasal yakınsaklığın aksine düzgün yakınsaklık kavramı küme için geçerli bir kavramdır. Düzgün yakınsaklıkta n_0 doğal sayısı sadece ε sayısına bağlı olduğu için düzgün yakınsak her fonksiyon dizisi aynı zamanda noktasal yakınsaktır. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

Teorem 2.1.15. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki her sürekli f fonksiyonuna, $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ genel terimiyle verilen (p_n) polinomlar dizisi ile düzgün olarak yaklaşılabilmektedir. Bir başka deyişle, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\max|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon, a \leq x \leq b$$

olacak biçimde (p_n) polinomlar dizisi (cebirsal polinomlar) vardır. Bu ise $P([a, b])$ 'nin $C([a, b])$ 'de yoğun olması demektir. (Weierstrass, 1885).

Teorem 2.1.16. f , $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun.

$B_n : B([0,1]) \rightarrow C([0,1])$ operatörleri

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (x \in [0,1], n \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanır. (Bernstein, 1912).

Teorem 2.1.17. $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}, \quad (P_{k,n} \geq 0)$$

pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şartların, (α_n) , (β_n) , (γ_n) dizileri $[0,1]$ üzerinde düzgün sıfır dizileri olmak üzere,

i. $(L_n e_0)(x) \rightarrow 1 + \alpha_n(x)$,

ii. $(L_n e_1)(x) \rightarrow x + \beta_n(x)$,

iii. $(L_n e_2)(x) \rightarrow x^2 + \gamma_n(x)$

olmasıdır. (Bohman, 1952: 45).

Bohman'ın teoreminin $[0,1]$ aralığındaki fonksiyonlarla kısıtlı kalmasına rağmen, P. P. Korovkin bu teoremin $[a, b]$ aralığında verilen genel halini ispatlamıştır. (Korovkin, 1959).

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, her $x \in [a, b]$ için i, ii, iii şartlarını sağlasın ve f tüm reel ekseninde sınırlı, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(L_n f)$, kendisini oluşturan f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{\infty} = 0$$

gerçeklenir. (Bohman, 1952: 46), (Korovkin, 1959).

İspat: Teoremin şartları

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_0) - e_0\|_{\infty} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n\|_{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_1) - e_1\|_{\infty} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n\|_{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_2) - e_2\|_{\infty} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma_n\|_{\infty}$$

olarak düzenlenir. Şimdi, tüm reel ekseninde sınırlı ve $[a, b]$ aralığında sürekli her f için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{\infty} = 0$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilir. f fonksiyonu tüm reel ekseninde sınırlı olduğundan öyle bir $C > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2C \quad (2.1)$$

eşitsizliği her $x \in [a, b]$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için sağlanır. \mathbb{R} 'nin kapalı ve sınırlı aralığında düzgün süreklilik ve süreklilik birbirine denk olduğu için $x \in [a, b]$ ve t ise bu aralığın dışında bir nokta olmak üzere $|t - x| < \delta$ ($\delta > 0$) olduğunda,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.1) ve (2.2) eşitsizlikleri kullanılır ve $\varphi(t) = (t - x)^2$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} \varphi(t)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylelikle her $x \in [a, b]$, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2C \leq \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} \varphi(t) \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. (L_n) lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olduğu için pozitif operatörlerin monotonluğundan dolayı

$$|L_n(f; x)| \leq L_n(|f|; x) \quad (2.4)$$

eşitsizliği yazılır ve

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + \max_{x \in [a, b]} |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $1(x) = 1$ olduğundan hipotezden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n 1) - 1\|_\infty \|f\|_\infty = 0$$

gerçeklenir. Böylece (2.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|; x) &\leq |L_n(\varepsilon; x)| + \left| L_n\left(\frac{2C}{\delta^2}(t-x)^2\right); x \right| \\
&= \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} |L_n((t-x)^2; x)| \\
&= \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} |L_n(t^2 - 2tx + x^2; x)| \\
&= T
\end{aligned}$$

elde edilir. L_n 'nin lineerliği kullanılır ve

$$\begin{aligned}
T &= \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} |L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)| \\
&= \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} |L_n(t^2; x) - x^2 - 2x(L_n(t; x) - x) + x^2L_n(1; x) - x^2| \\
&\leq \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} (|L_n(t^2; x) - x^2| + |2x||L_n(t; x) - x| + |x|^2|L_n(1; x) - 1|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $x \in [a, b]$ olduğundan dolayı $|x| \leq d$ olacak biçimde $[a, b]$ aralığının dışında bir $d \in \mathbb{R}$ bulunabilir ve $|x^2| \leq d^2$ sağlanır. Sonuç olarak

$$T \leq \varepsilon |L_n(1; x)| + \frac{2C}{\delta^2} (\varepsilon' + 2d\varepsilon'' + d^2\varepsilon''') = \varepsilon^*$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon^*$$

bulunur. Her iki tarafın maksimumu alınır ve

$$\|(L_n f) - f\|_\infty < \varepsilon^*$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle $[a, b]$ üzerinde $L_n(f(t) - f(x); x) \rightarrow 0$ gerçekleşir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.18. $[0,1]$ aralığında tanımlı, sınırlı ve sürekli f fonksiyonu için Bernstein polinomlar dizisi kendisini oluşturan f fonksiyonuna düzgün yakınsar. (Lorentz, 1953:5).

İspat: Bohman-Korovkin teoreminden yararlanarak test fonksiyonlarının Bernstein polinomları altındaki görüntüleri için i, ii ve iii şartları kullanılır. İlk önce i şartı elde edilir.

$$(B_n e_0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

Şimdi ii şartı için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
(B_n e_1)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-l)!} x^l (1-x)^{n-l} \\
&= x
\end{aligned}$$

Son olarak iii şartı elde edilir.

$$\begin{aligned}
(B_n e_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \frac{n!}{l!(n-l)!} x^l (1-x)^{n-l} \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{l=0}^{n-1} l \frac{n!}{l!(n-l)!} x^l (1-x)^{n-l} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{l=1}^n l \frac{n!}{l!(n-l)!} x^l (1-x)^{n-l} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{l=1}^m \frac{m!}{(l-1)!(m-l)!} x^l (1-x)^{m-l} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum_{l=1}^m \frac{(m-1)!}{(l-1)!(m-l)!} x^{l-1} (1-x)^{m-l} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum_{r=0}^p \frac{p!}{r!(p-r)!} x^r (1-x)^{p-r} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} (mx + 1) = \frac{x}{n} ((n-1)x + 1) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak Teorem 2.1.17'nin şartları sağlanmış olur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n f - f\|_{\infty} = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.19. Bir f fonksiyonunun desteği $\text{supp} f = \{x \in U ; f(x) \neq 0\}$ kümesinin kapamışına karşılık gelir.

Tanım 2.1.20. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun desteği kompakt ise bu desteğe kompakt destek denir.

Tanım 2.1.21.

- h , $(-\infty, \infty)$ aralığındaki tek değerli ve parçalı sürekli fonksiyon olsun.
- Bir x_0 noktasındaki süreksizlik değeri,

$$h(x_0) = \frac{1}{2} [h(x_0 + 0) + h(x_0 - 0)]$$

ortalamasına eşit olsun.

- h , $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak yakınsak yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$$

olsun. Yukarıdaki şartlar ile birlikte

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-iau} du \right] e^{iax} da$$

eşitliğine h fonksiyonunun Fourier integrali denir. Fourier integralinden yazılan

$$H(a) := \hat{h}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-iax} dx$$

eşitliğe de h fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. (Dündar, 2000).

Teorem 2.1.22.

$$g\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\piiku/T} du$$

f ' nin Fourier dönüşümü ve T bir periyot olmak üzere Poisson toplam formülü genellikle,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\piikt/T}$$

olarak yazılır. $T = 1$ alınırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{2\piikt}$$

eşitliği elde edilir. (Jaramillo, 2019).

İspat: $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)$ olarak alınır. F fonksiyonunun periyodu T olduğundan dolayı Fourier serisi

$$F(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)e^{2\piikt/T}$$

biçimindedir. Burada $G(k)$, Fourier genliği olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} G(k) &= \int_{-T/2}^{T/2} F(t)e^{-2\piikt/T} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + nT)e^{-2\piikt/T} dt \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $u = t + nT$ değişken değiştirmesi uygulanır ve

$t = \pm \frac{T}{2}$ için $u = \pm \frac{T}{2} + nT = \frac{1}{2}(2n \pm 1)T$ eşitliği elde edilir. Buradan

$$G(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} f(u)e^{-2\piiku/T} e^{2\piikn} du$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} f(u) e^{-2\pi iku/T} du$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik açılır ve

$$\begin{aligned} G(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} + \int_{\frac{1}{2}(2(n-1)-1)T}^{\frac{1}{2}(2(n-1)+1)T} \dots + \int_{\frac{1}{2}(-2(n-1)-1)T}^{\frac{1}{2}(-2(n-1)+1)T} + \int_{\frac{1}{2}(-2n-1)T}^{\frac{1}{2}(-2n+1)T} \right\} \\ &\times f(u) e^{-2\pi iku/T} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}(2n+1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} f(u) e^{-2\pi iku/T} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi iku/t} du = g\left(\frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak Fourier genliği f' 'nin Fourier dönüşümüne eşit olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.1.23. Eğer bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü \hat{f} 'nin desteği kompakt küme ise f fonksiyonu “bant-sınırlı” olarak adlandırılır. \hat{f} , kompakt bir kümede sıfırdan farklı; kompakt küme dışında sıfır değerlerini alıyorsa f fonksiyonuna bant-sınırlı fonksiyon denir. (Costarelli ve Vinti, 2019b)

Tanım 2.1.24. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralık ve f , I 'da tanımlı bir fonksiyon olsun. f 'nin I 'da konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $t \in [0,1]$ ve her $a, b \in I$ için

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.25. $i \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e_i(x) := x^i$ kuralı ile verilen e_i fonksiyonlarına test fonksiyonları denir.

Tanım 2.1.26. E sınırlı kümesinin m^*E dış ölçümü, E 'yi içeren tüm sınırlı açık kümelerin ölçümlerinin en büyük alt sınırıdır ve

$$m^*E = \inf_{G \supset E} \{mG\}$$

şeklinde gösterilir. Her sınırlı E kümesinin dış ölçümü iyi tanımlıdır ve $0 \leq m^*E \leq +\infty$ dır. (Hewitt ve Stromberg, 1969).

Tanım 2.1.27. E sınırlı kümesinin m_*E iç ölçümü, E 'nin kapsadığı tüm kapalı kümelerin ölçümlerinin en küçük üst sınırıdır ve

$$m_*E = \sup_{F \subset E} \{mF\}$$

şeklinde gösterilir. Her sınırlı E kümesinin iç ölçümü iyi tanımlıdır ve $0 \leq m_*E < +\infty$ dır. (Hewitt ve Stromberg, 1969).

Teorem 2.1.28. G sınırlı açık bir küme ise

$$m^*G = m_*G = mG$$

olur. (Hewitt ve Stromberg, 1969).

Teorem 2.1.29. F sınırlı kapalı bir küme ise

$$m^*F = m_*F = mF$$

olur. (Hewitt ve Stromberg, 1969).

Tanım 2.1.30. Sınırlı bir E kümesinin iç ve dış ölçümleri eşitse

$$m^*E = m_*E$$

ölçülebilirdir denir. Bu ortak değere E kümesinin ölçümü denir ve mE ile gösterilir.

$$mE = m^*E = m_*E$$

(Hewitt ve Stromberg, 1969).

Tanım 2.1.31. E ölçülebilir kümesi üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her a sayısı için $E(f > a) = \{x \mid f(x) > a\}$ kümeleri ölçülebilir ise, ölçülebilirdir denir. (Hewitt ve Stromberg, 1969).

2.2. Seriler

Bu kısımda seriler hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.2.1. (f_n) , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi ve her $x \in A$ için

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

olsun. $(s_n(x))$ veya (s_n) dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) fonksiyon dizisi A üzerinde noktasal yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi A üzerinde noktasal yakınsak, (s_n) dizisi A üzerinde düzgün yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisine A üzerinde düzgün yakınsak denir. (s_n) dizisinin limitine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisinin toplamı adı verilir. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisine A üzerinde mutlak yakınsak denir. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

Teorem 2.2.2. $n \in \mathbb{N}$; a, b genişletilmiş farklı reel sayılar ve $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^{(n)}$ türevi (a, b) üzerinde mevcut olsun. Her $x, y \in (a, b)$ nokta çifti için

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - y)^n$$

olacak biçimde x ile y noktaları arasında bir c sayısı vardır. Özellikle x ile y noktaları arasında bir c sayısı için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - y)^n$$

olur. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

İspat:

Her $t \in (a, b)$ ve $y < x$ için

$$F(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} \text{ ve}$$

$$G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

kuralları ile verilen F ve G fonksiyonları tanımlanır. F ve G fonksiyonları (y, x) aralığında diferensiyellenebilir, $[y, x]$ üzerinde sürekli ve $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ olduğundan dolayı bu fonksiyonlara genelleştirilmiş ortalama değer teoremi uygulanır. Böylelikle

$$-F(y)G'(c) = (F(x) - F(y))G'(c) = (G(x) - G(y))F'(c) = -G(y)F'(c)$$

olacak biçimde bir $c \in (y, x)$ noktası vardır. Türevler yerine yazıldığında

$$\frac{(x-y)^n}{n!} \left(\frac{f^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} \right) = R_n(x) \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.3. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer f fonksiyonu (a, b) üzerinde n . mertebeden sürekli türeve sahipse her $x, y \in (a, b)$ noktaları için

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

biçiminde Taylor formülünün Lagrange kalan terimi elde edilir. (Öztürk ve Bostancı, 2014).

İspat:

$n = 1$ için ispat kolaylıkla görülebilir. Tümevarımdan belirli bir n doğal sayısı için verilen eşitliğin doğru olduğu kabul edilir.

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x-y)^n \text{ ve } \frac{(x-y)^n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x (x-t)^{n-1} dt$$

olduğu için

$$R_{n+1}(x) = -\frac{1}{(n-1)!} \int_y^x (x-t)^{n-1} \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(y) \right) dt$$

eşitliği bulunur. $u = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(y)$ ve $dv = (x-t)^{n-1} dt$ olacak biçimde kısmi integrasyon yapılır ve

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_y^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

elde edilir. O halde eşitlik $n + 1$ içinde sağlanmış olur. Bu ise ispatı tamamlar.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde fonksiyon uzayları ve operatör tanımında önemli bir yer tutan çekirdek fonksiyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

3.1. Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda ağırlıklı uzaylar ve onun önemli alt uzayları verildikten sonra ağırlıklı uzaylara göre süreklilik modülünün tanımı ve bazı özelliklerine değinilmiştir.

Tanım 3.1.1. Tüm \mathbb{R} reel eksen üzerinde pozitif ve sürekli olan ρ fonksiyonuna, bir ağırlık fonksiyonu denir.

Bu çalışmada, ağırlık fonksiyonu olarak

$$\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

kuralı ile verilen fonksiyon kullanılmıştır.

\mathbb{R} üzerinde ρ ağırlık fonksiyonu ile çarpımı sınırlı olan fonksiyonların uzayı

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x)|f(x)| \in \mathbb{R} \right\}$$

dir.

$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bazı doğal alt uzayları aşağıdaki gibidir:

$$C_\rho(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}) \cap B_\rho(\mathbb{R}),$$

$$C_\rho^*(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x)f(x) \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_\rho(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \rho f \text{ düzgün süreklidir} \right\}.$$

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve onun yukarıdaki alt uzayları,

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x)|f(x)|$$

ile birer normlu uzaydır. (Gadjiev, 1974), (Gadjiev, 1976), (Acar vd., 2016), (Acar vd., 2019).

Tanım 3.1.2. $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonları için ağırlıklı süreklilik modülü $\Omega(f; \cdot)$ ile gösterilir ve $\delta > 0$ için

$$\Omega(f; \delta) := \sup_{|h| < \delta, x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. (Ispir, 2001: 359).

Aşağıdaki lemmada ağırlıklı süreklilik modülünün bazı özellikleri verilmiştir. (3.1) hakkında daha fazla ayrıntı ve verilen özelliklerin kanıtı için bakınız (Ispir, 2001 :359).

Lemma 3.1.3. $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ için

- (1) $\Omega(f; \delta)$, δ 'nın monoton artan bir fonksiyonudur,
- (2) $f \in C_\rho^*(\mathbb{R})$ olmak üzere $\delta \rightarrow 0$ için $\Omega(f; \delta) \rightarrow 0$ dir,
- (3) Her $\lambda > 0$ ve $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için,

$$\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta) \quad (3.2)$$

gerçeklenir. (Ispir, 2001: 359).

İspat:

- (1) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|h| \leq \delta_2$ bölgesi $|h| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyüktür. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden

$$\Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$$

elde edilir.

- (2) $C_{K_f}[0, \infty) = \left\{ f: f, [0, \infty) \text{ da sürekli ve } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{(1+x^2)} = K_f \right\}$ olup

$$\left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f < \varepsilon$$

$$K_f - \varepsilon < \frac{f(x)}{1+x^2} < \varepsilon + K_f$$

$$f(x) < C(1 + x^2)$$

yazılabilir. $f \in C_{K_f}[0, \infty)$ olmak üzere ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{|h| < \delta, x \geq 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

$f \in C_{K_f}[0, \infty)$ için öyle bir $x_0 = x_0(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $x > x_0$ özelliğini sağlayan x 'ler

için $\left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| < \varepsilon$ olur. Ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki gibi yazılabilir ve

$$\begin{aligned}\Omega(f; \delta) &= \sup_{|h| < \delta, 0 \leq x \leq x_0} |f(x+h) - f(x)| + \sup_{|h| < \delta, x \geq x_0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \\ &= \omega(f, \delta)\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Şimdi ağırlıklı süreklilik modülünde $\frac{K_f}{1+h^2}$ ifadesiyle ekleme ve çıkarma yapılır. Gerekli işlemler ile birlikte

$$\begin{aligned}\Omega(f; \delta) &= \left| \frac{f(x+h)}{(1+x^2)(1+h^2)} - \frac{K_f}{1+h^2} + \frac{K_f}{1+h^2} - \frac{f(x)}{(1+x^2)(1+h^2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{1+h^2} \left\{ \left| \frac{f(x+h)}{(1+x^2)} - K_f \right| + \left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| \right\} \\ &\leq \frac{1+(x+h)^2}{(1+x^2)(1+h^2)} \left\{ \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^2} - K_f \frac{(1+x^2)}{1+(x+h)^2} \right| \right\} + \left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| \\ &= \frac{1+(x+h)^2}{(1+x^2)(1+h^2)} \left\{ \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^2} - K_f + K_f \left(1 - \frac{(1+x^2)}{1+(x+h)^2} \right) \right| \right\} + \left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right| \\ &\leq 2 \left\{ \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^2} - K_f \right| + K_f \left| \frac{2xh+h^2}{1+(x+h)^2} \right| \right\} + \left| \frac{f(x)}{1+x^2} - K_f \right|\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bulunan ifadelerin değerleri aşağıdaki gibi yazılırsa

$$\begin{aligned}\Omega(f; \delta) &\leq \omega(f, \delta) + 3\varepsilon + K_f \delta \frac{(2x+\delta)}{1+x^2} \\ &\leq \omega(f, \delta) + 3\varepsilon + K_f \delta\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\delta \rightarrow 0$ iken $\Omega(f; \delta) \rightarrow 0$ olur ve ispat tamamlanır.

(3) m bir doğal sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}|f(x+mh) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} (1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + h^2)\Omega(f; \delta) \sum_{k=1}^m (1 + h^2)(1 + (x + (k-1)h)^2) \\
&\leq (1 + h^2)\Omega(f; \delta) 2[1 + x^2 + (mh)^2] \sum_{k=1}^m 1 \\
&= 2m(1 + h^2)(1 + x^2)(1 + (mh)^2)\Omega(f; \delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi her iki taraf $(1 + x^2)(1 + (mh)^2)$ ile bölünür ve

$$\frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq 2m(1+h^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilirse $[\lambda] \leq \lambda \leq [\lambda] + 1$ eşitsizliklerinin geçerli olduğu açıktır. O halde (1) özelliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\Omega(f; m\delta) &\leq \Omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \\
&\leq 2([\lambda] + 1)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta) \\
&\leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.4. (3.2) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{|y-x|}{\delta}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ yerine yazıldığında ve ağırlıklı süreklilik modülünün tanımı kullanılırsa

$$|f(y) - f(x)| \leq 2 \left(1 + \frac{|y-x|}{\delta}\right) (1 + \delta^2)(1 + x^2)(1 + (y-x)^2)\Omega(f; \delta)$$

elde edilir.

İspat:

(3.2) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{|y-x|}{\delta}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ yerine yazıldığında ve ağırlıklı süreklilik modülünün tanımı kullanılırsa

$$\sup_{|h| < \lambda\delta, x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \leq 2 \left(1 + \frac{|y-x|}{\delta}\right) (1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

elde edilir. Burada $y = x + h$ yazılırsa

$$\sup_{|h| < \lambda\delta, x \in \mathbb{R}} \frac{|f(y)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \leq 2 \left(1 + \frac{|y-x|}{\delta}\right) (1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Her iki taraf $(1 + h^2)(1 + x^2)$ ile çarpılır ve $h = y - x$ yerine yazılırsa

$$|f(y) - f(x)| \leq 2 \left(1 + \frac{|y-x|}{\delta}\right) (1 + \delta^2)(1 + x^2)(1 + (y-x)^2)\Omega(f; \delta)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Diğer yandan $|y - x|$ miktarının δ 'ya göre durumu

$$|f(y) - f(x)| \leq \begin{cases} 4(1 + \delta^2)^2(1 + x^2)\Omega(f; \delta), & |y - x| \leq \delta \\ 4(1 + \delta^2)^2(1 + x^2)\Omega(f; \delta) \frac{|y-x|^3}{\delta^3}, & |y - x| > \delta \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla $|y - x|$ için elde edilen bu iki durum birleştirilerek

$$|f(y) - f(x)| \leq 4(1 + \delta^2)^2(1 + x^2)\Omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|y-x|^3}{\delta^3}\right)$$

elde edilir. Son olarak $\delta \leq 1$ seçimi ile

$$|f(y) - f(x)| \leq 16(1 + x^2)\Omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|y-x|^3}{\delta^3}\right) \quad (3.3)$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 3.1.5. $I \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve E kümesi I bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi, p pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$L^p(I) := \{u \in E ; \int_I |u(x)|^p dx < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına Lebesgue uzayı adı verilir. (Diening vd., 2017).

Lemma 3.1.6. Eğer $1 \leq p < \infty$, $a, b \geq 0$ ise $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ dir.

İspat: $f: \mathbb{R} - \{-1,0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $p > 1$ için $f(t) = t^p$ fonksiyonu sürekli ve konveks olduğundan $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ dir. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $x = a$ ve $y = b$ alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Buradan gerekli cebirsel işlemler yapıldığında

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

sonucuna ulaşılır.

3.2. Çekirdek Fonksiyonları

Çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlar seriler ve integrallerde yer alan, belirli şartları sağlayan özel tanımlı sürekli fonksiyonlardır. Bu bölümde tez içinde kullanılan çekirdek fonksiyonları ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

3.2.1. B-spline çekirdeği

Genel olarak, $n \in \mathbb{N}$, n -inci mertebeden merkezi B-spline çekirdeği $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sigma_n(t) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(\frac{n}{2} + t - j\right)_+^{n-1}$$

olarak tanımlanır. Burada $(\cdot)_+$ pozitif kısmı gösterir. Yani $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ dır.

(Costarelli vd., 2020).

B-spline çekirdeğinin tanımından $n = 3$ yerine yazılırsa

$$\sigma_3(t) = \frac{1}{2!} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{3}{j} \left(\frac{3}{2} + t - j\right)_+^2$$

elde edilir. $j = 0, 1, 2, 3$ yerine yazıldığında

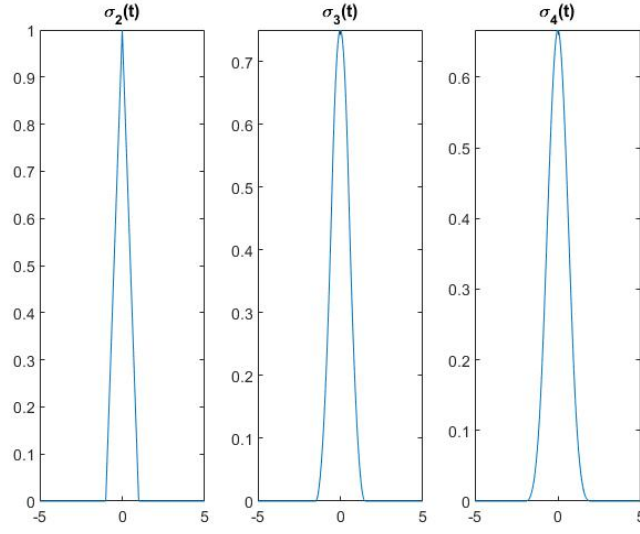
$$\sigma_3(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + t\right)_+^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + t\right)_+^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{-1}{2} + t\right)_+^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{2} + t\right)_+^2$$

eşitliği sağlanır. $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ olduğundan

$$\sigma_3(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} - t^2, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - |t|^2\right)^2, & \frac{1}{2} < |t| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

elde edilir.

Aşağıda B-spline çekirdeğinin 2. 3. ve 4. mertebeden grafikleri (Grafik 3.1.) deki gibi sırasıyla verilmiştir.



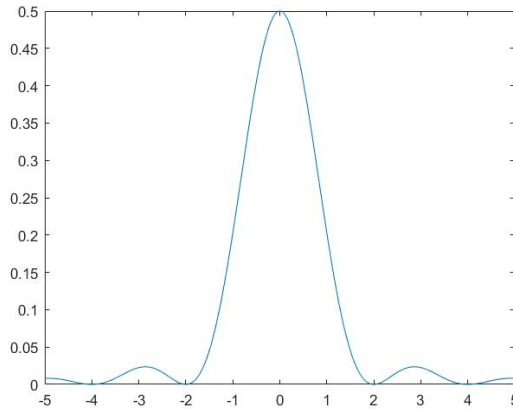
Grafik 3.1. 2. 3. ve 4. mertebeden B-Spline çekirdeğinin grafikleri

3.2.2. Fejer çekirdeği

$$\text{sinc}(v) = \begin{cases} \frac{\sin \pi v}{\pi v}, & v \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1, & v = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan $\text{sinc}(v)$ fonksiyonu yardımıyla Fejer çekirdeği, $F(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$ ile tanımlanır. (Costarelli vd., 2020). Açık ki F sınırlıdır ve \mathbb{R} üzerinde negatif değildir, $L^1(\mathbb{R})$ 'ye aittir ve $\int_{\mathbb{R}} F(t) dt = 1$ 'i sağlar.

Aşağıda Fejer çekirdeğinin grafiği (Grafik 3.2.) deki gibi verilmiştir.



Grafik 3.2. Fejer çekirdeğinin grafiği

3.2.3. Karakteristik fonksiyon

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

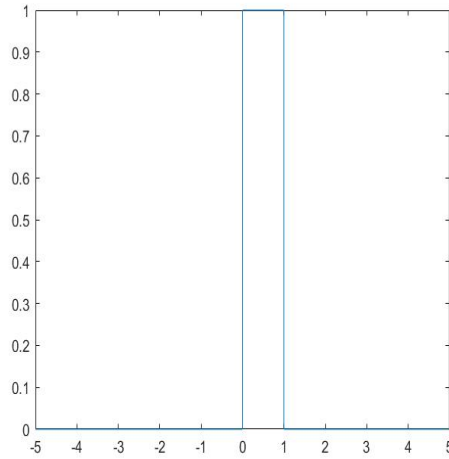
şeklinde verilen $\chi_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A 'nın karakteristik fonksiyonu denir.

Örneğin $A = [0,1]$ olması durumunda

$$\chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Aşağıda karakteristik fonksiyon için verilen örneğin grafiği (Grafik 3.3.) deki gibi verilmiştir.



Grafik 3.3. $[0,1]$ aralığının karakteristik fonksiyonunun grafiği

4. DURRMEYER TİPLİ SAMPLİNG SERİLERİNİN AĞIRLIKLILIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

4.1. Sampling Durrmeyer Operatörleri

Bu kısımda ağırlıklı fonksiyon uzaylarına ait sürekli fonksiyonlar için $(S_w^{\varphi,\psi})$ sampling Durrmeyer operatörünün uygun çekirdek fonksiyonları altında yakınsaklık özellikleri incelenecektir.

φ ve ψ , sırasıyla $C^0(\mathbb{R})$ ve $L^1(\mathbb{R})$ sınıfından olmak üzere

$$\text{her } u \in \mathbb{R} \text{ için } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(u - k) = 1 \text{ ve } \int_{\mathbb{R}} \psi(u) du = 1 \quad (4.1)$$

şartlarını sağlayan çekirdek fonksiyonları olsun.

Herhangi bir $j \in \mathbb{N}_0$ için φ ve ψ çekirdek fonksiyonlarının cebirsel momentleri

$$m_j(\varphi, u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u - k)(k - u)^j,$$

$$\tilde{m}_j(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt,$$

şeklinde ve mutlak momentleri de

$$M_j(\varphi) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(u - k)| |u - k|^j$$

$$\tilde{M}_j(\psi) := \int_{\mathbb{R}} |t|^j |\psi(t)| dt$$

şeklinde tanımlanır.

Burada φ ve ψ , $M_\alpha(\varphi) < +\infty$ ve $\tilde{M}_\beta(\psi) < +\infty$ ile $\alpha, \beta > 0$ olacak şekilde (4.1) şartını sağlayan çekirdekler olarak adlandırılır.

Önerme 4.1.1.

- (1) Sampling Durrmeyer operatörünün varsayımlarının bir sonucu olarak her $x \in \mathbb{R}$ için $(S_w^{\varphi,\psi} \tilde{1})(x) = 1$ ve $\tilde{1}(x) = 1$ dir.
- (2) $v \leq \mu$ olan $\mu, v > 0$ için $M_\mu(\varphi) < +\infty$ olması $M_v(\varphi) < +\infty$ anlamına gelir. (Costarelli ve Vinti, 2019a). Ayrıca φ 'nin kompakt desteği varsa her $\mu \geq 0$ için $M_\mu(\varphi) < +\infty$ olduğu açıkça görülür. Son olarak benzer bir şekilde $v \leq \mu$ şartını sağlayan $\mu, v > 0$ için $\tilde{M}_\mu(\psi) < +\infty$ olması $\tilde{M}_v(\psi) < +\infty$ anlamına gelir. (Costarelli vd., 2020).

Önerme 4.1.2 φ ve ψ , 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olsun. $v(x) := \frac{1}{\rho(x)} = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left| (S_w^{\varphi, \psi} v)(x) \right| \leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + x^2 M_0(\varphi) \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

(1.6)'da $v(u) = 1 + u^2$ yerine yazılır ve mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left| (S_w^{\varphi, \psi} v)(x) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| (1 + u^2) du$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} \left| (S_w^{\varphi, \psi} v)(x) \right| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| u^2 du \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. İlk ifadede $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılarak mutlak momentler yerine yazılır, ikinci ifadede u^2 ifadesini w^2 ile çarparak ve bölerek k ile ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned} \left| (S_w^{\varphi, \psi} v)(x) \right| &= M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \frac{1}{w} \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| (wu - k + k)^2 du \end{aligned}$$

elde edilir. $(wu - k + k)^2$ ifadesinde Lemma 3.1.6. kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| (S_w^{\varphi, \psi} v)(x) \right| &\leq M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \\ &\quad + \frac{2}{w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| [(wu - k)^2 + k^2] du \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi, \psi} v)(x)| &= M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \\
&+ \frac{2}{w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| (wu - k)^2 du \\
&+ \frac{2}{w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| k^2 du
\end{aligned}$$

elde edilir. $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılarak mutlak momentler yerine yazılır ve k^2 ifadesinde wx ile ekleme çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi, \psi} v)(x)| &= M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \\
&+ \frac{2}{w^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \tilde{M}_2(\psi) \\
&+ \frac{2}{w^2} \tilde{M}_0(\psi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| (k - wx + wx)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada mutlak momentler yerine yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi, \psi} v)(x)| &= M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\
&+ \frac{2}{w^2} \tilde{M}_0(\psi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| (k - wx + wx)^2
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $(k - wx + wx)^2$ ifadesinde Lemma 3.1.6. kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi, \psi} v)(x)| &\leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\
&+ \frac{4}{w^2} \tilde{M}_0(\psi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| (k - wx)^2 \\
&+ \frac{4}{w^2} \tilde{M}_0(\psi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| (wx)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada mutlak momentler yerine yazılır ve

$$|(S_w^{\varphi,\psi} v)(x)| \leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\ + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + x^2 M_0(\varphi) \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3. φ ve ψ , 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olsun. Herhangi bir sabit $w > 0$ için $S_w^{\varphi,\psi}$ operatörleri $B_\rho(\mathbb{R})$ 'den $B_\rho(\mathbb{R})$ ' ye lineer bir operatördür ve

$$\|S_w^{\varphi,\psi}\|_{B_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})} \leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + M_0(\varphi) \right)$$

gerçeklenir.

İspat:

(1.6) kullanılır ve ifade $\rho(u)$ ile çarpılıp bölünürse

$$|(S_w^{\varphi,\psi} f)(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \rho(u) |f(u)| \frac{1}{\rho(u)} du$$

elde edilir. $\|f\|_\rho := \sup_{u \in \mathbb{R}} \rho(u) |f(u)|$ yerine yazıldığında

$$|(S_w^{\varphi,\psi} f)(x)| \leq \|f\|_\rho \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \frac{1}{\rho(u)} du$$

eşitsizliği sağlanır. $\frac{1}{\rho(u)} = 1 + u^2$ yerine yazılırsa

$$|(S_w^{\varphi,\psi} f)(x)| = \|f\|_\rho \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |f(u)| du$$

elde edilir. O halde (1.6) ve Önerme 4.1.2. kullanılırsa

$$|(S_w^{\varphi,\psi} f)(x)| \leq \|f\|_\rho M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\ + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + x^2 M_0(\varphi) \right)$$

elde edilir. Eşitsizlikte her iki taraf $\rho(x)$ ile çarpılır. Böylece

$$\begin{aligned} \rho(x) |(S_w^{\varphi, \psi} f)(x)| &\leq \|f\|_\rho M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\ &+ 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + M_0(\varphi) \right) \end{aligned}$$

sağlanır ve varsayımlarla birlikte $\|S_w^{\varphi, \psi}\|_\rho < +\infty$ sonucuna varılır. Yani $S_w^{\varphi, \psi} f \in B_\rho(\mathbb{R})$ 'dir.

Şimdi $\|f\| \leq 1$ ile birlikte $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ 'ye göre $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremum alınırsa yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} \|S_w^{\varphi, \psi}\|_{B_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})} &\leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) \\ &+ 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + M_0(\varphi) \right) \end{aligned}$$

şekline dönüşür ve ispat tamamlanır.

4.2. Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık

Bu kısımda sampling Durrmeyer operatörünün ağırlıklı uzaylarda noktasal ve düzgün yakınsaklık sonuçları verilmiştir.

Teorem 4.2.1. $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ sabit ve φ, ψ 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| = 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

gerçeklenir. Ayrıca, eğer $f \in U_\rho(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \|S_w^{\varphi, \psi} f - f\|_\rho = 0 \quad (4.3)$$

gerçeklenir.

İspat:

Tüm $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $w > 0$ için

$$|f(u) - f(x)| \leq \rho(u)|f(u)| \left| \frac{1}{\rho(u)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| + \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)|$$

eşitsizliğin sağlandığı gösterilir. İfade içinde $\frac{\rho(u)}{\rho(x)}f(u)$ ile ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$|f(u) - f(x)| = \left| f(u) - \frac{\rho(u)}{\rho(x)}f(u) + \frac{\rho(u)}{\rho(x)}f(u) - f(x) \right|$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği ve cebirsel işlemler uygulanırsa

$$\begin{aligned} |f(u) - f(x)| &\leq \left| f(u) - \frac{\rho(u)}{\rho(x)}f(u) \right| + \left| \frac{\rho(u)}{\rho(x)}f(u) - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{f(u)\rho(x) - \rho(u)f(u)}{\rho(x)} \right| + \left| \frac{\rho(u)f(u) - f(x)\rho(x)}{\rho(x)} \right| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$\begin{aligned} |f(u) - f(x)| &\leq |f(u)| \left| \frac{\rho(x) - \rho(u)}{\rho(x)} \right| + \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - f(x)\rho(x)| \\ &= \rho(u)|f(u)| \left| \frac{1}{\rho(u)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| + \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. (1.6) ve mutlak değer özelliğinden

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |f(u) - f(x)| du$$

sağlanır. O halde yukarıdaki ispat edilen eşitsizlik yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \left[\rho(u)|f(u)| \left| \frac{1}{\rho(u)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| \right] du \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{\rho(u)} - \frac{1}{\rho(x)}$ ifadesinde $\rho(u) = \frac{1}{1+u^2}$ ve $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$ yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \rho(u) |f(u)| |u^2 - x^2| du \\
&+ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadede

$$I_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \rho(u) |f(u)| |u^2 - x^2| du$$

$$I_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \frac{1}{\rho(x)} |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

olsun. Ayrıca bilinen cebirsel işlemler ile

$$\begin{aligned}
|u^2 - x^2| &= |u - x||u + x| \\
&= \frac{1}{w^2} |wu - wx||wu + wx| \\
&\leq \frac{1}{w^2} (|wu - k| + |k - wx|)(|wu - k| + |k + wx|) \\
&= \frac{1}{w^2} (|wu - k|^2 + |wu - k||k + wx| \\
&\quad + |k - wx||wu - k| + |k - wx||k + wx|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir.

Şimdi I_1 teriminde $\|f\|_{\rho} := \sup_{u \in \mathbb{R}} \rho(u)|f(u)|$ ve elde edilen $|u^2 - x^2|$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\|f\|_{\rho}}{w^2} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k|^2 du \right. \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k + wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k| du \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k| du \\
&\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| |k + wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $|k + wx| = |k - wx + 2wx| \leq |k - wx| + |2wx|$ eşitsizliği yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
I_1 \leq \frac{\|f\|_\rho}{w^2} & \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k|^2 du \right. \\
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k| du \\
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |2wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k| du \\
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k| du \\
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| |k - wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \\
& \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx| |2wx| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve mutlak momentler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 \leq \frac{\|f\|_\rho}{w^2} & \left[M_0(\varphi) \tilde{M}_2(\psi) + (M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + 2|wx| M_0(\varphi) \tilde{M}_1(\psi)) \right. \\
& \left. + M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + (M_2(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 2|wx| M_1(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

I_2 ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{\rho(x)} & \left[\sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx - k)| w \int_{|wu-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu - k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du \right. \\
& + \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx - k)| w \int_{|wu-k| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu - k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du \\
& \left. + \sum_{|wx-k| > \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du \right]
\end{aligned}$$

O halde I_2 ifadesindeki işlemler aşağıdaki gibi ele alınırsa

$$I_{2,1} = \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

$$I_{2,2} = \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

$$I_{2,3} = \sum_{|wx-k| > \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

şeklinde yazılır. Şimdi $I_{2,1}$ tahmin edilir.

$$I_{2,1} = \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

$u, x \in \mathbb{R}$ için

$$|wu-k| \leq \frac{w\delta}{2} \text{ ise } \left| u - \frac{k}{w} \right| \leq \frac{\delta}{2}$$

ve ayrıca

$$|wx-k| \leq \frac{\delta w}{2} \text{ ise } \left| x - \frac{k}{w} \right| \leq \frac{\delta}{2}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$|u-x| \leq \left| u - \frac{k}{w} \right| + \left| \frac{k}{w} - x \right| < \delta$$

elde edilir. $\rho f \in C_\rho(\mathbb{R})$ olduğundan ve mutlak momentler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\leq \varepsilon_1 \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| du \\ &\leq \varepsilon_1 M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $I_{2,2}$ tahmin edilir.

$$I_{2,2} = \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

ifadesinde üçgen eşitsizliğinden

$$|\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| \leq |\rho(u)f(u)| + |\rho(x)f(x)|$$

olduğu bilinir. $u, x \in \mathbb{R}$ için supremum alınır ve aşağıdaki eşitsizlik

$$I_{2,2} \leq 2\|f\|_\rho \sum_{|wx-k| \leq \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx-k)| w \int_{|wu-k| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu-k)| du$$

elde edilir. Burada $wu-k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve $w \rightarrow \infty$ olduğundan dolayı yeterince büyük w için

$$w \int_{|wu-k| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(wu - k)| du = \int_{|t| > \frac{w\delta}{2}} |\psi(t)| dt \rightarrow 0$$

olduğu bilindiğinden mutlak moment yerine yazıldığında

$$I_{2,2} \leq 2 \|f\|_\rho M_0(\varphi) \varepsilon_2$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak

$$I_{2,3} = \sum_{|wx-k| > \frac{w\delta}{2}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |\rho(u)f(u) - \rho(x)f(x)| du$$

ele alınırsa φ üzerindeki özelliklerden her $\gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} \sum_{|wx-k| > \gamma} |\varphi(wx - k)| = 0$$

olduğu bilinmektedir. Böylece $I_{2,3}$ 'te mutlak moment yerine yazılırsa

$$I_{2,3} \leq 2 \|f\|_\rho \tilde{M}_0(\psi) \varepsilon_3$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda elde edilen I_1 ve $I_2 := \frac{1}{\rho(x)} [I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}]$ ifadeleri aşağıdaki eşitlikte yerine yazıldığında

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2,$$

$$\begin{aligned} & \left| (S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x) \right| \\ &= \frac{\|f\|_\rho}{w^2} \left[M_0(\varphi) \tilde{M}_2(\psi) + (M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + 2|wx| M_0(\varphi) \tilde{M}_1(\psi)) \right. \\ & \quad \left. + M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + (M_2(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 2|wx| M_1(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right] \\ & \quad + \frac{1}{\rho(x)} \left[\varepsilon_1 M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 2 \|f\|_\rho M_0(\varphi) \varepsilon_2 + 2 \|f\|_\rho \tilde{M}_0(\psi) \varepsilon_3 \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece $w \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (4.2) sağlanır.

Eğer $f \in U_\rho(\mathbb{R})$ ise aynı adımlar takip edilir ve (4.4)'ün her iki tarafı $\rho(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \rho(x) |(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| &\leq \frac{\|f\|_\rho}{w^2} \left[M_0(\varphi) \tilde{M}_2(\psi) + (M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + 2w M_0(\varphi) \tilde{M}_1(\psi)) \right. \\ & \quad \left. + M_1(\varphi) \tilde{M}_1(\psi) + (M_2(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 2w M_1(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right] \\ & \quad + [\varepsilon_1 M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 2 \|f\|_\rho M_0(\varphi) \varepsilon_2 + 2 \|f\|_\rho \tilde{M}_0(\psi) \varepsilon_3] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremum ve $w \rightarrow \infty$ için limit alınarak (4.3) elde edilir.

Bu ise ispatı tamamlar.

4.3. Yakınsaklık Hızı

Bu kısımda sampling Durrmeyer operatörünün f fonksiyonuna hangi hızda yaklaştığı üzerine bir teorem verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ sabit, φ ve ψ 3-üncü mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olsun. O halde

$$|(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)| \leq 16(1+x^2) \Omega(f; \delta) (M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 4[M_0(\varphi) \tilde{M}_3(\psi) + M_3(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)])$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

(1.6) ve (3.3)' ten dolayı elde edilenler yerine yazılır ve

$$\begin{aligned} |(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |f(u) - f(x)| du \\ &\leq 16(1+x^2) \Omega(f; \delta) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \left(1 + \frac{|u-x|^3}{\delta^3}\right) du \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} |(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)| &= 16(1+x^2) \Omega(f; \delta) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta^3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |u-x|^3 du \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$I_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du$$

ve

$$I_2 = \frac{1}{\delta^3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |u-x|^3 du$$

olsun. I_1 ifadesinde $wu - k = t$ değişken değiştirmesi ile birlikte mutlak momentler yerine yazılırsa

$$I_1 \leq M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)$$

olduğu açıkça görülür.

I_2 'de ise $|u - x|^3$ ifadesi w^3 ile çarpılır ve bölünür, k ile ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$I_2 \leq \frac{1}{\delta^3 w^3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k + k - wx|^3 du$$

elde edilir. Bu durumda $|wu - k + k - wx|^3$ ifadesinde Lemma 3.1.6. kullanılırsa

$$I_2 \leq \frac{2^2}{\delta^3 w^3} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |wu - k|^3 du + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx|^3 w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| du \right]$$

elde edilir. Burada $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve mutlak momentler yerine yazıldığında

$$I_2 = \frac{2^2}{\delta^3 w^3} [M_0(\varphi)\tilde{M}_3(\psi) + M_3(\varphi)\tilde{M}_0(\psi)]$$

elde edilir.

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| := 16(1 + x^2) \Omega(f; \delta)(I_1 + I_2)$$

olup I_1 ve I_2 yerine yazıldığında

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| \leq 16(1 + x^2) \Omega(f; \delta) \left(M_0(\varphi)\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2^2}{\delta^3 w^3} [M_0(\varphi)\tilde{M}_3(\psi) + M_3(\varphi)\tilde{M}_0(\psi)] \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak $\delta = w^{-1}$ seçilirse

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| \leq 16(1 + x^2) \Omega(f; \delta) (M_0(\varphi)\tilde{M}_0(\psi) + 4[M_0(\varphi)\tilde{M}_3(\psi) + M_3(\varphi)\tilde{M}_0(\psi)])$$

eşitsizliği gerçekleşir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2. $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ için Taylor açılımı ele alınırsa

$$f(t) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t - x)^k + R_r(f; t, x) \quad (4.5)$$

olup kalan terimin

$$R_r(f; t, x) = \frac{(t-x)^r}{r!} (f^{(r)}(\xi) - f^{(r)}(x))$$

olduğu bilinmektedir. Burada ξ , t ve x arasında uygun bir sayıdır. Dolayısıyla $|\xi - x| \leq |t - x|$ ve (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$|R_r^*(f; t, x)| := \frac{|f^{(r)}(\xi) - f^{(r)}(x)|}{r!}$$

$$\leq \frac{16}{r!} (1 + x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \left(1 + \frac{|t - x|^3}{\delta^3}\right)$$

elde edilir. Kalan terim ifadesinde elde edilen eşitsizlik yerine yazılırsa

$$R_r(f; t, x) \leq \frac{16}{r!} (1 + x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \left(|t - x|^r + \frac{|t - x|^{r+3}}{\delta^3}\right) \quad (4.6)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.4.Voronovskaja Tipli Toerem

Teorem 4.4.1. φ ve ψ 3-üncü mertebeden cebirsel ve mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olsun. O zaman $f^{(r)} \in C_w^*(\mathbb{R})$ için

$$\left| w[(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] - \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) \right| \leq$$

$$\frac{2^{r+3}}{r! w^{r-1}} (1 + x^2) \Omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{w}\right) \left[\left(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) + 8 \left(M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right]$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat:

$$f(t) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t - x)^k + R_r(f; t, x)$$

$R_r(f; t, x)$ 'in yukarıda verilen Lagrange kalanı olup bu ifade f 'nin Taylor açılımıdır. (1.6)'dan

$$(S_w^{\varphi, \psi} f)(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) f(u) du$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi (4.5) kullanılarak

$$(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) \left(\sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} (u - x)^m + R_r(f; u, x) \right) du$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle

$$\begin{aligned}
(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} (u - x)^m du \\
&+ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) R_r(f; u, x) du
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$I_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} (u - x)^m du$$

ve

$$I_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) R_r(f; u, x) du$$

olsun. İlk önce I_1 için gerekli tahminler yapılır. I_1 'de $(u - x)^m$ ifadesi w^m ile çarpılır ve bölünür, k ile ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$I_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) (wu - k + k - wx)^m du$$

elde edilir. $(wu - k + k - wx)^m$ ifadesinde binom açılımından yararlanılır ve

$$I_1 = \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (wu - k)^j (k - wx)^{m-j} du$$

elde edilir. Değişkene göre işlemler düzenlenirse

$$I_1 = \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(wx - k) (k - wx)^{m-j} \int_{\mathbb{R}} \psi(wu - k) (wu - k)^j du$$

eşitliği yazılabilir. Burada $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve cebirsel momentler yerine yazılırsa

$$I_1 = \sum_{m=0}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi)$$

elde edilir.

Şimdi I_2 için gerekli tahminler yapılır. Mutlak değer özelliğinden

$$|I_2| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| |R_r(f; u, x)| du$$

yazılır. (4.6) eşitsizliği kullanılır ve

$$|I_2| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu - k)| \left[\frac{16}{r!} (1 + x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \left(|u - x|^r + \frac{|u - x|^{r+3}}{\delta^3} \right) \right] du$$

elde edilir. Böylelikle

$$|I_2| = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| |u-x|^r du \right. \\ \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| \frac{|u-x|^{r+3}}{\delta^3} du \right]$$

eşitliği sağlanır. Gerekli işlemler yapılarak

$$|I_2| = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| |u-x|^r du \\ + \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| \frac{|u-x|^{r+3}}{\delta^3} du$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$J_1 = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| |u-x|^r du$$

ve

$$J_2 = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| w \int_{\mathbb{R}} |\psi(wu-k)| \frac{|u-x|^{r+3}}{\delta^3} du$$

olsun. J_1 ifadesinde $wu-k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve

$$wu-k = t$$

$$u = \frac{k+t}{w}$$

$$u-x = \frac{k+t-wx}{w}$$

$$|u-x|^r = \left| \frac{k+t-wx}{w} \right|^r$$

elde edilir. Böylece $\left| \frac{k+t-wx}{w} \right|^r$ üzerinde Lemma 3.1.6. kullanılırsa

$$J_1 \leq \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \frac{2^{r-1}}{w^r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| (|k-wx|^r + |t|^r) dt$$

elde edilir. İşlemler düzenlendiğinde

$$J_1 = \frac{16}{r!} \frac{2^{r-1}}{w^r} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| |k-wx|^r \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx-k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| |t|^r dt)$$

eşitliği sağlanır. Burada mutlak momentler yerine yazıldığında

$$J_1 = \frac{2^{r+3}}{r! w^r} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) (M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi))$$

eşitliği elde edilir.

J_2 ifadesinde $wu - k = t$ değişken değiştirmesi yapılır ve

$$wu - k = t$$

$$u = \frac{k+t}{w}$$

$$u - x = \frac{k+t-wx}{w}$$

$$|u - x|^{r+3} = \left| \frac{k+t-wx}{w} \right|^{r+3}$$

elde edilir. Böylece $\left| \frac{k+t-wx}{w} \right|^{r+3}$ üzerinde Lemma 3.1.6. kullanılırsa

$$J_2 \leq \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \frac{1}{\delta^3} \frac{2^{r+2}}{w^{r+3}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| (|k - wx|^{r+3} + |t|^{r+3}) dt$$

eşitsizliği elde edilir. İşlemler düzenlendiğinde

$$J_2 = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \frac{1}{\delta^3} \frac{2^{r+2}}{w^{r+3}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| |k - wx|^{r+3} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(wx - k)| \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| |t|^{r+3} dt)$$

eşitliği sağlanır. Burada mutlak momentler yerine yazıldığında

$$J_2 = \frac{16}{r!} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \frac{1}{\delta^3} \frac{2^{r+2}}{w^{r+3}} (M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi))$$

elde edilir. Böylece J_1 ve J_2 yerine yazılırsa

$$|I_2| \leq J_1 + J_2$$

$$|I_2| \leq \frac{2^{r+3}}{r! w^r} (1+x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \left[(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) + \frac{2^3}{w^3} \frac{1}{\delta^3} (M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right]$$

olduğu görülür. $\delta = w^{-1}$ seçilerek

$$|I_2| \leq \frac{2^{r+3}}{r! w^r} (1+x^2) \Omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{w}\right) \left[(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) + 8 (M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right]$$

elde edilir.

I_1 denkleminde $m = 0$ ve $m = 1$ için parçalama yapılır ve

$$I_1 = f(x) m_0(\varphi) \tilde{m}_0(\psi) + \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi)$$

eşitliği sağlanır. Tahmin edilen I_1 ve I_2 yerine yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} (S_w^{\varphi,\psi} f)(x) &:= I_1 + I_2 \\ (S_w^{\varphi,\psi} f)(x) &\leq \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) + f(x) m_0(\varphi) \tilde{m}_0(\psi) \\ &+ \frac{2^{r+3}}{r! w^r} (1+x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{w} \right) \left[\left(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Cebirsel momentlerin (4.1) eşitliğinden $m_0(\varphi) \tilde{m}_0(\psi) = 1$ bulunur ve yerine yazılıp ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned} (S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x) &\leq \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) \\ &+ \frac{2^{r+3}}{r! w^r} (1+x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{w} \right) \left[\left(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Son olarak her iki taraf w ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} w \left[(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x) \right] &\leq \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) \\ &+ \frac{2^{r+3}}{r! w^{r-1}} (1+x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{w} \right) \left[\left(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla işlemler düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} &\left| w \left[(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x) \right] - \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) \right| \leq \\ &\frac{2^{r+3}}{r! w^{r-1}} (1+x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{w} \right) \left[\left(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) + 8 \left(M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.4.1.'in kabul edilen varsayımları altında

i. Lemma 3.1.3 (2)'ye göre f' ile $S_w^{\varphi,\psi}$ için aşağıda nicel asimptotik formülünün sonucu elde edilir.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w [(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)] = f'(x)(m_1(\varphi, wx) + \tilde{m}_1(\psi))$$

ii. Ayrıca $j = 1, 2, \dots, r - 1$, $r \in \mathbb{N}$ için $m_j(\varphi, u) = 0$ kabul edilirse,

$$\left| w^r [(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)] - \frac{f^{(r)}(x)}{r!} m_r(\varphi, wx) \right| \leq \frac{2^{r+3}}{r!} (1 + x^2) \Omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{w}\right) \left[(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) + 8 (M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right]$$

ve

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^r [(S_w^{\varphi,\psi} f)(x) - f(x)] = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} m_r(\varphi, wx)$$

elde edilir.

4.5. Nümerik Hesaplamalar

Bu kısımda, ağırlıklı uzaylara ait fonksiyonlar için sampling Durrmeyer operatörlerine ilişkin bazı nümerik örnekler sunulmuştur. Çekirdekleri yukarıda verilen çekirdek varsayımlarını karşılayan φ çekirdeği için 3. mertebeden B-spline çekirdeği ve ψ çekirdeği için karakteristik fonksiyon alınmıştır (Costarelli vd., 2020). Buna göre

$$(S_w^{\sigma_3, \chi_{[0,1]}} f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_3(wx - k) w \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(wu - k) f(u) du$$

elde edilir. Bu operatörü $f(t) = t^2 e^{\cos(\pi t)}$ ve $g(t) = t \sin(\pi t^2)$ fonksiyonlarına uygulayarak yaklaşımın hata paylarını veren nümerik tablolar (Tablo 4.1.) ve (Tablo 4.2.) deki gibi aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.1. Bazı keyfi x değerlerindeki $|(S_w^{\varphi, \chi} f)(x) - f(x)|$ 'in değeri

w	$ (S_w^{\varphi, \chi} f)(-1.2) - f(-1.2) $	$ (S_w^{\varphi, \chi} f)(1.4) - f(1.4) $	$ (S_w^{\varphi, \chi} f)(2.6) - f(2.6) $
5	0,120209	1,081473	0,680930
20	0,048204	0,183083	0,247636
50	0,021161	0,067269	0,105667
100	0,010916	0,032692	0,053943

Tablo 4.2. Bazı keyfi x değerlerindeki $|(S_w^{\varphi, \chi} g)(x) - g(x)|$ 'in değeri

w	$ (S_w^{\varphi, \chi} g)(-1.2) - g(-1.2) $	$ (S_w^{\varphi, \chi} g)(1.4) - g(1.4) $	$ (S_w^{\varphi, \chi} g)(2.6) - g(2.6) $
5	0,633541	0,815972	2,406237
20	0,106743	0,318299	1,004848
50	0,033731	0,124794	0,355468
100	0,015174	0,061529	0,165480

5. SONUÇ TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde ağırlıklı fonksiyon uzaylarına ait sürekli fonksiyonlar için $(S_w^{\varphi,\psi})$ sampling Durrmeyer operatörler ailesinin uygun çekirdek fonksiyonları ile elde edilen yaklaşımların sonuçları özetlenip sonuçları tartışılacaktır.

(1.6) ile verilen $S_w^{\varphi,\psi} f$ operatörü, f nin ağırlıklı sürekli fonksiyon uzayına ait olması şartıyla yeniden ele alınmış ve ilk olarak Önerme 4.1.1. de verilen

(1) Sampling Durrmeyer operatörünün varsayımlarının bir sonucu olarak her $x \in \mathbb{R}$ için $(S_w^{\varphi,\psi} \tilde{1})(x) = 1$ ve $\tilde{1}(x) = 1$ şartı ve

(2) $v \leq \mu$ olan $\mu, v > 0$ için $M_\mu(\varphi) < +\infty$ olması $M_v(\varphi) < +\infty$ anlamına gelir. (Costarelli ve Vinti, 2019a). Ayrıca φ 'nin kompakt desteği varsa her $\mu \geq 0$ için $M_\mu(\varphi) < +\infty$ olduğu açıkça görülür. Son olarak benzer bir şekilde $v \leq \mu$ şartını sağlayan $\mu, v > 0$ için $\tilde{M}_\mu(\psi) < +\infty$ olması $\tilde{M}_v(\psi) < +\infty$ anlamına gelir (Costarelli vd., 2020).

şartları verilmiştir. Bu şartlar operatörün iyi tanımlı olmasını sağlayan önemli şartlardır.

Önerme 4.1.2.'de φ ve ψ , 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olması durumunda $v(x) := \frac{1}{\rho(x)} = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|(S_w^{\varphi,\psi} v)(x)| \leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + x^2 M_0(\varphi) \right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Bu önerme sampling Durrmeyer operatörlerinin ağırlıklı fonksiyon uzaylarında iyi tanımlı olmasını gösterirken kullanılacak yardımcı bir ön teorem olarak ortaya çıkmaktadır.

Teorem 4.1.3.'te ise φ ve ψ , 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olması durumunda herhangi bir sabit $w > 0$ için $S_w^{\varphi,\psi}$ operatörleri $B_\rho(\mathbb{R})$ 'den $B_\rho(\mathbb{R})$ 'ye lineer bir operatör olduğu ve

$$\|S_w^{\varphi,\psi}\|_{B_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})} \leq M_0(\varphi) \left(\tilde{M}_0(\psi) + \frac{2}{w^2} \tilde{M}_2(\psi) \right) + 4\tilde{M}_0(\psi) \left(\frac{1}{w^2} M_2(\varphi) + M_0(\varphi) \right)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği gösterilmiştir. Bu teoremden hipotez gereği $M_2(\varphi)$ ve $\tilde{M}_2(\psi)$ sonlu olduğundan Önerme 4.1.1.'den $M_0(\varphi)$ ve $\tilde{M}_0(\psi)$ ayrık ve sürekli mutlak momentleri de sonludur. Böylelikle sampling Durrmeyer operatörlerinin ağırlıklı fonksiyon uzaylarında iyi tanımlı olduğu gözlemlenmiştir.

Teorem 4.2.1.'de $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ sabit ve φ ve ψ , 2-inci mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olması durumunda

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| = 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

olduğu ayrıca, eğer $f \in U_\rho(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \|S_w^{\varphi, \psi} f - f\|_\rho = 0 \quad (4.3)$$

şartının gerçekleştiği gösterilmiştir. Teorem 4.2.1'in ilk kısmından, sampling Durrmeyer serilerinin kendilerini oluşturan f fonksiyonlarına ağırlıklı fonksiyon uzayları altında noktasal yakınsadığı sonucuna, ikinci kısmından ise sampling Durrmeyer serilerinin kendilerini oluşturan f fonksiyonlarına ağırlıklı fonksiyon uzaylarının ağırlık normu altında düzgün yakınsadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Teorem 4.3.1.'de $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ sabit ve φ ve ψ , 3-üncü mertebeden mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olması durumunda

$$|(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)| \leq 16(1 + x^2) \Omega(f; w^{-1}) (M_0(\varphi) \tilde{M}_0(\psi) + 4[M_0(\varphi) \tilde{M}_3(\psi) + M_3(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)])$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Burada $w \rightarrow \infty$ için $\Omega(f; w^{-1}) \rightarrow 0$ olduğundan sampling Durrmeyer serilerinin kendilerini oluşturan fonksiyona yakınsama hızı en fazla $1/w$ kadar olmaktadır. Diğer bir deyişle, $1/w$ 'nün sıfıra yakınsama hızı kadardır.

Teorem 4.4.1.'de ise φ ve ψ , 3-üncü mertebeden cebirsel ve mutlak momentleri sonlu olan çekirdek fonksiyonları olması durumunda $f^{(r)} \in C_w^*(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} & \left| w[(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] - \sum_{m=1}^r \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{1}{w^{m-1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} m_{m-j}(\varphi) \tilde{m}_j(\psi) \right| \leq \\ & \frac{2^{r+3}}{r! w^{r-1}} (1 + x^2) \Omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{w}\right) \left[(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) + 8 (M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + \right. \\ & \left. M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Bu teoremden ise $w \rightarrow \infty$ için $\Omega(f^{(r)}; w^{-1}) \rightarrow 0$ olduğundan hipotezde verilen şartlar altında f fonksiyonunun türev mertebesi arttıkça sampling Durrmeyer operatörlerinin kendilerini oluşturan fonksiyona yakınsama hızının arttığını gözlemliyoruz.

Sonuç 4.4.2.' de Teorem 4.4.1.'in kabul edilen varsayımları altında Lemma 3.1.3 (2)' ye göre f' ile $S_w^{\varphi, \psi}$ için aşağıda nicel asimptotik formülünün sonucu elde edilir:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w [(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] = f'(x)(m_1(\varphi, wx) + \tilde{m}_1(\psi)).$$

Ayrıca $j = 1, 2, \dots, r - 1$, $r \in \mathbb{N}$ için $m_j(\varphi, u) = 0$ kabul edilirse,

$$\left| w^r [(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] - \frac{f^{(r)}(x)}{r!} m_r(\varphi, wx) \right| \leq \frac{2^{r+3}}{r!} (1+x^2) \Omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{w} \right) \left[(M_0(\varphi) \tilde{M}_r(\psi) + M_r(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) + 8 (M_0(\varphi) \tilde{M}_{r+3}(\psi) + M_{r+3}(\varphi) \tilde{M}_0(\psi)) \right]$$

ve

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^r [(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} m_r(\varphi, wx)$$

elde edilmiştir. Yani burada $w \rightarrow \infty$ için

$$w^r [(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)] = \frac{f^{(r)}(x)}{r!} m_r(\varphi, wx)$$

olduğundan $1/w^r$ ile $(S_w^{\varphi, \psi} f)(x) - f(x)$ farkının karakterleri aynı olmaktadır. Diğer bir deyişle, sampling Durrmeyer serilerinin f fonksiyonuna yakınsama hızı $1/w^r$ 'nin sifira yakınsama hızı kadar olmaktadır.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıdaki başlık ve yazarlarla bilimsel bir dergiye yayımlanmak üzere sunulmuştur.

Approximation by Sampling Durrmeyer Operators in Weighted Space of functions,
Osman ALAGÖZ, Metin TURGAY, Tuncer ACAR and Merve PARLAK.

KAYNAKÇA

- Acar, T., Aral, A., & Raşa, I.** (2016). The new forms of Voronovskaja's theorem in weighted spaces. *Positivity*, 20(1), 25-40.
- Acar, T., Costarelli, D., & Vinti, G.** (2020). Linear prediction and simultaneous approximation by m-th order Kantorovich type sampling Series, *Banach J. Math. Anal.*, 14(4), 1481-1508.
- Acar, T., Montano, M. C., Garrancho, P., & Leonessa, V.** (2019). On Berstein-Chlodovsky operators preserving e^{-2x} , *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 26(5), 681-698.
- Bardaro, C., & Mantellini, I.** (2012). On convergence properties for a class of Kantorovich discrete operators, *Num. Funct. Anal. Opt.*, 33(4), 374-396.
- Bardaro, C., & Mantellini, I.** (2014). Asymptotic expansion of generalized Durrmeyer sampling type series, *Jaen J. Approx.*, 6(2), 143-165.
- Bardaro, C., Butzer, P. L., Stens, R. L., & Vinti, G.** (2007). Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces, *Sampl. Theory Signal Image Process*, 6(1), 29-52.
- Bayraktar, M.** (2006). Fonksiyonel Analiz. Ankara.
- Bayraktar, M.** (2017). Fonksiyonel Analiz, *Korza Yayıncılık*, Ankara.
- Bernstein, S. N.** (1912). Demonstration de theorem de Weierstrass Fondée sur le calculu des probabilities, *Comp. Comm. Ssoc. Mat.*, Charkow.
- Bohman, H.** (1952). On approximation of continuous and analytic functions, *Ark. Mat.*, 2, 43-56.
- Butzer, P. L., & Stens, R. L.** (1993). Linear prediction by samples from the past, In advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory R. J. Marks II, Springer Texts Electrical Eng., *Springer New York*, 157-183.
- Coskun, T.** (1998). Some properties of linear operators on the spaces of weight functions, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series*, A1 47, 175-181.
- Costarelli, D., & Vinti, G.** (2018) An Inverse Result of Approximation by sampling Kantorovich Series, *Proceed. of the Edin. Math. Soc.*, 62 (1).

- Costarelli, D., & Vinti, G.** (2019a). Inverse results of approximation and the saturation order of the sampling Kantorovich series, *Journal of Approximation. Theory.* 242, 64-82.
- Costarelli, D., & Vinti, G.** (2019b). Saturation by the Fourier transform method for the sampling Kantorovich series based on bandlimited kernels, *Analysis and Mathematical Physics.*
- Costarelli, D., Minotti, A. M., & Vinti, G.** (2017). Approximation of discontinuous signals by sampling Kantorovich series, *J. Math. Anal. Appl.* 450 (2), 1083-1103.
- Costarelli, D., Piconi, M., & Vinti, G.** (2020). On the convergence properties of Durrmeyer-Sampling Type Operators in Orlicz spaces, arXiv:2007.02450.
- DeVore, R. A., & Lorentz, G. G.** (1993). Constructive Approximation, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg.
- Diening, L., Harjulehto, P., Hastö, P., & Ruzicka, M.** (2017). Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lectures Note in Mathematics, *Springer*, New York.
- Dündar, S.** (2000). Fourier dönüşümü ve Karakteristik Fonksiyon *D.E.Ü.İ.İ.B.F. Dergisi*, 15(2), 115-126.
- Gadjiev, A. D.** (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and Theorems analogous to that of P. P. Korovkin. Dokl. Akad. Nauk SSSR 218, no. 5; *English Soviet Math Dokl.*, 15(5).
- Gadjiev, A. D.** (1976). On P. P. Korovkin type theorems. *Math. Zametki*, 20(5), 995-998 (In Russian).
- Gadjiev, A. D., & Ispir, N.** (1999). On a sequence of linear positive operators in weighted spaces, *Proc. Inst. Math. Mech.*, 11, 45-56.
- Hacısalıhoğlu, H. I., & Hacıyev, A. I.** (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, *A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, Ankara.
- Hewitt, E., & Stromberg K.** (1969). Real and Abstract Analysis, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH*, 125-148.
- Ispir, N.** (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces, *Turk. J. Math.*, 26(3), 355-365.
- Jaramillo, J. D. V.** (2019). Poisson-Summation Formula, *Lectures Notes in Physics.*
- Kantorovich, L. V.** (1930). Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein i, ii, *C. R. Acad. URRS.*, 563-568; 595-600.

- Karaçay, T.** (2009). Genel Topoloji, *Kuban Matbaacılık Yayıncılık*, Başkent Üniversitesi, Ankara.
- Kolomoitsev, Y. S., & Skopina, M. A.** (2017). Approximation by multivariate Kantorovich-Kotelnikov operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 456(1), 195-213.
- Korovkin, P. P.** (1959). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, *DOKL. Akad. Nauk. SSR.*, 90, 961-964.
- Kotel'nikov, V. A.** (1933). On the carrying capacity of "ether" and wire in electrocommunications, *Material for the First All-Union Conference on the Questions of Communications, Moscow*.
- Lorentz, G. G.** (1953) Bernstein Polynomials, *University of Toronto Press*, Toronto, 2 edition.
- Lubinsky, D. S.** (1993). Weierstrass theorem in the twentieth century: a selection, *International Conference on Abstract Analysis*, Gruger Park, preprint.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., & Ekincioglu, İ.** (2007). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1*. Ankara.
- Orlova, O., & Tamberg, G.** (2016). On approximation properties of generalized Kantorovich-type sampling operators, *J. Approx. Theory*, 201, 73-86.
- Öztürk, M., & Bostancı, H.** (2014). Analiz-II, *Sürat Üniversite Yayınları*, İstanbul.
- Runge, C. Z.** (1885a). Über die darstellung willkürlicher functionen, *Acta Mathematica*, 7 (1), 387-392.
- Runge, C. Z.** (1885b). Zur theorie der Eindeutigen analytischen functionen, *Acta Mathematica*, 7 (1), 387-392.
- Shannon, C. E.** (1949). Communications in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37, 10-21.
- Weierstrass, K.** (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen Varendarlichen, *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639 und 789-805.
- Whittaker, E. T.** (1915). On the functions, which are represented by expansions of the interpolation theory, *Proc. Royal Society Edinburgh*, 35, 181-194.