

EISENSTEIN SERİLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Süleyman Sait DÜNDAR

Bilecik Seyh Edebali University, Department of Mathematics, 11200, Bilecik

ORCID: 0009-0006-7094-5343

İlker İNAM

Bilecik Seyh Edebali University, Department of Mathematics, 11200, Bilecik

ORCID: 0000-0001-5765-1718

ÖZET

Modüler formlar matematikte on yıllardır popülerliğini kaybetmeyen konuların başında gelir. Sağladığı fonksiyonel eşitlik sayesinde üst yarı düzlemde çok fazla sayıda iç simetriye sahip olan modüler formlar analitiklik özelliği nedeniyle önemli bir karmaşık fonksiyon sınıfını oluştururlar. $f(z)$ bir modüler form olsun. Bu durumda modüler grubun iki üreticiden birisi olan 1 birimlik kayma dönüşümü uygulandığında da modüler formlar $f(z+1)=f(z)$ özdeşliğini sağlarlar. Böylece Fourier analizinin önemli bir teoremi kullanılarak $f(z)$ modüler formu bir Fourier serisi ile ifade edilebilir. Bu serideki katsayılar Fourier katsayıları olarak adlandırılır ve çok fazla aritmetik bilgiye sahiptir. Örneğin bu katsayıların mutlak değerleri Ramanujan-Petersson sanısı sayesinde keskin bir üst sınıra sahiptir. Üst yarı düzlemde oldukça önemli geometrik özelliklere sahip olan modüler formların topolojide ve hatta fizikte de uygulamaları vardır. Burada sayılar teorisi uygulamalarına odaklanılacaktır. Öyle ki sigma bölen fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ve Fourier katsayıları elle bile kolaylıkla hesaplanabilen Eisenstein serileri modüler formların en temel örneklerinden birisidir. Bu konuşmada Eisenstein serilerinin özellikleri anlatılacaktır. Gerekli tanım ve teoremler verildikten sonra bu serilerin özellikleri verilecektir. Literatürde Eisenstein serilerinin çarpanlarına ayrılmasıyla ilgili olan iki güncel makale incelenecektir. Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans tezinin bir parçasını oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Modüler formlar, Eisenstein serileri, Modüler grup

ON SOME PROPERTIES OF EISENSTEIN SERIES

ABSTRACT

Modular forms have been a popular topic in mathematics for decades. Modular forms, which possess numerous internal symmetries in the upper half-plane thanks to the functional equation they provide, constitute an important class of complex functions due to their analyticity. Let $f(z)$ be a modular form. In this case, when a unit shift transformation, one of the two generators of the modular group, is applied, the modular forms satisfy the identity $f(z+1)=f(z)$. Thus, an important theorem of Fourier analysis says the modular form $f(z)$ can be expressed as a Fourier series. The coefficients in this series are called Fourier coefficients and possess a wealth of arithmetic information. For example, the absolute values of these coefficients have a sharp upper bound thanks to the Ramanujan-Petersson conjecture. Modular forms, which possess significant geometric properties in the upper half-plane, also have applications in topology and even physics. In this talk we will focus on applications in number theory. Eisenstein series, defined using the sigma divisor function and whose Fourier coefficients can be easily calculated by hand, are one of the most fundamental examples of modular forms. In this talk, the properties of Eisenstein series will be explained. After providing the necessary definitions and theorems, the properties of these series will be presented. Two recent articles in the literature on the factorization of Eisenstein series will be reviewed. This work forms part of the first author's master's thesis.

Keywords: Modular forms, Eisenstein series, modular group