ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ

Fatih KARAMAN

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

Tez İkinci Danışmanı

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

BİLECİK, 2015

Ref.No:10080426

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ **BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ

Fatih KARAMAN
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

Tez İkinci Danışmanı
Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

BİLECİK, 2015

ANADOLU UNIVERSITY **BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY**

Graduate School of Sciences

Department of Mathematics

SPECIAL SMARANDAHE CURVES

Fatih KARAMAN

Master's Thesis

Thesis Advisor

Yrd.Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

Co -Advisor

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

BILECIK, 2015

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 11.06.2015 tarih ve 21 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 26.06.2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Fatih KARAMAN'ın "Özel Smarandache Eğrileri" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Serpil ALTAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANI V. :

Yrd. Doç. Dr. İlker İNAM

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …./…./…..... tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında değerli zamanını ayıran ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren Sayın hocam **Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU’** ya minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmam süresince fikirleriyle her konuda desteğini gördüğüm deneyimleri ile bana yol gösteren Sayın hocam **Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU**’ na teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen eşim **Tuba KARAMAN**’ a ve bana karşı olan inançlarını her zaman hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid uzayındaki temel kavramlar ve eğriler konusu tanıtıldı. Ayrıca Frenet Çatıları ve Serret-Frenet formülleri üzerinde duruldu. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid Uzayında Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri tanıtılmış bu eğrilerin eğrilik ve torsiyonları ayrı ayrı hesaplandı. Dördüncü bölümde eğrinin helis eğrisi olma durumları üzerinde duruldu ve bunun ile ilgili teoremlere yer verildi. Elde edilen bulgular değerlendiriltikten sonra ‘’ Smarandache eğrileri ne zaman helis olur? ‘’ sorusunun cevabı araştırıldı.

Anahtar Kelimeler

Eğri, Eğrilik, Burulma, Eğilim Çizgisi, Smarandache Eğrileri, Geodezik Eğrilik

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts and curves in Euclidean space subject introduced. Also it is mentioned in the Frenet frame and Serret-Frenet formulas over.- In third chapter, it is introduced the Smarandache curves according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean Space. In the fourth chapter, it is focused on the states being helix of a curve and however was given to the related theorems. The findings were evolated after ‘’ When the curve happens a helix?’’ was investigated in response to the question.

Key Words

Curve, Curvature, Torsiyon, Helix, Smarandache Curves, Geodesic Curvature

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$\langle\ ,\rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: $\mathbb{E}^3$ de Vektörel çarpım
k	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması (torsiyonu)
$\{\mathbb{T},\mathbb{N},\mathbb{B}\}$	: Frenet çatısı
W	: Darboux vektörü
C	: Birim Darboux vektörü
β	: β eğrisi
(C^*)	: Sabit Pol eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, geometri de çok kapsamlı bir çalışma alanı oluşturur. Eğrinin eğrilik ve burulma değerlerinin hesaplanmasıyla eğrinin biçimini ve uzunluğunu belirleyebiliriz. Özelikle eğrinin Serret-Frenet vektörleri bize eğri hakkında çok önemli bulgular sağlar.

Smarandache eğrisi, regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile üretilen yer vektörüne sahip regüler eğri olarak tanımlanır. Bu konu ile ilgili ilk çalışmalar, A. T. Ali tarafından oluşturuldu. $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini ifade etmiş ve özel bir durumun Serret-Frenet elemanlarını tanıtmıştır. Bu tez çalışmasında ise bu çalışma paralelinde değişik Smarandache eğrilerinin eğrilikleri ve torsiyonları hesaplanmıştır.

$\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında kuşkusuz en önemli eğrilerden birisi genel helislerdir. Helisler günlük hayatımızda en sık karşılaştığımız eğrilerdendir. k ve τ eğriliklerinin ayrı ayrı sabit olmasıyla oluşan eğrilere dairesel helis adı verilir. Genel helisler k ve τ sabit olmadığı halde k / τ oranının sabit olmasıyla oluşur. Bir koni veya bir küre yüzeyi üzerinde çizilebilen helislerin olup olmadığı fikri, bizi helislerin tanımını daha da genelleştirme gereğine sevk etmiştir. Böylece Alman matematikçi E. Müller helisleri ‘’ Her noktada sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler’’ olarak tanımlamış ve bunlara Eğilim çizgileri adını vermiştir.

Bu tez çalışmasında ise Smarandache eğrileri ve onların özel halleri ele alınıp bu özel haller arasındaki eğilim çizgilerinin varlığı araştırıldı. Smarandache eğrileri ne zaman helis olur? Esas eğri helis iken Smarandache eğrisi ne zaman helis olur? sorularının cevabı arandı. Böylece Smarandache eğrilerinin aynı cinsten eğriler olarak ifade edilebileceği bulgusuna varıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. E^n, n-boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde E^n n-boyutlu Öklid uzayındaki temel kavram ve teoremlerden bahsedilecektir.

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f; A\, x\, A \longrightarrow V$ fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir(Hacısalihoğlu,1983).

i. $\forall\ P, Q \in A$ için $f(P,Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$
ii. $\forall\, P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$
iii. Bir $P \in A$ ve bir $\beta \in V$ için $f(P,Q) = \beta$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile eşlenen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında, boy V = n olmak üzere,

$$< , > ; V\, x\, V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \qquad \begin{cases} x = (x_1, x_{2.}, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

biçiminde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$ ile eşlenen reel vektör uzayı da $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$ in elemanları noktalar ve $\mathbb{R}^n$ in elemanları vektörlerdir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.3. n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ve V ile birleşen Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\ \|$ olmak üzere,

$$d;\ \mathbb{E}^n\, x\, \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $\forall x, y \in \mathbb{E}^n$ için $d(x,y)$ değerine x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir(Hacısalihoğlu,1983).

Teorem 2.1.1. n-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metrik belirtir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.4. $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ $\in \mathbb{E}^n$ olmak üzere,

$$d;\ \mathbb{E}^n x\ \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonunun belirttiği metriğe $\mathbb{E}^n$ de Öklid metriği denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta x, y, z olsun. $\overrightarrow{xy}$ ile $\overrightarrow{xz}$ vektörleri arasındaki açı $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\|\ \|\overrightarrow{xz}\|}$$

ifadesinden hesaplanan θ reel sayısıdır(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel iç çarpım uzayı ile eşleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında sıralı bir $\{\overrightarrow{P_0P_1},\ \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi, $\mathbb{R}^n$, iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n+1)$-lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı ve $x, y \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$\wedge;\ \ \mathbb{R}^3\ x\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)\,, \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

olmak üzere

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} \wedge \vec{y} = \sum_{i=1}^{3} det(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlı $\wedge$ işlemine $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektörel çarpım denir. $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörü hem $\vec{x}$ hem de $\vec{y}$ vektörüne dik bir vektördür ve

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sin\theta$$

dır(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.8. $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayı ve $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}\,, \vec{x} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.9. V vektör uzayı ile eşlenen afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{\vartheta} \in V$ için $(P, \vec{\vartheta})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilir(Hacısalihoğlu,1983).

$T_A(P)$ de toplama ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla,

$$\oplus\,;\ T_A(P) \times T_A(P) \to T_A(P)$$
$$\big((P,\vec{\vartheta}), (P,\vec{u})\big) \to (P,\vec{\vartheta}) \oplus (P,\vec{u}) = (P, \vec{\vartheta} + \vec{u})$$
$$\odot\,;\ \mathbb{R} \times T_A(P) \to T_A(P)$$
$$\big(\lambda, (P,\vec{\vartheta})\big) = \lambda \odot (P,\vec{\vartheta}) = (P, \lambda\vec{\vartheta})$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbb{R}$ ile A nın eşlendiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir. $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \,.\,, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.10. A$\subset \mathbb{E}^n$ üzerindeki bir vektör alanı

$$X\,;\ A \to \cup_{P \in A} T_A(P)$$

biçiminde birebir ve örten bir fonksiyondur.

Böylece $\mathbb{E}^n$ de bir X vektör alanı, $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktasına bir $\overrightarrow{X_P}$ tanjant vektörü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

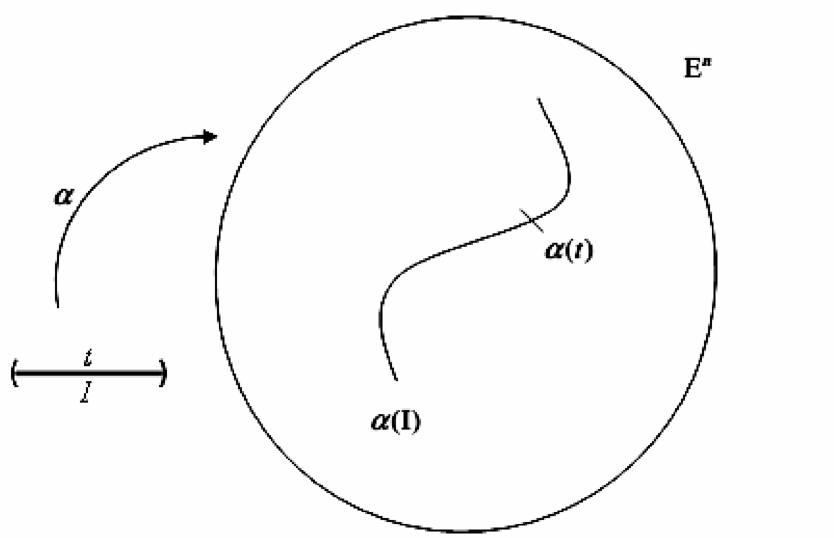
$\mathbb{E}^n$ de vektör alanlarının cümlesi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilirse, tanjant uzayına benzer şekilde $\{\mathcal{X}(\mathbb{E}^n), \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ altılısının da vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu vektör uzayına $\mathbb{E}^n$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir(Hacısalihoğlu,1983).

2.2. E^n, n-boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\alpha;\ I \to \mathrm{E}^n$$
$$t \to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\right)$$

şeklinde tanımlı α fonksiyonu diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ cümlesine $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de $\alpha(t)$ eğrisinin parametresi denir(Hacısalihoğlu,1983).

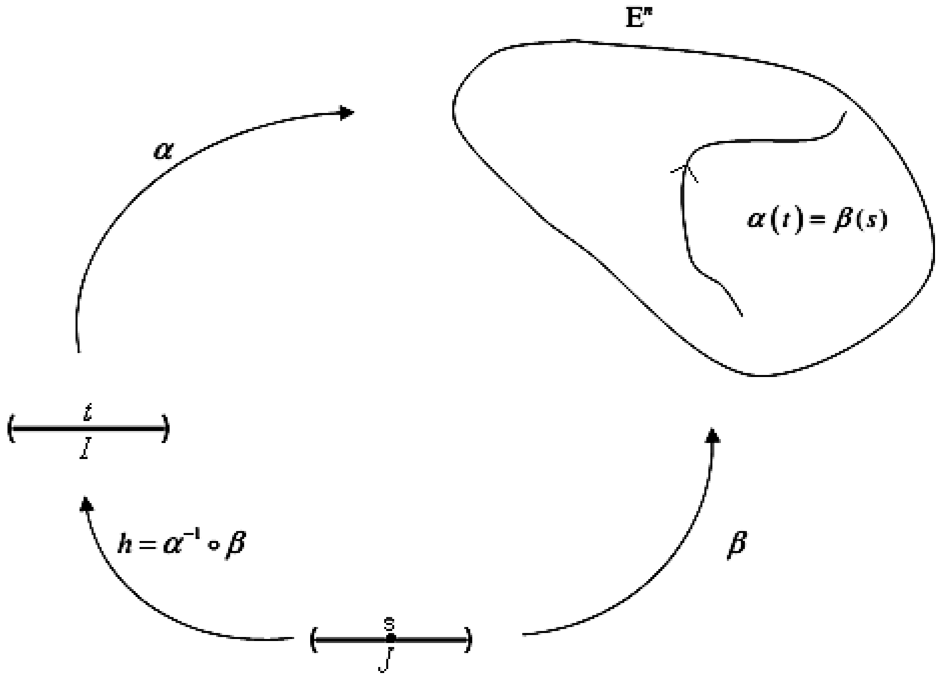


Şekil 2.1. Eğri.

Tanım 2.2.2. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} o \beta; \;\; J \to I$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna M-nin bir parametre değişimi (M-nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir(Hacısalihoğlu,1983).



Şekil 2.2. Parametre değişimi.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir.

Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri ve $t \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi $(I, \alpha\ )$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha;\ I \rightarrow \mathrm{E}^n$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\{\alpha_1, \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n\}$ olmak üzere,

$$\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt})$$

şeklindedir. $\big(\alpha(t),\ \alpha'(t)\big) \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(\mathrm{t})$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye (yani $\forall\ t\ \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$) regüler eğri denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.6. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^r\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\ \alpha^k \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $t \in M$ için $\{V_1(t), V_2(t), \ldots, V_r(t)\}$ ye ise $t \in M$noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir(Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.2.7. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t\ \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(\mathrm{t})$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \ldots, V_r(t)\}$ olsun. Buna göre;

$$\kappa_i\,;\ \ I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \rightarrow \kappa_i(t) = \langle V'_i(t)\ ,\ V'_{i+1}(t)\rangle\ \ ,\ 1 \leq i < r$$

şeklinde tanımlı κ_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $t\ \in I$ için $\kappa_i(t)$ sayısına da $\alpha(t)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir(Hacısalihoğlu,1983).

Teorem 2.2.1. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(\mathrm{t})$ noktasında M nin i-yinci eğriliği $k_i(t)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ olmak üzere,

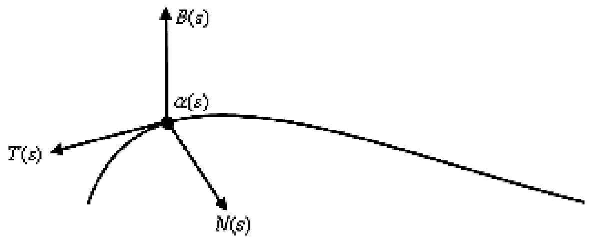
i. $V'_1(t) = k_1(\mathrm{t}).V_2(t)$
ii. $V'_i(t) = -k_{i-1}(t).V_{i-1}(t) + k_i(t).V_{i+1}(t)\ ,\ 1 < i < r$
iii. $V'_r(t) = -k_{r-1}(t).V_{r-1}(t)$

dır. Bu eşitliklere Frenet formülleri denir(Hacısalihoğlu,1983).

Teorem 2.2.2. $\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, M eğrisinin $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(s) &= \alpha'(\mathrm{s}) \\ \mathbb{N}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}.\alpha''(s) \\ \mathbb{B}(s) &= \mathbb{T}(s) \wedge \mathbb{N}(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir(Hacısalihoğlu,1983).



Şekil 2.3. Frenet vektörleri.

Teorem 2.2.3. $\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki $\{\mathbb{T}(t), \mathbb{N}(t), \mathbb{B}(t)\}$ Frenet vektörleri;

$$\mathbb{T}(t)=\frac{\alpha\prime(t)}{\|\alpha\prime(t)\|}$$
$$\mathbb{N}(t)=\mathbb{B}(t)\wedge\ \mathbb{T}(t) \tag{2.2}$$
$$\mathbb{B}(t)=\frac{\alpha'(t)\wedge\alpha\prime\prime(t)}{\|\alpha'(t)\wedge\ \alpha\prime\prime(t)\|}$$

şeklinde hesaplanır(Hacısalihoğlu,1983).

Teorem 2.2.4. $\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t\ \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği ve burulması (torsiyonu), sırasıyla, $k(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere,

$$k(t)=\frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
$$\tau(t)=\frac{<\alpha'(t)\wedge\alpha''(t),\alpha'''(t)>}{\|\ \alpha'\ (t)\wedge\ \alpha''(t)\ \|^2} \tag{2.3}$$

formülleri ile hesaplanır(Sabuncuoğlu,2006).

Teorem 2.2.5. $\alpha\subset\mathbb{E}^3$ eğrisi, $s\ \in I$ yay parametresi cinsinden verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbb{T}(s),\mathbb{N}(s),\mathbb{B}(s)\}$; eğrilik ve burulması, sırasıyla, $k(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinin frenet formülleri,

$$\mathbb{T}'(s)=k(s)\mathbb{N}(s)$$
$$\mathbb{N}'(s)=-k(s)\mathbb{T}(s)+\tau(s)\mathbb{B}(s) \tag{2.4}$$
$$\mathbb{B}'(t)=-\tau(s)\mathbb{N}(s)$$

dir. Frenet formüllerinin matris olarak gösterimi ise,

$$\begin{bmatrix}\mathbb{T}'\\ \mathbb{N}'\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{T}\\ \mathbb{N}\\ \mathbb{B}\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Şeklindedir(Sabuncuoğlu,2006).

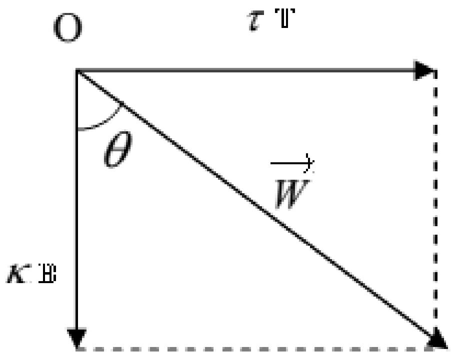
Tanım 2.2.8. $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ Frenet 3-ayaklısının her s anında bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin Darboux ekseni, bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre Darboux vektörü denir ve W ile gösterilir. Burada B ile W vektörü arasındaki açı φ ile gösterilirse,

$$k = \|W\| cos\varphi$$
$$\tau = \|W\| sin\varphi \tag{2.6}$$

olur. Darboux vektörü yönündeki birim vektör ise,

$$\vec{C} = sin\varphi\, \mathbb{T} + cos\varphi\, \mathbb{B}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.4. Darboux vektörü.

3. $\mathbb{E}^3$, 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ

3.1. TN-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.1.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ olmak üzere TN-Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s)\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır(Ahmad.T,2010). Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek TN- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{TN}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k\,\mathbb{T} + k\,\mathbb{N} + \tau\,\mathbb{B}) \tag{3.2}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{TN}}{ds_\beta}\right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{2k^2+\tau^2}{2}} \tag{3.3}$$

bulunur. Buradan $\beta_{TN}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{TN}} = \frac{(-k\,\mathbb{T} + k\,\mathbb{N} + \tau\,\mathbb{B})}{\sqrt{2k^2+\tau^2}} \tag{3.4}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -[k^2(2k^2+\tau^2) + \tau(\tau k' - k\tau')] \\ \delta_2 &= -[k^2(2k^2+3\tau^2) - \tau(\tau^3 + k\tau' - \tau k')] \\ \delta_3 &= k[\tau(2k^2+\tau^2) - 2(\tau k' - k\tau')] \end{aligned} \tag{3.5}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TN}} = \frac{\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B}}{(\,2k^2 + \tau^2\,)^{3/2}} \tag{3.6}$$

ifadesini buluruz. O zaman (3.6) ifadesini şu şekilde yazabiliriz;

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}}{(2k^2 + \tau^2\,)^2}(\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B}) \tag{3.7}$$

bu denklemden $\beta_{TN}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{TN}}$ eğriliği için,

$$k_{\beta_{TN}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TN}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{(2k^2 + \tau^2\,)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3. 8}$$

olur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{TN}} = \frac{\mathbb{T}'_{\beta_{TN}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TN}}\right\|}$ olduğundan β_{TN} eğrisinin asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{TN}} = \frac{(\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}} \tag{3.9}$$

olur $\mathbb{B}_{\beta_{TN}} = \mathbb{T}_{\beta_{TN}} \wedge \mathbb{N}_{\beta_{TN}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TN}} = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + \tau^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ -k & k & \tau \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

ve böylece

$$\mathbb{B}_{\beta_{TN}} = \frac{(k\delta_3 - \tau\delta_2)\mathbb{T} + (\tau\delta_1 + k\delta_3)\mathbb{N} + (k\delta_2 + k\delta_1)\mathbb{B}}{\sqrt{2k^2 + \tau^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}} \tag{3.11}$$

ifadesi elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{TN} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(k^2 + k')\mathbb{T} + (k' - k^2 - \tau^2)\mathbb{N} + (k\tau + \tau')\mathbb{B}\} \tag{3.12}$$

ve

$$\beta'''_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.13}$$

bulunur. Burada;

$$\begin{aligned} \omega_1 &= k^3 + k(\tau^2 - 3k') - k'' \\ \omega_2 &= -k^3 - k(\tau^2 + 3k') - 3\tau\tau' + k'' \\ \omega_3 &= -k^2\tau - \tau^3 + 2\tau k' + k\tau' + \tau'' \end{aligned} \tag{3.14}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.2), (3.12), (3.13) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa β_{TN} eğrisinin $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu olarak,

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\begin{bmatrix} (k^2 + \tau^2 - k')(k\omega_3 + \tau\omega_1) + \\ k(\tau' + k\tau)(\omega_1 + \omega_2) + \\ (k\omega_3 - \tau\omega_2)(k^2 + k') \end{bmatrix}}{[\tau(2k^2 + \tau^2) + k\tau' - \tau k']^2 + (k\tau' - k'\tau)^2 + (2k^3 + k\tau^2)^2} \tag{3.15}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.1. s yay paramatresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere TN-Smarandache eğrisinin eğriliği $k_{\beta_{TN}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{TN}}$ aşağıdaki gibidir;

$$k_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}}{(2.k^2 + \tau^2)^2} \sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.16}$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\begin{bmatrix} (k^2+\tau^2-k')(k\omega_3+\tau\omega_1)+ \\ k(\tau'+k\tau)(\omega_1+\omega_2)+ \\ (k\omega_3-\tau\omega_2)(k^2+k') \end{bmatrix}}{[\tau(2k^2+\tau^2)+k\tau'-\tau k']^2+(k\tau'-k'\tau)^2+(2k^3+k\tau^2)^2} \tag{3.17}$$

dır.

3.2. TB-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.2.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ olmak üzere TB-Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s)\right) \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır(Ahmad.T,2010). Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek TB- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{TB}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}((k-\tau)\mathbb{N}) \tag{3.19}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{TB}}{ds_\beta}\right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{(k-\tau)^2}{2}} = \frac{|k-\tau|}{\sqrt{2}} \tag{3.20}$$

bulunur. Buradan $\beta_{TB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{TB}} = \begin{cases} \mathbb{N} & k > \tau \\ -\mathbb{N} & k < \tau \end{cases} \tag{3.21}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TB}} = \begin{cases} -k\,\mathbb{T} + \tau\,\mathbb{B} & k > \tau \\ k\,\mathbb{T} - \tau\,\mathbb{B} & k < \tau \end{cases} \tag{3.22}$$

ifadesini buluruz. Bu denklemden $\beta_{TB}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{TB}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{TB}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TB}}\right\| = \sqrt{k^2 + \tau^2} \tag{3.23}$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{TB}} = \dfrac{\mathbb{T}'_{\beta_{TB}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TB}}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{TB}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \begin{cases} -k\,\mathbb{T} + \tau\,\mathbb{B} & k > \tau \\ k\,\mathbb{T} - \tau\,\mathbb{B} & k < \tau \end{cases} \tag{3.24}$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{TB}} = \mathbb{T}_{\beta_{TB}} \wedge \mathbb{N}_{\beta_{TB}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TB}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & \tau \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

ve böylece,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TB}} = \frac{\tau\,\mathbb{T} + k\,\mathbb{B}}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \tag{3.26}$$

ifadesi bulunur. Torsiyonu bulmak için β_{TB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-k^2 + k\tau)\mathbb{T} + (k' - \tau')\mathbb{N} + (k\tau - \tau^2)\mathbb{B}\} \tag{3.27}$$

ve

$$\beta'''_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.28}$$

bulunur. Burada;

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -3kk' + 2k\tau' + k'\tau \\ \omega_2 &= (\tau - k)(\tau^2 + k^2) + k'' - \tau'' \\ \omega_3 &= -3\tau\tau' + 2\tau k' + k\tau' \end{aligned} \tag{3.29}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.19), (3.27), (3.28) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{[(k^2+\tau^2-2k\tau)\,(k\omega_3+\tau\,\omega_1)]}{\tau^2[k(k-2\tau)+\tau^2]^2+(k^2+\tau^2-2k\tau)^2} \tag{3.30}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2. s yay paramatresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere TB-Smarandache eğrisinin β_{TB} eğriliği ve torsiyonu $\tau_{\beta_{TB}}$ aşağıdaki gibidir;

$$k_{\beta_{TB}} = \sqrt{k^2 + \tau^2} \tag{3.31}$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{[(k^2+\tau^2-2k\tau).(k.\omega_3+\tau.\omega_1)]}{\tau^2[k(k-2\tau)+\tau^2]^2+(k^2+\tau^2-2k\tau)^2} \tag{3.32}$$

dır.

3.3. NB-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.3.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ olmak üzere NB-Smarandache eğrisi,

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)\right) \tag{3.33}$$

şeklinde tanımlanır (Ahmad.T,2010). Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edelim. O halde NB- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{NB}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k\mathbb{T} - \tau\mathbb{N} + \tau\mathbb{B}) \tag{3.34}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{NB}}{ds_\beta}\right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{k^2+2\tau^2}{2}} \tag{3.35}$$

bulunur. Buradan $\beta_{NB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{NB}} = \frac{(-k\,\mathbb{T} - \tau\,\mathbb{N} + \tau\,\mathbb{B})}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \tag{3.36}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (k^2 + 2\tau^2)k\tau + 2\tau(k\tau' - \tau k') \\
\delta_2 &= -(k^2 + 2\tau^2)(k^2 + \tau^2) + k(k'\tau - \tau' k) \\
\delta_3 &= (k^2 + 2\tau^2)(-\tau^2) + k(k\tau' - k'\tau)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{NB}} = \frac{\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B}}{(k^2 + 2\,\tau^2)^{3/2}} \tag{3.38}$$

ifadesini buluruz. O zaman (3.38) ifadesini şu şekilde yazabiliriz,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}}{(k^2+2\,\tau^2)^2}(\delta_1\,\mathbb{T}+\delta_2\,\mathbb{N}+\delta_3\,\mathbb{B}) \tag{3.39}$$

Bu denklemden $\beta_{NB}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{NB}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{NB}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{NB}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{(k^2+2\,\tau^2)^2}\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2} \tag{3.40}$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{NB}} = \frac{\mathbb{T}'_{\beta_{NB}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{NB}}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{NB}} = \frac{(\delta_1\,\mathbb{T}+\delta_2\,\mathbb{N}+\delta_3\,\mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}} \tag{3.41}$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{NB}} = \mathbb{T}_{\beta_{NB}} \wedge \mathbb{N}_{\beta_{NB}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$\mathbb{B}_{\beta_{NB}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+2\tau^2}\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ -k & -\tau & \tau \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.42}$$

ve böylece

$$\mathbb{B}_{\beta_{NB}} = \frac{(-\tau\,\delta_2-\tau\,\delta_3)\,\mathbb{T}+(\tau\,\delta_1+k\,\delta_3)\,\mathbb{N}+(\tau\,\delta_1-k\,\delta_2)\,\mathbb{B}}{\sqrt{k^2+2\tau^2}.\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}} \tag{3.43}$$

ifadesi elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{NB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-k'+k\tau)\mathbb{T}+(-k^2-\tau^2-\tau')\mathbb{N}+(\tau'-\tau^2)\mathbb{B}\} \tag{3.44}$$

ve

$$\beta'''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.45}$$

bulunur Burada;

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (\tau^2 + k^2)k + (2k\tau' - \tau k') - k'' \\
\omega_2 &= (\tau^2 + k^2)\tau - 3(kk' + \tau\tau') \\
\omega_3 &= (\tau^2 + k^2)(-\tau) - 3\tau\tau' + \tau''
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.34), (3.44), (3.45) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}\begin{bmatrix}(k^2+2\tau^2)\,(k\omega_3+\tau\omega_1)+ \\ (k\tau'-\tau k')(\omega_2+\omega_3)+ \\ 2k\tau^2\omega_2\end{bmatrix}}{(2\tau^2+k^2)^2\tau^2+(k(2\tau^2+k^2)+k\tau'-\tau k')^2+(k\tau'-\tau k'+2k\tau^2)} \tag{3.47}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.3 s yay paramatresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere NB-Smarandache eğrisinin $k_{\beta_{NB}}$ eğriliği ve torsiyonu $\tau_{\beta_{NB}}$ aşağıdaki gibidir:

$$k_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}}{(k^2+2\tau^2)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.48}$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}\begin{bmatrix}(k^2+2\tau^2)(k.\omega_3+\tau.\omega_1)+ \\ (k\tau'-\tau k')(\omega_2+\omega_3)+ \\ 2k\tau^2\omega_2\end{bmatrix}}{(2\tau^2+k^2)^2\tau^2+(k(2\tau^2+k^2)+k\tau'-\tau k')^2+(k\tau'-\tau k'+2k\tau^2)} \tag{3.49}$$

3.4. TNB-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.4.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ olmak üzere TNB-Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ (\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)) \tag{3.50}$$

şeklinde tanımlanır(Ahmad.T,2010). Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek TNB- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak ,

$$\frac{d\beta_{TNB}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-k \ \mathbb{T} + (k-\tau) \ \mathbb{N} + \tau \ \mathbb{B}) \tag{3.51}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\| \frac{d\beta_{TNB}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{2k^2+2\tau^2-2k\tau}{3}} \tag{3.52}$$

bulunur. Buradan $\beta_{TNB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{TNB}} = \frac{(-k \ \mathbb{T} + (k-\tau) \ \mathbb{N} + \tau \ \mathbb{B})}{\sqrt{2k^2+2\tau^2-2k\tau}} \tag{3.53}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= k\tau[4k(k-\tau) + 2(\tau' + \tau^2) + k'] - k^2(2k^2 + \tau') - 2k'\tau^2 \\
\delta_2 &= 2k\tau[(k-\tau)^2 + 2\tau - 2\tau'] - 2(k^4 + \tau^4) + k'\tau^2 - k^2\tau' \\
\delta_3 &= \tau[2k(k^2 + 4\tau^2 - k' - \tau' - 2k\tau) + (\tau \, k' + \tau' - 2\tau^3)]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}} = \frac{\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B}}{(\,2\,k^2 + 2\tau^2 - 2k\tau\,)^{3/2}} \tag{3.55}$$

ifadesini buluruz. O zaman (3.55) ifadesini şu şekilde yazabiliriz;

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}(\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B})}{(2k^2 + 2\,\tau^2 - 2k\tau)^2} \tag{3.56}$$

bu denklemden $\beta_{TNB}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{TNB}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{TNB}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{(2k^2 + 2\,\tau^2 - 2k\tau)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.57}$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{TNB}} = \frac{\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}}}{\|\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}}\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{TNB}} = \frac{(\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}} \tag{3.58}$$

olur . $\mathbb{B}_{\beta_{TNB}} = \mathbb{T}_{\beta_{TNB}} \wedge \mathbb{N}_{\beta_{TNB}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TNB}} = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 2\tau^2 - 2k\tau}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ -k & k-\tau & \tau \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.59}$$

ve böylece,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TNB}} = \frac{((k-\tau)\delta_3 - \tau\delta_2)\,\mathbb{T} + (\tau\delta_1 + k\delta_3)\,\mathbb{N} + \big((\tau-k)\delta_1 - k\delta_2\big)\,\mathbb{B}}{\sqrt{2k^2 + 2\tau^2 - 2k\tau}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}} \tag{3.60}$$

ifadesi elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{TNB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(k^2 + k' + k\tau)\mathbb{T} + (k' - k^2 - \tau^2 - \tau')\mathbb{N} + (k\tau + \tau' - \tau^2)\mathbb{B}\} \quad (3.61)$$

ve

$$\beta'''_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \quad (3.62)$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= k(k^2+\tau^2 - 3k') - k'' - k'\tau \\ \omega_2 &= -2k^2(k + \tau) + \tau^2(\tau - k) - 4kk' - 3\tau\tau' + k'' - \tau'' \\ \omega_3 &= -\tau(k^2+\tau^2) - 3\tau\tau' + 2k'\tau + k\tau' + \tau'' \end{aligned} \quad (3.63)$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.51), (3.61), (3.62) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{2\sqrt{3}\, k[(k\tau' - k'\tau)(\omega_3 + \omega_1 + \omega_2)\tau.(k - \tau) + k(k\omega_3 - \tau\omega_2 - \tau\omega_3)]}{[2k(k - \tau) + k\tau' - \tau k']^2 + (-2k\tau^2 + k\tau' - k'\tau)^2 + (2k^3 + k\tau' - k'\tau)^2} \quad (3.64)$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.4 s yay parametresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere TNB-Smarandache eğrisinin eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibidir;

$$k_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(2k^2 + 2\,\tau^2 - 2k\tau\right)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \quad (3.65)$$

ve

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{2\sqrt{3}k[(k\tau' - k'\tau)(\omega_3 + \omega_1 + \omega_2)\tau.(k - \tau) + k(k\omega_3 - \tau\omega_2 - \tau\omega_3)]}{[2k(k - \tau) + k\tau' - \tau k']^2 + (-2k\tau^2 + k\tau' - k'\tau)^2 + (2k^3 + k\tau' - k'\tau)^2} \quad (3.66)$$

dır.

3.5. TC-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.5.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ ve W, Darboux vektör alanının B Binormal vektör alanı ile yaptığı açı φ olsun. $C = sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\mathbb{B}$ vektör alanı birim Darboux vektörü olarak alınırsa,

$$\beta_{TC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{T}(s) + C(s)\right) \tag{3.67}$$

şeklinde tanımlanan β_{TC} eğrisine TC-Smarandache eğrisi denir(Ahmad.T,2010).

Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek TC- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{TC}}{ds_\beta} . \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi' cos\varphi\mathbb{T} + k\,\mathbb{N} - \varphi' sin\varphi\,\mathbb{B}\} \tag{3.68}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{TC}}{ds_\beta}\right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k^2 + (\varphi')^2} \tag{3,69}$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{TC}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{TC}} = \frac{\left(\varphi' cos\varphi\mathbb{T} + k\,\mathbb{N} - \varphi' sin\varphi\,\mathbb{B}\right)}{\sqrt{k^2 + (\varphi')^2}} \tag{3.70}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektör alanının tekrar türevini alırsak,

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \varphi'' cos\varphi - (\varphi')^2 sin\varphi - k^2 - kk'\varphi' cos\varphi - 2(\varphi')^2\varphi'' cos\varphi \\
\delta_2 &= k\varphi' cos\varphi + k' + \tau\varphi' sin\varphi - k^2 k' - 2k\varphi'\varphi'' \\
\delta_3 &= -\varphi'' sin\varphi - (\varphi')^2 cos\varphi + k\tau + kk'\varphi' sin\varphi + 2(\varphi')^2\varphi'' sin\varphi
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TC}} = \frac{\sqrt{2}(\delta_1\, \mathbb{T}+\delta_2\, \mathbb{N}+\delta_3\, \mathbb{B})}{(k^2+(\varphi')^2)^2} \tag{3.72}$$

elde ederiz. O halde $\beta_{TC}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{TC}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{TC}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TC}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{(k^2+(\varphi')^2)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.73}$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{TC}} = \dfrac{\mathbb{T}'_{\beta_{TC}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TC}}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{TC}} = \frac{(\delta_1\, \mathbb{T}+\delta_2\, \mathbb{N}+\delta_3\, \mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}} \tag{3.74}$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{TC}}(s) = \mathbb{T}_{\beta_{TC}}(s) \wedge \mathbb{N}_{\beta_{TC}}(s)$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$u = \sqrt{k^2 + (\varphi')^2} \qquad v = \sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}$$

$$\mathbb{B}_{\beta_{TC}} = \frac{1}{u\, v}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ \varphi' cos\varphi & k & -\varphi' sin\varphi \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.75}$$

şeklinde hesaplanarak,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TC}} = \frac{1}{u\, v}\left\{\begin{matrix} (k\,\delta_3 + \varphi'\,\delta_2\, sin\varphi)\mathbb{T} \\ -\varphi'(\delta_1\, sin\varphi + \delta_3 cos\varphi)\mathbb{N} \\ +(\delta_2\,\varphi'\, cos\varphi - k\,\delta_1)\mathbb{B} \end{matrix}\right\} \tag{3.76}$$

ifadesi bulunur. Torsiyonu bulmak için β_{TC} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{TC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} (\varphi''cos\varphi - (\varphi')^2sin\varphi - k^2)\mathbb{T} \\ +(k' + k\varphi'cos\varphi + \tau\varphi'sin\varphi)\mathbb{N} \\ +(k\tau - \varphi''sin\varphi - (\varphi')^2cos\varphi)\mathbb{B} \end{Bmatrix} \tag{3.77}$$

ve

$$\beta'''_{TC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.78}$$

olarak bulunur. Burada;

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \big((k^2 + \tau^2) + (\varphi')^2\big)(-\varphi'cos\varphi) + \varphi'''cos\varphi - 3\varphi'\varphi''sin\varphi - 3kk' \\ \omega_2 &= 2\varphi''(kcos\varphi + \tau sin\varphi) + \varphi'(k'cos\varphi + \tau'sin\varphi) + k'' - k^2 - k\tau^2 \\ \omega_3 &= (k^2 + \tau^2)\varphi'sin\varphi + ((\varphi')^3 - \varphi''')sin\varphi - 3\varphi'\varphi''cos\varphi + 2k'\tau + \tau'k \end{aligned} \tag{3.79}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.68), (3.78), (3.79) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{1=}&(k^2 + (\varphi')^2)(\tau - kcos\varphi) + (k^3 - \tau\varphi'')cos\varphi + k'\varphi'sin\varphi \\ \mu_2 &= (\varphi')^3 \\ \mu_3 &= k(k^2 + (\varphi')^2) + cos\varphi(k'\varphi' - k\varphi'') \end{aligned} \tag{3.80}$$

olmak üzere,

$$\tau_{\beta_{TC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\omega_1\,\mu_1 + \omega_2\,\mu_2 + \omega_3\,\mu_3)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.81}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.5. s yay paramatresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere TC-Smarandache eğrisinin eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibidir:

$$k_{\beta_{TC}} = \frac{\sqrt{2}}{(k^2+(\varphi')^2)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.82}$$

ve

$$\tau_{\beta_{TC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\omega_1\,\mu_1+\omega_2\,\mu_2+\omega_3\mu_3)}{{\mu_1}^2+{\mu_2}^2+{\mu_3}^2} \tag{3.83}$$

dır.

3.6. NC-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.6.1. s yay paramatresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ ve W, Darboux vektör alanının B Binormal vektörü ile yaptığı açı φ olsun. $C = sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\mathbb{B}$ vektörü birim Darboux vektörü olarak alınırsa,

$$\beta_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\big(\mathbb{N}(s) + C(s)\big) \tag{3.84}$$

şeklinde tanımlanan β_{NC} eğrisine NC-Smarandache eğrisi denir(Ahmad.T,2010).

Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek NC- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{NC}}{ds_\beta}\,\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi' cos\varphi\mathbb{T} + (\tau - \varphi' sin\varphi\,)\mathbb{B}\} \tag{3.85}$$

ifadesni elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{NC}}{ds_\beta}\right\|=1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|} \tag{3.86}$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{NC}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{NC}} = \frac{\left(\varphi' cos\varphi - k\right)\mathbb{T} + (\tau - \varphi' sin\varphi)\mathbb{B}\big)}{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}} \tag{3.87}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektör alanının tekrar türevini alırsak,

$\delta_1 = \tau^2\varphi'' cos\varphi - k\varphi'\varphi'' \cos^2\varphi - \tau\varphi'\varphi'' sin\varphi cos\varphi - (\varphi')^4 sin\varphi - k^2 (\varphi')^2 sin\varphi$
$-\tau^2(\varphi')^2 sin\varphi + 2k(\varphi')^3 sin\varphi cos\varphi + 2\tau(\varphi')^3 \sin^2\varphi - k' (\varphi')^2 - \tau^2 k' - 2kk'\varphi' cos\varphi$
$-2\tau k'\varphi' sin\varphi - \tau\tau'\varphi' cos\varphi + k'(\varphi')^2 \cos^2\varphi + \tau' (\varphi')^2 sin\varphi cos\varphi + k\varphi'\varphi'' + k\tau\tau' -$
$k\tau\varphi'' sin\varphi - \varphi'\tau' k sin\varphi$

$\delta_2 = k(\varphi')^3 cos\varphi + 3k^3\varphi' cos\varphi + 3\tau^2 k\varphi' cos\varphi - 2k^2(\varphi')^2 \cos^2\varphi - k^2(\varphi')^2 - k^4 -$
$2k^2\tau^2 + 3k^2\tau\varphi' sin\varphi - 4k\tau(\varphi')^2 sin\varphi cos\varphi - \tau^2(\varphi')^2 + 3\tau^3\varphi' sin\varphi + 2(\tau\varphi')^2 \sin^2\varphi$

$\delta_3 = \tau'(\varphi')^2 + k^2\tau' - 2k\tau'\varphi' cos\varphi - k^2\varphi'' sin\varphi + k\varphi'\varphi'' sin\varphi cos - \tau'(\varphi')^2 \sin^2\varphi$
$+\tau\varphi'\varphi'' \sin^2\varphi - (\varphi')^4 cos\varphi - k^2(\varphi')^2 cos\varphi - (\tau\varphi')^2 cos\varphi + 2k\tau\varphi'\varphi''(\varphi')^3 \cos^2\varphi$
$+2\tau(\varphi')^3 sin\varphi cos\varphi - \tau kk' + \tau k\varphi'' cos\varphi + \tau k'\varphi' cos\varphi$

(3.88)

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B})}{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|)^2} \tag{3.89}$$

elde ederiz. O halde $\beta_{NC}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{NC}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{NC}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{NC}}\right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\left({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2\right)}}{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|)^2} \tag{3.90}$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{NC}} = \frac{\mathbb{T}'_{\beta_{NC}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{NC}}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{NC}} = \frac{(\delta_1\, \mathbb{T}+\delta_2\, \mathbb{N}+\delta_3\, \mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}} \tag{3.91}$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{NC}}(s) = \mathbb{T}_{\beta_{NC}}(s) \wedge \mathbb{N}_{\beta_{NC}}(s)$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$u = \sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}$ $v = \sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}$ olarak alınırsa

$$\mathbb{B}_{\beta_{NC}} = \frac{1}{u\, v}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ \varphi' cos\varphi - k & o & \tau - \varphi' sin\varphi \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.92}$$

şeklinde hesaplanarak,

$$\mathbb{B}_{\beta_{NC}} = \frac{1}{u\, v}\left\{\begin{matrix} \delta_2(\varphi' sin\varphi - \tau)\mathbb{T} \\ +[\delta_1(\tau - \varphi' sin\varphi) - \delta_3(\varphi' cos\varphi - k)]\mathbb{N} \\ +(\delta_2(\varphi' cos\varphi - k)\mathbb{B} \end{matrix}\right\} \tag{3.93}$$

ifadesi bulunur. Torsiyonu bulmak için β_{NC} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix} (\varphi'' cos\varphi - (\varphi')^2 sin\varphi - k')\mathbb{T} \\ +(-k^2 - \tau^2 + k\varphi' cos\varphi + \tau\varphi' sin\varphi)\mathbb{N} \\ +(\tau' - \varphi'' sin\varphi - (\varphi')^2 cos\varphi)\mathbb{B} \end{matrix}\right\} \tag{3.94}$$

ve

$$\beta'''_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.95}$$

olarak bulunur. Burada;

$$\omega_1 = (k^3 + k\tau^2 - k'') - \varphi' sin\varphi(k\tau + 3\varphi'') + cos\varphi(\varphi''' - (\varphi')^3 - k^2\varphi')$$
$$\omega_2 = -3kk' - 3\tau\tau' + sin\varphi(2\tau\varphi'' + \tau'\varphi' - 2k(\varphi')^2) \tag{3.96}$$
$$+cos\varphi(2k\varphi'' + k'\varphi' + 2\tau(\varphi')^2)$$
$$\omega_3 = \tau'' - \tau^3 - k^2\tau + \varphi' cos\varphi(k\tau - 3\varphi'') + sin\varphi(\tau^2\varphi' - \varphi'' + (\varphi')^3)$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.85), (3.94), (3.95) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\mu_{1=}(k(\varphi')^2 sin\varphi cos\varphi - k\tau\varphi') + (\tau(\varphi')^2 sin\varphi - k^2\varphi' - 2\tau^2\varphi')sin\varphi + k^2\tau - \tau^3$$
$$\mu_2 = (\tau\varphi'' - \tau'\varphi' - k(\varphi')^2)cos\varphi + (-\tau(\varphi')^2 - k'\varphi' - k\varphi'')sin\varphi + (\varphi')^3$$
$$k\tau' - \tau k' \tag{3.97}$$
$$\mu_3 = (k(\varphi')^2 + \tau(\varphi')^2 sin\varphi - \tau^2\varphi' - 2k^2\varphi')cos\varphi - k\tau\varphi' sin\varphi + k^3 + k\tau^2$$

olmak üzere,

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\,\omega_1\,\mu_1 + \omega_2\,\mu_2 + \omega_3\,\mu_3)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.98}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.6. s yay parametresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere NC-Smarandache eğrisinin eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibidir,

$$k_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}}{(k^2 + (\varphi')^2)^2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2} \tag{3.99}$$

ve

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\omega_1\,\mu_1 + \omega_2\,\mu_2 + \omega_3\,\mu_3\,)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.100}$$

dır.

3.7. BC-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.7.1. s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ ve W, Darboux vektör alanının B Binormal vektörü ile yaptığı açı φ olsun. $C = sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\mathbb{B}$ vektörü birim Darboux vektörü olarak alınırsa,

$$\beta_{BC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\mathbb{B}(s) + C(s)\right) \tag{3.101}$$

şeklinde tanımlanan β_{BC} eğrisine BC-Smarandache eğrisi denir(Ahmad.T,2010).
Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek BC- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{BC}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi' cos\varphi\mathbb{T} + (-\tau)\mathbb{N} + (-\varphi' sin\varphi\ )\mathbb{B}\} \tag{3.102}$$

ifadesni elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\|\frac{d\beta_{BC}}{ds_\beta}\right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi')^2 + \tau^2} \tag{3,103}$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{BC}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{BC}} = \frac{\{\ \varphi' cos\varphi\ \mathbb{T}\ -\tau\ \mathbb{N} - \varphi' sin\varphi\ \mathbb{B}\}}{\sqrt{(\varphi')^2 + \tau^2}} \tag{3.104}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\delta_1 = ((\varphi')^2 + \tau^2)(k\tau - (\varphi')^2 sin\vartheta) + \tau^2 cos\varphi(\varphi'' - \tau\varphi')$$
$$\delta_2 = ((\varphi')^2 + \tau^2)k\varphi' cos\varphi + \varphi'(\tau\varphi'' - \varphi'\tau') \qquad (3.105)$$
$$\delta_3 = \tau^2((\varphi')^2 cos\varphi - \varphi'' sin\varphi) + \tau\tau'\varphi' sin\varphi + (\varphi')^2((\varphi')^2 - \tau^2) - \tau^4$$

olmak üzere,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{BC}} = \frac{\sqrt{2}(\delta_1\, \mathbb{T} + \delta_2\, \mathbb{N} + \delta_3\, \mathbb{B})}{((\varphi')^2 + \tau^2)^2} \qquad (3.106)$$

elde ederiz. O halde $\beta_{BC}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{BC}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{BC}} = \left\| \mathbb{T}'_{\beta_{BC}} \right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}}{((\varphi')^2 + \tau^2)^2} \qquad (3.107)$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{BC}} = \dfrac{\mathbb{T}'_{\beta_{BC}}}{\left\| \mathbb{T}'_{\beta_{BC}} \right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{BC}} = \frac{(\delta_1\, \mathbb{T} + \delta_2\, \mathbb{N} + \delta_3\, \mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}} \qquad (3.108)$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{BC}}(s) = \mathbb{T}_{\beta_{BC}}(s) \wedge \mathbb{N}_{\beta_{BC}}(s)$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$u = \sqrt{((\varphi')^2 + \tau^2)} \quad v = \sqrt{\left({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2\right)}$$

olmak üzere

$$\mathbb{B}_{\beta_{BC}} = \frac{1}{u\, v} \begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ \varphi' cos\varphi & -\tau & -\varphi' sin\varphi \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \qquad (3.109)$$

şeklinde hesaplanarak,

$$\mathbb{B}_{\beta_{BC}} = \frac{1}{u.v}\begin{Bmatrix} (\delta_2\, \varphi'' sin\varphi - \tau\, \delta_3)\ \mathbb{T} \\ -\varphi'[\delta_1\, sin\varphi + \delta_3 cos\varphi]\mathbb{N} \\ +(\delta_1\tau + \delta_2\varphi' cos\varphi)\mathbb{B} \end{Bmatrix} \tag{3.110}$$

ifadesi bulunur. Torsiyonu bulmak için β_{BC} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} (\varphi'' cos\varphi - (\varphi')^2 sin\varphi + k\tau)\mathbb{T} \\ +(-\tau' + k\varphi' cos\varphi + \tau\varphi' sin\varphi)\mathbb{N} \\ +(-\tau^2 - \varphi'' sin\varphi - (\varphi')^2 cos\varphi)\mathbb{B} \end{Bmatrix} \tag{3.111}$$

ve

$$\beta'''_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.112}$$

dır. Burada;

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\varphi''' - (\varphi')^3 - k^2\varphi')cos\varphi + (-3\varphi'\varphi'' - k\tau\varphi')sin\varphi + 2k\tau' + k'\tau \\ \omega_2 &= (2k\varphi'' + k'\varphi')cos\varphi + (2\tau\varphi'' + \tau'\varphi' - 2k(\varphi')^2)sin\varphi + k^2\tau - \tau'' \\ \omega_3 &= \varphi'(k\tau - 3\varphi'')cos\varphi + (\tau^2\varphi' - \varphi'' + (\varphi')^3)sin\varphi - 3\tau\tau' \end{aligned} \tag{3.113}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.102), (3.111), (3.112) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{1=}&(\varphi')^2(\tau cos\varphi + \tau \sin^2\varphi + ksin\varphi cos\varphi) + (\tau\varphi'' - \tau'\varphi')sin\varphi + \tau^3 \\ \mu_2 &= (\varphi')^3 - \varphi'(k\tau + \varphi'' cos\varphi + \varphi'')sin\varphi + \varphi'\tau^2 cos\varphi \\ \mu_3 &= k((\varphi')^2 - \tau^2) + (\tau\varphi'' - \tau'\varphi')cos\varphi - \tau(\varphi')^2 sin\varphi \end{aligned} \tag{3.114}$$

olmak üzere torsiyon,

$$\tau_{\beta_{BC}} = \frac{\sqrt{2}\,(\omega_1\,\mu_1 + \omega_2\,\mu_2 + \omega_3\,\mu_3)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.115}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.7. s yay parametresi ve $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere BC-Smarandache eğrisinin eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibidir.

$$k_{\beta_{BC}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + {\delta_3}^2}}{((\varphi')^2 + \tau^2)^2}$$

ve

$$\tau_{\beta_{BC}} = \frac{\sqrt{2}(\omega_1\, \mu_1 + \omega_2\, \mu_2 + \omega_3\, \mu_3)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.116}$$

dır.

3.8. TNBC-Smarandache Eğrisi

Tanım 3.8.1. s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ ve W, Darboux vektör alanının B Binormal vektörü ile yaptığı açı φ olsun. $C = sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\mathbb{B}$ vektörü birim Darboux vektörü olarak alınırsa,

$$\beta_{TNBC}(s) = \frac{1}{2}\ \big(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s) + C(s)\big) \tag{3.117}$$

şeklinde tanımlanan β_{TNBC} eğrisine TNBC-Smarandache eğrisi denir(Ahmad.T,2010). Bu eğrinin yay parametresini s_β ile ifade edersek TNBC- Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayabiliriz. Bunun için eğrinin türevini alırsak,

$$\frac{d\beta_{TNBC}}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{2}\{(\varphi' cos\varphi - k)\mathbb{T} + (k - \tau)\mathbb{N} + (\tau - \varphi' sin\varphi\ )\mathbb{B}\} \tag{3.118}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin normunu alırsak,

$$\left\| \frac{d\beta_{TNBC}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan,

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{2}\sqrt{(\varphi')^2 + 2(k^2 + \tau^2 - k\tau) - 2\varphi'(kcos\varphi + \tau sin\varphi)} \qquad (3.119)$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{TNBC}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbb{T}_{\beta_{TNBC}} = \frac{\{(\varphi' cos\varphi - k)\mathbb{T} + (k-\tau)\mathbb{N} + (\tau - \varphi' sin\varphi\ )\mathbb{B}\}}{\sqrt{(\varphi\prime)^2 + 2(k^2+\tau^2-k\tau) - 2\vartheta\prime(kcos\varphi + \tau sin\varphi)}} \qquad (3.120)$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün tekrar türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\delta_1 = {} & (\varphi')^2(-(\varphi')^2 sin\varphi - k' - k^2 + k'\cos^2\varphi + \tau' sin\varphi os\varphi + k^2 sin\varphi) \\
& +(k^2+\tau^2)(\varphi'' cos\varphi - 2k - 2k') + 2k\tau(2k^2 + \tau^2 + k' + \tau' - k\tau) \\
& +2\tau^2\varphi'(cos\varphi - k' sin\varphi) - kk'\varphi'(sin\varphi + cos\varphi) + 2\tau(\varphi')^3 - k\varphi'\varphi'' \\
& +(k+\tau)(\varphi'\varphi''\cos^2\varphi) - 2(\varphi')^2(k^2+\tau^2+k\tau)sin\varphi - 2\varphi' sin\varphi(k'\tau - \tau' k) \\
& +2kk' - kk'\tau - k^2\tau' + k^2\varphi''(cos\varphi - 2sin\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 = {} & (cos\varphi - sin\varphi)[2k^3\varphi' + \tau^2\varphi'' + kk'\varphi' + k^2\varphi'' - \varphi'\varphi''\|W\|] \\
& +\|W\|^2[2k\tau - 2(\varphi')^2] + \|W\|(\varphi')^3 + (\varphi')^2[-k^2 - \tau^2 + k' - \tau'] \qquad (3.121) \\
& 2(k^3-\tau^3)\varphi' cos\varphi - 2\,(k^4+\tau^4) + (k\tau + \tau\tau')\varphi' sin\varphi + (k'-\tau')k\tau \\
& -\ k^2(\tau' + 2\tau^2) + (2k^2+\tau^2)\tau\varphi' sin\varphi \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3 = {} & (cos\varphi - sin\varphi)[2\tau^2\varphi'' - 2\tau^3\varphi' - 2k^2(\varphi')^2 - 2k\tau sin\varphi - 2k^2\tau - 3\tau k'\varphi'] \\
& +\left(2\tau^2\tau' + k'^{\tau^2} - \tau\varphi\varphi'''\right)sin\varphi + 2k\tau(k^2 + 2\tau^2) + 2k\tau''\left((k-\tau)\right) + \tau^2\varphi'' \\
& +(\varphi')^2(-(\varphi')^2 cos\varphi + k\tau - \tau^2 + \tau'' - \varphi'' sin\varphi)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TNBC}} = \frac{2\,(\delta_1\,\mathbb{T}+\delta_2\,\mathbb{N}+\delta_3\,\mathbb{B})}{\left((\varphi')^2+2(k^2+\tau^2-k\tau)-2\varphi'(kcos\varphi+\tau sin\varphi)\right)^2} \tag{3.122}$$

elde ederiz. O halde $\beta_{TNBC}(s)$ eğrisinin $k_{\beta_{TNBC}}$ eğriliği,

$$k_{\beta_{TNBC}} = \left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TNBC}}\right\| = \frac{2\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}}{\left((\varphi')^2+2\,(k^2+\tau^2-k\tau)-2\varphi'(kcos\varphi+\tau sin\varphi)\right)^2}$$

(3.123)

bulunur. Diğer taraftan $\mathbb{N}_{\beta_{BTNBC}} = \frac{\mathbb{T}'_{\beta_{TNBC}}}{\left\|\mathbb{T}'_{\beta_{TNBC}}\right\|}$ olduğundan asli normal vektör alanı,

$$\mathbb{N}_{\beta_{TNBC}} = \frac{(\delta_1\,\mathbb{T}+\delta_2\,\mathbb{N}+\delta_3\,\mathbb{B})}{\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}} \tag{3.124}$$

olur. $\mathbb{B}_{\beta_{TNBC}}(s) = \mathbb{T}_{\beta_{TNBC}}(s) \wedge \mathbb{N}_{\beta_{TNBC}}(s)$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$u = \sqrt{\left((\varphi')^2+2(k^2+\tau^2-k\tau)-2\varphi'(kcos\varphi+\tau sin\varphi)\right)}$$

$$v = \sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}$$

$$\mathbb{B}_{\beta_{TNBC}} = \frac{1}{u\,v}\begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ \varphi' cos\varphi - k & k-\tau & \tau-\varphi' sin\varphi \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \tag{3.125}$$

şeklinde hesaplanarak,

$$\mathbb{B}_{\beta_{TNBC}} = \frac{1}{u.v}\left\{\begin{array}{c} [(k-\tau)\delta_3-\delta_2(\tau-\varphi' sin\varphi)]\mathbb{T} \\ +[\delta_1(\tau-\varphi' sin\varphi)-\delta_3(\varphi' cos\varphi-k)]\mathbb{N} \\ +[(\delta_2(\varphi' cos\varphi-k)-\delta_1(\tau-k)]\mathbb{B} \end{array}\right\} \tag{3.126}$$

ifadesi bulunur. Torsiyonu bulmak için β_{TNBC} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmamız gerekir. Buna göre;

$$\beta''_{TNBC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}(\varphi'' cos\varphi - (\varphi')^2\, sin\varphi + k\tau - k' - k^2)\mathbb{T} \\ +(-\tau' + k\varphi' cos\varphi + \tau\varphi' sin\varphi)\mathbb{N} \\ +(-\tau^2 - \varphi'' sin\varphi - (\varphi')^2 cos\varphi)\mathbb{B}\end{matrix}\right\} \tag{3.127}$$

ve

$$\beta'''_{TNBC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\omega_1\mathbb{T} + \omega_2\mathbb{N} + \omega_3\mathbb{B}\} \tag{3.128}$$

olarak bulunur. Burada;

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = (\varphi''' - (\varphi')^3 - k^2\varphi' - \tau^2\varphi')cos\varphi + (-3\varphi'\varphi''')sin\varphi + \|W\|^2 + 2\tau' - 3k' \\
&\omega_2 = (k-\tau)(k+\tau)^2 + 2\varphi''\|W\|^2 + \varphi'(k' cos\varphi + \tau' sin\varphi) - 3\tau\tau' - 2kk' + k'' \\
&-k' - \tau' \\
&\omega_3 = \|W\|^2(\vartheta' sin\varphi - \tau) - 3\varphi'\varphi'' cos\varphi - (\varphi''' + (\varphi')^3)sin\varphi - 3\tau\tau' + k\tau' + 2k'\tau \\
&+\tau''
\end{aligned} \tag{3.129}$$

dır. (2.3) bağıntısında (3.119), (3.127), (3.128) ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = \|W\|^2[2\tau(1 - sin\varphi cos\varphi + \varphi' - 2\varphi' sin\varphi)] + \\
&\|W\|(sin\varphi - cos\varphi)(\varphi'' sin\varphi - (\varphi')^2 cos\varphi) + \tau(\varphi')^2 \\
&\mu_2 = \|W\|[\varphi'\|W\| - (\varphi')^2(1 + 2sin\varphi cos)\varphi] + (\varphi')^3 - 2k\tau^2 \\
&\mu_3 = \|W\|^2[2k(1 - sin\varphi cos\varphi + \varphi' - 2\varphi' cos\varphi)] + \\
&(k-\tau)((\varphi')^2 sin\varphi - \varphi'' cos\varphi) + (k' - \tau')\varphi' cos\varphi + k(\varphi')^2
\end{aligned} \tag{3.130}$$

olmak üzere,

$$\tau_{\beta_{TNBC}} = \frac{2\,(\omega_1\,\mu_1 + \omega_2\,\mu_2 + \omega_3\,\mu_3)}{{\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 + {\mu_3}^2} \tag{3.131}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.8. $\beta; I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ olmak üzere TNBC-Smarandache eğrisinin eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibidir;

$$k_{\beta_{TNBC}} = \frac{2\sqrt{{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+{\delta_3}^2}}{\left((\varphi\prime)^2+2(k^2+\tau^2-k\tau)-2\varphi\prime(kcos\varphi+\tau sin\varphi)\right)^2} \tag{3.132}$$

ve

$$\tau_{\beta_{TNBC}} = \frac{2(\omega_1\mu_1+\omega_2\mu_2+\omega_3\mu_3)}{{\mu_1}^2+{\mu_2}^2+{\mu_3}^2} \tag{3.133}$$

dır.

4. SMARANDACHE EĞRİLERİNDE HELİSLİK

Bu bölümde bazı Smarandache eğrilerinin eğilim çizgisi olma durumları incelendi. Bunun için çeşitli Smarandache eğrilerinin τ/k oranı hesaplandı. Bunun sonucunda hangi hallerde $\tau/k = sabit$ sorusunun cevabı aranmaya çalışıldı.

Eğer Smarandache eğrisi bir adi helis ise bu eğrilerin (C^*) sabit pol eğrisinin involütleri olabileceği açıklandı. Şimdi bir eğrinin helis olma şartını inceleyelim.

4.1. Helis Eğrisi ve İnvolüt ile İlgili Teoremler

Teorem 4.1.1 $\mathbb{E}^3$ de bir $\beta(s)$ eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,

$$\beta(s) \text{ bir genel helisdir} \Leftrightarrow \forall\, s \in I \text{ için } \tau/k = sabit \quad ,$$

(Hacısaliğoğlu,1983).

İspat: $\Longrightarrow$ $\beta(s)$ genel bir helis olsun. β nın eksenini Sp$\{u\}$ ile gösterelim.

$$\langle \beta'(s), u \rangle = cos\varphi = \text{sabit}$$

β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s)\}$ olmak üzere,

$$\langle \mathbb{T}(s), u \rangle = cos\varphi$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki yanını türevlersek,

$$\langle k(s)\mathbb{N}(s), u \rangle = 0$$

$$k(s)\langle \mathbb{N}(s), u \rangle = 0 \qquad (4.1)$$

yazılabilir. O halde $u \in$ Sp$\{u\}$ dir. Bu ise ,

$$u = cos\varphi\mathbb{T}(s) + sin\varphi\, \mathbb{B}(s) \qquad (4.2)$$

demektir. (4.1) ifadesini tekrar türevlersek,

$$\langle -k(s)\mathbb{T}(s) + \tau(s)\mathbb{B}(s), u \rangle = 0$$

$$-k(s)\langle \mathbb{T}(s), u \rangle + \tau(s)\langle \mathbb{B}(s), u \rangle = 0 \qquad (4.3)$$

$$-k(s)cos\varphi + \tau(s)sin\varphi = 0$$

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \cot\varphi = \text{sabit}$$

$\Leftarrow \forall$ s$\in I$ için $\tau/k = \gamma = sabit$ olsun. $\gamma = cot\varphi$ olmak üzere

$$u = cos\varphi\mathbb{T}(s) + sin\varphi\ \mathbb{B}(s) \tag{4.4}$$

vektörünü tanımlayalım.

1. u sabit bir vektördür. Çünkü;

$$D_\alpha u = cos\varphi\langle k(s), \mathbb{N}(s)\rangle + sin\varphi\langle -\tau(s), \mathbb{N}(s)\rangle$$
$$D_\alpha u = (k(s)cos\varphi - \tau(s)sin\varphi)\ \mathbb{N}(s)$$

halbuki,

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \cot\varphi$$

yazılırsa $k(s)cos\varphi - \tau(s)sin\varphi = 0$ bulunur. Böylece,

$$D_\alpha u = 0 \Longrightarrow \text{u=sabit}$$

elde edilir.

2. β eğrisi ekseni Sp$\{u\}$ olan genel bir helistir. Çünkü,

$$\begin{aligned}\langle\beta'(s), u\rangle &= \langle\mathbb{T}(s), cos\varphi\mathbb{T}(s) + sin\varphi\mathbb{B}(s)\rangle \\ &= cos\varphi\langle\mathbb{T}(s), \mathbb{T}(s)\rangle + sin\varphi\langle\mathbb{T}(s), \mathbb{B}(s)\rangle \\ &= cos\varphi = sabit\end{aligned}$$

Teorem 4.1.2 3-boyutlu Öklid uzayı , $\mathbb{E}^3$ deki bir β eğrisinin $(\mathbb{T})$ teğetler göstergesi ve $(\mathbb{B})$ binormaller göstergesi (C^*) sabit pol eğrisinin birer küresel involütüdür(Hacısaliğoğlu,1983).

İspat: (C^*) sabit pol eğrisi ile hareketli pol eğrisinin teğetleri ortaktır. C = C(s) eğrisi ile verildiğinden yani $C(s) = \frac{W(s)}{\|W(s)\|}$ olduğundan C nin teğeti için,

$$W(s) = \tau\,\mathbb{T} + k\,\mathbb{B} \tag{4.5}$$

yani

$$k = \|W\| cos\varphi$$
$$\tau = \|W\| sin\varphi \tag{4.6}$$

ifadelerinden,

$$C(s) = \ sin\varphi \mathbb{T}(s) + cos\varphi\,\mathbb{B}(s) \tag{4.7}$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{dC}{ds} = C' = (sin\varphi)'\,\mathbb{T} + (cos\varphi)'\,\mathbb{B} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Öte yandan $(\mathbb{T})$ ve $(\mathbb{B})$ göstergelerinin türevleri, sırasıyla,

$$\frac{d\mathbb{T}}{ds} = \mathbb{T}' = k\,\mathbb{N} \tag{4.9}$$

$$\frac{d\mathbb{B}}{ds} = \mathbb{B}' = -\,\tau\mathbb{N}$$

olduğundan,

$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}}{ds} \rangle = 0$$
$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{B}}{ds} \rangle = 0 \tag{4.10}$$

bulunur. Bunlar da gösterir ki $\mathbb{T}(s)$ ve $\mathbb{B}(s)$; (C^*) nin birer involütüdür.

4.2. Smarandache Eğrilerinin Helis Eğrisi Olma Durumları

Şimdi TN-Smarandache eğrisi ile TB-Smarandache eğrisinin birbirine göre durumlarını inceleyelim.

Teorem 4.2.1. $\beta = \beta(s) \subset \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ ile oluşan TN-Smarandache eğrisi bir adi helis ise $\|W\| = 0$ olmak üzere TN ve TB Smarandache eğrileri (C*) sabit pol eğrisinin birer involütü olurlar.

İspat: TN ve TB Smarandache eğrilerini,

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s)\big)$$
$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s)\big)$$

şeklinde tanımlamıştık bu eğrilerin teğet vektörlerinin türevleri, sırasıyla,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TN}} = \frac{\delta_1\,\mathbb{T} + \delta_2\,\mathbb{N} + \delta_3\,\mathbb{B}}{(\,2\,k^2 + \tau^2\,)^{3/2}}$$
$$\mathbb{T}'_{\beta_{TB}} = k\,\mathbb{T} - \tau\ \mathbb{B}$$

dır. Buradan,

$$C(s) = \ sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\ \mathbb{B}$$

olmak üzere (3.1.5) ifadelerinde $\delta_1 = \delta_3 = 0$ ve $\|W\| = 0$ olarak alınırsa,

$$\left\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{TN}}{ds} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{TB}}{ds} \right\rangle = 0 \tag{4.11}$$

bulunur. O halde (C*) sabit pol eğrisinin TN ve TB Smarandache eğrileri gibi iki tane involütü vardır.

Şimdi $\delta_1 = \delta_3 = 0$ olmasının önemini gösterelim:

$$\delta_1 = 0 \implies k^4\left[2+\left(\frac{\tau}{k}\right)^2\right] = -\tau^3\left(\frac{k}{\tau}\right)'$$

$$\implies 2+\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 = -\frac{1}{k}\left(\frac{\tau}{k}\right)^3\left(\frac{k}{\tau}\right)' \quad (4.12)$$

$$\delta_3 = 0 \implies 2k^3+\tau^2 k = 2\tau^2\left(\frac{k}{\tau}\right)'$$

$$\implies 2+\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 = \frac{2}{k}\left(\frac{\tau}{k}\right)^2\left(\frac{k}{\tau}\right)' \quad (4.13)$$

olup (4.12) ve (4.13) eşitliklerinin sağ tarafları eşitlenirse,

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{\tau}{k}\right)^3\left(\frac{k}{\tau}\right)' = \frac{2}{k}\left(\frac{\tau}{k}\right)^2\left(\frac{k}{\tau}\right)'$$

ifadesini elde ederiz buradan,

$$\left(2+\frac{\tau}{k}\right)\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu ise $\frac{\tau}{k} = -2$ yani $\frac{\tau}{k}$ = sabit veya $\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0$ olması $\frac{\tau}{k}$ = sabit olması demektir. O halde $\delta_1 = \delta_3 = 0$ olması halinde TN- Smarandache eğrisi adi helis olur.

Ayrıca (3.29) ifadelerinde $\omega_1 = \omega_3 = 0$ olarak alınırsa,

$$-3kk' + 2k\tau' + k'\tau = 0$$
$$-3\tau\tau' + 2\tau k' + \tau' k = 0$$

olur. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa,

$$(k+\tau)(k'-\tau') = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan $(k+\tau) = 0$ veya $(k'-\tau') = 0$ elde edilir. Bu ise,

$$\frac{\tau}{k} = -1 = sabit$$

olması demektir. O halde TB- Smarandache eğrisi $\omega_1 = \omega_3 = 0$ olması halinde adi helis olur.

Teorem 4.2.2 $\beta = \beta(s) \subset \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ ile oluşan NB-Smarandache eğrisi bir adi helis ise $\|W\| = 0$ olmak üzere NB ve TB Smarandache eğrileri (C^*) sabit pol eğrisinin birer involütü olurlar.

İspat: NB ve TB Smarandache eğrilerini,

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)\big)$$
$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s)\big)$$

şeklinde tanımlamıştık bu eğrilerin teğet vektörlerinin türevleri, sırasıyla,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{NB}} = \frac{\delta_1\mathbb{T} + \delta_2\mathbb{N} + \delta_3\mathbb{B}}{(k^2 + 2\tau^2)^{3/2}}$$
$$\mathbb{T}'_{\beta_{TB}} = k\,\mathbb{T} - \tau\ \mathbb{B}$$

dır. Buradan,

$$C(s) = sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\,\mathbb{B}$$

olmak üzere (3.37) ifadelerinde $\delta_1 = \delta_3 = 0$ ve $\|W\| = 0$ olarak alınırsa,

$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{NB}}{ds} \rangle = 0$$

$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{TB}}{ds} \rangle = 0 \tag{4.15}$$

bulunur. O halde (C*) sabit pol eğrisinin TB ve NB Smarandache eğrileri gibi iki tane involütü vardır.

Şimdi δ_1=δ_3= 0 alınarak NB-Smarandache eğrisinin adi helis olduğunu gösterelim:

$$\delta_1 = 0 \quad \Longrightarrow k^3\tau + 2k\tau^3 + 2k\tau\tau' - 2\tau^2 k' = 0$$

$$\Longrightarrow 2 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2 = \frac{2}{k}\left(\frac{k}{\tau}\right)' \tag{4.16}$$

$$\delta_3 = 0 \quad \Longrightarrow k^2\tau' - 2\tau^4 - k^2\tau^2 - kk'\tau = 0$$

$$\Longrightarrow 2 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2 = \frac{-k}{\tau^2}\left(\frac{k}{\tau}\right)' \tag{4.17}$$

olup (4.16) ve (4.17) eşitliklerinin sağ tarafları eşitlenirse,

$$\left(\frac{k^2+2\tau^2}{k\tau^2}\right)\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0 \tag{4.18}$$

ifadesi bulunur. Buradan $\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0$ yani $\frac{\tau}{k}$ = sabit sonucuna ulaşılır. O halde NB-Smarandache eğrisi adi helis olur.

Teorem 4.2.3. $\beta = \beta(s) \subset \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ ile oluşan TNB-Smarandache eğrisi bir adi helis ise $\|W\| = 0$ olmak üzere TB ve TNB Smarandache eğrileri (C*) sabit pol eğrisinin birer involütü olurlar.

İspat: TB ve TNB Smarandache eğrilerini,

$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{T}(s) + \mathbb{B}(s)\right)$$
$$\beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\mathbb{T}(s) + \mathbb{N}(s) + \mathbb{B}(s)\right)$$

şeklinde tanımlamıştık bu eğrilerin teğet vektörlerinin türevleri, sırasıyla,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TB}} = k\,\mathbb{T} - \tau\ \mathbb{B}$$
$$\mathbb{T}'_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{(2k^2+2\tau^2-2k\tau)^2}(\delta_1\mathbb{T} + \delta_2\mathbb{N} + \delta_3\mathbb{B})$$

dır. Buradan,

$$C(s) = \ sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\ \mathbb{B}$$

olmak üzere (3.54) ifadelerinde $\delta_1 = \delta_3 = 0$ ve $\|W\| = 0$ olarak alınırsa,

$$\langle\ \frac{dC}{ds},\ \frac{d\mathbb{T}\beta_{TB}}{ds}\ \rangle = 0$$
$$\langle\ \frac{dC}{ds},\frac{d\mathbb{T}\beta_{TNB}}{ds}\ \rangle = 0 \tag{4.19}$$

bulunur. O halde (C^*) sabit pol eğrisinin TB ve TNB Smarandache eğrileri gibi iki tane involütü vardır.

Şimdi δ_1=δ_3= 0 alınarak TNB-Smarnadache eğrisinin adi helis olduğunu gösterelim.

$$\delta_1 = 0 \implies \left[-2 + 2\left(\frac{\tau}{k}\right)^3 - 4\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{k}\right)\right] + \left(\frac{2\tau-k}{k^2}\right)\left(\frac{\tau}{k}\right)' = 0 \tag{4.20}$$

$$\delta_3 = 0 \implies \left[-2 + 2\left(\frac{k}{\tau}\right)^3 - 4\left(\frac{k}{\tau}\right)^2 + 4\left(\frac{k}{\tau}\right)\right] + \left(\frac{2k-\tau}{\tau^2}\right)\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0 \tag{4.21}$$

olup (4.20) ve (4.21) eşitliklerinin hesaplanmasıyla,

$$\left(\frac{2k^2+k\tau+2\tau^2}{k^2\tau^2}\right)(\tau-k)\left(\frac{k}{\tau}\right)' = 0 \tag{4.22}$$

ifadesi bulunur. Buradan $\tau - k = 0$ olup $\dfrac{\tau}{k} = 1 =$ sabit sonucuna ulaşılır. Bu ise TNB-Smarandache eğrisinin adi helis olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.4. $\beta = \beta(s) \subset \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ ve birim Darboux vektörü C alınarak oluşturulan TC ve BC Smarandache eğrileri (C^*) sabit pol eğrsinin birer involütüdür.

İspat: TC ve BC Smarandache eğrilerini,

$$\beta_{TC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbb{T}(s) + C(s)\big)$$

$$\beta_{BC}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\mathbb{B}(s) + C(s))$$

şeklinde tanımlamıştık bu eğrilerin teğet vektörlerinin türevleri sırasıyla,

$$\mathbb{T}'_{\beta_{TC}} = \frac{\sqrt{2}}{(\tau^2 + (\varphi')^2)^2}(\delta_1\mathbb{T} + \delta_2\mathbb{N} + \delta_3\mathbb{B})$$

$$\mathbb{T}'_{\beta_{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{(k^2 + 2(\varphi')^2)^2}(\delta_1^*\mathbb{T} + \delta_2^*\mathbb{N} + \delta_3^*\mathbb{B})$$

dır.Buradan,

$$C(s) = \ sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\,\mathbb{B}$$

olmak üzere (3.71) ve (3.105) ifadelerinde,

$$\frac{\delta_1}{\delta_3} = \frac{\delta_1^*}{\delta_3^*} = tan\varphi \tag{4.23}$$

olarak alınırsa,

$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{TC}}{ds} \rangle = 0$$
$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{d\mathbb{T}\beta_{BC}}{ds} \rangle = 0 \quad (4.24)$$

bulunur. O halde (C^*) sabit pol eğrisinin TC ve BC Smarandache eğrileri gibi iki tane involütü vardır.

Şimdi $\frac{\delta_1}{\delta_3} = \frac{\delta_1^*}{\delta_3^*} = tan\varphi$ ve $\varphi' = 0$ olma durumu göz önüne alınırsa (3.71) ifadelerinden,

$$-k^2 cos\varphi - k\tau sin\varphi = 0 \quad (4.25)$$

olup gerekli düzeltmeler yapılırsa,

$$\frac{\tau}{k} = -\cot\varphi = \text{sabit}$$

ifadesi bulunur. Buna göre TC-Smarandache eğrisi adi helis eğrisi olur.

Benzer şekilde $\frac{\delta_1^*}{\delta_3^*} = tan\varphi$ ve $\varphi' = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.105) ifadelerinden

$$\tau^2 sin\varphi + k\,\tau\, cos\varphi = 0 \quad (4.26)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzeltmeler yapılırsa,

$$\frac{\tau}{k} = \cot\varphi = \text{sabit}$$

olduğu görülür. O halde BC-Smarandache eğrisi adi bir helis olur.

Burada $\varphi' = 0$ olması diğer NC ve TNBC Smarandache eğrileri için de aynı sonucu verdiği görülür. Çünkü,

$$\frac{\tau}{k} = \tan\varphi$$

olduğundan her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{\varphi\prime}{1+\varphi^2}=\left(\frac{\tau}{k}\right)\prime \qquad (4.27)$$

elde edilir. $\varphi' = 0$ olması $\left(\frac{\tau}{k}\right)' = 0$ olmasını gerektirir. O halde $\frac{\tau}{k} =$ sabit olur. Böylece Smarandache eğrisinin adi bir helis olduğunu söyleyebiliriz.

Genel bir sonuca varmak için aşağıdaki hesaplamalar Smarandache eğrileri hakkında bize önemli fikirler oluşturmamızı sağlayacaktır. Bunun için birim Darboux vektörü,

$$C = \ sin\varphi\mathbb{T} + cos\varphi\ \mathbb{B}$$

olarak alınırsa ve Smarandache eğrilerinin teğet vektörünü genel olarak,

$$\mathbb{T}'_\beta = (\delta_1\mathbb{T}\ +\ \delta_2\mathbb{N} + \delta_3\mathbb{B}) \qquad (4.28)$$

şeklinde düşünürsek,

$$\langle\frac{dC}{ds},\frac{d\mathbb{T}\beta}{ds}\rangle = 0 \qquad (4.29)$$

olması için,

$$\varphi'(\delta_1 cos\varphi - \delta_3 sin\varphi) = 0$$

olması gerekir. Bunun için $\varphi' = 0$ veya $\delta_1 cos\varphi - \delta_3 sin\varphi = 0$ olması gerekir. Eğer bu şartlar sağlanırsa Smarandache eğrileri (C^*) sabit pol eğrisinin involütü olurlar.

KAYNAKLAR

Ali, A. T., ‘’Special Smarandache Curves in the Euclidean Space’’,***International Journal of mathematical Combinatorics,*** 2: 30-36 (2010).

Bektaş, O., Yüce, S., ‘’Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space’’, ***Romanian Journal of Mathematics and Com-puter Science,*** 3: 48-59 (2013).

Hacısalihoğlu, H. H., ‘’ Diferensiyel Geometri’’, ***İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Yayınları Mat. no-7,*** *Malatya* (1983).

O’neill, B., ‘’Semi Riemann Geometry, Academic Press’’, New York (1983).

Sabuncuoğlu, A., ‘’Diferensiyel Geometri’’, *Nobel Yayınları, Ankara* (2006).

Struik, D.J., ‘’Lectures on Classical Diferentiel Geometry’’, ***2end edition, Dover Publication, Inc,*** New York (1961).

Taşköprü, K., Tosun, M., ‘’Smarandache Curves on S 2’’, **Boletim da Sociedade paranaense deMatemtica 3 srie**, 32(1): 51-59 (2014).

Turgut, M., Yılmaz**,** S**.,** ‘’Smarandache Curves in Minkowski space-time’’, ***International Journalof Mathematical Combinatorics,*** 3: 51-55 (2008).

.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Fatih KARAMAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Kütahya-01.03.1983

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar : Matematik Öğretmenliği Lise

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Özel Liseler

İletişim

Adres : Karşıyaka Mah. 4053 sok. Papatya Sitesi B Blok K:2 D:7 Karaköprü / Şanlıurfa

Tel : 0505 897 35 15

E-Posta Adresi : karamanfatih2012@hotmail.com

Akademik Çalışmaları

- …………

Yabancı Dil Bilgisi **:** İngilizce **(**Orta Seviye)

Tarih: 07/06/2015