

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ SINIR ŞARTLARINA SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE  
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DERYA KÜZÜN

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI

ÖĞR. GÖR. DR. SÜMEYYE SINIR

BİLECİK, 2024

10603302

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ SINIR ŞARTLARINA SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE  
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DERYA KÜZÜN

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI

ÖĞR. GÖR. DR. SÜMEYYE SINIR

BİLECİK, 2024

10603302

## BEYAN

"Kesirli Sınır Şartlarına Sahip Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR   X</b>
<b>Destek alındı ise;</b>	
<b>Destekleyen kurum;</b>	
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>
<b>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</b>	
<b>2-TÜBİTAK</b>	
<b>Diğer;</b>	
<b>ETİK KURUL onayı var</b>	
<b>ise;</b>	
<b>ETİK KURUL karar tarih/ sayı:</b>	<b>...../ .....</b>

Derya KÜZÜN

.../.../2024

İmza

## ÖN SÖZ

Öğrenim hayatım süresince sabırla, sevgiyle ve güvenle yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan kıymetli aileme, lisans hayatımdan bu zamana kadar yanımda olan, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren, çalışmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen gelişimime katkıda bulunan, bu süreçte her anlamda bana destek olan çok kıymetli danışman hocam Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi öğretim üyesi Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ'a ve bu süreçte bilgi, birikim ve tecrübelerinden faydalandığım kıymetli eş danışman hocam İzmir Katip Çelebi Üniversitesi'nden Öğr. Gör. Dr. Sümeyye SINIR'a teşekkür ederim.

Lisans hayatımdan bu zamana kadar ders aldığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ayrıca teşekkür ederim.

**Derya KÜZÜN**

**2024**

## ÖZET

### KESİRLİ SINIR ŞARTLARINA SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

Bu tez çalışmasında kesirli türev ihtiva eden sınır şartlarına sahip diferansiyel denklemler giriş problemleri özelinde ele alınmıştır. Çözüm metodolojisi olarak Çok Zaman Ölçekli metot (Pertürbasyon metodu) kullanılmıştır. Matematik model çözümleri elde edilerek kararlılık analizi yapılmıştır.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanımlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde Pertürbasyon metodunun (Çok Zaman Ölçekli metot) ayrıntıları ve uygulamaları verilmiştir. Dördüncü bölümde kesirli sınır şartlarına sahip diferansiyel denklemlere bir uygulama olarak Euler-Bernoulli girişinin zorlamalı titreşim analizi ele alınmıştır. Girişin, harmonik dış kuvvetin etkisi altında olduğu kabulü ile Cauchy gerilme teorisi kullanılarak girişin matematik modelinin elde edilmiş ve yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra kararlı durum çözümleri ve bunların kararlılıkları incelenmiştir. Son bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli Türevli Viskoelastik Sınır Koşulları, Çok Zaman Ölçekli Metot, Pertürbasyon Yöntemi, Euler-Bernoulli Girişi, Kararlılık

## ABSTRACT

### DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL BOUNDARY CONDITIONS AND APPLICATIONS

In this thesis, differential equations with boundary conditions involving fractional derivatives are discussed, especially on beam problems. Multiple-Time Scales method (Perturbation method) is used as the solution methodology. Mathematical model solutions are obtained and stability analysis is performed.

The thesis consists of five sections. The first section is devoted to the introduction. In the second section, the basic definitions used in the thesis are introduced. In the third section, details and applications of the Perturbation method (Multiple-Time Scales method) are given. In the fourth section, forced vibration analysis of the Euler-Bernoulli beam is discussed as an application to differential equations with fractional boundary conditions. Assuming that the beam is under the harmonic external force, it is mentioned that the mathematical model of the beam is obtained by using Cauchy stress theory and approximate solutions are determined. Then, steady state solutions and their stability are examined. The last section includes the conclusion.

**Keywords:** Viscoelastic Boundary Conditions with Fractional Derivatives, Method of Multiple Time Scales, Perturbation Method, Euler–Bernoulli Beam, Stability.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ .....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
TABLolar LİSTESİ .....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ .....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
3. PERTÜRBASYON METODU .....	8
3.1. Çok Zaman Ölçekli Metot.....	8
3.2. Uygulama Örnekleri .....	9
4. EULER-BERNOULLİ KİRİŞİNİN HAREKET DENKLEMİ .....	22
4.1. Kirişin Matematik Modelinin Elde Edilmesi.....	22
4.2. Matematik Modelin Boyutsuzlaştırılması.....	24
4.3. Pertürbasyon ve Kararlılık Analizi .....	25
5. SONUÇ.....	37
KAYNAKÇA .....	38

## TABLolar LİSTESİ

	Sayfa
<b>Tablo 4.1.</b> <i>k</i> değişimine göre doğal frekans değerleri .....	<b>28</b>

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Sarkacın yer değiştirmesi .....	18
Şekil 4.1. İlk üç mod için $k - \omega$ değişimleri.....	28
Şekil 4.2. $k$ değişimine göre Euler-Bernoulli kirişinin mod yapıları .....	29
Şekil 4.3. $\alpha$ değişimine göre zaman-deplasman grafiği .....	35

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\tau$	: Transpoz
$\mathbf{I}_n$	: Birim matris
$\mathbf{J}$	: Jacobian matris
$\lambda_n$	: Özdeğerler
$\Gamma$	: Gama fonksiyonu
${}_a\mathbf{D}_t^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli mertebe türev operatörü
$\partial$	: Kısmi türev
$\mathbf{T}_n$	: Zaman ölçeği
$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$	: Kirişin kartezyen koordinat bileşenleri
$\mathbf{N}$	: Normal kuvvet
$\mathbf{V}$	: Enine kesme kuvvet
$\mathbf{M}$	: Eğilme momenti
$\mathbf{E}$	: Elastisite modülü
$\mathbf{I}$	: Kiriş kesitinin atalet momenti
$\rho$	: Kütle yoğunluğu
$\mathbf{A}$	: Kesit alanı
$\mathbf{L}$	: Kiriş uzunluğu
$\sigma$	: Gerilme
$\sigma_n$	: Ayar parametresi
$\hat{\mathbf{q}}$	: Dış zorlama
$\hat{\mathbf{k}}$	: Yay katsayısı
$\hat{\eta}$	: Sönüm katsayısı
$\Omega$	: Frekans
$\mathbf{f}$	: Dış zorlama genliği
$\mathbf{q}$	: Boyutsuz dış zorlama
$\mathbf{A}_n, \bar{\mathbf{A}}_n$	: Karmaşık eşlenik genlikler
$\Re \setminus \Im$	: Reel ve sanal
$\mathbf{X}_n$	: Mod yapıları
$\omega_n$	: Doğal frekanslar

## 1. GİRİŞ

Son zamanlarda kesirli diferansiyel denklemlerin önemi, klasik diferansiyel denklemlere göre bir çok fiziksel olayı daha gerçeğe yakın modellediği için gittikçe artmaktadır. Kesirli sınır değer problemleri ise matematiksel bakış açısına göre popüler bir araştırma alanıdır ve biyoloji, epidemiyoloji, fizik, mühendislik, kimya, finans, klasik mekanik, kuantum mekaniği, viskoelastisite, elektrik devreleri ve benzeri alanlarda uygulamalara sahiptir.

Çoğu kesirli diferansiyel denklemde olduğu gibi, kesirli türev içeren denklem ve denklem sistemlerinin analitik çözümleri yoksa, bu tür diferansiyel denklemler çeşitli yaklaşımlar ve sayısal tekniklerle çözülmektedir ( Javadi vd., 2019; Lewandowski ve Wielentejczyk, 2017). Söz konusu diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biri de yaklaşık analitik bir yöntem olan pertürbasyon yöntemidir. Orijinal problemle ilişkili daha basit bir problem kullanma ve daha sonra iki problem arasındaki farkı açıklayan küçük terimler ekleyerek çözümü düzeltme fikrine dayanır. Küçük terimler genellikle daha basit problemden sapmayı ölçen küçük bir parametrede bir kuvvet serisi olarak ifade edilmektedir.

Pertürbasyon teorisi, fizikte ve uygulamalı matematikte farklı alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin; cebirsel denklemler, hareket denklemleri, dalga denklemleri vb. gibi. Bu tez çalışmasında pertürbasyon metotları arasından "Çok Zaman Ölçekli Metot" ele alınacaktır. Çok zaman ölçekli metot, yaklaşık analitik çözümleri incelemek için kullanılan en popüler pertürbasyon teknikleri arasında yer almaktadır ( Dönmez vd., 2014; Sınır vd., 2021; Tang vd., 2018).

Kesirli analiz, klasik hesabın kökenlerinden doğmuştur ve mekanik, fizik, biyoloji, kimya, ekonomi vb. dahil olmak üzere çok sayıda araştırma ve mühendislik dalının matematiksel modellemesinde başarıyla kullanılmıştır. Kesirli hesap teorisinin ayrıntılı açıklamaları analiz ve uygulamaları ( Podlubny, 1999; Debnath, 2003)'de verilmektedir. Kesirli türevin avantajlarından biri, bazı önemli malzeme ve süreçlerin hafızasını ve kalıtsal özelliklerini tanımlama yeteneğine sahip olduğundan, malzemelerin özelliklerinin matematiksel modellemesi için daha iyi bir uyum sağlamasıdır. Kesirli türev, osilatörler, kirişler, plakalar ve kabuklar dahil olmak üzere çeşitli mekanik problemler için hareket denklemlerini ve bunların sınır koşullarını tanımlamak için kullanılabilir, örneğin bkz. ( Agarwal vd., 2013; Rong ve Bai, 2015).

Kirişler, yaygın olarak kullanılan bir boyutlu mekanik yapı elemanlarından. Uygulamalı bilimin çeşitli dallarında ve mekanik gibi çeşitli mühendislik problemlerinde; havacılık,

inşaat, biyomedikal mühendisliği gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Kirişlerin matematiksel modelleri çeşitli varsayımlara dayanan kiriş teorilerine göre geliştirilmiştir; bunlardan en bilinen teorileri Euler-Bernoulli ( Reddy, 2011; Carrera vd., 2011; Bauchau ve Craig, 2009), Timoshenko (Huang vd., 2013) ve yüksek mertebe kiriş teorileridir ( Reddy, 2011; Thai ve Vo, 2012; Şimşek, 2010).

Sınır koşulları, basit, ankastre ve serbest mesnet durumları için bir kirişin başlangıç ve bitiş noktalarına uygulanan kısıtlamalardır. Kirişin doğal frekans analizi, sapma analizi, kritik yük analizi ve titreşim analizi vb. gibi statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesinde önemli rol oynamaktadırlar ( Reddy vd., 1997; Zhao ve Chang, 2021; Barari vd., 2011). Bununla birlikte, sınır koşulları her zaman sabit değildir, çünkü yapısal ve çevresel koşullara bağlı olarak değişebilirler. Bu değişiklikler tüm kiriş yapısının performansını önemli ölçüde etkileyebilir. Bu nedenle, değişen sınır koşullarının kiriş davranışı üzerindeki etkilerini incelemek ve bunları tespit etmek ve telafi etmek için yöntemler geliştirmek çok önemlidir ( Qiao ve Rahmatalla, 2021; Barari vd., 2011).

Bu tez çalışmasında kesirli türev içeren sınır şartlarına sahip diferansiyel denklemler, kiriş problemleri özelinde kesirli visko-elastik sınır koşullarına sahip Euler- Bernoulli kirişinin dinamik analizi ile ele alınmıştır. Kirişin, harmonik dış kuvvetin etkisi altında olduğu kabul edilmiştir. İlk olarak, Cauchy gerilme teorisi kullanılarak kirişin matematiksel modeli elde edilmiş, daha sonra, geometri ve malzemeye bağımlılığı ortadan kaldırmak için hareket denklemi boyutsuzlaştırılmıştır. Analizde bir pertürbasyon yöntemi (çok zaman ölçekli metodun doğrudan uygulaması) kullanılmıştır. Yaklaşık analitik çözümler, genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilmiştir.  $k$  değişimlerine göre doğal frekanslar ve mod yapıları elde edilmiştir.  $\alpha$  nın etkisi zaman-deplasman grafiği ile verilmiştir. Kirişin belirli bir  $k$  değerinden itibaren basit-basit mesnetli bir kiriş olarak davranışı  $k - \omega$  değişim grafikleriyle gösterilmiştir. Ayrıca kararlı durum çözümleri ve bunların kararlılıkları incelenmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanımlara yer verilmiştir.

**Tanım 2.1. (Lineer Diferansiyel Denklem)**  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ve  $g, t$ 'nin fonksiyonları olmak üzere,

$$a_0(t)y(t)^{(n)} + a_1(t)y(t)^{(n-1)} + a_2(t)y(t)^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y(t) = g(t)$$

denklemine  $a_0(t) \neq 0$  olmak üzere  $n$ . mertebeden lineer diferansiyel denklem denir.

**Tanım 2.2. (Sınır Değer Problemi)** Bir diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümünü arandığında eğer koşullar bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birden fazla noktada belirlenmişse bu yardımcı şartlara sınır koşulları denir. Bu tür şartların olduğu problemlere sınır değer problemleri denir. Sınır koşullarına sahip fiziksel problem, matematik modellerin sınır değer problemlerine karşılık gelmektedir.

**Tanım 2.3. (Gama Fonksiyonu)** Gama fonksiyonu Euler tarafından

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall z > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

**Tanım 2.4. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)** Her sonlu  $(a, t)$  aralığında  $f$  fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olmak üzere  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n-1 \leq \alpha < n$  ve  $\alpha > 0$  olmak üzere  $t > a$  için reel bir  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi;

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

**Tanım 2.5. (Üstel Fonksiyonların Kesirli Türevi)**

$${}_0+ D_t^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^\alpha e^{-st}}{\alpha + i\omega} ds \quad (2.1)$$

Burada  $i$  karmaşık sayı  $\sqrt{-1}$  'i gösterir. Eğer  $\alpha$  değeri birimden biraz farklıysa ve kesirli parametre  $\alpha$ 'nın büyüklüğü küçükse (2.1) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim ihmal edilebilir,

dolayısıyla

$${}_{0+}D_t^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t}$$

olur (Rossikhin ve Shitikova, 2010).

Bundan sonra  $\alpha$ . mertebeden zamana göre kesirli türev kolaylık olması açısından  $D^\alpha$  şeklinde gösterilecektir.

**Tanım 2.6. (Özdeğerler ve Özvektörler)**  $A$ ,  $n \times n$  bir kare matris ve  $I_n$  birim matris olmak üzere  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$  denklemini sağlayan  $\lambda$  sayısı varsa buna  $A$  matrisinin özdeğerleri denir. Bulunan her  $\lambda$  değerini  $Ax = \lambda x$  veya  $(A - \lambda I_n)x = 0$  da yerine koyarak elde edilen sıfırdan farklı  $x$  vektörlerine,  $A$  matrisinin  $\lambda$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir.

Tanıma bir örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 2.6.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A$  matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulunmak istendiğinde  $A$  matrisinin karakteristik denklemi hesaplanır.  $A$  matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

hesaplandığında  $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ , buradan ise özdeğerler  $\lambda_1 = -1$  ve  $\lambda_2 = 3$  olarak bulunur.  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için  $Ax = \lambda x$  tanımından yararlanılır. Buna göre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

veya

$$x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$

$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

şeklinde eşitlikler elde edilir.

$\lambda_1 = -1$  özdeğerine karşılık gelen özvektör için;

$x_1 = -x_2$  olur. Sonuç olarak  $\lambda_1 = -1$  özdeğerine karşılık gelen özvektörlerin kümesi  $\{(-t, t) | t \in \mathbb{R}\}$  şeklindedir.

$\lambda_1 = 3$  özdeğerine karşılık gelen özvektör için;

$x_1 = x_2$  olur. Sonuç olarak  $\lambda_1 = 3$  özdeğerine karşılık gelen özvektörlerin kümesi  $\{(t, t) | t \in \mathbb{R}\}$  şeklindedir.

**Tanım 2.7.** Birinci mertebeden n-boyutlu dinamik sistem

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Psi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = \Psi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \Psi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

ile tanımlıdır. Buradan  $t \in \mathbb{R}$  ve  $\Psi_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) fonksiyonları birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır. (2.2) sisteminde  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ,  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)^\top$  seçilirse (2.2) sistemine denk olan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \Psi(x) \quad (2.3)$$

vektör eşitliği elde edilir.

**Tanım 2.8. (Jacobian Matrisi)**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değişkenlerine bağlı  $n$  tane denklemden oluşan  $y = f(x)$  sistemi,

$$y = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

matris formunda yazılır. Daha açık olarak

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilir ve bu sistemin Jacobian matrisi

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir (Simon ve Blume, 1994).

### Örnek 2.8.1.

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 - 2x_1$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 x_2 - x_2$$

sisteminin Jacobian matrisi

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - 2 & x_1 \\ 3x_2 & 3x_1 - 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 2.9. (Mertebe Sembolü)**  $f$  ve  $g$  iki reel fonksiyon olsun. Eğer,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A$  ve  $0 < |A| < \infty$  ise  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken  $f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)]$  olarak yazılır. Burada  $f$  fonksiyonu  $g$  fonksiyonun  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken büyük  $O$  altındaki görüntüsüdür (Nayfeh, 2011). Örneğin;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 \text{ olduğundan, } \sin(\varepsilon) = O(\varepsilon) \text{ 'dur.}$$

**Tanım 2.10. (Boyutsuzlaştırma)** Boyutsal olarak homojen bir denklemin her bir terimi değişken ve sabitlerden oluşan bir gruba bölüldüğünde, denklem boyutsuzlaştırılmış olur. Böyle denklemlere “boyutsuz denklem” denir. Genel olarak boyutsuzlaştırma sürecine giden birçok alternatif yol olabilir. Bu tür işlemleri yaparken dikkatli olmak ve doğru boyutsuzlaştırma için parametrelerin fiziksel değer aralıklarını bilmekte fayda vardır. Problemin fizik bilgisi olmadan boyutsuzlaştırma yapılması, boyutsuz parametrelerin hatalı tanımlanmasına ve problemin fiziksel yapısının bozulmasına sebep olabilir.

Sistemi boyutsuz hale getirmek için şu adımlar izlenilir:

- Bağımlı ve bağımsız değişkenler belirlenir.
- Her ölçüm, karakteristik birimler kullanılarak ölçekli bir miktara dönüştürülür.
- En yüksek dereceli terimin türevinin katsayısına bölünür.
- Her değişken için karakteristik birim tanımı, mümkün olduğu kadar çok terimin katsayısı 1 olacak şekilde dikkatlice seçilir.
- Sistemin denklemi, boyutsuz değişkenlerine göre yeniden yazılır.

**Tanım 2.11. (Seküler Terim)** Pertürbasyon yöntemi kullanılarak mertebelenendirilen bir denklemin çözümünde  $O(1)$  mertebesinden başlayarak elde edilen her bir çözümün bir sonraki mertebede yerine yazılması sonucunda, zaman değişkeni  $t$  arttıkça sınırsız olarak artışa sebep olan terimler seküler terimleri ifade eder. Seküler terim aynı zamanda ıraklık terimi olarak da adlandırılmaktadır.

**Tanım 2.12. (Serbest ve Zorlanmış Titreşimler)** Bir sistem dış kuvvetlerin etkisi olmadan, yani belirli bir başlangıç titreşimi ile salınıyorsa, buna serbest titreşim denir. Ancak bir sistem harici bir itici kuvvet nedeniyle titreştiğinde bu sistemlere zorlanmış titreşim adı verilir.

**Tanım 2.13. (Sönümsüz ve Sönümlü Titreşimler)** Titreşim sırasında enerji kaybı olmayan titreşime sönümsüz, sürtünme vb. nedeniyle enerji kaybının olduğu titreşime sönümlü titreşim denir.

### 3. PERTÜRBASYON METODU

Pertürbasyon metodu, analitik çözümü olmayan bir problemin, bu probleme bağlı bir başka problemin bilinen basit çözümünden yola çıkılarak yaklaşık bir çözümünü elde etmek için kullanılan matematiksel yöntemdir. Bilinen çözüme sahip problemin matematik modeline küçük terim ekleyerek elde edilen yeni matematik model analitik çözüme sahip değildir ve bunların çözümleri pertürbasyon uygulanarak elde edilebilir.

Pertürbasyon yönteminde, istenilen çözüm bilinen çözüm civarında küçük parametre yardımıyla kuvvet serisi yaklaşımı ile ifade edilir. Kuvvet serisinin ana terimi, bilinen çözümlü problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemde sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

Bu tez çalışmasında Pertürbasyon metotları arasında Çok Zaman Ölçekli Metot'un doğrudan uygulaması kullanılmıştır.

#### 3.1. Çok Zaman Ölçekli Metot

Çözüm fonksiyonu

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.1)$$

formunda olsun. Burada  $\varepsilon$  pertürbasyon yöntemi için gerekli olan küçük parametre,  $u$  tam çözüm,  $u_0, u_1, u_2$  sırasıyla  $O(1), O(\varepsilon), O(\varepsilon^2)$  merteye çözümleri ifade etmektedir.

Pertürbasyonda çözüm fonksiyonun seri açılımında belli sayıda terim alınarak çözüm yapılır. Örneğin ilk iki terim, yani  $u_0 + \varepsilon u_1$ , dikkate alınarak çözüm bulunabilir.

Çok zaman ölçekli metotta çözümün zaman bağımlılığı

$T_0 = t \rightarrow$  hızlı zaman ölçeği,

$T_1 = \varepsilon t \rightarrow$  yavaş zaman ölçeği,

$T_2 = \varepsilon^2 t \rightarrow$  daha yavaş zaman ölçeği

$\vdots$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$u(t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2; \varepsilon)$$

şeklinde bir çözüm aranmaktadır.

Genel olarak,  $n$  tane zaman ölçeği seçilirse zaman ölçeklerinin  $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots, T_n = \varepsilon^n t$  olarak tanımlandığında çözüm fonksiyonu zaman parametresine göre

$$u(t; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n; \varepsilon)$$

dir ve çözümün pertürbatif açılımı

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (3.2)$$

olur.

Böylece  $t$ 'nin bir fonksiyonu olan  $u$  çözümü,  $T_0, T_1, \dots, T_n$  terimlerinin bir fonksiyonuna dönüşür. Türev ifadeleri  $T_0, T_1, \dots, T_n$  lere bağlı ve  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  zamana göre türevler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots, \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \\ &= D_0^2 + \varepsilon^2 D_1^2 + \varepsilon^2 2D_0 D_2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Burada  $t$  ve  $\varepsilon$  bağımsız değişkenler iken;  $T_i, (i = 1, 2, \dots)$  ler de bu iki değişkenin fonksiyonudurlar ve bu nedenle bağımsız değişkenler değildir.

### 3.2. Uygulama Örnekleri

Bu kısımda, pertürbasyon (çok zaman ölçekli metot) ve kesirli türeve ilişkin çeşitli uygulama örneklerine yer verilmiştir.

#### Örnek 3.2.1.

$$\ddot{u} + 2\varepsilon \dot{u} + u = 0 \quad (3.5)$$

(3.2)-(3.4) eşitlikleri (3.5) denkleminde yerine yazılarak mertebelenir ise

$$O(1) : D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$O(\varepsilon) : D_0 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2D_0 u_0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Lineer homojen (3.6) denkleminin çözümü

$$u_0 = A e^{i\omega T_0} + \bar{A} e^{-i\omega T_0} \quad (3.8)$$

formunda önerilir. Burada  $\bar{A}$ ,  $A$ 'nın karmaşık eşlenik fonksiyonudur. (3.8) çözümü (3.7) denkleminde uygulandıktan sonra

$$D_0 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 (A e^{i\omega T_0} + k.e.) - 2D_0 (A e^{i\omega T_0} + k.e.) \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada k.e. karmaşık eşleniği ifade etmektedir. (3.9) denkleminde seküler terimler ayıklanıp (yani  $e^{i\omega T_0}$  ve  $e^{-i\omega T_0}$  katsayılarına sahip olan terimler ayıklanıp) sifıra eşitlenmesi ile çözülebilirlik şartı

$$D_1 A + A = 0 \quad (3.10)$$

olarak elde edilir.  $A(T_1)$  fonksiyonunun

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}$$

kutupsal formu göz önünde bulundurularak ve (3.10) çözülebilirlik şartından

$$\frac{1}{2} a'(T_1) + i \frac{1}{2} a(T_1) \beta'(T_1) + \frac{1}{2} a(T_1) = 0 \quad (3.11)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (3.11) eşitliğinde reel ve sanal kısımlar ayrıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\Re : \frac{1}{2} a'(T_1) + \frac{1}{2} a(T_1) = 0$$

$$\Im : \frac{1}{2} a(T_1) \beta'(T_1) = 0.$$

Buradan,

$$a'(T_1) + a(T_1) = 0 \quad (3.12)$$

$$a(T_1)\beta'(T_1) = 0 \quad (3.13)$$

olur. Burada (3.12) denkleminde  $a(T_1) = a_0e^{-T_1}$  ve (3.13) denkleminde  $\beta = \beta_0$  elde edilir. Bu değişkenlere göre  $u_0$

$$u_0 = a_0e^{-T_1} \cos(T_0 + \beta_0) \quad (3.14)$$

şeklinde olur. Elde edilen (3.14) denklemini, (3.2)'de yerine yazılırsa,

$$u = a_0e^{-\varepsilon t} \cos(t + \beta_0)$$

çözümü elde edilir.

**Örnek 3.2.2.** Literatürde iyi bilinen ikinci mertebeden kübik nonlineer Duffing denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (3.15)$$

(3.2)-(3.4) eşitlikleri (3.15) denkleminde yerine yazıldıktan sonra denklem mertebelere ayrılır ise

$$O(1) : D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.16)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^3 \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada (3.16) lineer homojen denkleminin çözümü

$$u_0 = A(T_1)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}$$

formunda alınır ve (3.17) denkleminde uygulanırsa,

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 (A(T_1)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}) - (Ae^{i\omega T_0} + \bar{A}e^{-i\omega T_0})^3$$

elde edilir. Bu denklemde seküler terimlerin yok edilmesi sonucu

$$-2iD_1A - 3A^2\bar{A} = 0$$

eşitliği elde edilir.

$$A = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}$$

olduğundan

$$-2i\left(\frac{1}{2}a'(T_1)e^{i\beta(T_1)} + i\frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}\beta'(T_1)\right) - 3\frac{1}{4}a^2(T_1)e^{2i\beta(T_1)}\frac{1}{2}a(T_1)e^{-i\beta(T_1)} = 0$$

dir, burada gerekli işlemler yapıldığında,

$$-\frac{3}{4}a^3(T_1) + 2a(T_1)\beta'(T_1) - 2ia'(T_1) = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte reel ve sanal kısımları ayrıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\Re : -\frac{3}{4}a^3(T_1) + 2a(T_1)\beta'(T_1) = 0 \quad (3.18)$$

$$\Im : a'(T_1) = 0. \quad (3.19)$$

Burada (3.19) denkleminde  $a(T_1) = a_0$  ve (3.18) denkleminde  $\beta(T_1) = \frac{3}{8}a_0^2T_1 + \beta_0$  elde edilir.

Bu değişkenlere göre  $u_0$  çözümü

$$u_0 = \frac{1}{2}a_0e^{i\left(T_0 + \frac{3}{8}a_0^2T_1 + \beta_0\right)} + k.e. \quad (3.20)$$

olur. Elde edilen (3.20) çözümü, (3.2)'de yerine yazılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir

$$u = a_0 \cos\left(t + \frac{3}{8}a_0^2\epsilon t + \beta_0\right).$$

**Örnek 3.2.3.** (Rayleigh Denklemi) Literatürde iyi bilinen Rayleigh denklemi aşağıdaki şekildedir;

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left( \dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right). \quad (3.21)$$

(3.2)-(3.4) eşitlikleri (3.21) denkleminde yerine yazıldıktan sonra denklem mertebelere ayrılır ise

$$O(1) : D^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + D_0 u_0 - \frac{1}{3} (D_0 u_0)^3 \quad (3.23)$$

elde edilir. Burada  $O(1)$  çözümü

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0} \quad (3.24)$$

olarak alınır ve  $O(\varepsilon)$  da uygulanırsa

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -i(2A'(T_1) - A(T_1) + A^2(T_1)\bar{A}(T_1)) e^{iT_0} + \frac{1}{3} iA^3(T_1) e^{3iT_0} + k.e. \quad (3.25)$$

elde edilir. Buradan seküler terimler yok edilerek çözülebilirlik şartı

$$2A'(T_1) - A(T_1) + A^2(T_1)\bar{A}(T_1) = 0 \quad (3.26)$$

şeklinde bulunur.  $A(T_1)$  nin

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \quad (3.27)$$

polar formu (3.24) çözümünde yerine yazılırsa (3.24) çözümü aşağıdaki gibi de ifade edilebilir;

$$u_0 = \frac{1}{2} a(T_1) e^{iT_0 \beta(T_1)} + \frac{1}{2} a(T_1) e^{-iT_0 \beta(T_1)} \quad (3.28)$$

yani,

$$u_0 = a(T_1) \cos(T_0 + \beta(T_1)) \quad (3.29)$$

olur. (3.26) denkleminde, (3.27)'daki eşiti yerine konulduğunda

$$a'(T_1)e^{i\beta(T_1)} + ia(T_1)\beta'(T_1)e^{i\beta(T_1)} - \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)} + \frac{1}{8}a^3(T_1)e^{i\beta(T_1)} = 0 \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$a'(T_1) - \frac{1}{2}a(T_1) + \frac{1}{8}a^3(T_1) + ia(T_1)\beta'(T_1) = 0$$

denklemi bulunur. Elde edilen bu eşitlikte reel ve sanal kısımlar ayrıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\Re : a'(T_1) - \frac{1}{2}a(T_1) + \frac{1}{8}a^3(T_1) = 0 \quad (3.31)$$

$$\Im : a\beta'(T_1) = 0. \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32) eşitliklerinden

$$a'(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1) - \frac{1}{8}a^3(T_1) \quad (3.33)$$

$$\beta'(T_1) = 0 \quad (3.34)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemlerden (3.34) denkleminin çözümü

$$\beta(T_1) = \beta_0 \quad (3.35)$$

sabittir. (3.33)'ün çözümü ise değişkenlerine ayrılıp gerekli matematiksel işlemler yapıldığında

$$a^2(T_1) = \frac{4}{1 + e^{-\varepsilon - c}} \quad (3.36)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen (3.35) ve (3.36) değişkenlerine göre  $u_0$  çözümü

$$u_0 = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-\varepsilon - c}}} \cos(t + \beta_0)$$

elde edilir. Elde edilen  $u_0$  çözümünü (3.2)'de yerine yazıldığında genel çözüm aşağıdaki gibi

elde edilir;

$$u = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-\varepsilon - c}}} \cos(t + \beta_0) + \dots$$

**Örnek 3.2.4.** Riemann-Liouville kesirli türevi ile tanımlanan kübik nonlineerliğe sahip negatif sönümlü Rayleigh denklemini ele alınsın,

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon (D^\alpha(u) - (D^\alpha(u))^3). \quad (3.37)$$

(3.37) için  $u$  çözüm fonksiyonu

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (3.38)$$

şeklinde seriye açılsın.  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  olmak üzere zaman türevlerine ilişkin bağıntılar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (3.40)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon(\alpha D^{\alpha-1} D_1) + \dots \quad (3.41)$$

(3.38)-(3.41) ifadeleri (3.37) denkleminde yerine konularak ve  $\varepsilon$ 'un ilk iki mertebesi dikkate alınarak

$$O(1) : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (3.42)$$

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + D_0^\alpha u_0 - (D_0^\alpha u_0)^3 \quad (3.43)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.42) denklemini

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (3.44)$$

genel çözüm formuna sahiptir. (3.44), (3.43)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 &= -2D_0 D_1 (Ae^{i\omega_0 T_0} + k.e.) - D_0^\alpha (Ae^{i\omega_0 T_0} + k.e.) - (Ae^{i\omega_0 T_0} + k.e.)^3 \\
&= -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 T_0} + (i\omega_0)^\alpha A e^{i\omega_0 T_0} - (i\omega_0)^{3\alpha} A^3 e^{3i\omega_0 T_0} \\
&\quad - 3(i\omega_0)^{2\alpha} (-i\omega_0)^\alpha A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + k.e. + SOT
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Burada *SOT* seküler olmayan terimleri temsil eder. (3.45) eşitliğindeki seküler terimlerin yok edilmesi ile,

$$-2i\omega_0 D_1 A - (i\omega_0)^\alpha A + 3(i\omega_0)^{2\alpha} (-i\omega_0)^\alpha A^2 \bar{A} = 0,$$

ve

$$i^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

açılımı dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
D_1 A + \frac{i\omega_0^{\alpha-1}}{2} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) A - \\
- \frac{3}{2} i\omega_0^{3\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) A^2 \bar{A} = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

eşitliği elde edilir.  $A(T_1)$  fonksiyonunun,

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \tag{3.47}$$

kutupsal formunu göz önünde bulundurarak ve eşitlik (3.46)'dan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} D_1 a + ia D_1 \beta + i\omega_0^{\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) a \\
- \frac{3}{8} i\omega_0^{3\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) a^3 = 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

elde edilir. Elde edilen (3.48) denklemini reel ve imajiner kısımlarına ayrıldığında

$$\Re : D_1 a - \omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) a + \frac{3}{8} \omega_0^{3\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) a^3 = 0 \quad (3.49)$$

$$\Im : D_1 \beta \omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{3}{8} \omega_0^{3\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) a^2 = 0 \quad (3.50)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.49) ve (3.50) diferansiyel denklemlerinin çözümleri hesaplandığında,

$$a(T_1) = \pm \frac{4}{\sqrt{16e^{-2\omega_0^{\alpha-1} \sin(\frac{\alpha\pi}{2})T_1} c_2 + 6\omega_0^{2\alpha}}} \quad (3.51)$$

ve

$$\beta(T_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(8c_1 + 3\omega_0^{2\alpha} e^{2\omega_0^{\alpha-1} \sin(\frac{\alpha\pi}{2})T_1}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \omega_0^{\alpha-1} T_1 \sin(\alpha\pi)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + 2c_2 \right) \quad (3.52)$$

sonuçları bulunur. Burada  $a$  titreşimin genliğidir.  $a$  ve  $\beta$  değerleri  $T_1$  değerine bağlıdır. Elde edilen (3.51) ve (3.52) sonuçları (3.47)'de yerine konularak ve  $T_0 = t$  ve  $T_1 = \varepsilon t$  ifadeleri de göz önünde bulundurularak (3.42) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_0 &= A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + k.e. \\ &= \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} e^{i\omega_0 T_0} + k.e. \\ &= \frac{1}{2} a(T_1) e^{i(\beta(T_1) + \omega_0 T_0)} + k.e. \\ &= \frac{1}{2} a(\varepsilon t) e^{i(\beta(\varepsilon t) + \omega_0 t)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Sınır vd., 2020).

**Örnek 3.2.5.** Tek serbestlik derecesine sahip sistemlerin salınımlarını temsil eden nonlineer kesirli türeve sahip matematik model aşağıdaki gibidir:

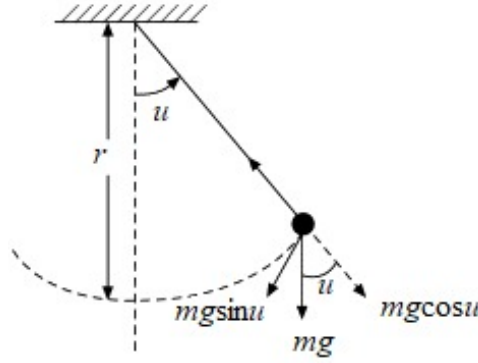
$$\ddot{u} + 2\hat{\mu} D^\alpha(u) + \omega_0^2 \sin(u) = 0. \quad (3.53)$$

Burada  $u$  salınım yapan sarkacın açısı,  $\omega_0$  sarkacın doğal frekansı,  $\hat{\mu}$  sönüm katsayısıdır. Nonlineer etkileri hesaba katarak  $u = 0$  civarında  $\sin(u)$ 'nin seri açılımı yapıp ilk iki terim alın-

dığında (3.53) denklemi

$$\ddot{u} + 2\hat{\mu}D^\alpha(u) + \omega_0^2\left(u - \frac{1}{6}u^3\right) = 0 \quad (3.54)$$

denkleme dönüşür. Burada sönüm teriminin etkisi çok küçük kabul edilmiştir. Dolayısıyla denklemde sönüm terimi  $\varepsilon^2$  mertebesinde yer alacaktır, yani  $\hat{\mu} = \varepsilon^2\mu$  dür.



Şekil 3.1. Sarkacın yer değiştirmesi

(3.54) için  $u$  çözüm fonksiyonu

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots \quad (3.55)$$

şeklinde seriye açılsın.  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  olmak üzere zaman türevlerine ilişkin bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (3.56)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha = D^\alpha + \varepsilon \alpha D^{\alpha-1} D_1 + \dots \quad (3.58)$$

(3.56)-(3.58) ifadeleri (3.55) denkleminde yerlerine yazılarak ve  $\varepsilon$ 'un ilk üç mertebesi dikkate

alınarak

$$O(\varepsilon) : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = 0 \quad (3.59)$$

$$O(\varepsilon^2) : D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 \quad (3.60)$$

$$O(\varepsilon^3) : D_0^3 u_3 + \omega_0^2 u_2 = -2D_0 D_1 u_2 - D_1^2 u_1 - 2D_0 D_1 u_1 - 2\mu D^\alpha u_1 + \frac{\omega_0^2}{6} u_1^3 \quad (3.61)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (3.59) denklemini

$$u_1 = A_1(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (3.62)$$

genel çözüm formuna sahiptir. (3.62), (3.60)'da yerine yazıldığında

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2i\omega_0 D_1 A_1 e^{i\omega_0 T_0} + k.e. \quad (3.63)$$

elde edilir. Eşitlik (3.63)'teki seküler terimlerin yok edilmesi ile

$$D_1 A_1 = 0 \quad (3.64)$$

denklemini bulunur. Buradan (3.64)'ün  $A_1 = A_1(T_2)$  çözümü elde edilir. (3.63) denklemini

$$u_2 = A_2(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}_2(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (3.65)$$

genel çözüm formuna sahiptir. (3.65), (3.61)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} D_0^2 u_3 + \omega_0^2 u_3 = & -2i\omega D_1 A_2 e^{i\omega_0 T_0} - 2i\omega_0 D_2 A_1 e^{-i\omega_0 T_0} \\ & - 2\mu(i\omega_0)^\alpha A_1 e^{i\omega_0 T_0} + \frac{\omega_0^2}{2} A_1^2 \bar{A}_2 e^{i\omega_0 T_0} + k.e. + SOT \end{aligned} \quad (3.66)$$

elde edilir. (3.66)'daki seküler terimlerin yok edilmesi ile

$$D_1 A_2 + D_2 A_1 - i\mu \omega_0^{\alpha-1} i^\alpha A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.67)$$

bulunur ve burada

$$i^\alpha = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

açılımı dikkate alındığında

$$D_1A_2 + D_2A_1 - \mu\omega_0^{\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.68)$$

denklemini elde edilir.  $D_1A_2 = 0$  olduğundan  $A_2 = A_2(T_2)$  olarak elde edilir. Buradan (3.67) eşitliği

$$D_2A_1 - i\mu\omega_0^{\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) A_1 + \frac{i\omega_0}{4} A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde yazılır.  $A_1(T_2)$  fonksiyonunun

$$A_1(T_2) = \frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)} \quad (3.70)$$

kutupsal formu göz önünde bulundurularak ve eşitlik (3.69)'dan,

$$D_2a + iaD_2\beta - i\mu\omega_0^{\alpha-1} \left( \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) a + \frac{i\omega_0}{16}a^3 = 0 \quad (3.71)$$

elde edilir. Elde edilen (3.71) denklemini reel ve imajiner kısımlara ayrıldığında,

$$\Re : D_2a + \mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)a = 0 \quad (3.72)$$

$$\Im : aD_2\beta - \mu\omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)a + \frac{i\omega_0}{16}a^3 = 0 \quad (3.73)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.72) ve (3.73) denklemlerinin çözümleri hesaplandığında

$$a(T_2) = a_0 e^{-\mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)T_2} \quad (3.74)$$

ve

$$\beta(T_2) = \frac{\omega_0 a_0^2 e^{-2\mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)T_2}}{32 \mu\omega_0^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + \mu\omega_0^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)T_2 + \beta_0 \quad (3.75)$$

olarak bulunur. Bulunan (3.74) ve (3.75) sonuçları (3.70)'de yerine konularak ve

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad \text{ve} \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (3.76)$$

ifadeleri dikkate alınarak (3.54) denkleminin çözümü,

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon a_0 e^{-\mu \omega_0^{\alpha-1} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \varepsilon^2 t} e^{i \left( \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 a_0^2 e^{-2\mu \omega_0^{\alpha-1} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \varepsilon^2 t}}{32 \mu \omega_0^{\alpha-1} \sin(\frac{\alpha\pi}{2})} + \mu \omega_0^{\alpha-1} \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \varepsilon^2 t + \beta_0 \right)} + O(\varepsilon^3)$$

olarak bulunur (Sınır vd., 2021).

## 4. EULER-BERNOULLİ KİRİŞİNİN HAREKET DENKLEMİ

Günlük hayatımızda matematiği anlamamızın en etkili yollarından biri matematiksel modelledir. Matematiksel modelleme günlük yaşam problemlerini çözme sürecidir. Başka bir ifade ile bir problemin matematik diliyle ifade edilmesidir. Matematiksel modelleme, mevcut durumların gözlemlenmesi yoluyla ilişkilerin tahmin edilmesi, bu ilişkilere dayalı olarak matematiksel analizlerin yapılması ve bu analizlerden matematiksel sonuçlar elde edilerek fiziksel sistemin hareketinin yeniden yorumlanmasını içeren bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Lingefjärd, 2006).

Matematiksel modelleme günümüzde sadece matematik alanında değil, teknoloji, mimarlık, işletme, mühendislik, tıp ve daha birçok alanda kullanılmaktadır. Matematiksel modelleme doğa bilimlerinin çeşitli alanlarında da kullanılmaktadır. Bu konular mekanik, termodinamik, elektromanyetizma, optik, kuantum fiziği ve kozmolojiyi içerir. Bazı özel durumlar örneklenirse: Mekanikte hareket yasalarını tanımlamak ve nesnelerin hareketini tahmin etmek için matematiksel modeller kullanılır. Termodinamikte matematiksel modeller sıcaklık, basınç, hacim ve diğer fiziksel özelliklerdeki değişiklikleri yöneten yasaları açıklar. Elektromanyetizmada matematiksel modeller elektromanyetik kuvvetlerin özelliklerini tanımlar ve elektromanyetik alanların etkileri hakkında bilgi sağlar. Optikte matematiksel modeller ışığın yayılması ve yansımaları hakkında bilgi sağlar. Kuantum fiziği, atomların ve diğer küçük parçacıkların davranışlarını açıklamak için matematiksel modelleri kullanır.

Bu bölümde temel yapı elemanlarından biri olan kirişin matematik modeli ele alınacaktır. Bunun için öncelikle kirişin Euler-Bernoulli kiriş teorisine (EBT) göre matematik modeli elde edilecek, boyutsuzlaştırılacak ve çözümü ele alınacaktır.

### 4.1. Kirişin Matematik Modelinin Elde Edilmesi

Kirişlerin hareketi için literatürde bir çok kiriş teorisi bulunmaktadır. Yaygın olarak kullanılan ve temel teori olarak bilinen Euler-Bernoulli kiriş teorisidir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlemsel olan kesitler, eğilmeden sonra da tarafsız eksene dik ve düzlemsel kalırlar. Yer değiştirme vektörü

$$u = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z \quad (4.1)$$

şeklindedir. Kartezyen koordinatlarda  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  yönündeki yer değıştirme ifadeleri

$$u_{\hat{x}} = -\hat{z} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \quad (4.2)$$

$$u_{\hat{y}} = 0 \quad (4.3)$$

$$u_{\hat{z}} = \hat{v} \quad (4.4)$$

dir. Burada  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  eğilme öncesi kirişin orta düzlemindeki kartezyen koordinat bileşenleridir.  $\hat{y}$ -ekseni eğilme öncesi kirişin merkez eksenine ile çakışır,  $\hat{y}$ -ekseni tarafsız eksen ve  $\hat{z}$ -ekseni eğilme eksenidir.  $\hat{v} = \hat{v}(\hat{x}, \hat{t})$  kirişin enine eğilmesidir ve  $\hat{t}$  zamanı gösterir.

Green-Lagrange şekil değıştirme bağıntıları (Reddy, 2008) kullanılarak birim şekil değıştirmeler aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\epsilon_{\hat{x}\hat{x}} = -\hat{z} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \quad (4.5)$$

$$\epsilon_{\hat{x}\hat{z}} = \epsilon_{\hat{z}\hat{x}} = 0. \quad (4.6)$$

Elastisite teorisine (Cauchy gerilmeleri (Carrera vd., 2011)) uygun olarak, elde edilen statik ve dinamik temel denklemler şunlardır,

$$\frac{\partial N}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{x}} + \hat{q} = \int \rho a_z dA \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \hat{x}} = V. \quad (4.9)$$

Burada, N, V ve M sırasıyla normal kuvvet, enine kesme kuvveti ve eğilme momentini göstermektedir.

(4.9) eşitliği (4.8) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \hat{x}^2} + \hat{q} = \int \rho a_z dA \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada,  $a_z = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{t}^2}$  dir. Diğer yandan

$$\int \rho a_z dA = \int \rho \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{t}^2} dA = \rho A \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{t}^2} \quad (4.11)$$

$$M = \int \hat{z} \sigma dA = \int \hat{z} E \varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} dA = \int \hat{z} E \left( -\hat{z} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \right) dA = -EI \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \quad (4.12)$$

dir. Burada,  $A = \int dA$  ve  $I = \int \hat{z}^2 dA$  dır. Eşitlik (4.11) ve (4.12), eşitlik (4.10)'da yerine yazıldığında, Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemi,

$$EI \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \hat{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{t}^2} = \hat{q} \quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.7)–(4.12)'de  $E$  kiriş elastisite modülü,  $I$  kiriş kesitinin atalet momenti,  $\rho$  kütle yoğunluğu,  $\hat{q}$  dış yük,  $A$  kesit alanı,  $\sigma$  gerilme ve  $L$  kirişin uzunluğudur.

Modelin visko-elastik koşulları belirlenirken, visko-elastik mesnetten gelen etkileri (İnan, 1967)'deki işaret kabulüne uygun olarak doğrudan sınır koşullarına uygulanmıştır. Bu çalışmada visko-elastik mesnet sadece yer değiştirmeyi önlemek için kullanıldığından dönmeyi önleyici bir etkisi yoktur. Bu nedenle, sınır koşullarındaki sönüm teriminin zamana göre değişimi kesirli olarak kabul edildiğinde kesme kuvveti ve eğilme momenti için iyi bilinen bağıntılar ile sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2}(0, \hat{t}) = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{E}I \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \hat{x}^3}(0, \hat{t}) = -\hat{k}\hat{v}(0, \hat{t}) - \hat{\eta}D^\alpha \hat{v}(0, \hat{t}) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2}(L, \hat{t}) = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{E}I \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \hat{x}^3}(L, \hat{t}) = \hat{k}\hat{v}(L, \hat{t}) + \hat{\eta}D^\alpha \hat{v}(L, \hat{t}). \quad (4.15)$$

Burada  $\hat{k}$  yay katsayısı ve  $\hat{\eta}$  sönüm katsayısıdır.

## 4.2. Matematik Modelin Boyutsuzlaştırılması

Kiriş denkleminin, matematiksel modelinin boyutsuz formu

$$v = \frac{\hat{v}}{L}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \hat{t}L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (4.16)$$

boyutsuz değişkenlerine göre tekrardan yazılarak elde edilir. Yani (4.16)'daki boyutsuz terimler (4.13) denkleminde ve (4.14)-(4.15) sınır şartlarında yerine yazılır. Buradan da boyutsuz

$q = \frac{\hat{q}L^3}{EI}$ ,  $k = \frac{\hat{k}L^3}{EI}$ ,  $\eta = \frac{\hat{\eta}L^{3-2\alpha}(\rho A)^{\frac{\alpha}{2}}}{(EI)^{1+\frac{\alpha}{2}}}$  terimleri elde edilir.  $q$  harmonik yükü;  $f$  ve  $\Omega$  sırasıyla  $q$ 'nin genliğini ve frekansını;  $\varepsilon$  mertebeyi ve  $\eta$  viskoz sönümlenme katsayısını göstermek üzere (4.13) denkleminin boyutsuz formu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$v^{IV} + \ddot{v} = \varepsilon f \cos(\Omega t). \quad (4.17)$$

Boyutsuz sınır koşulları da

$$v''(0,t) = 0 \quad \text{ve} \quad v'''(0,t) = -kv(0,t) - \varepsilon \eta D^\alpha v(0,t) \quad (4.18)$$

$$v''(1,t) = 0 \quad \text{ve} \quad v'''(1,t) = kv(1,t) + \varepsilon \eta D^\alpha v(1,t) \quad (4.19)$$

şekline dönüşür.

### 4.3. Pertürbasyon ve Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.17) boyutsuz denklemi ele alınarak yaklaşık bir çözüm elde edilmiştir. Bu çözümü elde etmek için çok zaman ölçekli metot (pertürbasyon yöntemi) (Nayfeh, 2011) kullanılmıştır. Çözüm fonksiyonu,

$$v(x, T_0, T_1; \varepsilon) = v_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon v_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (4.20)$$

şeklinde varsayılmaktadır. Burada  $v_0, v_1, \dots$  yer değiştirme fonksiyonlarıdır ve  $T_n$ 'ler

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t \dots$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Her  $T_n$  değişkeni bir zaman ölçeğini temsil etmektedir. Yani  $T_0 = t$  hızlı zaman ölçeğini,  $T_1 = \varepsilon t$  yavaş zaman ölçeğini,  $T_2 = \varepsilon^2 t$  daha yavaş zaman ölçeğini temsil eder ve bu şekilde devam eder. Eşitlik (4.17)'deki bağımsız değişken  $t$ 'yi  $T_0, T_1, \dots$  ile değiştirerek ve zincir kuralı uygulanarak zamana göre türevler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (4.22)$$

Burada  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  dir. Önerilen (4.20)'deki  $v$  çözüm fonksiyonu ve (4.21)-(4.22) zamana göre türevleri göz önüne alınarak, (4.17)-(4.18) denklemlerinde belirtilen genel model ve sınır şartlarında yerine yazılır ve her bir  $\varepsilon$  mertebesine göre ayrıştırılıp sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$O(\varepsilon^0)$ :

$$v_0^{IV} + D_0^2 v_0 = 0 \quad (4.23)$$

sınır şartları,

$$v_0''(0, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } v_0'''(0, T_0, T_1) = -k v_0(0, T_0, T_1) \quad (4.24)$$

$$v_0''(1, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } v_0'''(1, T_0, T_1) = k v_0(1, T_0, T_1) \quad (4.25)$$

$O(\varepsilon)$ :

$$v_1^{IV} + D_0^2 v_1 = -2D_0 D_1 v_0 + f \cos(\Omega T_0) \quad (4.26)$$

sınır şartları,

$$v_1''(0, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } v_1'''(0, T_0, T_1) = -k v_1(0, T_0, T_1) - \eta D^\alpha v_0(0, T_0, T_1) \quad (4.27)$$

$$v_1''(1, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } v_1'''(1, T_0, T_1) = k v_1(1, T_0, T_1) + \eta D^\alpha v_0(1, T_0, T_1) \quad (4.28)$$

Birinci mertebede yer alan (4.23) diferansiyel denklemi için

$$v_0(x, T_0, T_1) = (A_n(T_0, T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_0, T_1)e^{-i\omega_n T_0}) X_n(x) \quad (4.29)$$

şeklinde çözüm formu önerilebilir. Burada  $A_n(T_0, T_1)$  ve  $\bar{A}_n(T_0, T_1)$  sırasıyla karmaşık genlikler ve bunların karmaşık eşlenikleridir;  $X_n(x)$  mod yapıları ve  $\omega_n$  lineer doğal frekanslardır. Eşitlik (4.29), (4.23)-(4.25) denklemlerinde yazıldığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında  $X_n(x)$ ,

$$X_n^{IV} - \omega_n^2 X_n = 0 \quad (4.30)$$

denklemini ve

$$X_n''(0) = 0 \text{ ve } X_n'''(0) = -kX_n(0) \quad (4.31)$$

$$X_n''(1) = 0 \text{ ve } X_n'''(1) = kX_n(1). \quad (4.32)$$

sınır şartlarını sağlar. Eşitlik (4.30) sabit katsayılı homojen bir lineer diferansiyel denklemdir, bu nedenle çözüm

$$X_n(x) = C_1 \cos(\sqrt{\omega_n}x) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_n}x) + C_3 \cosh(\sqrt{\omega_n}x) + C_4 \sinh(\sqrt{\omega_n}x) \quad (4.33)$$

formundadır. (4.33) eşitliğini, (4.31)-(4.32) denklemlerinde uygulayarak

$$\begin{aligned} -C_1 + C_3 &= 0 \\ -C_1 \cos(\sqrt{\omega_n}) - C_2 \sin(\sqrt{\omega_n}) + C_3 \cosh(\sqrt{\omega_n}) + C_4 \sinh(\sqrt{\omega_n}) &= 0 \\ \omega_n \sqrt{\omega_n} (-C_2 + C_4) + k(C_1 + C_3) &= 0 \\ \left( \begin{array}{l} \omega_n \sqrt{\omega_n} (C_1 \sin(\sqrt{\omega_n}) - C_2 \cos(\sqrt{\omega_n}) + C_3 \sinh(\sqrt{\omega_n}) + C_4 \cosh(\sqrt{\omega_n})) \\ -k(C_1 \cos(\sqrt{\omega_n}) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_n}) + C_3 \cosh(\sqrt{\omega_n}) + C_4 \sinh(\sqrt{\omega_n})) \end{array} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Aşık olmayan çözümler için (4.34) denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. (4.34) denklem sisteminin aşık olmayan çözümlerinden

$$\begin{aligned} -2\omega_n^5 - 4 \cos(\sqrt{\omega_n}) \sinh(\sqrt{\omega_n}) \omega_n^{7/2} k + 4 \sin(\sqrt{\omega_n}) \cosh(\sqrt{\omega_n}) \omega_n^{7/2} k \\ + 2 \cos(\sqrt{\omega_n}) \cosh(\sqrt{\omega_n}) \omega_n^5 - 4 \sin(\sqrt{\omega_n}) \sinh(\sqrt{\omega_n}) k^2 \omega_n^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

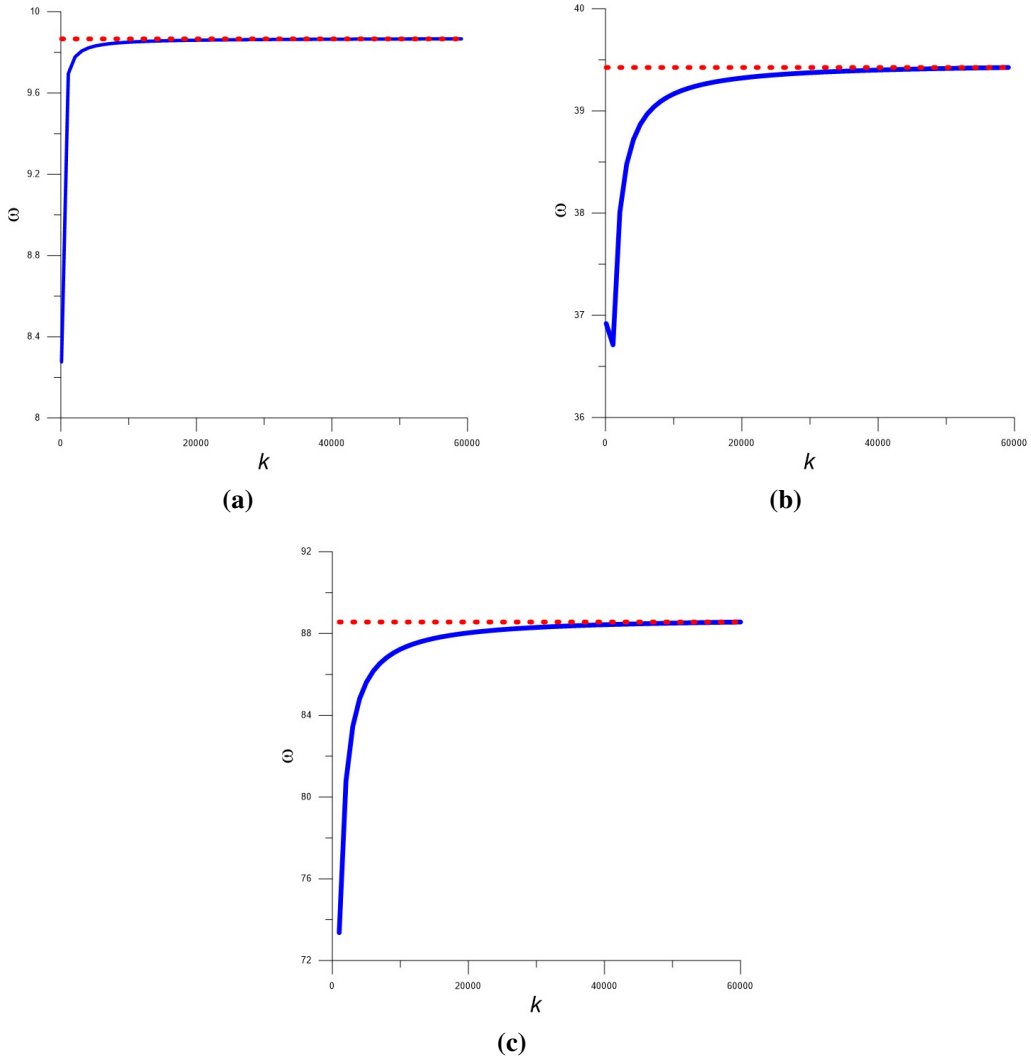
çözülebilirlik şartı elde edilir.

Tablo (4.1)'de kirişin ilk üç modu için doğal frekans değerleri verilmiştir. (4.35) denkleminde Tablo (4.1)'de verilen  $k$ 'nın belli değerleri için kirişin lineer doğal frekansları  $\omega_n$ 'ler hesaplanır.

**Tablo 4.1.**  $k$  değişimine göre doğal frekans değerleri

Mod \ $k$	100	1100	6100	12100	20100	27100	55100
1.mod	8.2657	9.6957	9.8378	9.8535	9.8599	9.8624	9.8661
2.mod	36.9198	36.7120	36.9688	39.2211	39.3235	39.3635	39.4219
3.mod	-	74.6309	86.2036	87.5119	88.0374	88.2823	88.5395

Tablo (4.1)'de  $k$  değeri arttıkça doğal frekansların büyüdüğü, belli bir  $k$  değerinden sonra elde edilen doğal frekansların basit-basit mesnetli kirişin doğal frekanslarına eşit olduğu görülmektedir. Bknz. Şekil (4.1).

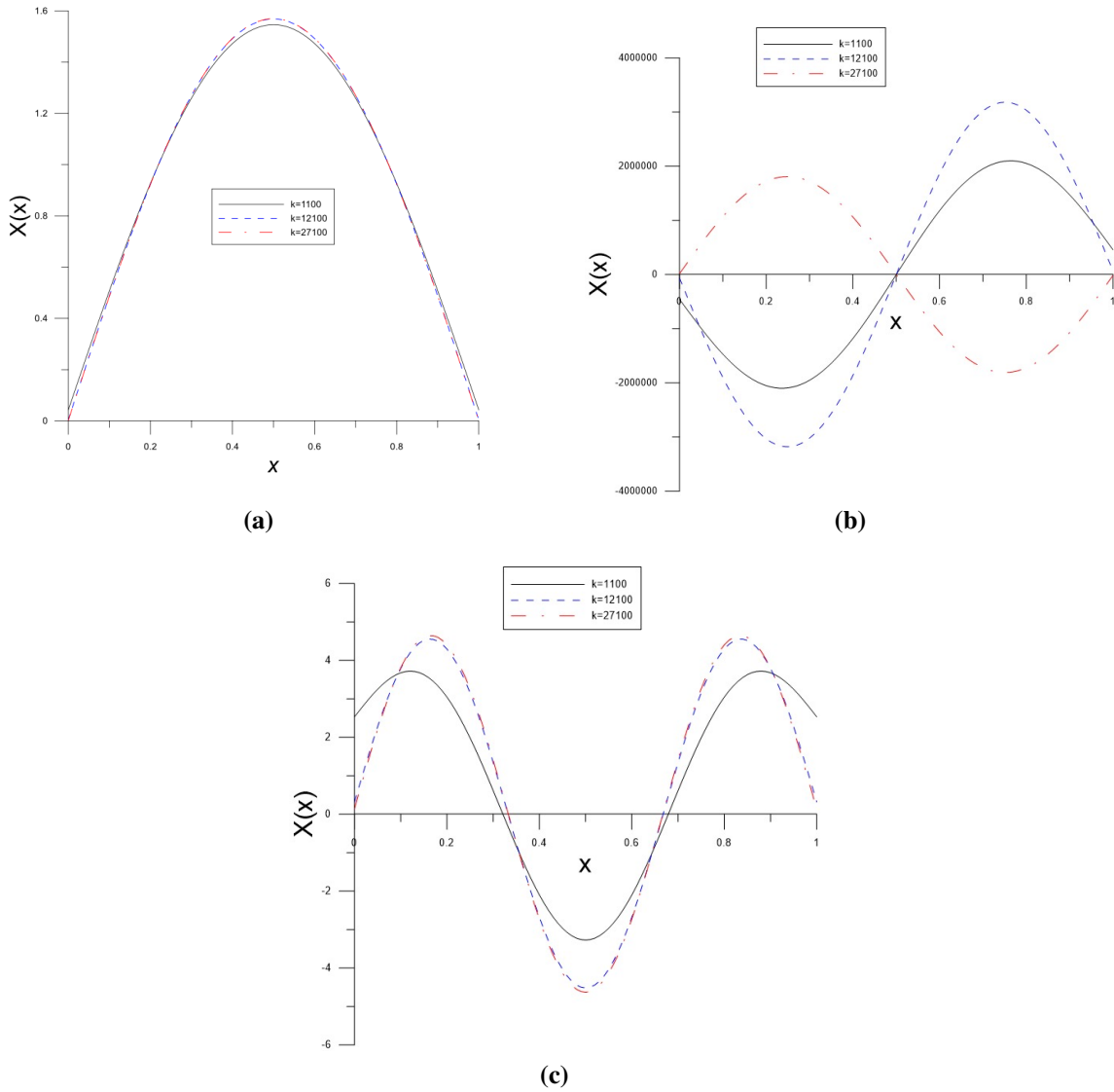


**Şekil 4.1.** (a) 1. mod  $k - \omega$  değişimi, (b) 2. mod  $k - \omega$  değişimi ve (c) 3. mod  $k - \omega$  değişimi.

Mod yapısını veren denklem,

$$X_n(x) = C_1 \left( \begin{array}{l} \cos(\sqrt{\omega_n}x) + \cosh(\sqrt{\omega_n}x) \\ + \frac{\sqrt{\omega_n^3} \cos(\sqrt{\omega_n}) - \sqrt{\omega_n^3} \cosh(\sqrt{\omega_n}) + 2k \sinh(\sqrt{\omega_n})}{\sqrt{\omega_n^3} (\sinh(\sqrt{\omega_n}) - \sin(\sqrt{\omega_n}))} \sin(\sqrt{\omega_n}x) \\ + \frac{\sqrt{\omega_n^3} \cos(\sqrt{\omega_n}) - \sqrt{\omega_n^3} \cosh(\sqrt{\omega_n}) + 2k \sin(\sqrt{\omega_n})}{\sqrt{\omega_n^3} (\sinh(\sqrt{\omega_n}) - \sin(\sqrt{\omega_n}))} \sinh(\sqrt{\omega_n}x) \end{array} \right) \quad (4.36)$$

şeklindedir. (Bknz. Şekil. 4.2)



**Şekil 4.2.** Denklem (4.17) için mod şekilleri: (a) Birinci mod , (b) İkinci mod ve (c) Üçüncü mod.

Denklem (4.29)'da önerilen çözüm fonksiyonu  $\varepsilon$  mertebesinde yani (4.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_1^{IV} + D_0^2 v_1 = -2D_0 D_1 (A_n e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0}) X_n + f \cos(\Omega T_0)$$

bulunur. Bu eşitlikte  $\cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2}(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0})$  eşitliği yerine yazıldığında,

$$v_1^{IV} + D_0^2 v_1 = -2iv_n X_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} + \frac{f}{2}(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \quad (4.37)$$

elde edilir.  $v_1$  için çözüm fonksiyonu,

$$v_1(x, T_0, T_1) = \psi_n(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + k.e. + \Lambda(x, T_0, T_1) \quad (4.38)$$

şeklinde kabul edilmektedir. Burada  $\Lambda$  seküler olmayan terimleri (SOT) içerir. (4.38)'de verilen çözüm fonksiyonu (4.37)'de yerine yerleştirilip düzenlenirse,

$$\psi_n^{IV} e^{i\omega_n T_0} - \omega_n^2 \psi_n e^{i\omega_n T_0} = -2iv_n X_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} + \frac{f}{2}(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \quad (4.39)$$

elde edilir.

Baskın rezonans durumu, dış zorlama kuvvetine ait frekansın, sistemin doğal frekansından birine eşit (veya çok yakın) olmasıyla meydana gelir. Bu durumda sisteme ait genlik değerinde sonsuza giden bir artış olur. Baskın rezonans koşulu,

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma_n \quad (4.40)$$

ile ifade edilsin. Burada  $\Omega \approx \omega_n$  durumu ele alındığı için,  $\sigma_n$  ile gösterilen bir ayar parametresi tanımlanır. Dolayısıyla

$$\Omega T_0 = (\omega_n + \varepsilon \sigma_n) T_0 = \omega_n T_0 + \varepsilon \sigma_n T_0 = \omega_n T_0 + \sigma_n T_1 \quad (4.41)$$

dir.  $\varepsilon \sigma_n$  ifadesi, zorlama frekansı ile sistemin doğal frekansının yakınlığını ifade eder. (4.40) ile verilen baskın rezonans koşulu (4.41)'de göz önünde bulundurularak (4.39)'da yerine yazılır

ise,

$$\psi_n^{IV} - \omega_n^2 \psi_n = -2i\omega_n X_n D_1 A_n + \frac{f}{2} e^{i\sigma_n T_1} + k.e. \quad (4.42)$$

elde edilir ve sınır şartlarında da yerine koyulup düzenlenirse,

$$\psi_n''(0, T_1) = 0 \text{ ve } \psi_n'''(0, T_1) = -k\psi_n(0, T_1) - (i\omega_n)^\alpha \eta A_n(T_1) X_n(0) \quad (4.43)$$

$$\psi_n''(1, T_1) = 0 \text{ ve } \psi_n'''(1, T_1) = k\psi_n(1, T_1) + (i\omega_n)^\alpha \eta A_n(T_1) X_n(1). \quad (4.44)$$

elde edilir.

Homojen olmayan problemin bir çözümü olması için, bir çözülebilirlik koşulunun sağlanması gerekir (Nayfeh, 2011). Dolayısıyla (4.42) denkleminde homojenliği bozan kısım self-adjoint (Bknz. (Nayfeh, 2011)) olduğu için  $\psi_n$  ifadesi ile çarpılır ve tanım kümesi üzerinden integre edilirse

$$\int_0^1 (\psi_n^{IV} \psi_n - \omega_n^2 \psi_n \psi_n) dx = \int_0^1 (-2i\omega_n X_n D_1 A_n \psi_n + \frac{f}{2} e^{i\sigma_n T_1}) dx \quad (4.45)$$

dir. (4.42)'nin sol tarafı (4.45) ile aynıdır. Dolayısıyla  $\psi_n = X_n$  alınabilir. Denklem self-adjoint olduğu için  $\psi_n$ 'lerdeki türevleri  $X_n$ 'e taşıma işlemi sonucunda

$$\begin{aligned} \int_0^1 (X_n^{IV} - \omega_n^2 X_n) X_n dx + (\psi_n'''' X_n - \psi_n'' X_n' + \psi_n' X_n'' - \psi_n X_n''') \Big|_0^1 \\ = -2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 X_n X_n dx + \frac{e^{i\sigma_n T_1}}{2} \int_0^1 f X_n dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir, buradan da

$$\begin{aligned} \psi_n''''(1) X_n(1) - \psi_n''(1) X_n'(1) - \psi_n'(0) X_n''(0) + \psi_n(0) X_n'''(0) \\ = -2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 X_n^2 dx + \frac{e^{i\sigma_n T_1}}{2} \int_0^1 f X_n dx \quad (4.46) \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (4.46)'ya sınır şartları uygulanırsa,

$$(i\omega_n)^\alpha \eta A_n [X_n^2(1) - X_n^2(0)] = -2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 X_n^2 dx + \frac{e^{i\sigma_n T_1}}{2} \int_0^1 f X_n dx$$

dir.  $i^\alpha = \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2}$  olduğundan,

$$D_1 A_n - \left( i \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \frac{\omega_n^{\alpha-1} \eta A_n [X_n^2(1) - X_n^2(0)]}{2 \int_0^1 X_n^2 dx} A_n + \frac{i e^{i\sigma_n T_1} \int_0^1 f X_n dx}{2 \omega_n \int_0^1 X_n^2 dx} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte,

$$K_R = \omega_n^{\alpha-1} \eta \sin \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \frac{(X_n^2(1) - X_n^2(0))}{2 \int_0^1 X_n^2 dx}, \quad (4.47)$$

$$K_I = -\omega_n^{\alpha-1} \eta \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \frac{(X_n^2(1) - X_n^2(0))}{2 \int_0^1 X_n^2 dx} \quad (4.48)$$

ve

$$F_n = \frac{\int_0^1 f X_n dx}{2 \omega_n \int_0^1 X_n^2 dx} \quad (4.49)$$

dir. O halde önerilen model için çözülebilirlik koşulu

$$D_1 A_n - (K_R + iK_I) A_n + \frac{i}{2} F_n e^{i\sigma_n T_1} = 0 \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Tüm katsayıların hem reel hem de imajiner kısımları vardır. Karmaşık genlikler,

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (4.51)$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir.

Karmaşık genlik (4.51), (4.50) çözülebilirlik koşulunda yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} (D_1 a_n + i a_n D_1 \beta_n) e^{i\beta_n} + (K_R + iK_I) \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n} + i \frac{F_n}{2} e^{i\sigma_n T_1} = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(D_1 a_n + i a_n D_1 \beta_n) + (K_R + i K_I) a_n + i F_n e^{i(\sigma_n T_1 - \beta_n)} = 0 \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.52) eşitliğinde  $\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n$  tanımlaması yapılırsa

$$\beta_n = \sigma_n T_1 - \gamma_n$$

olduğundan denklemdeki üstel fonksiyona Euler açılımı uygulanıp üstel ifadeler trigonometrik hale getirilerek

$$(D_1 a_n + i a_n D_1 \beta_n) + (K_R + i K_I) a_n + i F_n (\cos \gamma_n + i \sin \gamma_n) = 0$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra reel ve sanal kısımlar ayrıştırılıp,

$$\Re : D_1 a_n + K_R a_n - F_n \sin \gamma_n = 0$$

$$\Im : a_n D_1 \beta_n + K_I a_n + F_n \cos \gamma_n = 0$$

denklemleri bulunur. Burada  $D_1 a_n = a_n'$  ve  $D_1 \beta_n = \beta_n'$  dir. Gerekli matematiksel düzenlemeler yapılırsa baskın rezonans durumunun genlik ve faz modülasyon

$$a_n' = F_n \sin(\gamma_n) - K_R a_n \quad (4.53)$$

$$\gamma_n' = \sigma_n + \frac{1}{a_n} F_n \cos(\gamma_n) + K_I \quad (4.54)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n \Rightarrow \beta_n' = \sigma_n - \gamma_n' \quad (4.55)$$

dir.

Titreşim hareketinde düzgün rejim bölgesi, geçiş bölgesinden sonra gelen ve titreşim hareketine ait genlik ve faz parametrelerinin yeterli bir süre geçtikten sonra sabitlendiği bölgedir. Düzgün rejime ait çözümleri elde etmek için genliğin ve fazın sabit olduğu, dolayısıyla türevlerinin sıfır olduğu durum göz önüne alınmalıdır. Denklemler  $a_n' = \gamma_n' = 0$ ,  $a_n \neq 0$  koşuluna göre düzenlenmelidir. Bu koşul, genlik ve faz modülasyon denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki

eşitlikler elde edilir:

$$F_n \sin(\gamma_n) - K_R a_n = 0 \Rightarrow a_n K_R - F_n \sin \gamma_n = 0 \quad (4.56)$$

$$a_n \sigma_n + F_n \cos(\gamma_n) + a_n K_I = 0 \quad (4.57)$$

Burada  $a_n' = D_1 a_n = 0$ , dolayısıyla  $a_n = a_0$  dır. Denklemlerde  $\gamma_n$  terimi yok edilirse,  $\sigma_n$  parametresine ait

$$\sigma_n = -K_I \mp \frac{1}{a_0} \sqrt{F_n^2 - (a_0 K_R)^2}$$

şeklinde eşitlik elde edilir.

Baskın rezonans durumu için sistem kararlılığı genel notasyon üzerinden ele alınacak olursa, kararlılık hakkında bilgi veren Jacobian Matris'in oluşturulması gerekir. Bunun için (4.56) ve (4.57) denklemleri gerekli sadeleştirmeler yapıp Jacobian matrise temel teşkil eden  $F_{in}(a_n, \gamma_n)$ ,  $i = 1, 2$  tanımları yapılmalıdır:

$$\begin{aligned} a_n' &= F_n \sin(\gamma_n) - K_R a_n = F_{1n}(a_n, \gamma_n) \\ \gamma_n' &= \sigma_n + \frac{1}{a_n} F_n \cos(\gamma_n) + K_I = F_{2n}(a_n, \gamma_n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Sabit noktaların kararlılığını belirlemek için Jacobian Matrisi aşağıdaki gibi yazılır,

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_n} \end{bmatrix}_{\substack{a_n=a_0 \\ \gamma_n=\gamma_0}}$$

Sistemin kararlı olması için Jacobian Matrisinin özdeğerlerinin reel kısımlarının sıfırdan küçük olması gerekir (Khalil, 2002). (4.58)'in Jacobian matrisi

$$J_n = \begin{bmatrix} -K_R & F_n \cos(\gamma_n) \\ -\frac{1}{a_n^2} F_n \cos(\gamma_n) & -\frac{1}{a_n} F_n \sin(\gamma_n) \end{bmatrix}_{\substack{a_n=a_0 \\ \gamma_n=\gamma_0}} \quad (4.59)$$

şeklinde dir. Bu durumda (4.59) matrisin özdeğerleri,

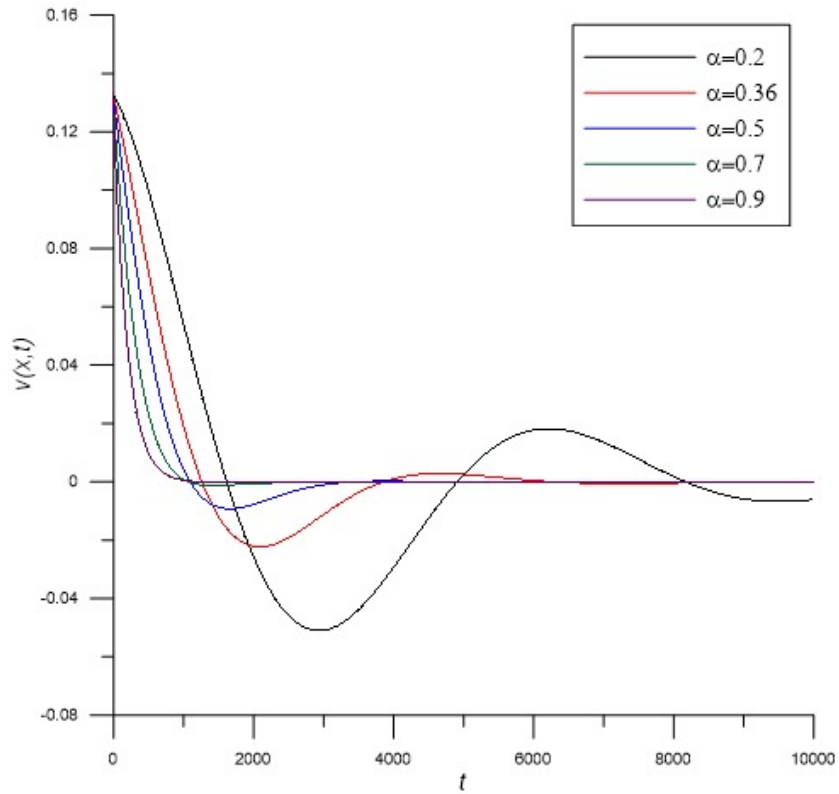
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} K_R - \frac{1}{2 a_n} F_n \sin(\gamma_n) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left( K_R - \frac{1}{a_n} F_n \sin(\gamma_n) \right)^2 - \frac{4}{a_n^2} F_n^2 \cos^2(\gamma_n)} \quad (4.60)$$

olarak hesaplanır. Buradan aşikar olmayan çözümler kararlıdır.

(4.17) ile ele alınan modele (4.20) çözümü önerilmiştir. Denklem (4.20)'deki açılım, (4.29)'de gösterilen  $v_0(x, T_0, T_1)$  ifadesi yerine yazıldığında ve gerekli matematiksel hesaplamalar yapıldığında yaklaşık çözüm

$$v(x, t; \varepsilon) = \frac{1}{2} a_n e^{i(\Omega t - \gamma_n)} X_n(x) + O(\varepsilon) \quad (4.61)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen çözüm fonksiyonunda  $\alpha$ 'nın yer aldığı görülmektedir. Ayrıca Şekil (4.3)'de  $\alpha$ 'nın değişimine göre zaman deplasman grafiği verilmiştir. Şekil (4.3)'de görüldüğü gibi  $\alpha$ 'nın değeri arttıkça sistemin daha da hızlı sönümlendiği görülmüştür.



**Şekil 4.3.**  $\alpha$  değişimine göre zaman-deplasman grafiği

(4.58)'deki denklem formları, basit olmayan çözümlerin kararlılığını belirlemek için kullanılabilir. Basit olanların çözümünün kararlılığı için ise bu formlar uygun olmayabilir. (4.51) eşitliği ile verilen kutupsal gösterim yerine

$$A_n = \frac{1}{2}(p_n + iq_n)e^{i\frac{\sigma_n}{2}T_1} \quad (4.62)$$

şeklinde başka bir dönüşüm seçilebilir. (4.50) koşulunda (4.62) dönüşümü yerine yazılır, reel ve imajiner kısımlar ayrılırsa,

$$p_n' = K_I q_n - \frac{1}{2}q_n \sigma_n - F_n \sin\left(\frac{1}{2}\sigma_n T_1\right) - K_R p_n \quad (4.63)$$

$$q_n' = -K_I p_n - \frac{1}{2}p_n \sigma_n - F_n \cos\left(\frac{1}{2}\sigma_n T_1\right) - K_R q_n \quad (4.64)$$

denklemleri elde edilir. Kararlılığı belirlemek için Jacobian matrisine,

$$J_n = \begin{bmatrix} -K_R & K_I - \frac{1}{2}\sigma_n \\ -K_I + \frac{1}{2}\sigma_n & -K_R \end{bmatrix}_{p_n=q_n=0} \quad (4.65)$$

bakılır, (4.65) matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = -K_R \mp i\left(\frac{1}{2}\sigma_n - K_I\right) \quad (4.66)$$

şeklinde hesaplanır. Bu nedenle, basit çözüm kararlıdır.

## 5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında kesirli visko-elastik sınır koşullarına sahip Euler-Bernoulli kiriş modeli ele alınmıştır. Modelin visko-elastik koşulları belirlenirken, visko-elastik mesnetten gelen etkileri (İnan, 1967)'deki işaret kabulüne uygun olarak doğrudan sınır koşullarına uygulanmıştır. "Çok Zaman Ölçekli Metot" doğrudan hareket denkleminde uygulanarak sonuçlar elde edilmiştir. Tez çalışmasının özgün kısmına geçilmeden önce gerekli tanımlamalar yapılarak yöntemin anlaşılması için çeşitli uygulama örnekleri verilmiştir.

İlk üç moda ait lineer doğal frekanslar hesaplanarak tabloda verilmiş ve  $k$  değişimine göre kirişin mod yapıları grafiklerle gösterilmiştir. Ayrıca  $k$  değişimine göre doğal frekanslarının değişimine ait grafikler ve  $\alpha$  değişimine göre zaman-deplasman grafikleri verilmiştir.

Tablo (4.1)'de  $k$  değeri artar iken kirişin doğal frekans değerlerinin de arttığı görülmektedir. Şekil (4.1)'de görüldüğü gibi  $k$  değeri artarken belirli bir  $k$  değerinden sonra doğal frekansların basit-basit mesnetli kirişin doğal frekanslarına eşit olduğu gözlenmektedir. Şekil (4.2)'de ise  $k$ 'nın üç farklı değerine göre ilk üç mod için mod yapıları verilmiştir ve  $k$ 'ya bağlı değişimler görülmektedir. Elde edilen frekans değerlerinin teori ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Genlik ve faz modülasyon denklemleri, kararlı durum çözümleri ve bunların kararlılığı tartışılmıştır.

$\alpha$  kesirli türev mertebesi, çözüm fonksiyonuna ve ayar parametresine dahil edilmiştir. Şekil (4.3) zaman-deplasman grafiklerinde  $\alpha$ 'nın değeri arttıkça sistemin daha da erken sönümlendiği gözlemlenmektedir.

Bu çalışmada literatürden farklı olarak kesirli türev kullanılmıştır. Bu da sistemin gerçeğe daha yakın modellenmesini ve daha hassas sonuçların bulunmasını sağlamıştır.

## KAYNAKÇA

- Agarwal, R. P., Ntouyas, S. K., Ahmad, B., & Alhothuali, M. S.** (2013). Existence of Solutions for Integro-Differential Equations of Fractional Order with Nonlocal Three-Point Fractional Boundary Conditions, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 1-9.
- Barari, A., Kaliji, H. D., Ghadimi, M., & Domairry, G.** (2011). Non-Linear Vibration of Euler-Bernoulli Beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8, 139-148.
- Bauchau, O. A., & Craig, J. I.** (2009). *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures (Vol. 163)*. Springer Science & Business Media.
- Carrera, E., Giunta, G., & Petrolo, M.** (2011). *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. John Wiley & Sons.
- Debnath, L.** (2003). Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, 3413-3442.
- Dönmez D., Bildik, N., & Sınır, B. G.** (2014). Linear Dynamical Analysis of Fractionally Damped Beams and Rods. *Journal of Engineering Mathematics*, 85, 131-147.
- Huang, Y., Yang, L. E., & Luo, Q. Z.** (2013). Free Vibration of Axially Functionally Graded Timoshenko Beams with Non-Uniform Cross-Section. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1493-1498.
- İnan, M.** (1967). *Cisimlerin Mukavemeti*. Arı Kitabevi Matbaası.
- Javadi, M., Noorian, M. A., & Irani, S.** (2019). Stability Analysis of Pipes Conveying Fluid with Fractional Viscoelastic Model. *Meccanica*, 54, 399-410.
- Khalil, H. K.** (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Lewandowski, R., & Wielentejczyk, P.** (2017). Nonlinear Vibration of Viscoelastic Beams Described Using Fractional Order Derivatives. *Journal of Sound and Vibration*, 399, 228-243.
- Lingfjärd, T.** (2006). Faces of Mathematical Modeling. *ZDM*, 38, 96-112.
- Nayfeh, A. H.** (2011). *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons.

- Podlubny, I.** (1999). *Fractional Differential Equations, Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego, California, USA.
- Qiao, G., & Rahmatalla, S.** (2021). Dynamics of Euler-Bernoulli Beams with Unknown Viscoelastic Boundary Conditions Under a Moving Load. *Journal of Sound and Vibration*, 491, 115771.
- Reddy, J. N., Wang, C. M. & Lee, K. H.** (1997). Relationships Between Bending Solutions of Classical and Shear Deformation Beam Theories. *International Journal of Solids and Structures*, 34(26), 3373-3384.
- Reddy, J. N.** (2011). Microstructure-Dependent Couple Stress Theories of Functionally Graded Beams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(11), 2382-2399.
- Reddy, J. N.** (2008). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Rong, J., & Bai, C.** (2015). Lyapunov-Type Inequality for a Fractional Differential Equation with Fractional Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 1-10.
- Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V.** (2010). Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics: Novel Trends and Recent Results.
- Smir, S., Yıldız, B. & Smir, B. G.** (2020). Approximate Solution of Rayleigh's Equation with Nonlinear Fractional Negative Damping. *First Online Conference On Modern Fractional Calculus And Its Applications*.
- Smir, S., Yıldız, B. & Smir, B. G.** (2021). Approximate Solutions of Nonlinear Pendulum with Fractional Damping. *In 5th International Students Science Congress Proceedings Book*, s. 295.
- Simon, M. A., & Blume, G. W.** (1994). Building and Understanding Multiplicative Relationships: A Study of Prospective Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 472-494.
- Şimşek, M.** (2010). Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697-705.
- Tang, Y., Zhen, Y., & Fang, B.** (2018). Nonlinear Vibration Analysis of a Fractional Dynamic Model for the Viscoelastic Pipe Conveying Fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 56, 123-136.

**Thai, H. T., & Vo, T. P.** (2012). Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams Using Various Higher-Order Shear Deformation Beam Theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1), 57-66.

**Zhao, X., & Chang, P.** (2021). Free and Forced Vibration of Double Beam with Arbitrary End Conditions Connected with a Viscoelastic Layer and Discrete Points. *International Journal of Mechanical Sciences*, 209, 106707.