



T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DİK KONOİD AİLESİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZDE BAYRAKTAR GÜDAY

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2026

10840525

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DİK KONOİD AİLESİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZDE BAYRAKTAR GÜDAY

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2026

10840525

BEYAN

“Dik Konoid Ailesi Üzerine” başlıklı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazım aşamasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, [Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehberine](#) uygun olarak tez/dönem projemi hazırladığımı, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel etik kurallarına uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, çalışmamın herhangi bir kısmının başka bir tez/dönem projesi olarak sunulmadığını, aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gözde BAYRAKTAR GÜDAY

../../2026

İmza:

	YAPAY ZEKÂ KULLANIMINA İLİŞKİN ÖĞRENCİ BEYAN FORMU	BŞEÜ-KAYSİS Belge	DFR-516
		İlk Yayın Tarihi/Sayısı	30.04.2026/16
		Revizyon Tarihi	00
		Revizyon No.su	00
		Toplam Sayfa	1

Bölüm I. Yapay Zekâ Kullanım Durumu

- ☐ Bu tezin/projenin yazım süreçlerinde yapay zekâ tabanlı araçlardan **faýdalandım**.
- ☒ Bu tezin/projenin yazım süreçlerinde yapay zekâ tabanlı herhangi bir araçtan **faýdalanmadım**.

Bölüm II. Yapay Zekâ Kullanım Detayları

**Bu bölüm yalnızca yapay zekâ kullanımı beyan edilmiş ise doldurulacaktır. Aksi durumda boş bırakılmalıdır.*

Tezinizde/projenizde kullandığınız yapay zekâ araçlarını ve sürümünü listeleyiniz:

**Yapay zekâ araçlarını tezimin/projemimin aşağıdaki aşamalarında ilgili amaçlar için kullandım.
(Birden fazla seçenek işaretlenebilir):**

- ☐ Cümle oluşturma
- ☐ Literatür tarama
- ☐ Çeviri
- ☐ Düzenleme/dil kontrolü
- ☐ Veri işleme ve analizi
- ☐ Veri görselleştirme
- ☐ Görüntü üretme
- ☐ Kaynakça düzenleme
- ☐ Diğer (Belirtiniz):.....

Bu çalışmada yapay zekâ kullanımı **Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehber**'e ve akademik dürüstlük ilkelerine uygun şekilde gerçekleştirilmiş olup yapay zekâ araçlarından alınan destek, etik kurallar ve kaynak gösterme esaslarına uygun biçimde belirtilmiştir. Yapay zekâ kullanımı, çalışmanın özgünlüğüne, bilimsel etik kurallarına ve ilgili mevzuata aykırı olmayacak biçimde gerçekleştirilmiştir. Usulsüz yapay zekâ kullanımı (örneğin: kaynak göstermeksizin metin üretimi, otomatik içerik üretiminin özgün eser gibi sunulması, yanıltıcı kaynak gösterimi vb.) tarafımdan kesinlikle yapılmamıştır. Yapay zekâ araçlarının sağladığı bilgilerin doğruluğunu kontrol ettiğimi, yanlış veya eksik bilgi bulunması halinde tüm sorumluluğun tarafıma ait olduğunu; ayrıca çalışmamla ilgili bu beyana aykırı bir durumun herhangi bir zamanda tespit edilmesi durumunda ortaya çıkabilecek akademik ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi beyan ederim.

Gözde BAYRAKTAR GÜDAY

../../2026

İmza:

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendiren, bilgi, tecrübe ve önerileriyle tez çalışmam boyunca yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Yüksek lisans çalışmalarım boyunca yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylerin önemli bir alt sınıfını oluşturan dik konoid yüzeyler ele alınmış ve bu yüzeylerin eğrilik karakterizasyonları incelenmiştir. Çalışmanın ilk aşamasında Öklid uzayı, eğriler ve yüzey teorisine dair temel geometrik kavramlar, birinci ve ikinci temel formlar ile şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik bağıntıları ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Tezin ana kısmında, $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$ parametrizasyonu ile verilen dik konoid yüzeylerin diferansiyel geometrik özellikleri araştırılmıştır. Önceden belirlenmiş (prescribed) bir ortalama eğriliğe (H) veya Gauss eğriliğine (K) sahip dik konoid yüzeylerin inşası için gerekli ve yeterli uyumluluk koşulları türetilmiş ve yüzeyin profil eğrisini belirleyen $h(v)$ fonksiyonunu veren integral ifadeleri açık biçimde elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen teorik sonuçların özel durumları irdelenerek minimal dik konoidlerin yalnızca düzlem veya helikoid olabileceği, açılabilir ($K = 0$) dik konoidlerin ise düzleme indirgendiği gösterilmiştir. Son olarak, verilen farklı eğrilik fonksiyonları için dik konoid yüzey aileleri analitik olarak hesaplanmış ve elde edilen yüzeyler grafiklerle örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dik konoid yüzeyi, Gauss eğriliği, konoid yüzeyi, ortalama eğrilik, regle yüzey.

ABSTRACT

In this thesis, right conoid surfaces, which form an important subclass of ruled surfaces in 3-dimensional Euclidean space, are investigated, and their curvature characterizations are studied. In the preliminary part of the work, fundamental concepts of Euclidean space, curves, and surface theory including the first and second fundamental forms, the shape operator, Gaussian curvature, and mean curvature are presented in detail.

In the main part of the thesis, the differential geometric properties of right conoid surfaces given by the parametrization $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$ are examined. The necessary and sufficient compatibility conditions for constructing right conoid surfaces with prescribed mean curvature (H) or Gaussian curvature (K) are derived, and explicit integral formulas determining the profile curve $h(v)$ are obtained. In addition, special geometric cases are analyzed, proving that a minimal right conoid surface is either a plane or a helicoid, while a developable ($K = 0$) right conoid surface is necessarily a plane. Finally, several right conoid surface families associated with specific curvature functions are computed analytically and illustrated with corresponding graphical representations.

Keywords: Conoid surface, Gaussian curvature, mean curvature, right conoid surface, ruled surface.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. ORTALAMA EĞRİLİK VEYA GAUSS EĞRİLİĞİ İLE TANIMLANAN DİK KONOİD YÜZEYLER	12
KAYNAKÇA	28

ŞEKİLLER LİSTESİ

		Sayfa
Şekil 3.1.	$H(u, v) = \frac{u}{2(u^2+v^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey	15
Şekil 3.2.	$H(u, v) = \frac{u \cos v}{2(u^2+\sin^2 v)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey	16
Şekil 3.3.	$H(u, v) = \frac{ue^v}{2(u^2+e^{2v})^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey	17
Şekil 3.4.	$H(u, v) = \frac{u}{(u^2+(1+v^2)^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey	18
Şekil 3.5.	$H(u, v) = \frac{u}{2(u^2+(\ln v)^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey	19
Şekil 3.6.	$K(u, v) = -\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey	22
Şekil 3.7.	$K(u, v) = -\frac{e^{2v}}{(u^2+e^{2v})^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey	23
Şekil 3.8.	$K(u, v) = -\frac{(1+v^2)^2}{(u^2+(1+v^2)^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey	24
Şekil 3.9.	$K(u, v) = -\frac{\sin^2 v}{(u^2+\sin^2 v)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey	26
Şekil 3.10.	$K(u, v) = -\frac{v^2}{(1+u^2v^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey	27

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbf{R}^n$	: n-Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{V}$	: Vektör uzayı
$\langle, \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\chi(\mathbf{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ de vektör alanların uzayı
$T_p(\mathbf{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ in P noktasındaki tanjant uzayı
$\ \quad \ $	: Norm
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\mathbf{d}$	: Metrik
$\mathbf{H}$	: Ortalama eğrilik
$\mathbf{K}$	: Gauss eğrilik
α	: Eğri
$\mathbf{M}$	: Yüzey
$\mathcal{X}(\mathbf{M})$	: M üstündeki bütün düzgün vektör alanları uzayı
$\mathbf{T}_p\mathbf{M}$	: M üstündeki bütün teğet vektörlerin uzayı
$\mathbf{D}_{\mathbf{v}_p}\mathbf{W}$	: W vektör alanının v_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türevi
$\mathbf{S}_p$	: Şekil operatörü
$\mathbf{I}$	: Birinci temel form
$\mathbf{II}$	: İkinci temel form
$\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$	: Birinci temel form katsayıları
$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$	: İkinci temel form katsayıları

1. GİRİŞ

Konoid yüzeyler, tüm doğrultmanlarının eksen olarak adlandırılan sabit bir düz çizgiyi keserken, aynı zamanda önceden belirlenmiş bir düzleme paralel kalma özelliği ile karakterize edilen, regle yüzeylerin önemli bir alt sınıfını oluşturur. Bu ayırt edici geometrik özellik, konoidlere zengin bir yapısal davranış kazandırarak onları diferansiyel geometride hatırı sayılır ilgiye sahip bir nesne haline getirmektedir. Özellikle, içsel ve dışsal özellikleri eğrilik analizi, açılabilir yüzeyler ve özel yüzey aileleri ile ilişkili olarak kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Dahası, doğasından gelen geometrik sadelik ile yapısal çok yönlülüğün birleşimi sayesinde, konoid yüzeyler çeşitli pratik bağlamlarda kendiliğinden ortaya çıkar. Hem estetik açıdan ilgi çekici hem de yapısal olarak verimli formların gerektiği mimari tasarımda, hassas yüzey modellemesinin esas olduğu makine mühendisliğinde ve bilgisayar destekli geometrik tasarımda (BDGT) önemli bir rol oynamaktadırlar. Sonuç olarak, konoid yüzeylerin incelenmesi, teorik gelişmeler ile gerçek dünya uygulamaları arasında değerli bir bağlantı sağlar.

Ayrıca, üç boyutlu Öklid uzayındaki dik konoidler, literatürde kapsamlı araştırmalara konu olmuştur. Özellikle, Berger ve Gostiaux (Berger ve Gostiaux, 1987), Do Carmo (Do Carmo, 1976), Gray (Gray, 1997) ve Kreyszig'in (Kreyszig, 1991) çalışmaları, bunların geometrik özellikleri üzerine kapsamlı incelemeler sunmaktadır. Bu çalışmalar; helikoid, Whitney şemsiyesi, Wallis'in konik kenarı (conical edge), Plücker konoidi ve hiperbolik paraboloid dahil olmak üzere dik konoidlerin dikkate değer birkaç örneğini inceleyerek, hem klasik hem de modern diferansiyel geometrideki temel rollerini vurgulamaktadır. Güler ve Kişi, bir konoid yüzey ailesini ele alarak, $\mathbb{R}^3$ ile $\mathbb{R}_1^3$ uzaylarındaki minimallikleri için gerekli koşulları belirlemişlerdir (Güler ve Kişi 2023a; Güler ve Kişi 2023b).

Belirli geometrik niceliklere sahip yüzeylerin inşası, teorik önemi ve geniş uygulama alanı nedeniyle diferansiyel geometride öteden beri temel bir araştırma konusu olmuştur. Özel olarak, ortalama eğrilik veya Gauss eğriliği yardımıyla tanımlanan yüzeylerin tespiti problemi, bu eğriliklerin bir yüzeyin hem içsel hem de dışsal geometrisini karakterize etmesi sebebiyle yoğun ilgi görmüştür. Bu tür problemler doğası gereği lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere yol açmakta ve bu denklemlerin çözümleri geometrik analiz, minimal yüzey teorisi ve matematiksel fizik alanlarına değerli katkılar sunmaktadır. Sonuç olarak, ortalama eğrilik veya Gauss eğriliği yardımıyla tanımlanan yüzeylerin incelenmesi, yeni analitik tekniklerin geliştirilmesine ve yeni yüzey sınıflarının keşfedilmesine olanak tanıyarak aktif bir araş-

tırma alanı olmayı sürdürmektedir. Ortalama eğrilik veya Gauss eğriliği yardımıyla tanımlanan yüzeylerle alakalı literatürde birçok çalışma mevcuttur (Choi vd., 2010; Delaunay, 1841; Do Carmo ve Dajczer, 1982; López ve Demir, 2014; Baikoussis ve Koufogiorgos, 1998; Yoon vd., 2017; Yıldız vd., 2018; Yıldız ve Akyiğit, 2019; Yıldız, 2019).

Bu tez çalışmasında sunulan ana sonuçlar, 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ 'te dik konoid yüzeylerin diferansiyel geometrisi üzerine yürüttüğümüz araştırma makalesinin bulgularına dayanmaktadır. Bu kapsamda, önceden belirlenmiş bir ortalama eğrilik veya Gauss eğriliği yardımıyla tanımlanan dik konoid yüzey aileleri inşa edilmiş, bu yüzeylerin varlığı için gerekli ve yeterli uyumluluk koşulları açık integral formlarıyla ortaya konmuştur. Ayrıca minimal ve açılabilir dik konoid yüzeyler karakterize edilmiş, elde edilen tüm teorik ve analitik sonuçlar özgün yüzey örnekleri ve grafik çizimleri ile detaylandırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında yer alacak çalışmaların matematiksel altyapısını oluşturmak amacıyla diferansiyel geometrinin temel tanım ve kavramları ele alınmıştır. İlk olarak Öklid uzayı, teğet uzay ve metrik yapılar incelenmiş; ardından yüzey teorisi, temel formlar, eğrilikler ile regle ve konoid yüzeylerin geometrik özellikleri sunulmuştur.

Diferansiyellenebilir geometrik yapıların analiz edilebilmesi için üzerinde çalışılan uzayın cebirsel yapısının belirlenmesi gerekmektedir. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini temsil etmek üzere, n -boyutlu reel sıralı n -lilerin kümesi

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.1)$$

şeklinde dir.

$\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri her $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için sırasıyla

$$p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n), \quad (2.2)$$

$$\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n) \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. Bu iki işlemle birlikte $\mathbb{R}^n$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı yapısı kazanır.

Tanım 2.1. $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olmak üzere,

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad (2.4)$$

bağıntısıyla verilen $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı adı verilir. Bu dönüşüm ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir ve literatürde E^n sembolü ile de gösterilebilmektedir (Sabuncuoğlu, 2017).

Her $p \in \mathbb{R}^n$ vektörü için, söz konusu iç çarpım yardımıyla tanımlanan

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} \quad (2.5)$$

fonksiyonu $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm tanımlar. Böylece $\mathbb{R}^n$ bir normlu vektör uzayı olur.

Benzer şekilde, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$d(p, q) = \|p - q\| \quad (2.6)$$

olarak ifade edildiğinde $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik oluşturur. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır.

$p \in \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ olsun. p noktasından $p + v$ noktasına giden yönlü doğru parçasına, p noktasında, v teğet vektörü diye adlandırılır ve v_p şeklinde gösterilir. p noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_p(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. $T_p(\mathbb{R}^n)$ kümesinde toplama işlemi, $v_p + w_p = (v + w)_p$ eşitliği ile tanımlanır.

Skalarla çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda v_p = (\lambda v)_p$ eşitliği ile tanımlanır.

$T_p(\mathbb{R}^n)$ kümesi bu şekilde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır. $T_p(\mathbb{R}^n)$ uzayına $\mathbb{R}^n$ 'nin p noktasındaki teğet uzayı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2017).

Öklid uzayının açık alt kümeleri üzerinde her noktaya teğet bir vektör atayan yapılar vektör alanı olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. U , $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesi olsun. U kümesinin her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, U kümesi üstünde bir vektör alanı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.4. I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.5. U , $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$, kümesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir. $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüne de bu basit yüzey için bir parametrizasyon adı verilir (Sabuncuoğlu, 2017).

Basit yüzey kavramından hareketle $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yüzey tanımı verilebilir.

Tanım 2.6. M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Yüzeyler üzerindeki tek boyutlu geometrik hareketlerin incelenmesinde diferansiyelenebilir eğrilerden yararlanılır.

Tanım 2.7. $\alpha(t) = \varphi(q + t(1, 0))$ eşitliği ile tanımlı α eğrisine, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin p noktasından geçen x_1 parametre eğrisi denir.

$\beta(t) = \varphi(q + t(0, 1))$ eşitliği ile tanımlı β eğrisine, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin p noktasından geçen x_2 parametre eğrisi denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Parametre eğrileri basit yüzey üzerindeki değişimi incelemek için kullanılır. Yüzey üzerindeki geometrik değişimleri ve türevlenebilir büyüklükleri belirlemek adına yüzeye ait vektör alanları incelenir.

Tanım 2.8. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$V : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(\mathbb{R}^3)$$

biçiminde bir V fonksiyonu her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ önermesini doğruluyorsa V fonksiyonuna, M üzerinde bir vektör alanı denir. Her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(M)$ ise V ye M üzerinde teğet vektör alanı denir. Her $p \in M$ için $V(p)$ vektörü $T_p(M)$ uzayına dik ise V ye M yüzeyi üzerinde bir dik vektör alanı denir. $V(p)$ vektör alanı;

$$V(p) = \sum_{i=1}^3 V_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i|_p}$$

şeklinde ifade edilir. Burada V_i fonksiyonları M den $\mathbb{R}$ ye giden fonksiyonlardır. V_i fonksiyonları düzgün ise V ye M üzerinde düzgün bir vektör alanı denir. M üzerinde bulunan bütün düzgün vektör alanlarının kümesini $\chi_M(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilir. M üzerinde bütün düzgün teğet vektör alanlarının kümesini $\chi(M)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2017).

Bir vektör alanının belirli bir teğet doğrultudaki yönlü türevi kovaryant türev kavramı ile ifade edilir.

Tanım 2.9. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$V : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(\mathbb{R}^3)$$

biçiminde bir V fonksiyonu her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ önermesini doğruluyorsa V fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde bir vektör alanı denir.

M yüzeyinin her bir p noktasına, p noktasındaki $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir elemanını karşılık getiren bir V fonksiyonuna M yüzeyi üstünde bir vektör alanı denir.

Tanım 2.10. Her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(M)$ ise V ye M üstünde teğet vektör alanı denir. Her $p \in M$ için $V(p)$ vektörü $T_p(M)$ uzayına dik ise V ye M üstünde dik vektör alanı denir.

V, M üstünde bir vektör alanı ise $p \in M$ için

$$V(p) = \sum_{i=1}^3 V_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p$$

biçimindedir. Burada V_i fonksiyonları, M den $\mathbb{R}$ ye giden fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar düzgün ise V ye M üstünde düzgün bir vektör alanı denir. $V(p)$ yerine V_p gösterimi de kullanılır.

M üstünde bütün düzgün vektör alanlarının uzayı, $\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilir.

$V \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$ ise her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ demektir.

M üstünde bütün düzgün teğet vektör alanlarının uzayı, $\mathcal{X}(M)$ ile gösterilir.

$V \in \mathcal{X}(M)$ ise her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(M)$ demektir.

Tanım 2.11. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey, $W \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^3)$, $v_p \in T_p(M)$ olsun.

$$D_{v_p} W = \sum_{i=1}^3 v_p[W_i] \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$$

eşitliği ile tanımlı $D_{v_p} W$ vektörüne, W vektör alanının v_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türevi adı verilir ve $D_{v_p} W \in T_p(\mathbb{R}^3)$ dır (Sabuncuoğlu, 2017).

Yüzeyin birim dik vektör alanının teğet yönlerdeki değişimini karakterize eden şekil operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.12. N, M yüzeyi üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} N$$

eşitliği ile tanımlı $S_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasında, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir.

M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne de M yüzeyinin N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Sabuncuoğlu, 2017).

Teorem 2.13. S_p dönüşümü lineerdir (Sabuncuoğlu, 2017).

Yüzey üzerindeki metrik ve eğrilik özelliklerini ölçmek için birinci ve ikinci temel formlar kullanılır.

Tanım 2.14. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M üstünde birinci temel form denir. $I_p(v_p, w_p)$ yerine genellikle, $I(v_p, w_p)$ yazılır.

$E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ de tanımlı olmak üzere,

$$E = \langle M_u, M_u \rangle,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle,$$

dir.

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

M yüzeyinin birinci temel formu yukarıdaki eşitlikle hesaplanır. Buradaki E, F, G ; M in birinci temel formunun katsayılarıdır.

M nin her bir p noktasına

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir. $II_p(v_p, w_p)$ yerine çoğunlukla, $II(v_p, w_p)$ yazılır (Sabuncuoğlu, 2017).

$l, m, n : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$l = \langle M_{uu}, N \rangle,$$

$$m = \langle M_{uv}, N \rangle,$$

$$n = \langle M_{vv}, N \rangle,$$

şeklinde tanımlıdır. Burada N , M yüzeyinin birim normal vektörüdür.

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

M 'nin ikinci temel formu yukarıdaki eşitlikle hesaplanır. Buradaki l, m, n ; M nin ikinci temel formunun katsayılarıdır.

Şekil operatörünün determinantı ve izi yardımıyla yüzeyin eğrilik ölçüleri olan Gauss ve ortalama eğrilikler elde edilebilir.

Tanım 2.15. S_p şekil operatörünün determinantına, M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir.

$K(p) = \det(S_p)$ ile tanımlıdır (Sabuncuoğlu, 2017).

Tanım 2.16. S_p şekil operatörünün izinin yarısına, M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir.

$H(p) = \frac{1}{2}Iz(S_p)$ ile tanımlıdır (Sabuncuoğlu, 2017).

M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E, F, G ve ikinci temel formunun katsayıları l, m, n olmak üzere yüzeyin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Gl - Fm & Em - Fl \\ Gm - Fn & En - Fm \end{vmatrix}$$

şeklinde olduğu göz önünde bulundurularak M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği formülleri;

$$K = \frac{l n - m^2}{E G - F^2}$$

ve

$$H = \frac{G l + E n - 2 F m}{2(EG - F^2)}$$

dir. l, m ve n , M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları olup; E, F ve G de M yüzeyinin birinci temel formunun katsayılarıdır.

Tanım 2.17. $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir Π düzlemindeki eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi$ olsun. Bu düzlemde α eğrisini kesmeyen bir doğru d olsun. α eğrisinin d doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan yüzeye dönel yüzey adı verilir. Bu d doğrusuna dönel yüzeyin ekseni, α eğrisineyse üreteç eğrisi adı verilir. Başka bir deyişle, bir düzlem eğrisinin, kendini kesmeyen bir doğru etrafında (öteleme olmadan) dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey adı verilir.

Üreteç eğrisi α , $\alpha(u) = (u, 0, h(u))$, ve dönme ekseni de z ekseni olarak alınır ise, yüzeyin standart parametrik denklemi,

$$M(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(u))$$

şeklinde verilir. Burada u eksenden uzaklığı gösterirken, v boylamı verilen nokta ve eksenden geçen düzlemle xoz düzlemi arasındaki açıyı göstermektedir.

Eğer $\alpha(u) = (f(u), 0, h(u))$ alınırsa bu eğrinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin standart parametrik denklemi

$$M(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, h(u))$$

olur. Burada v , z -ekseni etrafındaki dönme açısıdır. α eğrisi birim hızlı bir eğri ise

$$f'^2 + h'^2 = 1 \text{ olur.}$$

Tanım 2.18. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, $\mathbb{R}^3$ 'ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir.

Başka bir ifadeyle, regle yüzeyi, bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesi ile oluşturduğu yüzey olarak tanımlanabilmektedir.

Regle yüzeylerin parametrik denkleminin elde edilmesi için, yüzey üzerinde bulunan ve doğrultman doğrularını kesen, diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned}\alpha: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

eğrisi seçilir. Bu eğriye, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir. M bir regle yüzey olsun. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir β noktası için

$$\begin{aligned}\beta: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ v &\rightarrow \beta(v) = \alpha(t) + va(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Bu takdirde regle yüzey

$$\begin{aligned}M: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M(t, v) &= \alpha(t) + va(t)\end{aligned}$$

dönüşümüyle tanımlanır.

Üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ 'te

$$r(u, v) = \alpha(v) + u\beta(v) = (0, 0, h(v)) + u(\cos f(v), \sin f(v), 0)$$

biçiminde verilen bir regle yüzey, eksen olarak adlandırılan sabit bir doğruyu kesen ve verilen bir düzleme göre dikliğini koruyarak öteleme hareketi yapan bir doğru (ana doğru) tarafından üretiliyorsa dik konoid olarak adlandırılır (Güler ve Kişi, 2023a). Geometrik olarak bu yapı, her bir üretcin sabit bir düzleme paralel kalırken aynı zamanda eksenini kestiğini gösterir; bu durum, belirgin bir simetriye ve yapısal yalınlığa sahip özel bir regle yüzey alt sınıfı meydana getirir. Genelliği bozmaksızın, öngörülen düzlemin xy-düzlemi olduğu ve eksenin z-ekseni ile

çakıştığı kabul edilebilir. Bu kabuller altında, dik konoidin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos f(v) \\ u \sin f(v) \\ h(v) \end{pmatrix}$$

biçimine indirgenir; burada $f(v)$ ve $h(v)$ düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Bu temsil, üreteçlerin doğrultu alanının $f(v)$ tarafından yönetildiği, $h(v)$ fonksiyonunun ise eksen boyunca profil eğrisini belirlediği dik konoidlerin içsel geometrisini vurgulamaktadır.

3. ORTALAMA EĞRİLİK VEYA GAUSS EĞRİLİĞİ İLE TANIMLANAN DİK KONOİD YÜZEYLER

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ 'te regle yüzeylerin özel ve önemli bir sınıfını oluşturan dik konoid yüzeyler ele alınmaktadır. Önceden belirlenmiş (prescribed) bir ortalama eğrilik (H) veya Gauss eğrilik (K) fonksiyonu yardımıyla bu yüzeylerin analitik olarak nasıl inşa edilebileceği araştırılmıştır. Bu doğrultuda, yüzeyin birinci ve ikinci temel formları ile birim normal vektör alanı hesaplanarak eğrilik ifadelerine karşılık gelen diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Belirlenen eğrilik fonksiyonlarına bağlı olarak yüzeyin profil eğrisini karakterize eden $h(v)$ fonksiyonu için gerekli ve yeterli uyumluluk koşulları türetilmiş, ilgili integral formleri açık olarak ifade edilmiştir. Ayrıca, elde edilen genel teorik sonuçların özel durumları irdelenerek minimal ve açılabilir dik konoid yüzeylerin geometrik karakterizasyonları ortaya konmuş ve teoriyi destekleyen analitik yüzey aileleri grafiksel gösterimleriyle birlikte sunulmuştur.

Bu çalışma boyunca $f(v)$ fonksiyonu $f(v) = v$ olarak alınacaktır. Bir dik konoid,

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$$

biçiminde verilir. Doğrudan yapılan hesaplamalarla, dik konoidin birinci temel formu, ikinci temel formu ve birim normal vektörü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$I = du^2 + \left(u^2 + (h'(v))^2\right) dv^2,$$

$$II = -\frac{2h'(v)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}} du dv + \frac{u h''(v)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}} dv^2,$$

$$\mathbf{N} = \frac{(h'(v) \sin v, -h'(v) \cos v, u)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}}$$

ve ortalama ile Gauss eğrilikleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$H(u, v) = \frac{u h''(v)}{2 \left(u^2 + (h'(v))^2\right)^{3/2}},$$

$$K(u, v) = -\frac{(h'(v))^2}{(u^2 + (h'(v))^2)^2}$$

burada $u^2 + (h'(v))^2 > 0$ 'dır.

Teorem 3.1. $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$, $\mathbb{R}^3$ 'te bir dik konoid yüzey olsun. $H(u, v)$ ifadesinin dik konoid yüzeyin ortalama eğriliğini gösterdiğini ve $A(u, v) = c(u) + 2u \int H(u, v) dv$ olmak üzere h 'nin yalnızca v 'ye bağlı olacak şekilde seçildiğini varsayalım. Bu durumda, $|A(u, v)| < 1$ ve $u > 0$ için, profil eğrileri

$$\alpha(v, A(u, v), c_1) = \left(0, 0, \int \frac{uA(u, v)}{\sqrt{1 - (A(u, v))^2}} dv + c_1 \right)$$

ile verilen bir konoid yüzey ailesi mevcuttur; burada $c_1 \in \mathbb{R}$ 'dir.

İspat. Dik konoid yüzeyin ortalama eğriliği ele alınsın:

$$H(u, v) = \frac{uh''(v)}{2(u^2 + (h'(v))^2)^{3/2}}.$$

$p(v) = h'(v)$ olsun. Bu durumda yukarıdaki denklem $u \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{p'(v)}{(u^2 + p(v)^2)^{3/2}} = \frac{2H(u, v)}{u}$$

olarak yeniden yazılabilir ve buradan

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{h'(v)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}} \right) = 2uH(u, v)$$

ifadesi elde edilir. v 'ye göre integral alındığında,

$$\frac{h'(v)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}} = c(u) + 2u \int H(u, v) dv$$

bulunur.

Eğer

$$A(u, v) = c(u) + 2u \int H(u, v) dv$$

olarak tanımlanırsa, $u > 0$ için

$$\frac{h'(v)}{\sqrt{u^2 + (h'(v))^2}} = A(u, v)$$

elde edilir; buradan da

$$h'(v) = \frac{uA(u, v)}{\sqrt{1 - A(u, v)^2}}$$

bulunur. Son olarak, $|A(u, v)| < 1$ için

$$h(v) = \int \frac{uA(u, v)}{\sqrt{1 - (A(u, v))^2}} dv + c_1$$

elde edilir; burada c_1 keyfi bir integral sabitidir. Bununla birlikte, bir uyumluluk koşulu gereklidir. $h = h(v)$ olduğundan,

$$\frac{uA(u, v)}{\sqrt{1 - (A(u, v))^2}}$$

niceliği u 'dan bağımsız olmalıdır. Dolayısıyla böyle bir $h(v)$ fonksiyonu, yalnızca bu uyumluluk koşulunu sağlayan $H(u, v)$ fonksiyonları için mevcuttur. Bu durumda $h(v)$, yukarıdaki ifadenin integrali alınarak elde edilir.

■

Sonuç 3.2. Bir dik konoid yüzey minimal ise, M ya bir düzlem ya da bir helikoiddir.

Örnek 3.3. $\mathbb{R}^3$ 'te ortalama eğriliği

$$H(u, v) = \frac{u}{2(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

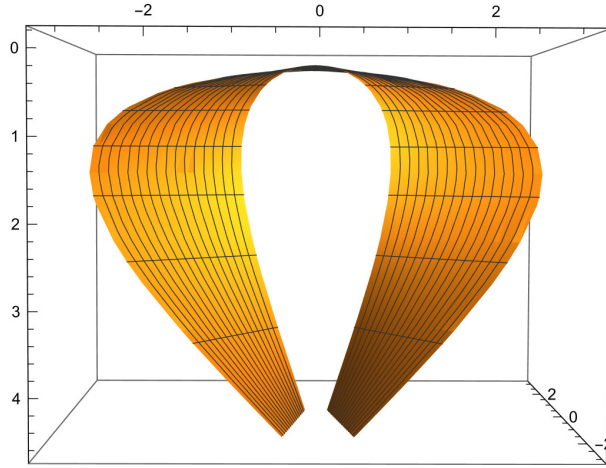
olarak verilen bir dik konoid yüzey ele alalım. Teorem 3.1, $c(u) = 0$ kabulü ve $u > 0$ göz önüne alındığında, $h(v) = \frac{v^2}{2} + c_1$ ve yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{v^2}{2} + c_1 \right)$$

olarak elde edilir. $c_1 = 0$ ve

$$\begin{cases} 1 < u < 3 \\ -3 < v < 3 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1. $H(u, v) = \frac{u}{2(u^2+v^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.4. $\mathbb{R}^3$ 'te ortalama eğriliği

$$H(u, v) = \frac{u \cos v}{2(u^2 + \sin^2 v)^{3/2}}$$

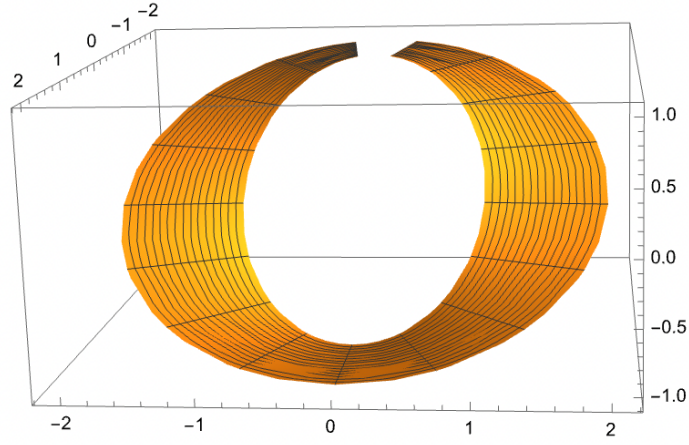
olan bir dik konoid yüzey ele alalım. Teorem 3.1 ve $c(u) = 0$ kabulü göz önüne alındığında, $h(v) = -\cos v + c_1$ ve yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, -\cos v + c_1)$$

olarak elde edilir. $c_1 = 0$ ve

$$\begin{cases} 1 < u < 2 \\ -3 < v < 3 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.2. $H(u, v) = \frac{u \cos v}{2(u^2 + \sin^2 v)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.5. $\mathbb{R}^3$ 'te ortalama eğriliği

$$H(u, v) = \frac{ue^v}{2(u^2 + e^{2v})^{3/2}}$$

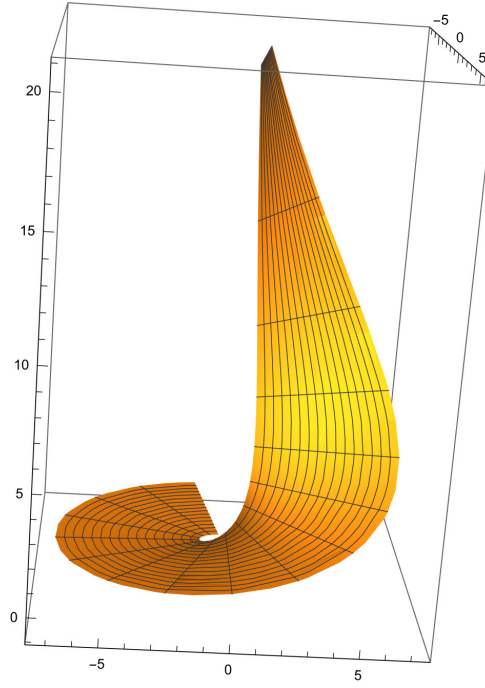
olan bir dik konoid yüzey ele alalım. Teorem 3.1 ve $c(u) = 0$ kabulü göz önüne alındığında, $h(v) = e^v + c_1$ ve yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, e^v + c_1)$$

olarak elde edilir. $c_1 = 0$ ve

$$\begin{cases} 1 < u < 8 \\ -3 < v < 3 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3. $H(u, v) = \frac{ue^v}{2(u^2 + e^{2v})^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.6. $\mathbb{R}^3$ 'te ortalama eğriliği

$$H(u, v) = \frac{u}{(u^2 + (1 + v^2)^2)^{3/2}}$$

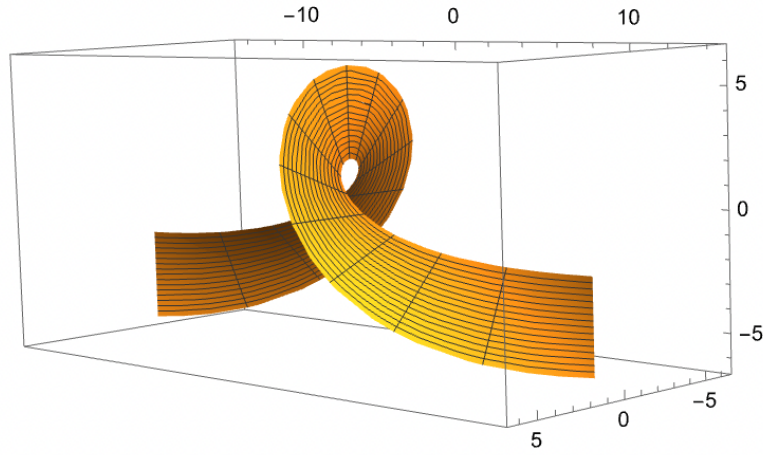
olan bir dik konoid yüzey ele alalım. Teorem 3.1 ve $c(u) = 0$ kabulü göz önüne alındığında, $h(v) = v + \frac{v^3}{3} + c_1$ ve yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, v + \frac{v^3}{3} + c_1 \right)$$

olarak elde edilir. $c_1 = 0$ ve

$$\begin{cases} 2 < u < 6 \\ -\pi < v < \pi \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4. $H(u, v) = \frac{u}{(u^2 + (1+v^2)^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.7. $\mathbb{R}^3$ 'te ortalama eğriliği

$$H(u, v) = \frac{u}{2(u^2 + (\ln v)^2)^{3/2}}$$

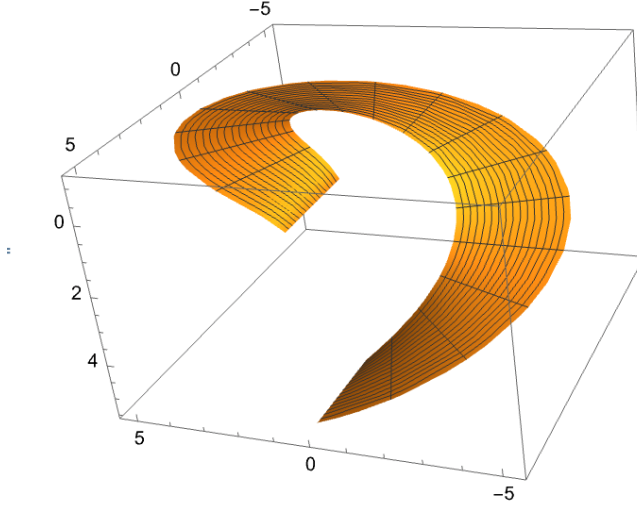
olan bir dik konoid yüzey ele alalım. Teorem 3.1 ve $c(u) = 0$ kabulü göz önüne alındığında, $h(v) = v \ln v - v + c_1$ ve yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v \ln v - v + c_1)$$

olarak elde edilir. $c_1 = 0$ ve

$$\begin{cases} 2 < u < 5 \\ 0 < v < 2\pi \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.5. $H(u, v) = \frac{u}{2(u^2 + (\ln v)^2)^{3/2}}$ ortalama eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Teorem 3.8. $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v))$, $\mathbb{R}^3$ 'te bir dik konoid yüzey olsun. $K(u, v)$ ifadesinin dik konoid yüzeyin ortalama eğriliğini belirttiğini ve

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{-(2K(u, v)u^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4K(u, v)u^2}}{2K(u, v)} \right] = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $-\frac{1}{4u^2} \leq K(u, v) < 0$ için profil eğrileri

$$\alpha(v, K(u, v), c) = \left(0, 0, \pm \int \sqrt{\frac{-(2K(u, v)u^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4K(u, v)u^2}}{2K(u, v)}} dv + c \right)$$

ile verilen bir konoid yüzey ailesi mevcuttur; burada c keyfi bir sabittir.

İspat. Dik konoid yüzeyin Gauss eğriliği ele alınsın:

$$K(u, v) = -\frac{(h'(v))^2}{(u^2 + (h'(v))^2)^2}.$$

$p(v) = h'(v)$ olsun. Bu durumda yukarıdaki denklem

$$-K(u, v) = \frac{p(v)^2}{(u^2 + p(v)^2)^2}$$

olarak yeniden yazılabilir ve $y(v) = p(v)^2$ dönüşümü uygulandığında

$$-Ky^2 - (2Ku^2 + 1)y - Ku^4 = 0$$

elde edilir. $-\frac{1}{4u^2} \leq K(u, v) < 0$ için, yukarıdaki denklemden

$$y = \frac{-(2Ku^2 + 1) \pm \sqrt{(2Ku^2 + 1)^2 - 4K^2u^4}}{2K}$$

olduğu görülür. Buradan, $p(v) = h'(v)$ ve $y(v) = p(v)^2$ olduğundan

$$p^2 = (h'(v))^2 = \frac{-(2Ku^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4Ku^2}}{2K}$$

ve dolayısıyla

$$h'(v) = \pm \sqrt{\frac{-(2Ku^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4Ku^2}}{2K}}$$

bulunur. v 'ye göre integral alındığında

$$h(v) = \pm \int \sqrt{\frac{-(2K(u, v)u^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4K(u, v)u^2}}{2K(u, v)}} dv + c \quad (3.1)$$

elde edilir; burada c keyfi bir integral sabitidir. Bununla birlikte, bir uyumluluk koşulu gereklidir. $h = h(v)$ olduğundan,

$$\frac{-(2Ku^2 + 1) \pm \sqrt{1 + 4Ku^2}}{2K}$$

niceliği u 'dan bağımsız olmalıdır. Dolayısıyla böyle bir $h(v)$ fonksiyonu, yalnızca bu uyumluluk koşulunu sağlayan $K(u, v)$ fonksiyonları için mevcuttur. Bu durumda $h(v)$, yukarıdaki ifadenin integrali alınarak elde edilir.

■

Sonuç 3.9. Bir dik konoid yüzey açılabilir (Gauss eğriliği $K = 0$) ise, M bir düzlemdir.

Örnek 3.10. $\mathbb{R}^3$ 'te Gauss eğriliği

$$K(u, v) = -\frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

olan bir konoid yüzey ele alınsın. Teorem 3.8 göz önüne alındığında, $h(v)$ 'yi belirlemek için

aşağıdaki integral elde edilir:

$$I(v) = \int \sqrt{\frac{-\left(2\left(-\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)u^2+1\right)+\sqrt{4\left(-\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)^2u^2+1}}{2\left(-\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)}} dv.$$

İntegrant bir karekök içerdiğinden, ifade u ve v değişkenlerinin uygun aralıklarına göre ayrı ayrı analiz edilmelidir. Durum bazında yapılan bir inceleme, integralin

$$I(v) = \begin{cases} |v|, & |v| \leq |u|, \\ \frac{u^2}{|v|}, & |v| > |u| \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde verildiğini gösterir. Dolayısıyla integralin değeri, $|u|$ ve $|v|$ büyüklüklerinin birbirine göre durumuna bağlı olup yukarıdaki parçalı ifadeyi verir. Dik konoid yüzey tanımı gereğince, h düzgün fonksiyonu yalnızca v 'ye bağlıdır. Denklem (3.2)'den

$$h(v) = \frac{v^2}{2} + c.$$

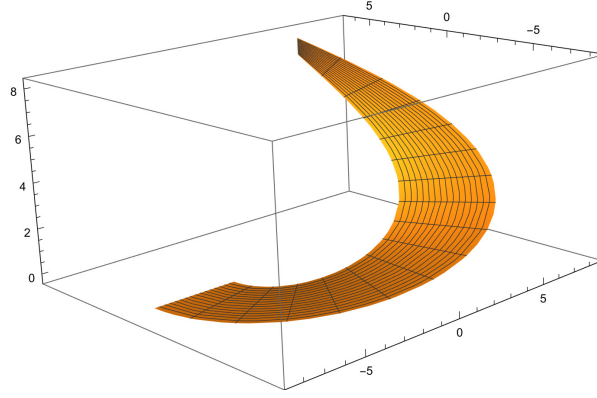
elde edilir. Böylece yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{v^2}{2} + c \right)$$

şeklindedir. $c = 0$ ve

$$\begin{cases} -8 < u < -4 \\ 0 < v < 4 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6. $K(u, v) = -\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.11. $\mathbb{R}^3$ 'te Gauss eğriliği

$$K(u, v) = -\frac{e^{2v}}{(u^2 + e^{2v})^2}$$

olan bir konoid yüzey ele alınsın. Teorem 3.8 göz önüne alındığında, $h(v)$ 'yi belirlemek için aşağıdaki integral elde edilir:

$$I(v) = \int \sqrt{\frac{-\left(2\left(-\frac{e^{2v}}{(u^2 + e^{2v})^2}\right)u^2 + 1\right) + \sqrt{1 - \frac{4u^2 e^{2v}}{(u^2 + e^{2v})^2}}}{2\left(-\frac{e^{2v}}{(u^2 + e^{2v})^2}\right)}} dv.$$

İntegrand bir karekök içerdiğinden, ifade u ve v değişkenlerinin uygun aralıklarına göre ayrı ayrı analiz edilmelidir. Durum bazında yapılan bir inceleme, integralin

$$I(v) = \begin{cases} e^v + c, & e^v \leq |u|, \\ -\frac{u^2}{e^v} + c, & e^v > |u| \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde verildiğini gösterir. Dolayısıyla integralin değeri, $|u|$ ve e^v 'ye bağlı olarak yukarıdaki parçalı biçimi verir. Dik konoid yüzey tanımı gereğince, h düzgün fonksiyonu yalnızca v 'ye bağlıdır. Denklem (3.3)'ten

$$h(v) = e^v + c$$

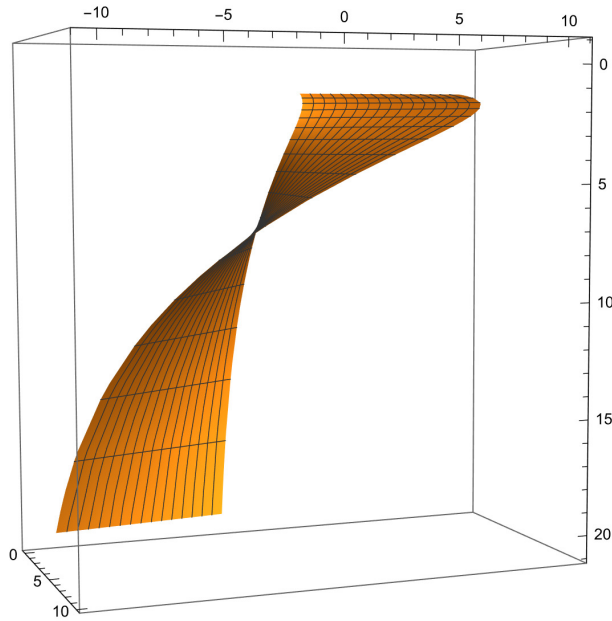
olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, e^v + c)$$

olarak elde edilir. $c = 0$ ve

$$\begin{cases} 2 < u < 10 \\ 0 < v < \ln u \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.7’de verilmiştir.



Şekil 3.7. $K(u, v) = -\frac{e^{2v}}{(u^2 + e^{2v})^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.12. $\mathbb{R}^3$ ’te Gauss eğriliği

$$K(u, v) = -\frac{(1 + v^2)^2}{(u^2 + (1 + v^2)^2)^2}$$

olan bir konoid yüzey ele alınsın. Teorem 3.8 göz önüne alındığında, $h(v)$ ’yi belirlemek için aşağıdaki integral elde edilir:

$$I = \int \sqrt{\frac{-\left(2\left(-\frac{(1+v^2)^2}{(u^2+(1+v^2)^2)^2}\right)u^2 + 1\right) + \sqrt{4\left(-\frac{(1+v^2)^2}{(u^2+(1+v^2)^2)^2}\right)u^2 + 1}}{2\left(-\frac{(1+v^2)^2}{(u^2+(1+v^2)^2)^2}\right)}} dv.$$

İntegrant bir karekök içerdiğinden, ifade u ve v değişkenlerinin uygun aralıklarına göre ayrı ayrı analiz edilmelidir. Durum bazında yapılan bir inceleme, integralin

$$I(v) = \begin{cases} v + \frac{v^3}{3} + c, & |u| \geq 1 + v^2, \\ u^2 \arctan v + c, & |u| < 1 + v^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde verildiğini gösterir. Dolayısıyla integralin değeri, $|u|$ ve v 'ye bağlı olarak yukarıdaki parçalı biçimi verir. Dik konoid yüzey tanımı gereğince, h düzgün fonksiyonu yalnızca v 'ye bağlıdır. Denklem (3.4)'ten

$$h(v) = v + \frac{v^3}{3} + c$$

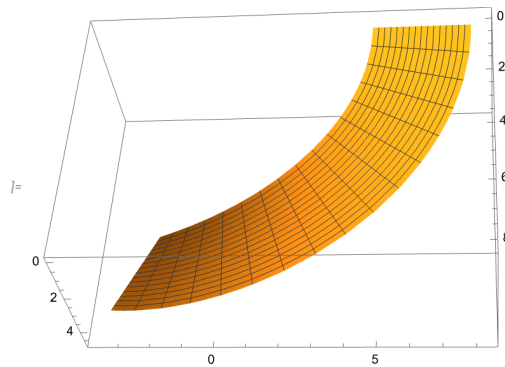
olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, v + \frac{v^3}{3} + c \right)$$

olarak elde edilir. $c = 0$ ve

$$\begin{cases} 5 < u < 8 \\ 0 < v < 2 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.8. $K(u, v) = -\frac{(1+v^2)^2}{(u^2 + (1+v^2)^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.13. $\mathbb{R}^3$ 'te Gauss eğriliği

$$K(u, v) = -\frac{\sin^2 v}{(u^2 + \sin^2 v)^2}$$

olan bir konoid yüzey ele alınsın. Teorem 3.8 göz önüne alındığında, $h(v)$ 'yi belirlemek için aşağıdaki integral elde edilir:

$$I = \int \sqrt{\frac{-\left(2\left(-\frac{\sin^2 v}{(u^2 + \sin^2 v)^2}\right)u^2 + 1\right) + \sqrt{4\left(-\frac{\sin^2 v}{(u^2 + \sin^2 v)^2}\right)u^2 + 1}}{2\left(-\frac{\sin^2 v}{(u^2 + \sin^2 v)^2}\right)}} dv.$$

İntegrand bir karekök içerdiğinden, ifade u ve v değişkenlerinin uygun aralıklarına göre ayrı ayrı analiz edilmelidir. Durum bazında yapılan bir inceleme, integralin

$$I(v) = \begin{cases} \cos v + c, & u^2 \geq (\sin v)^2, \\ -u^2 \ln |\tan \frac{v}{2}| + c, & u^2 < (\sin v)^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde verildiğini gösterir. Dolayısıyla integralin değeri, u ve v 'ye bağlı olarak yukarıdaki parçalı biçimi verir. Dik konoid yüzey tanımı gereğince, h düzgün fonksiyonu yalnızca v 'ye bağlıdır. Denklem (3.5)'ten

$$h(v) = -\cos v + c$$

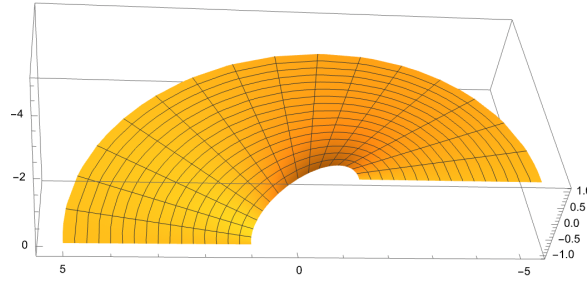
olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece yüzeyin parametrisasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, -\cos v + c)$$

olarak elde edilir. $c = 0$ ve

$$\begin{cases} 1 < u < 5 \\ \pi < v < 2\pi \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.9. $K(u, v) = -\frac{\sin^2 v}{(u^2 + \sin^2 v)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

Örnek 3.14. $\mathbb{R}^3$ 'te Gauss eğriliği

$$K(u, v) = -\frac{v^2}{(1 + u^2 v^2)^2}$$

olan bir konoid yüzey ele alınsın. Teorem 3.8 göz önüne alındığında, $h(v)$ 'yi belirlemek için aşağıdaki integral elde edilir:

$$I = \int \sqrt{\frac{-\left(2\left(-\frac{v^2}{(1+u^2 v^2)^2}\right)u^2 + 1\right) + \sqrt{4\left(-\frac{v^2}{(1+u^2 v^2)^2}\right)u^2 + 1}}{2\left(-\frac{v^2}{(1+u^2 v^2)^2}\right)}} dv.$$

İntegrant bir karekök içerdiğinden, ifade u ve v değişkenlerinin uygun aralıklarına göre ayrı ayrı analiz edilmelidir. Durum bazında yapılan bir inceleme, integralin

$$I(v) = \begin{cases} \frac{u^2 v^2}{2} + c, & |uv| \leq 1, \\ \ln v + c, & |uv| > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde verildiğini gösterir. Dolayısıyla integralin değeri, $|u|$ ve $|v|$ 'ye bağlı olarak yukarıdaki parçalı biçimi verir. Dik konoid yüzey tanımı gereğince, h düzgün fonksiyonu yalnızca v 'ye bağlıdır. Denklem (3.6)'ten

$$h(v) = \ln |v| + c$$

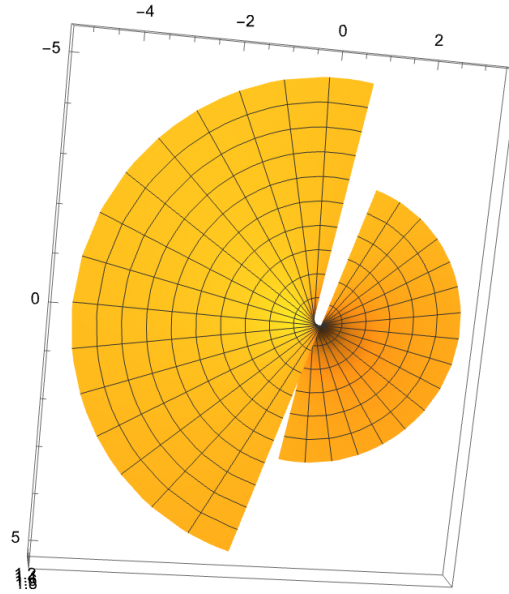
olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln v + c)$$

olarak elde edilir. $c = 0$ ve

$$\begin{cases} -3 < u < 5 \\ 3 < v < 6 \end{cases}$$

tanım kümesi için yüzey Şekil 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.10. $K(u, v) = -\frac{v^2}{(1+u^2v^2)^2}$ Gauss eğriliğine sahip dik konoid yüzey.

KAYNAKÇA

- Baikoussis, C., & Koufogiorgos, T. (1998). Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature, *J. Geom.*, 63(1-2), 25–29. <https://doi.org/10.1007/BF01221235>
- Berger, M., & Gostiaux, B. (1987). *Géométrie Différentielle: Variétés, Courbes et Surfaces*, Presses Univ. France, France.
- Choi, M. K., Kim, Y. H., Liu, H., & Yoon, D. W. (2010). Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space, *Bull. Korean Math. Soc.*, 47(4), 859–881. <https://doi.org/10.4134/BKMS.2010.47.4.859>
- Delaunay, Ch. (1841). Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pures Appl.*, 6, 309–315.
- Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Do Carmo, M. P., & Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature, *Tohoku Math. J.*, 34(3), 425–435. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178229204>
- Gray, A. (1997). *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- Güler, E., & Kişi, O. (2023a). Conoid surfaces family in three-dimensional Euclidean space, *Proceedings of the 5th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences*, 1(1), 139-146. <https://doi.org/10.59287/icaens.982>
- Güler, E., & Kişi, O. (2023b). Conoid surfaces family in Minkowski 3-Space, *Proceedings of the 5th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences*, 1(1), 147-154. <https://doi.org/10.59287/icaens.983>
- Kreyszig, A. (1991). *Differential Geometry*, Dover Publications, New York, USA.
- López, R., & Demir, E. (2014). Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature, *Open Math.*, 12(9), 1349–1361. <https://doi.org/10.2478/s11533-014-0415-0>
- Sabuncuoğlu, A. (2017). *Diferansiyel geometri*. Nobel akademik yayıncılık, Türkiye.
- Yıldız, Ö. G., Hızal, S., & Akyiğit, M. (2018). Type I^+ helicoidal surfaces with prescribed weighted mean or Gaussian curvature in Minkowski space with density, *An. Univ. Ovidius Constanța Ser. Math.*, 26(3), 99–108.
- Yıldız, Ö. G., & Akyiğit, M. (2019). Constructions of Type III^+ helicoidal surfaces in Min-

- kowski space with desity, *Int. Electron. J. Geom.*, 12(1), 20–25.
- Yıldız, Ö. G. (2019). Constructions of helicoidal surfaces in a 3-dimensional complete manifold with density, *Mathematics*, 7(1), Article 27.
- Yıldız, Ö. G., & Güday, G. B. (2026). Conoid Surfaces with Given Mean or Gaussian Curvature in Euclidean 3-space, *Sakarya Journal of Mathematics*, Vol. 2, No. 2, 1–12.
- Yoon, D. W., Kim, D. S., Kim, Y. H., & Lee, J. W. (2017). Constructions of helicoidal surfaces in Euclidean space with density, *Symmetry*, 9(9), Article 173.<https://doi.org/10.3390/sym9090173>