

Orjinal SON.pdf

Yazar Esra Güder

Gönderim Tarihi: 13-Şub-2025 06:11PM (UTC+0300)

Gönderim Numarası: 2587579675

Dosya adı: Orjinal_SON.pdf (211.12K)

Kelime sayısı: 10158

Karakter sayısı: 37207

1. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı ilk kez Fransız matematikçi Maurice Fréchet (1906) tarafından doktora tezinde incelenmiştir [Fréchet, 1906]. Kısmi metrik kavramı ise Matthews tarafından 1992 yılında tanımlanmıştır. Metrik ve kısmi metrik aksiyomlarına bakalım olursak

$$p_2(u = w \Leftrightarrow p(u, w) = p(u, u) = p(w, w)) \text{ ve } p_1(p(u, u) \leq p(u, w))$$

aksiyomlarından $p(u, w) = 0$ ise $u = w$ dir. Ancak $u = w$ iken $p(u, w) = 0$ olmak zorunda değildir [Matthews, 1994]. O halde her metrik bir kısmi metriktir ancak bunun tersi doğru değildir. Metrik uzaylarda elde edilmiş olan birçok teorem ve sonuç kısmi metrik uzaylara genelleştirilmiştir. Kısmi metrik uzaylar bilgisayar bilimlerinde ve matematiğin birçok alanında kullanılan bir konu olmuştur. Quasi metrik kavramı ise 1931 yılında W. A. Wilson tarafından tanımlanmıştır [Wilson, 1931]. Quasi metrik uzaylar metrik uzayların bir genellemesidir ve metrik uzaylardaki simetri aksiyomunu sağlamazlar. Dolayısıyla her metrik uzay bir quasi metrik uzaydır. Quasi metrik uzaylar matematik ve uygulamalı matematiğin yanı sıra malzeme bilimi, biyoloji gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Nesneleri karşılaştırmanın en yaygın yollarından biri uzaklık ölçüsü olduğundan, nesnelerin benzerliğini yorumlamak da genel olarak uzaklık ile ilişkilidir. Benzerlik sadece uzaklığa bağlı değil aynı zamanda ortak özelliklerin miktarına da bağlı olabilir. Metrik uzayların aksine verilen iki elemanın ortak özellikleri arttıkça benzerlik fonksiyonunun değeri artmaktadır [Chen vd., 2009]. Fizik, istatistik, psikoloji gibi birçok alanda benzerlik kavramı ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Örneğin biyolojide iki DNA dizisinin benzerliğini karşılaştırmada, siber güvenlikte bir ağın trafiğini incelerken bir tehdit varlığının var olup olmadığını anlayabilmek için ağdaki paketleri, referans paketleriyle karşılaştırabilmek ya da veri madenciliğinde niteliklerin önemini değerlendirmede benzerlik kavramı kullanılmaktadır. Benzerlik fonksiyonunun ilk aksiyomatik tanımı Chen, Ma ve Zhang tarafından Benzerlik Metriği ve Mesafe Metriği Üzerine adlı makalelerinde tanımlanmıştır [Chen vd., 2009]. Yakın zamanda Ondrej Rozinek tarafından bu tanım kullanılarak benzerlik ve uzaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir [Rozinek ve Mares, 2021].

Bu tezin amacı metrik, quasi metrik, kısmi metrik ve benzerlik metriğinin özelliklerini açıklayarak birbirleri arasındaki ilişkiyi incelemektir. Tezin ikinci bölümünde bazı temel kavramlar ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde metrik uzaylar, kısmi metrik uzaylar ve quasi metrik uzaylar arasındaki ilişkiler ve literatürde yapılan bazı çalışmalar ve örneklerle yer verilmiştir. Dördüncü bölümde benzerlik metriğinin aksiyomatik tanımına ve çeşitli örneklerle yer verilmiştir. Son bölümde ise benzerlik metriğinin diğer metrik yapılarla arasındaki bağlantılar ele alınmış olup, bir yapıdan diğerinin elde edilebilmesi üzerine çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlarla ilgili somut örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu kısmında çalışmamızda kullanılacak tanım ve temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $u, w, z \in X$ için :

$$d_1) \bar{d}(u, w) \geq 0$$

$$d_2) \bar{d}(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w$$

$$d_3) \bar{d}(u, w) = \bar{d}(w, u)$$

$$d_4) \bar{d}(u, z) \leq \bar{d}(u, w) + \bar{d}(w, z)$$

aksiyonlarını sağlıyor ise \bar{d} fonksiyonu X üzerinde bir metrik ve (X, \bar{d}) ikilisine de bir metrik uzay denir (Yıldız, 2005).

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her u, w reel sayısı için

$$d(u, w) = |w - u|$$

ile tanımlanan d fonksiyonunun bir metrik olduğu görülebilir. Bu metriğe \mathbb{R} nin alışılmış metriği denir (Yıldız, 2005).

Örnek 2.3. $X \neq \emptyset$ olmak üzere ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ve her u, w reel sayısı için

$$d(u, w) = \begin{cases} 1 & u \neq w \\ 0 & u = w \end{cases}$$

ile tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (Yıldız, 2005).

Örnek 2.4. $X = \mathbb{N}$ boş kümeden farklı bir küme ve $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $u, w \in \mathbb{N}$ için

$$d(u, w) = \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{w} \right|$$

ile tanımlanan d fonksiyonu \mathbb{N} üzerinde bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Örnek 2.5. $\mathbb{C}[0, 1] = \{u|u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde

$$d(u, w) = \int_0^1 |u(t) - w(t)| dt$$

$t \in [0, 1]$ ile tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Örnek 2.6. $C[0, 1] = \{u|u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde

$$d(u, w) = \max_{t \in [0, 1]} |u(t) - w(t)| dt$$

$t \in [0, 1]$ ile tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir (Kreyszig, 1991).

Tanım 2.7. (X, d) bir metrik uzay olsun. $w \in X$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olsun.

- 1) $B_d(w, \varepsilon) = \{u \in X | d(u, w) < \varepsilon\}$
- 2) $B_d(w, \varepsilon) = \{u \in X | d(u, w) \leq \varepsilon\}$

kümelerine sırasıyla w merkezli ve ε yarıaçıklı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Yıldız, 2005).

Tanım 2.8. X boş kümeden farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde tanımlanan bir \leq bağıntısı, her u, w, z elemanı için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı ve (X, \leq) ikilisi de kısmi sıralı küme olarak tanımlanır.

- 1) $u \leq u$
- 2) $u \leq w$ ve $w \leq u$ ise $u = w$
- 3) $u \leq w$ ve $w \leq z$ ise $u \leq z$ (Matthews, 1994).

Tanım 2.9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere her $u, w \in X$ için

$$d(u, w) \geq \omega(u) - \omega(w)$$

olacak şekilde bir $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ağırlık fonksiyonu var ise d fonksiyonuna X üzerinde ağırlıklı metrik, (X, d, ω) üçlüsüne de ağırlıklı metrik uzay denir (Matthews, 1992).

Tanım 2.10. $X \neq \emptyset$ ve $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $u, w, z \in X$ için

- q₁) $q(u, w) \geq 0$
- q₂) $q(u, w) = q(w, u) = 0 \Leftrightarrow u = w$
- q₃) $q(u, z) \leq q(u, w) + q(w, z)$

özelliklerini sağlıyorsa, q fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir quasi metrik, (X, q) ikilisine de bir quasi metrik uzay denir. q nun eşlenik quasi metriği yine bir quasi metrik olan her $u, w \in X$ için

$$q^*(u, w) = q(w, u) \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Örnek 2.11. $X = [0, \infty)$ ve $q(u, w) = \max\{0, w - u\}$ ile tanımlanan q fonksiyonu quasi metriktir (Camión vd., 2018).

Gerçekten de q fonksiyonunun $q_1 - q_3$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$q_1)$ $q \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

$q_2)$ Her $u, w \in X$ için $q(w, u) = q(u, w) = 0$ olsun. Bu durumda $q(u, w) = \max\{w - u, 0\} \Rightarrow w - u = 0$ olup $w = u$ olur. Benzer şekilde $q(w, u) = \max\{u - w, 0\}$ ise $u - w = 0$ olup $u = w$ olur. Şimdi $u = w$ olsun. $\max\{0, w - w\} = 0$ ve $\max\{0, u - u\} = 0$ olduğundan $q(w, u) = q(u, w) = 0$ dir.

$q_3)$

$$\begin{aligned} q(u, z) &= \max\{u - z, 0\} \\ &= \max\{u - w + w - z, 0 + 0\} \\ &\leq \max\{u - w, 0\} + \max\{w - z, 0\} \\ &= q(u, w) + q(w, z). \end{aligned}$$

Aksiyomlar sağlandığından q fonksiyonu bir quasi metriktir.

Örnek 2.12. $X = \mathbb{R}$ ve $q : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ verilsin. $\beta > 0$ olmak üzere

$$q(u, w) = \begin{cases} \beta(u - w) & u > w \\ w - u & u \leq w \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon bir quasi metriktir (Collins ve Zimmer, 2007).

Gerçekten de q fonksiyonunun $q_1 - q_3$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$q_1)$ q nun tanımından açıktır.

$q_2)$ Her $u, w \in X$ için $q(u, w) = 0$ ise $u \leq w$ ve $q(w, u) = 0 \Rightarrow w \leq u$ dir. O halde $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. $u \leq w \Rightarrow w - u = w - w = 0$ dir. Dolayısıyla $q(u, w) = q(w, u)$ olur.

$q_3)$ $u \leq w$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} u \leq w \leq z &\Rightarrow z - u \leq w - u + z - w \\ z \leq u \leq w &\Rightarrow \beta(u - z) \leq w - u + \beta(w - z) \\ u \leq z \leq w &\Rightarrow z - u \leq w - u + \beta(w - z) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$w < u$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} z < w < u &\Rightarrow \beta(u - z) \leq \beta(u - w) + \beta(w - z) \\ w < z < u &\Rightarrow \beta(u - z) \leq \beta(u - w) + (z - w) \\ w < u < z &\Rightarrow z - u \leq \beta(u - w) + z - u \text{ olur.} \end{aligned}$$

Verilen eşitsizliklerin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla q fonksiyonu quasi metriktir.

Örnek 2.13. $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ verilsin.

$$q(u, w) = \begin{cases} e^w - e^u & w \geq u \\ e^{-w} - e^{-u} & w < u \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir quasi metriktir [Collins ve Zimmer, 2007].

Örnek 2.14. $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ verilsin.

$$q(u, w) = \begin{cases} w - u & w \geq u \\ 1 & w < u \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir quasi metriktir [Collins ve Zimmer, 2007].

Tanım 2.15. (X, q) quasi metrik uzayı verilsin. Bir $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ağırlık) fonksiyonu

$$\omega(u) + q(u, w) = \omega(w) + q(w, u) \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlıyorsa q fonksiyonuna (ağırlıklı) quasi metrik denir. Özel olarak eğer $\omega(X) \subset [0, \infty)$ ise o zaman q fonksiyonu pozitif (ağırlıklı) quasi metrik olarak adlandırılır [Künzi, 2001] [Künzi ve Vajner, 1994] [Wilson, 1931] [Campiön vd., 2018].

Örnek 2.16. $X = \mathbb{R}^+$ ve her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(u) = u$ olmak üzere her $u, w \in \mathbb{R}^+$ için

$$q(u, w) = \begin{cases} 0 & w < u \\ w - u & w \geq u \end{cases}$$

ile tanımlanan q fonksiyonu bir ağırlıklı quasi metriktir [Künzi ve Vajner, 1994].

İspat. İlk olarak quasi metrik $(q_1 - q_3)$ aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$q_1)$ q fonksiyonunun tanımı gereği açıktır.

$q_2)$ $w \geq u$ ise $q(u, w) = w - u \geq 0$ olur. $w < u$ ise $q(u, w) = 0$ olur. Dolayısıyla $u = w$ olur. $u = w$ olsun. $w \geq u$ ise $u = w$ olduğundan $w - u = w - w = 0$ ve $q(u, w) = 0$ dir.

$w < u$ ise $q(u, w) = 0$ dir.

$w \geq u$ ise $q(u, w) = w - u$ ve $q(w, u) = u - w$ dolayısıyla $q(u, w) = q(w, u)$ dir.

$w < u$ ise $q(u, w) = 0$ ve $q(w, u) = 0$ dolayısıyla $q(u, w) = q(w, u)$

$q_3)$ $q(u, z) = 0 \Rightarrow q(u, z) \leq q(u, w) + q(w, z)$ olur. Bu durumda $z < u, w < u$ ve $z < w$ olur.

$w \geq u$ ise $q(u, z) > q(u, w) + q(w, z)$ olsun.

$z - u > w - u + z - w$ yani bir çelişki elde edilir. O halde $q(u, z) \leq q(u, w) + q(w, z)$ dir.

Daha sonra ağırlıklı quasi metrik olması için gerekli aksiyomları inceleyelim:

ω_{q_1}) Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(u) = u \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $\omega(u) \geq 0$ dir.

ω_{q_2}) $w \geq u$ ise $\omega(u) + w - u = \omega(w) + w - u$ olduğundan $\omega(u) = \omega(w)$ dir.
 $w < u$ ise $\omega(u) + 0 = \omega(w) + 0$ olduğundan $\omega(u) = \omega(w)$ olur.

■

Örnek 2.17. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u, w) = u$ olan

$$q((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = \frac{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (w_1 - w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$$

fonksiyonu ağırlıklı quasi metriktir [Künzi ve Vajner, 1994].

Uyarı 2.18. Görülebilir ki her metrik ağırlıklı quasi metriktir [Vitalo, 1999]. Ancak her quasi metrik bir ağırlıklı quasi metrik belirtmek zorunda değildir [Matthews, 1994].

Örnek 2.19. $X = \{u, w, z\}$ kümesi için,

$$q(u, w) = 0, q(w, u) = 2, q(u, z) = 1, q(z, u) = 1, q(w, z) = 3, \\ q(z, w) = 0, q(u, u) = q(w, w) = q(z, z) = 0$$

ile tanımlanan $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu bir quasi metriktir. Fakat ağırlıklı değildir. Kabul edelim ki $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu q için bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda (2.2) eşitliği göz önüne alındığında

$\omega(w) + 3 = \omega(z)$ ve $\omega(u) = \omega(w) + 2$ bulunur. Fakat bu durum $\omega(u) = \omega(z)$ olmasıyla çelişir. Böylece ω bir ağırlık fonksiyonu olamaz.

Önerme 2.20. (X, q) quasi metrik uzayının ağırlıklıdır ancak ve ancak her $u, w, z \in X$ için

$$q(u, w) + q(w, z) + q(z, u) = q(u, z) + q(z, w) + q(w, u)$$

ve her $t \in X$ için $T_t = \{q(t, u) - q(u, t) \mid u \in X\}$ kümesinin alttan sınırlı olmasıdır [Vitalo, 1999].

Tanım 2.21. (X, q) bir quasi metrik uzay olsun. $u \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

- 1) $B_q(u, \varepsilon) = \{w \in X : q(u, w) < \varepsilon\}$
- 2) $B_q[u, \varepsilon] = \{w \in X : q(u, w) \leq \varepsilon\}$

ile tanımlanan kümelere sırasıyla u merkezli ε yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir [Matthews, 1994].

Önerme 2.22. Bir (X, q) quasi metrik uzayında her u, w elemanı için

$$q(u, w) = 0 \Leftrightarrow u \leq_q w$$

ile tanımlanan \leq_q bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Matthews, 1994).

İspat.

- 1) $q(u, u) = 0$ olduğundan $u \leq_q u$ olduğu açıktır.
- 2) $u \leq_q w$ ve $w \leq_q u$ olsun. Bu durumda $q(u, w) = 0$ ve $q(w, u) = 0$ olup $u = w$ dir.
- 3) $q(u, w) = 0$ ve $q(w, z) = 0$ ise $q(u, w) \leq q(u, z) + q(w, z)$
 $0 \leq q(u, z) + 0$ olduğundan $q(u, z) = 0$ elde edilir. Yani, $u \leq_q w$ ve $w \leq_q z$ ise $u \leq_q z$ dir.

■

Tamm 2.23. $X \neq \emptyset$ ve $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $u, w, z \in X$ için

- $p_1) p(u, u) \leq p(u, w)$
- $p_2) u = w \Leftrightarrow p(u, u) = p(u, w) = p(w, w)$
- $p_3) p(u, w) = p(w, u)$
- $p_4) p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w)$

özelliklerini sağlıyor ise p fonksiyonuna X kümesinde bir kısmi metrik ve (X, p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir. Şayet $p(u, w) = 0$ ise p_1 ve p_2 aksiyomlarından $u = w$ olduğu görülmektedir. Ancak $u = w$ ise $p(u, w)$ değeri her zaman 0 olmayabilir (Matthews, 1994).

Uyarı 2.24. Her metrik bir kısmi metriktir ancak tersi her zaman doğru değildir (Matthews, 1994).

Gerçektende d fonksiyonu X üzerinde bir metrik olmak üzere;

- $p_1) d(u, u) = 0 \leq d(u, w)$ olduğu görülür.
- $p_2) u = w$ olsun. O halde $d(u, u) = 0, d(u, w) = 0, d(w, w) = 0$ dir. Buradan $d(u, u) = d(u, w) = d(w, w)$ sağlanır. Aksine $d(u, u) = 0, d(u, w) = 0, d(w, w) = 0$ ise $u = w$ dir.
- $p_3) d(u, w) = d(w, u)$ olduğu görülür.
- $p_4) d(z, z) = 0$ olduğundan $d(u, z) \leq d(u, w) + d(w, z) - d(w, w)$ olduğu görülür.

Eğer $p(u, w) = 0$ ise p_1, p_2 aksiyonlarından $u = w$ elde edilir. Ancak $u = w$ ise $p(u, w) = 0$ olmak zorunda değildir. Çünkü $u = w$ ise $p(u, u) = p(u, w) = p(w, w)$ olup, sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

Örnek 2.25. Her $u, w \in \mathbb{R}^+$ için $p(u, w) = \max\{u, w\}$ ile tanımlanan $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu \mathbb{R}^+ üzerinde bir kısmi metriktir (O'Neill, 1995).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyonlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$p_1) p(u, u) = \max\{u, u\} = u \leq \max\{u, w\} = p(u, w) \text{ dir.}$$

$$p_2) p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \text{ olsun. } \max\{u, u\} = \max\{u, w\} = \max\{w, w\} \text{ olur. Dolayısıyla } u = w \text{ olur. } u = w \text{ ise } p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \text{ olduğu görülür.}$$

$$p_3) p(u, w) = \max\{u, w\} = \max\{w, u\} = p(w, u) \text{ olduğundan } p_3 \text{ aksiyomu sağlanır.}$$

$$p_4) p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \text{ olduğunu gösterelim. } u, w, z \text{ nin birbirine göre durumlarını ele alalım. Öncelikle } u \leq w \leq z \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$\begin{aligned} p(u, z) &= \max\{u, z\} \leq \max\{u, w\} + \max\{w, z\} - \max\{w, w\} \\ &= p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \end{aligned}$$

olur. Diğer durumlarda da p_4 aksiyomunun sağlandığı benzer şekilde görülebilir. O halde p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.26. Her $u, w \in \mathbb{R}^-$ için $p(u, w) = -\min\{u, w\}$ şeklinde tanımlanan $p : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu \mathbb{R}^- üzerinde bir kısmi metriktir (O'Neill, 1995).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyonlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$p_1) \min\{u, w\} \geq u \text{ olduğundan } -u \leq -\min\{u, w\} \text{ dir. O halde } p(u, u) = -u \leq -\min\{u, w\} = p(u, w) \text{ dir.}$$

$$p_2) p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \text{ olsun. } -u = -w \text{ olduğundan } u = w \text{ elde edilir. } u = w \text{ ise } p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \text{ olduğu açıktır.}$$

$$p_3) p(u, w) = -\min\{u, w\} = -\min\{w, u\} = p(w, u) \text{ olduğundan } p_3 \text{ aksiyomu sağlanır.}$$

$$p_4) p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \text{ olduğunu gösterelim. } u, w, z \text{ nin birbirine göre durumlarını ele alalım. Öncelikle } u \leq w \leq z \text{ olsun. O halde}$$

$$\begin{aligned} p(u, z) &= -\min\{u, z\} \leq -\min\{u, w\} - \min\{w, z\} + \min\{w, w\} \\ &= p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \end{aligned}$$

olmaktadır. Diğer durumlarda da p_4 aksiyomunun sağlandığı benzer şekilde görülebilir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.27. $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ kümesi üzerinde

$$p(u, w) = \begin{cases} \max\{u, w\}, & \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \\ |u - w| & \{u, w\} \subset [0, 1] \end{cases}$$

ile beraber (X, p) bir kısmi metrik uzaydır (Chi vd., 2012).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$p_1) \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u, u) = \max\{u, u\} = u \leq \max\{u, w\} = p(u, w) \text{ olur ve } \{u, w\} \subset [0, 1] \Rightarrow p(u, u) = |u - u| = 0 \leq |u - w| = p(u, w) \text{ elde edilir.}$$

$$p_2) u = w \text{ olsun. } \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \text{ olur. } \{u, w\} \subset [0, 1] \Rightarrow p(u, u) = p(u, w) = p(w, w) \Rightarrow |u - u| = 0 \text{ dir. } \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u, u) = u \text{ ve } p(w, w) = w \text{ dir. Buradan } u = w \text{ olur. } \{u, w\} \subset [0, 1] \Rightarrow p(u, u) = |u - u| = 0, p(w, w) = |w - w| = 0 \text{ ve } p(u, w) = |u - w| = 0 \text{ olur. Dolayısıyla } u = w \text{ dir.}$$

$$p_3) \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \Rightarrow p(u, w) = \max\{u, w\} = \max\{w, u\} = p(w, u) \text{ dir. } \{u, w\} \subset [0, 1] \Rightarrow p(u, w) = |u - w| = |w - u| = p(w, u) \text{ elde edilir.}$$

$$p_4) \{u, w\} \cap [2, 3] \neq \emptyset \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \max\{u, z\} &\leq \max\{u, w\} + \max\{w, z\} - \max\{w, w\} \\ &= p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \end{aligned}$$

olur. $\{u, w\} \subset [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} p(u, z) &= |u - z| = |u - z + w - w| \\ &= |u - w + w - z| \\ &\leq |u - w| + |w - z| \\ &= |u - w| + |w - z| - |w, w| \\ &= p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.28. $X = \mathbb{R}$ ve her u, w için $p(u, w) = e^{\max\{u, w\}}$ ile verilsin. (X, p) bir kısmi metrik uzaydır.

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$p_1) \max\{u, u\} \leq \max\{u, w\} \text{ dir. Buradan } e^{\max\{u, u\}} \leq e^{\max\{u, w\}} \Rightarrow p(u, u) \leq p(u, w) \text{ dir.}$$

$$p_2) u = w \text{ ise} \\ e^{\max\{u, u\}} = e^u$$

$$e^{\max\{u,w\}} = e^u$$

$$e^{\max\{w,w\}} = e^w = e^u \text{ dir. O halde } p(u,u) = p(u,w) = p(w,w) \text{ dir. } p(u,u) = p(u,w) = p(w,w) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$e^{\max\{u,u\}} = e^{\max\{u,w\}} = e^{\max\{w,w\}}$$

$$e^u = e^{\max\{u,w\}} = e^w$$

$$\bar{u} = \max\{u,w\} = w$$

$$u = w \text{ dir.}$$

$$p_3) e^{\max\{u,w\}} = p(u,w) = e^{\max\{w,u\}} = p(w,u) \text{ olur.}$$

$$p_4) \max\{u,z\} \leq \max\{u,w\} + \max\{w,z\} - \max\{w,w\} \text{ olmak üzere } e^{\max\{u,z\}} \leq e^{\max\{u,w\}} + e^{\max\{w,z\}} - e^{\max\{w,w\}} \text{ olur. Bu durumda } p(u,z) \leq p(u,w) + p(w,z) - p(w,w) \text{ olur.}$$

O halde p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Örnek 2.29. $X = \{[k, l] : k, l \in \mathbb{R}, k \leq l\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$p([k, l], [m, n]) = \max\{l, n\} - \min\{k, m\}$$

ile tanımlanan p fonksiyonu bir kısmi metriktir (Karapınar ve Yüksel, 2011).

Gerçekten de p fonksiyonunun $p_1 - p_4$ aksiyonlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$p_1) p([k, l], [k, l]) = \max\{l, l\} - \min\{k, k\} = l - k \leq \max\{k, l\} - \min\{m, n\} = p([k, l], [m, n]) \text{ olur.}$$

$$p_2) [k, l] = [m, n] \text{ olsun.}$$

$$p([k, l], [k, l]) = \max\{l, l\} - \min\{k, k\} = l - k$$

$$p([k, l], [m, n]) = \max\{l, n\} - \min\{k, m\} = l - k$$

$$p([m, n], [m, n]) = \max\{n, n\} - \min\{m, m\} = n - m = l - k \text{ olur. Yani } p([k, l], [k, l]) = p([k, l], [m, n]) = p([m, n], [m, n]) \text{ olur.}$$

$$p([k, l], [k, l]) = p([k, l], [m, n]) = p([m, n], [m, n]) \text{ ise } l - k = p([k, l], [m, n]) = n - m \text{ olur.}$$

Buradan $[k, l] = [m, n]$ elde edilir.

$$p_3) p([k, l], [m, n]) = \max\{l, n\} - \min\{k, m\} = \max\{n, l\} - \min\{m, k\} = p([m, n], [k, l])$$

$$p_4) p([k, l], [m, n]) = \max\{l, n\} - \min\{k, m\}$$

$$= \max\{l + f - f, n + f - f\} - \min\{k + e - e, m + e - e\}$$

$$\leq \max\{l, f\} + \max\{f, n\} - \max\{f, f\} - \min\{k, e\} - \min\{e, m\} + \min\{e, e\}$$

$$= \max\{l, f\} - \min\{k, e\} + \max\{f, n\} - \min\{e, m\} - (\max\{f, f\} - \min\{e, e\})$$

$$= p([k, l], [e, f]) + p([e, f], [m, n]) - p([e, f], [e, f]).$$

Aksiyomlar sağlandığından p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

Tanım 2.30. (X, p) bir kısmi metrik uzay, $w \in X$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

1) $B_p(w, \varepsilon) = \{u \in X \mid p(u, w) < \varepsilon\}$,

2) $B_p[w, \varepsilon] = \{u \in X \mid p(u, w) \leq \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümelere sırasıyla w merkezli ε yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Matthews, 1992).

Önerme 2.31. Bir (X, p) kısmi metrik uzayında $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\leq_p \subset X \times X$ olmak üzere her u, w elemanı için

$$u \leq_p w \Leftrightarrow p(u, u) = p(u, w)$$

ile tanımlanan \leq_p bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Matthews, 1994).

İspat.

1) Her $u \in X$ için $p(u, u) = p(u, u)$ olduğundan $u \leq_p u$ olduğu açıktır.

2) $u \leq_p w$ ve $w \leq_p u$ olsun. p_3 aksiyomundan $p(u, w) = p(w, u) = p(w, w)$ ve p_2 aksiyomundan $u = w$ olduğu görülür.

3) $u \leq_p w$ ve $w \leq_p z$ olsun. Bu durumda $p(u, u) = p(u, w)$ ve $p(w, w) = p(w, z)$ olur. p_4 aksiyomundan $p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w)$ dir. Buradan $p(u, z) \leq p(u, u)$ olur. p_1 aksiyomundan $p(u, z) = p(u, u)$ yani $u \leq_p z$ dir.

■

3. METRİK, KİSMİ METRİK VE QUASI METRİK ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Tezin bu bölümünde metrik, kısmi metrik, ve quasi metrik yapıların arasındaki ilişkiye yer verilmiştir.

Önerme 3.1. (X, p) bir kısmi metrik uzay ve her $u, w \in X$ için

$$d_p(u, w) = 2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) \quad (3.1)$$

ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u) = p(u, u)$ olan d_p fonksiyonu X üzerinde bir ağırlıklı metriktir [Matthews, 1994].

İspat.

$d_1)$ p_1 ve p_2 aksiyomlarından $p(u, u) \leq p(u, w)$ ve $p(w, w) = p(u, u)$ dir. Yani $d_p(u, w) \geq 0$ dır.

$d_2)$ $d(u, w) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_p(u, w) = 0 &\Rightarrow 2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) = 0 \\ &\Rightarrow 2p(u, w) = p(u, u) + p(w, w) \\ &\Rightarrow 2p(u, w) = p(u, u) + p(u, u) \wedge 2p(u, w) = p(w, w) + p(w, w) \\ &\Rightarrow 2p(u, w) = 2p(u, u) \wedge 2p(u, w) = 2p(w, w) \\ &\Rightarrow p(u, w) = p(u, u) = p(w, w) \\ &\Rightarrow u = w \text{ elde edilir. Tersine } u = w \text{ olduğunu kabul edelim ve } d(u, w) = 0 \text{ olduğunu} \\ &\text{gösterelim.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p(u, w) &= 2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) \\ &= 2p(u, w) - p(u, w) - p(u, w) \\ &= 2p(u, w) - 2p(u, w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

$d_3)$ $d(u, w) = d(w, u)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_p(u, w) &= 2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) \\ &= 2p(w, u) - p(w, w) - p(u, u) \\ &= d(w, u) \end{aligned}$$

olur.

$d_4)$ $d(u, z) \leq d(u, w) + d(w, z)$ olduğunu gösterelim.

$$2p(u, z) - p(u, u) - p(z, z) \leq 2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) + 2p(w, z) - p(w, w) - p(z, z)$$

olup $2p(u, z) \leq 2p(u, w) + 2p(w, z) - 2p(w, w)$ dir. Böylece $p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w)$ eşitsizliği elde edilir.

O halde her $u, w, z \in X$ için d_1, d_2, d_3, d_4 aksiyomlarını sağlandığından (X, d) bir metrik uzaydır. Şimdi ağırlıklı metrik için gerekli aksiyomları sağlatalım.

ω_{d_1}) $\omega(u) = u \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $\omega(u) \geq 0$ olur.

ω_{d_2}) $2p(u, w) - p(u, u) - p(w, w) \geq p(u, u) - p(w, w)$ dir. Buradan $p(u, w) \geq p(u, u)$ yani $d(u, w) \geq \omega(u) - \omega(w)$ dir.

■

Örnek 3.2. $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $p(u, w) = \max\{u, w\}$ ile tanımlanan kısmi metrikten üretilen

$$d_p(u, w) = 2\max\{u, w\} - u - w$$

fonksiyonu Önerme 3.1 gereği bir metriktir.

d_1) $2\max\{u, w\} - u - w \geq 0$ olduğu açıktır.

d_2) $u = w$ ise $2\max\{u, u\} - u - u = 0$ ve $2\max\{w, w\} - w - w = 0$ dir. Tersine $d(u, w) = 0$ olsun. $2\max\{u, w\} - u - w = 0$ ise $u = w$ dir.

d_3) $2\max\{u, w\} - u - w = 2\max\{w, u\} - w - u$ yani $d(u, w) = d(w, u)$ olur.

d_4) Kabul edelim ki $d(u, w) > d(u, z) + d(w, z)$ olsun. Bunun sonucunda $2\max\{u, w\} - u - w > 2\max\{u, z\} - u - z + 2\max\{w, z\} - w - z$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $d(u, w) \leq d(u, z) + d(w, z)$ olur.

Önerme 3.3. (X, d, ω) bir ağırlıklı metrik uzay olsun.

$$p_d(u, w) = \frac{d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)}{2}$$

ile tanımlanan $p_d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

İspat.

p_1) $\frac{d(u, u) + \omega(u) + \omega(u)}{2} \leq \frac{d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)}{2} \Rightarrow p(u, u) \leq p(u, w)$ olduğu görülür.

p_2) $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ olsun.

$$\frac{d(u, u) + 2\omega(u)}{2} = \frac{d(w, w) + 2\omega(w)}{2} = \frac{d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)}{2}$$

$d(u, u) + 2\omega(u) = d(w, w) + 2\omega(w) = d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)$. O halde $u = w$ dir. Tersine $u = w$ ise $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ olduğu görülür.

$$p_3) p(u, w) = \frac{d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)}{2} = \frac{d(w, u) + \omega(w) + \omega(u)}{2} = p(w, u)$$

$$p_4) \frac{d(u, z) + \omega(u) + \omega(z)}{2} \leq \frac{d(u, w) + \omega(u) + \omega(w)}{2} + \frac{d(w, z) + \omega(w) + \omega(z)}{2} - \frac{d(w, w) - 2\omega(w)}{2}$$

$$d(u, z) + \omega(u) + \omega(z) \leq d(u, w) + \omega(u) + \omega(w) + d(w, z) + \omega(w) + \omega(z) - d(w, w) - 2\omega(w)$$

$$d(u, z) \leq d(u, w) + d(w, z) - d(w, w)$$

■

Verilen aksiyomlar sağlandığından p_d bir kısmi metriktir.

Önerme 3.4. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $u, w \in X$ için

$$q_p(u, w) = p(u, w) - p(u, u) \quad (3.2)$$

ile tanımlanan $q_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir quasi metriktir. $u \in X$ için $\omega(u) = p(u, u)$ alındığında q_p fonksiyonu X üzerinde ağırlıklı quasi metriktir [Matthews, 1994].

İspat. İlk olarak q_p nin bir quasi metrik olduğunu gösterelim.

$q_1)$ p_1 aksiyomundan $p(u, u) \leq p(u, w)$ dir. Bu durumda $0 \leq q_p(u, w)$ dir.

$q_2)$ $u = w$ ise $q_p(u, u) = p(u, u) - p(u, u) = 0$ ve $p(w, w) - p(w, w) = 0$ olur. $q_p(u, w) = p(u, w) - p(u, u) = 0$ olduğundan $p(u, w) = p(u, u)$ dir. Ayrıca $q_p(w, u) = p(w, u) - p(w, w) = 0$ ve $p(w, u) = p(w, w)$ dir. O halde $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ dir. Yani $u = w$ dir.

$q_3)$ $p(u, z) - p(u, u) \leq p(u, w) - p(u, u) + p(w, z) - p(w, w)$
 $p(u, z) \leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w)$ olur.

Daha sonra ağırlıklı quasi metrik aksiyomlarını inceleyelim.

$\omega_{q_1})$ $\omega(u) \geq 0$ olduğundan ω_{q_1} aksiyomu görülür.

$\omega_{q_2})$ $p(u, u) + p(u, w) - p(u, u) = p(w, w) + p(w, u) - p(w, w)$
 $p(u, w) = p(w, u)$. Dolayısıyla $\omega(u) - \omega(w) = q_p(w, u) - q_p(u, w)$ dir.

O halde q_p fonksiyonu bir ağırlıklı quasi metriktir. ■

Örnek 3.5. $p : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $p(u, w) = -\min\{u, w\}$ ile tanımlanan kısmi metrikten üretilen $q_p = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$q_p(u, w) = p(u, w) - p(u, u) = -\min\{u, w\} + u$$

fonksiyonu Önerme 3.4 gereği bir quasi metriktir. Gerçekten de $q_1 - q_3$ koşullarının sağlandığı aşağıdaki şekilde görülür.

$q_1)$ $q(u, w) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

$q_2)$ $q(u, w) = q(w, u) = 0$ olsun. Bu durumda $q(u, w) = -\min\{u, w\} + u = 0$ ve $q(w, u) = -\min\{w, u\} + w = 0$ olduğundan $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. Bu durumda $-\min\{u, w\} + u = 0$ dir. Yani $q(u, w) = q(w, u) = 0$ dir.

$q_3)$ Kabul edelim ki $q(u, z) > q(u, w) + q(w, z)$ olsun. Bunun sonucunda $-\min\{u, z\} + u > -\min\{u, w\} + u - \min\{w, z\} + w$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $q(u, z) \leq q(u, w) + q(w, z)$ olur.

Önerme 3.6. (X, q, ω) bir ağırlıklı quasi metrik ve her $u, w \in X$ için

$$p_q(u, w) = q(u, w) + \omega(u)$$

ile tanımlanan $p_q: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

İspat.

$p_1)$ q_1 aksiyomundan $0 \leq q(u, w)$ dir. $\omega(u) \leq q(u, w) + \omega(u)$ olur. Yani $p(u, u) \leq p(u, w)$ dir.

$p_2)$ $u = w$ ise $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ olduğu görülür. Tersine $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ olsun. q_1 aksiyomundan $\omega(u) = q(u, w) + \omega(u) = \omega(w)$ dir. Buradan w_q tanımından $\omega(u) = q(u, w) + \omega(u) = q(w, u) + \omega(w) = \omega(w)$ dir. O halde $q(u, w) = q(w, u) = 0$ dir. q_2 aksiyomundan $u = w$ elde edilir.

$p_3)$ w_q tanımından $q(u, w) + \omega(u) = q(w, u) + \omega(w)$ dir. Yani $p(u, w) = p(w, u)$ olur.

$p_4)$ q_2 ve q_3 aksiyomlarından

$$\begin{aligned} q(u, z) &\leq q(u, w) + q(w, z) \text{ dir.} \\ q(u, z) + \omega(u) &\leq q(u, w) + \omega(u) + q(w, z) + \omega(y) - \omega(y) \\ p(u, z) &\leq p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla p_q fonksiyonu bir kısmi metriktir. ■

Örnek 3.7. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u, w) = u$ olan $q((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = \frac{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (w_1 - w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$ ağırlıklı quasi metrikten üretilen

$$p_q(u, w) = p_q((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = u_1 + \frac{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (w_1 - w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$$

fonksiyonu Önerme 3.6 gereği bir kısmi metriktir.

Önerme 3.8. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $u, w \in X$ için

$$d_p(u, w) = \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\}$$

ile tanımlanan $d_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (Chi vd., 2012).

İspat.

$d_1)$ p_1 ve p_2 aksiyomlarından $p(u, u) \leq p(u, w) \Rightarrow p(u, u) - p(u, w) \geq 0$ ve $p(w, w) \leq p(u, w) \Rightarrow p(u, w) - p(w, w) \geq 0$ olup $d_p(u, w) = \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\} \geq 0$ elde edilir.

$d_2)$ $u = w$ olsun. Bu durumda $d_p(u, w) = \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\}$ 'dir. Dolayısıyla $\max\{0, 0\} = 0$ olur. Aksine $d_p(u, w) = 0$ olsun. Buradan $d_p(u, w) = \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\} = 0$ 'dir. $p(u, w) - p(u, u) = 0$ ise $p(u, w) = p(u, u)$ ve $p(u, w) - p(w, w) = 0$ ise $p(u, w) = p(w, w)$ olur. Yani $u = w$ dir.

$d_3)$ p_3 aksiyomundan

$$\begin{aligned} d_p(u, w) &= \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\} \\ &= \max\{p(w, u) - p(w, w), p(w, u) - p(w, w)\} \\ &= d_p(w, u) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$d_4)$ p_4 aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned} d(u, z) &= \max\{p(u, z) - p(u, u), p(u, z) - p(z, z)\} \\ &\leq \max\{p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) - p(u, u), p(u, w) + p(w, z) - p(w, w) - p(z, z)\} \\ &= \max\{p(u, w) - p(u, u), p(u, w) - p(w, w)\} + \max\{p(w, z) - p(w, w), p(w, z) - p(z, z)\} \\ &= \overline{p(u, w)} + \overline{p(w, z)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla d_p fonksiyonu bir metriktir. ■

4. BENZERLİK METRİĞİ

Bu bölümde benzerlik metrik uzay kavramı verilerek metrik uzay ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonraki bölümde ise benzerlik metrik uzayının quasi metrik uzay ve kısmi metrik uzay ile arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tamm 4.1. X boştan farklı bir küme ve $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $u, w, z \in X$ için

$$s_1) s(u, w) = s(w, u)$$

$$s_2) s(u, u) \geq 0$$

$$s_3) s(u, w) \leq s(u, u)$$

$$s_4) s(u, w) + s(w, z) \leq s(u, z) + s(w, w)$$

$$s_5) s(u, u) = s(w, w) = s(u, w) \Leftrightarrow u = w$$

aksiyonları sağlanıyorsa s fonksiyonuna X üzerinde bir benzerlik metriği ve (X, s) bir benzerlik uzayı denir. Verilen tanıma bakarak şunu söyleyebiliriz metrik uzayların aksine iki eleman birbirine benzedikçe $s(u, w)$ değeri büyür. Ayrıca her $u, w \in X$ için $|s(u, w)| \leq 1$ ise s (normalize) benzerlik metriği denir (Chen vd., 2009).

Önerme 4.2. $s_1(u, w) \geq 0$ ve $s_2(u, w) \geq 0$ iki benzerlik metriği verilsin. $s_1(u, w) + s_2(u, w)$ bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

İspat. $s_1(u, w)$ ve $s_2(u, w)$ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan aşağıdaki aksiyonları sağlar:

$$s_1) s_1(u, w) + s_2(u, w) = s_1(w, u) + s_2(w, u) \text{ yani } s_1(u, w) = s_1(w, u) \text{ ve } s_2(u, w) = s_2(w, u) \text{ olur.}$$

$$s_2) s_1 \text{ ve } s_2 \text{ benzerlik metriği olduğundan ve } s_2 \text{ aksiyomundan } s(u, u) \geq 0 \text{ vardır. O halde } s_1(u, u) + s_2(u, u) \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$s_3) s_1(u, w) \text{ ve } s_2(u, w) \text{ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan } s_1(u, w) \leq s_1(u, u) \text{ ve } s_2(u, w) \leq s_2(u, u) \text{ olur. Buradan iki eşitsizlik toplandığında } s_3 \text{ aksiyomunun sağlandığı açıktır.}$$

$$s_4) s_1(u, w) \text{ ve } s_2(u, w) \text{ fonksiyonları benzerlik metriği olduğundan } s_1(u, w) + s_1(w, z) \leq s_1(u, z) + s_1(w, w) \text{ ve } s_2(u, w) + s_2(w, z) \leq s_2(u, z) + s_2(w, w) \text{ olur. Buradan iki eşitsizlik toplandığında } s_4 \text{ aksiyomunun sağlandığı açıktır.}$$

$$s_5) u = w \text{ ise } s(u, u) = s(w, w) = s(u, w) \text{ olduğu görülür. } s(u, u) = s(w, w) = s(u, w) \text{ olsun. Bu durumda } s_1(u, u) + s_2(u, u) = s_1(w, w) + s_2(w, w) = s_1(u, w) + s_2(u, w) \text{ olduğundan } u = w \text{ olur.}$$

■

Örnek 4.3. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A, B \in X$ için

$$s(A, B) = |A \cap B|$$

ile tanımlı $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de s fonksiyonunun $s_1 - s_5$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

s_1) $|A \cap B| = |B \cap A|$ olduğundan s_1 aksiyomunun sağlandığı açıktır.

s_2) Her A için $|A| \geq 0$ olduğundan s_2 aksiyomunun görülür.

s_3) $A \cap B \subset A$ olup, $|A \cap B| \leq |A|$ olduğu görülür.

s_4) s_4 aksiyomunun sağlandığı bir Venn şeması yardımıyla görülür.

s_5) $A = B$ ise $s(A, A) = s(B, B) = s(A, B)$ olduğu açıktır. $s(A, A) = s(B, B) = s(A, B)$ olsun. Bu durumda $|A| = |B| = |A \cap B|$ olduğundan $A = B$ olur.

Dolayısıyla s fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Örnek 4.4. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A, B \in X$ için

$$s(A, B) = \frac{|A \cap B|}{\max\{|A|, |B|\}}$$

ile tanımlı $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Örnek 4.5. İstatistikten bilinen Jaccard indeksi X kümesinden alınan sonlu A ve B kümeleri arasındaki benzerliği ölçer ve

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

ile gösterilir. Bu X üzerinde bir benzerlik metriği ve (X, J) bir benzerlik uzayıdır (Chen vd., 2009) (Rozinek ve Mares, 2021).

Ayrıca yapılan çalışmalarda benzerlik ve uzaklık birbiri ile ilişkilendirilmiştir (Elzinga, 2014) (Chen vd., 2009). Örneğin (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $u, w \in X$ ve sabit bir $t \in X$ için

$$s(u, w) = d(u, t) + d(w, t) - d(u, w)$$

fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Benzerlik metriği ve metrik (uzaklık) arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.6. X boş olmayan bir küme ve d fonksiyonu X üzerinde bir metrik olmak üzere her $u, w \in X$ için $d(u, w) \leq 1$ ise d fonksiyonuna (normalize) metrik denir [Alhajjar ve Lefèvre, 2019].

Önerme 4.7. d fonksiyonu (normalize) uzaklık metriği ise, $1 - d$ (normalize) benzerlik metriğidir. Eğer s fonksiyonu, $s(u, w) \geq 0$ ve $s(u, u) = 1$ olan (normalize) benzerlik metriği ise $1 - s$ (normalize) metriktir [Alhajjar ve Lefèvre, 2019].

İspat. İlk olarak $s = 1 - d$ nin bir normalize benzerlik metriği olduğunu gösterelim.

$$s_1) 1 - d(u, w) = 1 - d(w, u) \text{ yani } s(u, w) = s(w, u) \text{ olur.}$$

$$s_2) 1 - d(u, u) \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$s_3) d(u, w) \geq d(u, u) \text{ olduğundan ;}$$

$$-d(u, w) \leq -d(u, u)$$

$$1 - d(u, w) \leq 1 - d(u, u) \text{ elde edilir.}$$

$$s_4) d(u, w) + d(w, z) \geq d(u, z) + d(w, w) \text{ olsun.}$$

$$-d(u, w) - d(w, z) \leq -d(u, z) - d(w, w)$$

$$1 - d(u, w) + 1 - d(w, z) \leq 1 - d(u, z) + 1 - d(w, w)$$

$s_5) s = w$ ise $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olduğu açıktır. Tersine $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olsun. Bu durumda $1 - d(u, u) = 1 - d(w, w) = 1 - d(u, w)$ olduğundan $u = w$ dir. Şimdi (normalize) benzerlik metriği olması için gerekli aksiyomumuzu gösterelim ve burada s^* olarak tanımlayalım.

$$s^* s(u, w) \leq 1$$

$$d(u, w) \leq 1$$

$$-d(u, w) \geq -1$$

$$1 - d(u, w) \geq 0$$

$$1 \geq d(u, w).$$

Aksiyomların sağlandığı görülür. Dolayısıyla bir normalize benzerlik metriğidir.

Şimdi $d = 1 - s$ fonksiyonunun (normalize) metrik olduğunu gösterelim.

$$d_1) 1 - s(u, w) \geq 0 \text{ } s \text{ fonksiyonun tanımından açıktır.}$$

$$d_2) 1 - s(u, w) = 0 \text{ ise } u = w \text{ dir. Tersine } u = w \text{ ise } 1 - s(u, u) = 0 \text{ dir.}$$

$$d_3) 1 - s(u, w) = 1 - s(w, u) \text{ yani } s(u, w) = s(w, u) \text{ olur.}$$

$$d_4) s(w, w) + s(u, z) \geq s(u, w) + s(w, z) \\ -s(w, w) - s(u, z) \leq -s(u, w) - s(w, z) \text{ olur.}$$

$1 - s(u, z) \leq 1 - s(u, w) + 1 - s(w, z)$ elde edilir.

Şimdi (normalize) metrik olması için gerekli aksiyomumuzu gösterelim ve bunu da d^* olarak tanımlayalım.

$$d^* = d(u, w) \leq 1$$

$$s(u, w) \leq 1$$

$$-s(u, w) \geq -1$$

$$1 - s(u, w) \geq 0$$

$$1 \geq s(u, w)$$

Aksiyomların sağlandığı görülür. Dolayısıyla bir normalize metriktir. ■

Önerme 4.8. (X, s) bir benzerlik metrik uzayı olmak üzere her $u, w \in X$ için

$$d_s(u, w) = \frac{s(u, u) + s(w, w)}{2} - s(u, w)$$

ile tanımlanan d_s fonksiyonu bir metriktir (Chen vd., 2009).

İspat.

$d_1)$ s_2 ve s_3 aksiyomlarından

$$d_s(u, w) = \frac{s(u, u) + s(w, w)}{2} - s(u, w) = \frac{s(u, u) - (u, w) + s(w, w) - s(u, w)}{2} \geq 0$$

olduğu görülür.

$d_2)$ Eğer $u = w$ ise $d_s(u, w) = 0$ dir. Tersine $d_s(u, w) = 0$ ise $s(u, u) + s(w, w) - 2s(u, w) = 0$ olur. $s(u, u) \geq s(u, w)$ ve $s(w, w) \geq s(u, w)$ olduğundan $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ dir. Dolayısıyla $u = w$ dir.

$d_3)$

$$\begin{aligned} d_s(u, w) &= \frac{s(u, u) + s(w, w) - 2s(u, w)}{2} \\ &= \frac{s(w, w) + s(u, u) - 2s(w, u)}{2} \\ d_s(w, u) &= \frac{s(w, w) + s(u, u)}{2} - s(w, u) \end{aligned}$$

$d_4)$

$$\begin{aligned}
d_s(u, z) &= \frac{s(u, u) + s(z, z) - 2s(u, z)}{2} \\
&\leq \frac{s(u, u) + s(z, z) + 2s(w, w) - 2s(u, w) - 2s(w, z)}{2} \\
&= \frac{s(u, u) + s(w, w) - 2s(u, w)}{2} + \frac{s(w, w) + s(z, z) - 2s(w, z)}{2} \\
&= d_s(u, w) + d_s(w, z).
\end{aligned}$$

■ Verilen aksiyomlar sağlandığından d_p bir metriktir.

Önerme 4.9. X boştan farklı bir küme ve s fonksiyonu X üzerinde bir benzerlik metriği olsun.

$$d_s(u, w) = \max\{s(u, u), s(w, w)\} - s(u, w)$$

fonksiyonu bir metriktir [Chen vd., 2009].

İspat.

d_1) s_3 ve s_5 aksiyomlarından $s(u, u), s(w, w) \geq s(u, w)$ dir. O halde $\max\{s(u, u), s(w, w)\} - s(u, w) \geq 0$ olacağı açıktır. Dolayısıyla $d_s(u, w) \geq 0$ bulunur.

d_2) $d_s(u, w) = \max\{s(u, u), s(w, w)\} - s(u, w) = 0$ olsun. Bu durumda s_5 aksiyomu gereği $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olduğundan $u = w$ dir. Tersine $u = w$ olsun. s_5 aksiyomundan $d_s(u, w) = 0$ dir.

d_3) $d_s(u, w) = \max\{s(u, u), s(w, w)\} - s(u, w) = \max\{s(w, w), s(u, u)\} - s(w, u) = d_s(w, u)$

d_4) $d_s(u, z) = \max\{s(u, u), s(z, z)\} - s(u, z)$ ve $d_s(u, w) + d_s(w, z) = \max\{s(u, u), s(w, w)\} - s(u, w) + \max\{s(w, w), s(z, z)\} - s(w, z)$ s_3 ve s_4 aksiyomlarından sağlandığı görülür.

Dolayısıyla d_s fonksiyonu bir metriktir. ■

Örnek 4.10. X sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A, B \in X$ için $s(A, B) = |A \cap B|$ benzerlik metriğinden üretilen

$$d_s(A, B) = \max\{|A|, |B|\} - |A \cap B|$$

fonksiyonu Önerme 4.9 gereği bir metriktir.

Önerme 4.11. X üzerinde tanımlanan bir metrik $d(u, w)$ ile verilsin. $m \geq 1$ ve herhangi bir sabit $o \in X$ için

$$s_d(u, w) = \frac{d(u, o) + d(w, o)}{m} - d(u, w)$$

fonksiyonu bir benzerlik metriğidir [Chen vd., 2009].

İspat.

$$s_1) s_d(u, w) \stackrel{4}{=} \frac{d(u, o) + d(w, o)}{m} - d(u, w) \\ = \frac{d(w, o) + d(u, o)}{m} - d(w, u) \\ = s_d(w, u)$$

$$s_2) s_d(u, w) = \frac{d(u, o) + d(u, o)}{m} - d(u, u) \\ = \frac{2d(u, o)}{m} - d(u, u) \\ = \frac{2d(u, o)}{m} \geq 0$$

$$s_3) s_d(u, u) = \frac{2d(u, o)}{m} - 0 \\ s_d(u, w) \stackrel{21}{=} \frac{d(u, o) + d(w, o)}{m} - d(u, w) \\ s_d(u, u) \geq s_d(u, w)$$

$$s_4) \frac{1}{m} (d(u, o) + d(z, o)) - d(u, z) \stackrel{4}{\geq} \frac{1}{m} (d(u, o) + d(w, o) + d(w, o) + d(z, o) - d(w, o) - d(w, o)) \\ - d(u, w) - d(w, z) + d(w, w) \\ d(u, w) + d(w, z) \geq d(u, z) + d(w, w)$$

$$s_5) \frac{2d(u, o)}{m} - d(u, u) = \frac{2d(w, o)}{m} - d(w, w) = \frac{d(u, o) + d(w, o)}{m} - d(u, w) \\ d(u, u) = d(w, w) = d(u, w) \Rightarrow u = w \\ u = w \Rightarrow \frac{2d(u, o)}{m} - d(u, u) = \frac{2d(w, o)}{m} - d(w, w) = \frac{d(u, o) + d(w, o)}{m} - d(u, w) \\ s_d(u, u) = s_d(w, w) = s_d(u, w)$$

O halde s_d fonksiyonu bir benzerlik metriğidir. ■

Örnek 4.12. $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (normalize) benzerlik metriği ve her $u \in X$ için $s(u, u) = 1$ olsun.

Bu durumda

$$d_s : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } d_s(u, w) \rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u, w))$$

fonksiyonu bir (normalize) metriktir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de d_s fonksiyonunun $m_1 - m_4$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$d_1) d_s(u, w) = \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \\ \Rightarrow -1 \leq s(u, w) \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &\geq -s(u, w) \geq -1 \\ \Rightarrow 2 &\geq 1 - s(u, w) \geq 0 \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \geq 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2) \quad d_s(u, w) &= \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \\ \Rightarrow 0 &= 1 - s(u, w) \\ \Rightarrow 1 &= s(u, w) \\ \Rightarrow u &= w \\ u = w &\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) = 0 \\ \Rightarrow 1 - s(u, w) &= 0 \\ \Rightarrow d_s(u, w) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3) \quad d_s(u, w) &= \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(w, u)) &= d_s(w, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4) \quad s(u, w) &\geq s(u, z) + s(w, z) - s(w, w) \\ \Rightarrow -s(u, w) &\leq -s(u, z) - s(w, z) + s(w, w) \\ \Rightarrow 1 - s(u, w) &\leq 1 - s(u, z) + 1 - s(w, z) + 1 - s(w, w) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) &\leq \frac{1}{2}((1 - s(u, z)) + (1 - s(w, z))) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) &\leq \frac{1}{2}(1 - s(u, z)) + \frac{1}{2}(1 - s(w, z)) \\ \Rightarrow d_s(u, w) &\leq d_s(u, z) + d_s(w, z) \end{aligned}$$

Dolayısıyla d_s fonksiyonu bir metriktir. Şimdi d_s fonksiyonunun bir (normalize) metrik olduğunu österelim.

$$\begin{aligned} d^* = d_s(u, w) &\leq 1 \\ \Rightarrow -1 &\leq s(u, w) \\ \Rightarrow 1 &\geq -s(u, w) \\ \Rightarrow 2 &\geq 1 - s(u, w) \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{1}{2}(1 - s(u, w)) \\ \Rightarrow d_s(u, w) &\leq 1 \end{aligned}$$

Örnek 4.13. $X \neq \emptyset$ üzerinde tanımlanan $s(u, w) = e^{-d(u, w)}$ fonksiyonu bir (normalize) benzerlik metriğidir (Chen vd., 2009).

Gerçekten de d fonksiyonunun $s_1 - s_5$ aksiyonlarını sağladığı aşağıda görülür :

$$s_1) d_2 \text{ aksiyomundan } e^{-d(u,w)} = e^{-d(w,u)} \text{ dir.}$$

$$s_2) s(u, u) = 0 \\ \Rightarrow -s(u, u) = 0 \\ \Rightarrow e^{-d(u,u)} = e^0 = 1$$

$$s_3) s(u, w) \geq 0 \\ \Rightarrow -s(u, w) \leq 0 \\ \Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq e^0 = 1 \\ \Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq 1 \\ \Rightarrow e^{-d(u,u)} \geq e^{-d(u,w)}$$

$$s_4) s(u, z) \leq s(u, w) + s(w, z) - s(w, w) \\ s(u, z) + s(w, w) \leq s(u, w) + s(w, z) \\ -s(u, z) - s(w, w) \geq -s(u, w) - s(w, z) \\ e^{-d(u,z)} + e^{-d(w,w)} \geq e^{-d(u,w)} + e^{-d(w,z)}$$

$$s_5) e^{-d(u,u)} = e^{-d(w,w)} = 1 = e^{-d(u,w)} \Leftrightarrow -s(u, w) = 0$$

$$\Leftrightarrow s(u, w) = 0$$

$\Leftrightarrow u = w$ olur. Tersine $u = w$ ise $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ dir. $s_1 - s_5$ aksiyonları sağlandığından d bir benzerlik metriğidir. Şimdi (normalize) benzerlik metriği olması için gerekli koşulu sağlatalım.

$$s^* = |s(u, w)| \leq 1 \\ \Rightarrow s(u, w) \geq 0 \\ \Rightarrow -s(u, w) \leq 0 \\ \Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq e^0 \\ \Rightarrow e^{-d(u,w)} \leq 1 \\ \Rightarrow |e^{-d(u,w)}| \leq |1|.$$

s fonksiyonu bir (normalize) benzerlik metriğidir.

5. BENZERLİK METRİĞİNİN KİSİMİ METRİK VE QUASI METRİK İLE İLİŞKİLERİ

Tezin bu bölümünde diğer çalışmalardan farklı olarak benzerlik metriğinin kısmi metrik ve quasi metrik ile ilişkileri incelenmiş ve çeşitli örnekler verilmiştir.

Önerme 5.1. (X, s) bir benzerlik uzayı ve $q_s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $u, w \in X$ için

$$q_s(u, w) = s(u, u) - s(u, w)$$

ile tanımlanan (X, q_s) ikilisi quasi metrik uzaydır.

İspat.

$q_1)$ s_2 aksiyomundan görülür.

$q_2)$ Her $u, w \in X$ için $q_s(u, w) = q_s(w, u) = 0$ ise $q_s(u, w) = s(u, u) - s(u, w) = 0$ ve $q_s(w, u) = s(w, w) - s(w, u) = 0$ dir. Yani s_3 aksiyomundan $s(u, u) = s(u, w) = s(w, w)$ elde ederiz ve dolayısıyla s_4 aksiyomundan $u = w$ elde ederiz. Ayrıca bunun terside açıktır.

$q_3)$ Tüm $u, w \in U$ için s_5 aksiyomu kullanılarak aşağıdaki gibi sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} q_s(u, z) &= s(u, u) - s(u, z) \\ &\leq s(u, u) - [s(u, w) + s(w, z)] - s(w, w) \\ &= s(u, u) - s(u, w) + s(w, w) - s(w, z) \\ &= q_s(u, w) + q_s(w, z) \end{aligned}$$

Dolayısıyla q_s bir quasi metriktir. ■

Örnek 5.2. $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $s(u, w) = \min\{u, w\} - u - w$ ile tanımlanan benzerlik metriğinden üretilen

$$q_s(u, w) = w - \min\{u, w\}$$

fonksiyonu Önerme 5.1 gereği bir quasi metriktir. s fonksiyonunun $(q_1 - q_3)$ aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür :

$q_1)$ $q(u, w) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

$q_2)$ $u = w$ olsun. Bu durumda $u - \min\{u, u\} = 0$ olduğundan $q(u, w) = q(w, u) = 0$ dir. Tersine $q(u, w) = q(w, u) = 0$ olsun. Bu durumda $q(u, w) = w - \min\{u, w\} = 0$ dir. O halde $u = w$ dir.

q_3) Kabul edelim ki $q(u, z) > q(u, w) + q(w, z)$ olsun. Bunun sonucunda $w - \min\{u, z\} > w - \min\{u, w\} + w - \min\{w, z\}$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için bir çelişki elde edildiğinden $q(u, z) \leq q(u, w) + q(w, z)$ olur.

Dolayısıyla q_s fonksiyonu bir quasi metriktir.

Uyarı 5.3. Herhangi bir $u, w \in X$ için $s(u, w) < M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa, o zaman

$$\omega_s(u) = M - s(u, u)$$

fonskiyonu aslında (X, q_s) için bir ağırlık fonksiyonudur. Böylece bir M elemanın varlığında, bir s fonksiyonundan ağırlıklı quasi metrik elde edilebilir. Sonuç olarak, normalize bir benzerlik metriğinden ağırlıklı quasi metrik elde edilebilir. Ancak bir quasi metrikten bir benzerlik metriği elde etmek mümkün olmayabilir. Bunu yapabilmek için (X, q) üzerinde bir ağırlık fonksiyonuna da ihtiyacımız vardır.

Örnek 5.4. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olmak üzere $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$s(A, B) = |A \cap B|$$

fonskiyonunun bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.4'te belirtilmiştir.

Üstelik X in elemanları sonlu kümeler olduğundan $\sup\{|A| : A \in X\} < \infty$ olur. Bu sayıya M diyelim. Önermemiz sonucunda X üzerinde

$$\begin{aligned} q(A, B) &= s(A, A) - s(A, B) \\ &= |A \cap A| - |A \cap B| = |A| - |A \cap B| = |A \setminus B| \end{aligned}$$

fonskiyonu Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 gereği $\omega(A) = M - s(A, A) = M - |A|$ ile birlikte bir ağırlıklı quasi metrik uzaydır.

q_1) $|A \setminus A| = |\emptyset| = 0$ olduğundan q_1 aksiyomu sağlanır.

q_2) $A = B \rightarrow q(A, B) = q(B, A) = 0$ olduğu görülür. Tersine $q(A, B) = q(B, A) = 0$ olsun. $q(A, B) = |A \setminus B| = 0$. Yani $A \subset B$ ve $q(B, A) = |B \setminus A| = 0$ olduğundan $B \subset A$. Dolayısıyla $A = B$ olur.

q_3) q_3 aksiyomunun sağlandığı bir Venn şeması yardımıyla görülebilir.

Daha sonra ağırlıklı quasi metrik aksiyomlarımızı gösterelim.

w_{q_1}) $\omega(A)$ tanımından açıktır.

w_{q_2} $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ve $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$
 $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ve $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ dir. Buradan
 $M - |A| + |A \setminus B| = M - |B| + |B \setminus A|$ olur. $|A|$ ve $|B|$ eşitlikleri yerine konulursa
 $= -|A \setminus B| + |A \cap B| + |A \setminus B| = -|B \setminus A| + |A \cap B| + |B \setminus A|$ yani
 $\omega(A) + q(A, B) = \omega(B) + q(B, A)$ olur.

Örnek 5.5. X boş kümeden farklı sonlu kümelerin bir ailesi olsun. $A, B \in X$ için

$$s(A, B) = \frac{|A \cap B|}{\max\{|A|, |B|\}}$$

ile tanımlı $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.5 de belirtilmiştir. Burada her $A, B \in X$ için $s(A, B) \leq 1$ olduğu görülebilir. Diğer yandan, $s(A, A) = 1$ dir. Böylece Önerme 5.1 gereği

$$q_s(A, B) = s(A, A) - s(A, B) = 1 - s(A, B)$$

fonksiyonu Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 gereği X üzerinde bir quasi metrik olup, $M = 1$ için $\omega_s(A) = M - s(A, A) = 0$ ağırlık(sabit) fonksiyonu ile birlikte (X, q_s, ω_s) bir ağırlıklı quasi metrik uzaydır.

Yukarıdaki önermenin aksine, belirli bir quasi metrikten bir benzerlik metriği oluşturulamayabilir. Oluşturmak için (X, q) üzerinde bir ağırlık fonksiyonuna ihtiyacımız vardır.

Önerme 5.6. (X, q, ω_q) ağırlıklı quasi metrik uzay olsun. $s_q(u, w) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u, w \in X$ için

$$s_q(u, w) = \omega_q(u) - q(w, u)$$

(X, s_q) bir benzerlik metrik uzaydır.

İspat.

$s_1)$ q_2 aksiyomundan ve ω tanımından görülür.

$s_2)$ Tüm $u, w \in X$ q_1 ve q_2 aksiyomlarını kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$s_q(u, u) - s_q(u, w) = \omega_q(u, w) - q(u, u) - \omega_q(u) + q(w, u) \geq 0.$$

s₃) Tüm $u, w \in X$ için (2.2) koşulunu kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} s_q(u, w) - s_q(w, u) &= \omega_q(u) - q(w, u) - \omega_q(u) + q(u, w) \\ &= \omega_q(u) - \omega_q(w) - q(w, u) + q(u, w) \\ &= q(w, u) - q(u, w) + q(w, u) - q(u, w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

s₄) Tüm $u, w, z \in X$ ve q_2 ve q_3 aksiyomlarını kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} s_q(u, z) &= \omega_q(u) - q(z, u) \\ &\geq \omega_q(u) - [q(z, w) + q(w, u)] \\ &= \omega_q(u) - q(w, u) + \omega_q(w) - q(z, w) - \omega_q(w) - q(w, w) \\ &= s_q(u, w) + s_q(w, z) - s_q(w, w) \end{aligned}$$

s₅) Eğer her $u, w \in X$ için $s_q(u, u) = s_q(u, w)$ ise $\omega_q(u) = \omega_q(u) - q(w, u)$ olur ve dolayısıyla $q(w, u) = 0$ elde ederiz. Benzer şekilde eğer $s_q(w, w) = s_q(u, w)$ ise s_3 aksiyomunu kullanırsak, o zaman $\omega_q(w) = \omega_q(w) - q(u, w)$ ve dolayısıyla $q(u, w) = 0$ olur. Böylece q_2 aksiyomundan $u = w$ elde ederiz. Ayrıca bunun tersi de açıktır.

Dolayısıyla s_q bir benzerlik metriğidir. ■

Örnek 5.7. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan ve ağırlık fonksiyonu $\omega(u, w) = u$ olan $q((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = \frac{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (w_1 - w_2)^2} + u_2 - u_1}{2}$ ağırlıklı quasi metrikten üretilen

$$s_q(u, w) = s_q((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = u_1 - \frac{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (w_2 - w_1)^2} + u_1 - u_2}{2}$$

fonksiyonu Önerme 5.6 gereği bir benzerlik metriğidir. Gerçekte s_q fonksiyonunun benzerlik metriği aksiyomlarını sağladığı aşağıda görülür:

$$s_1) s_q(u, w) = \frac{u_1 + u_2 - \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}}{2} = \frac{u_2 + u_1 - \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (w_1 - w_2)^2}}{2} = s_q(w, u) \text{ dir.}$$

$$s_2) \frac{u_1 + u_1 - \sqrt{(u_1 - u_1)^2 + (w_1 - w_1)^2}}{2} = u_1 > 0 \text{ olduğundan } s_2 \text{ aksiyomu sağlanır.}$$

s₃) $u = (u_1, w_1), w = (u_2, w_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}}{2} = A$ dersek buradan A fonksiyonunu koordinat ekseninde göstericek olursak dik kenarları $|u_1 - u_2|$ ve $|w_1 - w_2|$ olan dik üçgenin hipotenüsüdür. O halde $A + u_1 - u_2 \geq 0$ olduğu görülür. Yani s_3 aksiyomunun sağlandığı görülür. Benzer şekilde s_4 ve s_5 aksiyomlarının da sağlandığı görülür. Dolayısıyla s_q fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Uyarı 5.8. Yukarıdaki gösterime bakarak, benzerlik metriği s_q dan quasi metrik q_{s_q} fonksiyonunu oluşturarak, gerçekte q nun eşleniği olan q^* elde edilmiştir. Yani $q_{s_q} = q^*$ dir. Ayrıca her $u, w \in X$ için $s_q(u, w) < M$ eşitsizliğini sağlayan bir M varsa $\omega_{s_q} = M - \omega_q$ dir.

s fonksiyonu X üzerinde tanımlı bir benzerlik metriği olmak üzere

$$d(u, w) = s(u, u) + s(w, w) - 2s(u, w)$$

funksiyonu bir metriktir (Rozinek ve Mares, 2021).

Dolayısıyla aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz:

Sonuç 5.1. (X, s) bir benzerlik metrik uzay ve $d_s = q_s + q_s^*$ olmak üzere

$$d_s(u, w) = s(u, u) + s(w, w) - 2s(u, w)$$

funksiyonu bir metriktir.

Önerme 5.9. (X, p) bir kısmi metrik olsun. $s_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve her $u, w \in X$ için

$$s_p(u, w) = p(u, u) + p(w, w) - p(u, w)$$

sağlıyor ise (X, s_p) benzerlik metrik uzayıdır.

İspat. $q_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $u, w \in X$ için

$$q_p(u, w) = p(u, w) - p(u, u)$$

funksiyonunun bir ağırlıklı quasi metrik olduğu Önerme 3.4 de verilmiştir. Önerme 5.6 dan

$$s(u, w) = \omega_q(u) - q(w, u)$$

funksiyonu bir benzerlik metriğidir. Dolayısıyla $s(u, w) = p(u, u) + p(w, w) - p(u, w)$ dir.

■

Örnek 5.10. $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $p(u, w) = \max\{u, w\}$ olmak üzere bu kısmi metriktan üretilen benzerlik fonksiyonu $s_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$s_p(u, w) = u + w - \max\{u, w\}$$

funksiyonu Önerme 5.9 gereği bir benzerlik metriğidir.

$$s_1) u + w - \max\{u, w\} = w + u - \max\{w, u\} \text{ yani } s(u, w) = s(w, u)$$

$$s_2) s(u, u) \geq 0 \text{ olduğu tanımdan açıktır.}$$

- s₃) 2 durum söz konusudur. Bu durumları inceleyecek olursak 1. durumumuz $\max\{u, w\} = u$ ise $s(u, w) = u + w - u = w$ olur. 2. durumumuz $\max\{u, w\} = w$ ise $s(u, w) = u + w - w = u$ olur ve $s(u, u) = u + u - u = u$ olur. Dolayısıyla $s(u, w) \leq s(u, u)$ dir.
- s₄) Kabul edelim ki $s(u, w) + s(w, z) > s(u, z) + s(w, w)$ olsun. Bunun sonucunda $w + \max\{u, z\} > \max\{u, w\} + \max\{w, z\}$ elde edilir. Bu eşitsizlikte 6 durum söz konusudur ve bu durumlar incelendiğinde her biri için çelişki elde edildiğinden $s(u, w) + s(w, z) \leq s(u, z) + s(w, w)$ dir.
- s₅) $u = w$ olsun. O halde $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olduğu açıktır. $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olsun. $w = u + w - \max\{u, w\}$ yani $u = w$ olur.

Dolayısıyla s_p fonksiyonu bir benzerlik metriğidir.

Önerme 5.11. $M \in \mathbb{R}$ ve $s(u, w) < M$ olacak şekilde bir benzerlik metrik uzayı olsun. $p_s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $u, w \in X$ için

$$p_s(u, w) = M - s(u, w)$$

ile tanımlanan (X, p_s) bir kısmi metrik uzaydır.

İspat. Önerme 5.1 ve Uyarı 5.3 de belirtildiği gibi (X, q_s, ω) uzayı

$$q_s(u, w) = s(u, u) - s(u, w) \text{ ve } \omega(u) = M - s(u, u)$$

olan ağırlıklı quasi metriktir. O halde Önerme 5.6 dan q_s ye karşılık gelen p kısmi metrik,

$$p(u, w) = \omega(u) + q_s(u, w)$$

olur. Dolayısıyla $p(u, w) = M - s(u, w)$ olur.

■

Örnek 5.12. A ve B kümeleri sonlu kümeler olmak üzere

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

fonksiyonunun bir benzerlik metriği olduğu Örnek 4.5 da belirtilmiştir. Burada A ve B kümeleri sonlu olduğundan $J(A, B) < M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısının var olduğu görülebilir. O halde bir benzerlik fonksiyonunun varlığında üretilen

$$p_s(u, w) = M - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

fonksiyonu Önerme 5.11 gereği bir kısmi metriktir.

Önerme 5.13. $p : X \times X \rightarrow [0, 1]$ olsun ve $s = 1-p$ olarak tanımlansın. p fonksiyonunun bir kısmi metrik olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olmasıdır. (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

İspat. p bir kısmi metrik olsun. $u, w, z \in X$ olmak üzere

$$s_1) s(u, w) = 1 - p(u, w) = 1 - p(w, u) = s(w, u)$$

$$s_2) s(u, u) = 1 - p(u, u) \geq 0 \text{ dir. Çünkü } p(u, u) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - p(u, u) \geq 0$$

$$s_3) \forall u, w \in X \text{ için } p(u, u) \leq p(u, w) \text{ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla } 1 - p(u, u) \geq 1 - p(u, w) \text{ dir. Buradan } s(u, u) \geq s(u, w) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} s_4) p(u, z) + p(w, w) &\leq p(u, w) + p(w, z) \\ \Leftrightarrow -(p(u, z) + p(w, w)) &\geq -(p(u, w) + p(w, z)) \\ \Leftrightarrow 1 - p(u, z) + 1 - p(w, w) &\geq 1 - p(u, w) + 1 - p(w, z) \\ \Leftrightarrow s(u, z) + s(w, w) &\geq s(u, w) + s(w, z) \end{aligned}$$

$s_5) u = w$ için $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olduğu açıktır. Şimdi $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olduğunda $u = w$ olduğunu gösterelim. Bu hipotez bize aşağıdaki eşitliği verir.

$$1 - p(u, u) = 1 - p(w, w) = 1 - p(u, w)$$

Buradan $p(u, u) = p(w, w)$ dir. O halde $u = w$ dir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metrik ise s nin bir benzerlik metriğidir. Şimdi s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olduğunu varsayalım ve p fonksiyonunun bir kısmi metrik olduğunu gösterelim.

$$p_1) p(u, u) - p(u, w) = s(w, w) - s(u, u) \leq 0 \text{ olduğu bilinmektedir. Buradan } p(u, u) \leq p(u, w) \text{ dir.}$$

$$p_2) p(u, u) = p(w, w) = p(u, w) \text{ olsun. O halde } s(u, u) = s(w, w) = s(u, w) \text{ olur. Dolayısıyla } u = w \text{ dir. } u = w \Rightarrow p(u, u) = p(w, w) = p(u, w) \text{ olduğu görülür.}$$

$$p_3) 1 - p(u, w) = 1 - p(w, u) \text{ yani } p(u, w) = p(w, u) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} p_4) s(u, z) + s(w, w) &\geq s(u, w) + s(u, z) \\ \Leftrightarrow -(s(u, z) + s(w, w)) &\leq -(s(u, w) + s(u, z)) \\ \Leftrightarrow 1 - s(u, z) + 1 - s(w, w) &\leq 1 - s(u, w) + 1 - s(u, z) \\ \Leftrightarrow p(u, z) + p(w, w) &\leq p(u, w) + p(u, z) \end{aligned}$$

Buradan s fonksiyonu bir benzerlik metriği ise p fonksiyonu bir kısmi metriktir. ■

Önerme 5.14. $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p(u, u) \leq 0$ olsun. Her $u \in X$ için $s = -p$ olarak tanımlansın. p fonksiyonunun bir kısmi metrik olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun bir benzerlik metriği olmasıdır (Alhajjar ve Lefèvre, 2019).

İspat.

s_1) p fonksiyonu simetrik olduğu için s fonksiyonu simetriktir.

$$s_2) s(u, u) = -p(u, u) \in \mathbb{R}^+.$$

$$s_3) s(u, u) = -p(u, u) \geq -p(u, w) = s(u, w)$$

$$s_4) s(u, w) + s(w, z) = -(p(u, w) + p(w, z)) \leq -(p(u, z) + p(w, w)) = s(u, z) + s(w, w) \text{ dir.}$$

s_5) $u = w$ ise bu durumda $s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ dir.

$s(u, u) = s(w, w) = s(u, w)$ olsun. O halde $-p(u, u) = -p(w, w) = -p(u, w)$ dir. Bu durumda $p(u, u) = p(w, w) = p(u, w)$ olur. Dolayısıyla $u = w$ dir. Dolayısıyla p fonksiyonu bir kısmi metrik ise s fonksiyonu bir benzerlik metriğidir. Terside geçerlidir. Yani s fonksiyonu bir benzerlik metriği ise p fonksiyonu bir kısmi metriktir.

■

%30

BENZERLİK ENDEKSİ

%18

İNTERNET KAYNAKLARI

%26

YAYINLAR

%10

ÖĞRENCİ ÖDEVLERİ

BİRİNCİL KAYNAKLAR

1 Marchioni, E.. "Possibilistic conditioning framed in fuzzy logics", International Journal of Approximate Reasoning, 200610 %4
Yayın

2 Azizighanbari, Shahram (and Technische Universität Dresden, Erziehungswissenschaften). "Approximative Prozeßmodellierungen in der empirisch-erziehungswissenschaftlichen Forschung", Saechsische Landesbibliothek- Staats- und Universitaetsbibliothek Dresden, 2000. %3
Yayın

3 dspace.kocaeli.edu.tr:8080 %2
İnternet Kaynağı

4 Submitted to University of Rajshahi %2
Öğrenci Ödevi

5 acikbilim.yok.gov.tr %2
İnternet Kaynağı

6 Mingsheng Ying. "π-calculus with noisy channels", Acta Informatica, 2005 %1
Yayın

7 Lecture Notes in Mathematics, 1981. %1
Yayın

8	Kutlu, seyma. "Pozitif Tanimli Formlar, Bazlar, Indefinite Formlar, Kuadratik Idealler ve Diophantine Denklemleri", Bursa Uludag University (Turkey), 2022 Yayın	% 1
9	Submitted to University Der Es Salaam Öğrenci Ödevi	% 1
10	eprints.lanacs.ac.uk İnternet Kaynağı	% 1
11	isc.astro.cornell.edu İnternet Kaynağı	% 1
12	Codas, AndrĂ©s, Sthener Campos, Eduardo Camponogara, Vidar Gunnerud, and Snjezana Sunjerga. "Integrated production optimization of oil fields with pressure and routing constraints: The Urucu field", Computers & Chemical Engineering, 2012. Yayın	% 1
13	Submitted to Selçuk Üniversitesi Öğrenci Ödevi	% 1
14	Shorrer, Ran Israel. "Essays on indices and matching.", Proquest, 2015. Yayın	% 1
15	Kit Pong Wong. "Regret theory and the banking firm: The optimal bank interest margin", Economic Modelling, 2011 Yayın	% 1
16	hdl.handle.net İnternet Kaynağı	<% 1

17 W. Similan Rujiwattanapong. "Unemployment insurance and labour productivity over the business cycle", Review of Economic Dynamics, 2021

Yayın

<% 1

18 spaceweather.astron.nl

İnternet Kaynağı

<% 1

19 abakus.inonu.edu.tr

İnternet Kaynağı

<% 1

20 cyberleninka.org

İnternet Kaynağı

<% 1

21 Submitted to Higher Education Commission Pakistan

Öğrenci Ödevi

<% 1

22 L. C. A. van Leeuwen. "Chapter 13 Compositions of a finite band with respect to an idempotent", Springer Nature, 1981

Yayın

<% 1

23 Philippe Balbiani. "Axiomatization and Completeness of Lexicographic Products of Modal Logics", Lecture Notes in Computer Science, 2009

Yayın

<% 1

24 Daniela Paesano, Calogero Vetro. "Multi-valued \mathcal{F} -contractions in 0-complete partial metric spaces with application to Volterra type integral equation", Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2013

Yayın

<% 1

25 Jennifer Taback, Alden Walker. "A new proof of the growth rate of the solvable Baumslag-Solitar groups", Geometriae Dedicata, 2022
Yayın <% 1

26 arxiv.org
İnternet Kaynağı <% 1

27 core.ac.uk
İnternet Kaynağı <% 1

28 Submitted to Kirikkale University
Öğrenci Ödevi <% 1

29 doczz.net
İnternet Kaynağı <% 1

30 Submitted to HotChalk Inc
Öğrenci Ödevi <% 1

31 ul.qucosa.de
İnternet Kaynağı <% 1

32 Öztürk, Mahpeyker. "Tam Konik Metrik Ve G-Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri ve Uygulamaları", Sakarya Üniversitesi (Turkey), 2022
Yayın <% 1

33 Submitted to Eskisehir Osmangazi University
Öğrenci Ödevi <% 1

34 Zhou Wei, , and Bao Menghong. "Intuitionistic fuzzy relation equations", 2010 International Conference on Educational and Information Technology, 2010.
Yayın <% 1

35 Seker, Sumeyya. "Kumelerin Cebirsel Toplami, Minkowski Farki Ve Uygulamalari uzerine", Anadolu University (Turkey), 2022 <% 1
Yayın

36 G. Wu, Y. Cai. "Polarization ellipse and Stokes parameters of a stochastic electromagnetic Gaussian Schell-model beam propagating through a polarization grating", Applied Physics B, 2011 <% 1
Yayın

37 Tas, Nihal. "Sabit nokta teoremleri ve cesitli uygulamalari.", Balikesir University (Turkey), 2024 <% 1
Yayın

38 Fine, Boris V, and Frank Hantschel. "An alternative to the conventional micro-canonical ensemble", Physica Scripta, 2012. <% 1
Yayın

39 P. A. Fuhrmann, A. Gombani. "On a Hardy space approach to the analysis of spectral factors", International Journal of Control, 2010 <% 1
Yayın

40 Submitted to Adnan Menderes Üniversitesi Öğrenci Ödevi <% 1

41 Klaus Volbert. "Worst case mobility in ad hoc networks", Proceedings of the fifteenth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures - SPAA 03 SPAA 03, 2003 <% 1
Yayın

42 Kuikui Xue, Kaikui Zheng, Jinxing Yang, Yinhui Xie, Mingyang Zhao, Jun Li. "An Inertia-Based Upper Limb Motion Capture Model for Accurate Position Estimation in Magnetic Field Disturbances", IEEE Sensors Journal, 2023

Yayın

<% 1

43 Thorsten Hens, Marc Oliver Rieger. "Solutions to Financial Economics", Springer Science and Business Media LLC, 2019

Yayın

<% 1

44 Tom Lahmer, E. Rafajłowicz. "On the optimality of harmonic excitation as input signals for the characterization of parameters in coupled piezoelectric and poroelastic problems", Mechanical Systems and Signal Processing, 2017

Yayın

<% 1

45 Paul H. Rabinowitz, Edward W. Stredulinsky. "Extensions of Moser–Bangert Theory", Springer Science and Business Media LLC, 2011

Yayın

<% 1

46 Wong, K.P.. "Regret theory and the banking firm: The optimal bank interest margin", Economic Modelling, 201111

Yayın

<% 1

47 Yanping Chen, Nianyu Yi, Wenbin Liu. "A Legendre–Galerkin Spectral Method for Optimal Control Problems Governed by Elliptic Equations", SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008

Yayın

<% 1

48	Arthur L. Liestman. "Additive graph spanners", Networks, 07/1993 Yayın	<% 1
49	Chi, K.P.. "A generalized contraction principle in partial metric spaces", Mathematical and Computer Modelling, 201203 Yayın	<% 1
50	DEHUA WANG, ZEJUN WANG. "GLOBAL SOLUTION FOR ROTATING COMPRESSIBLE PLASMA FLOW WITH LARGE DATA", Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2011 Yayın	<% 1
51	Sara Saeidian, Giulia Cervia, Tobias J. Oechtering, Mikael Skoglund. "Quantifying Membership Privacy via Information Leakage", IEEE Transactions on Information Forensics and Security, 2021 Yayın	<% 1
52	Yalcin, Tugba. "Kuasidiferansiyellenebilme ve Kuasidiferansiyellenebilme ile Optimizasyon", Anadolu University (Turkey), 2021 Yayın	<% 1
53	wtlab1.um.ac.ir İnternet Kaynağı	<% 1
54	Çanakçı, Zeynep. "Dairesel yüzeyler ve geometrik uygulamaları", Ankara Üniversitesi (Turkey), 2024 Yayın	<% 1
55	Bonet, M.L.. "Resolution for Max-SAT", Artificial Intelligence, 200706 Yayın	<% 1

56 Cuvalci, Ismail. "Minkowski Serileri Ile Fraktallara Alternatif Bir yaklasim", Anadolu University (Turkey), 2022 <% 1
Yayın

57 Dođan, Ömer Faruk. "Harmonik Bloch Uzaylari", Anadolu University (Turkey), 2022 <% 1
Yayın

58 Johanis, Michal, and RychtÄ;Å™ Jan. "An Enhanced Model of a Two Player Singled Out Game", Journal of Statistical Theory and Practice, 2010. <% 1
Yayın

59 Kartick Sutradhar, Hari Om. "Enhanced (t,n) threshold d-level quantum secret sharing", Scientific Reports, 2021 <% 1
Yayın

60 Lawrence Narici, Edward Beckenstein. "Topological Vector Spaces", Chapman and Hall/CRC, 2019 <% 1
Yayın

61 Leonid Berlyand, Yuliya Gorb, Alexei Novikov. "Fictitious Fluid Approach and Anomalous Blow-up of the Dissipation Rate in a Two-Dimensional Model of Concentrated Suspensions", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008 <% 1
Yayın

62 Nadir Arada. "On Generalized Newtonian Fluids in Curved Pipes", SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2016 <% 1
Yayın

63

Slodkowski, Z.. "Geometric Properties of Solutions of the Levi Curvature Equation in C^2 ", Journal of Functional Analysis, 19960525

Yayın

<% 1

64

Yazar Koçyiğit, Eda. "Genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemlerinin bazı özellikleri", Ankara Üniversitesi (Turkey), 2024

Yayın

<% 1

65

Zhimin Zhang. "Superconvergence of spectral collocation and p -version methods in one dimensional problems", Mathematics of Computation, 2005

Yayın

<% 1

66

www.aeaweb.org
İnternet Kaynağı

<% 1

Alıntıları çıkart

üzerinde

Eşleşmeleri çıkar

< 5 words

Bibliyografyayı Çıkart

üzerinde