

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİNİN KUVVET SERİSİNE DAYALI  
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YAKLAŞIM  
ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAMAZAN DİNAR

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2026

10636146

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİNİN KUVVET SERİSİNE DAYALI  
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YAKLAŞIM  
ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAMAZAN DİNAR

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2026

10636146

## BEYAN

"Konvolüsyon Operatörlerinin Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri" adlı yüksek lisansta yeterlilik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığımı, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR X</b>
<b>Destek alındı ise;</b>	
<b>Destekleyen kurum;</b>	
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>
<b>1-BAP(Bilimsel Araştırma Projesi)</b>	
<b>2-TÜBİTAK</b>	
<b>Diğer;.....</b> .....	
<b>ETİK KURUL onayı var ise;</b>	
<b>ETİK KURUL karar / sayı:</b>	..... ...../.....

**Ramazan Dinar**

**Tarih**

.../.../2026

**İmza**

## ÖN SÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle bana ışık tutan, yönlendirmeleri ve destekleriyle çalışmamın sağlıklı bir şekilde ilerlemesini sağlayan saygıdeğer tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM'e teşekkür ederim. Ayrıca, araştırma sürecinde görüş ve önerileriyle katkı sağlayan bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Emre TAŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen Sayın Özgül VARDAR hocama, sabır ve anlayışlarıyla yanımda olan aileme ve yakınlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

**Ramazan Dinar**

**2026**

## ÖZET

### KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİNİN KUVVET SERİSİNE DAYALI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık ve pozitif lineer operatörlerle yaklaşıma ilişkin temel tanım ve kavramlar, iyi bilinen teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölüm konvolüsyon operatörlerinin  $A$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım özelliklerine ayrılmıştır. Dördüncü bölüm ise tek ve çok değişkenli durumlarda konvolüsyon operatörlerinin kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım özelliklerine ayrılmıştır. Bu bölüm orijinal sonuçlar içermekte olup literatürde bilinen teoremlerin yetersiz kaldığı ancak bizim sonuçlarımızın kullanılabildiği örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca elde edilen yaklaşıma ilişkin oran sonuçları da sunulmuştur. Son bölümde ise elde edilen orijinal sonuçlar değerlendirilerek literatüre katkısı belirtilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kuvvet Serisi Metodu, İstatistiksel Yakınsaklık, Konvolüsyon Operatörleri, Korovkin Tipi Teorem.

## ABSTRACT

### APPROXIMATION PROPERTIES OF CONVOLUTION OPERATORS VIA STATISTICAL CONVERGENCE BASED ON A POWER SERIES METHOD

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, statistical convergence, statistical convergence based on a power series, basic definitions, concepts and well known theorems of approximation by positive linear operators are recalled. Third chapter is devoted to the approximation properties of convolution operators obtained by  $A$ -statistical convergence. Fourth chapter is devoted to the approximation properties of convolution operators obtained by statistical convergence based on a power series both for one variable and multivariables. This chapter includes original results and is supported by the examples where the known theorems of literature are insufficient. Also, rate of the obtained approximation results are presented. In the last chapter, by evaluating the obtained original results, the contribution to the literature is expressed.

**Keywords:** Power Series Method, Statistical Convergence, Convolution Operators, Korovkin Type Theorem.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ .....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR .....	3
2.1. Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık .....	3
2.2. A-Yoğunluk ve A-İstatistiksel Yakınsaklık .....	3
2.3. Kuvvet Serisi Metodu ve Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık ...	5
2.4. Pozitif Lineer Operatörler.....	6
3. KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ .....	8
3.1. Konvolüsyon Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri .....	8
4. KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİNE DAYALI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM.....	15
4.1. Tek Değişkenli Durumda Konvolüsyon Operatörlerinin Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri...	15
4.2. Çok Değişkenli Durumda Konvolüsyon Operatörlerinin Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri	19
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER .....	28
KAYNAKÇA .....	29

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

<b>Au</b> : $((\mathbf{A}\mathbf{u})_j)$	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}u_n$ dönüşüm dizisi
<b>A</b> = $(\mathbf{a}_{jn})$	: $j, n = 1, 2, \dots$ ; sonsuz bir matris
<b>#(G)</b>	: $G$ kümesinin eleman sayısı
<b>G<sup>c</sup></b>	: $G$ kümesinin tümleyeni
<b><math>\delta(G)</math></b>	: $G$ kümesinin yoğunluğu
<b><math>\delta_A(G)</math></b>	: $G$ kümesinin $A$ -yoğunluğu
<b><math>\delta_P(G)</math></b>	: $G$ kümesinin $P$ -yoğunluğu
<b><math>\mathbb{N}</math></b>	: Doğal sayılar kümesi
<b>C<sub>1</sub></b>	: Birinci mertebeden Cesáro matrisi
<b>C[a, b]</b>	: $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
<b><math>\omega(f, \lambda) = \omega_f([a, b], \lambda)</math></b>	: Keyfi $\lambda > 0$ için $f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında süreklilik modülü
<b>H<sub>n</sub>(f; x)</b>	: Konvolüsyon operatörü
<b>B<sub>n</sub>(f; x)</b>	: Bernstein operatörler dizisi
<b><math>\ T\ </math></b>	: $T$ operatörünün normu
<b><math>\ f\ _{\delta}</math></b>	: $\sup_{a+\delta \leq x \leq b-\delta}  f(x) $
<b><math>f_i(t)</math></b>	: $t^i, i = 0, 1, 2$ olmak üzere test fonksiyonları
<b>C*</b>	: $2\pi$ periyotlu ve $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli periyodik fonksiyonların uzayı
<b>C(J)</b>	: $J$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
<b><math>\chi_J</math></b>	: $J$ kümesinin karakteristik fonksiyonu
<b><math>\Rightarrow</math></b>	: Düzgün yakınsaklık
<b>st – lim u</b>	: $u$ dizisinin istatistiksel limiti
<b>st<sub>P</sub> – lim u</b>	: $u$ dizisinin $P$ -istatistiksel limiti
<b>st<sub>P</sub> – o(a<sub>n</sub>)</b>	: $o(a_n)$ oranında $P$ -istatistiksel yakınsaklık

## 1. GİRİŞ

Pozitif lineer operatörler, yaklaşım teorisinin temel araçlarındandır. 1885 yılında Weierstrass tarafından elde edilen ve kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona polinomlarla yaklaşabileceğimizi ifade eden teoremi çok etkili olmuştur (Weierstrass, 1885). Bu teoremin ispatının uzun ve karışık olduğu dikkate alınarak birçok matematikçi tarafından daha kolay anlaşılır bir ispat vermek amaçlanmıştır. Bu bağlamda 1912 yılında Bernstein bu teoremin kolayca anlaşılır ve kısa bir ispatını günümüzde de iyi bilinen Bernstein polinomları yardımıyla vermiştir (Bernstein, 1912: 1-2). Daha sonra Bernstein polinomları yerine pozitif lineer operatörler alınarak Bohman, Popoviciu ve Korovkin tarafından bu tür teoremler bağımsız olarak genelleştirilmiştir (Popoviciu, 1951: 1-4), (Bohman, 1952: 45), (Korovkin, 1953: 961). Böylece yaklaşım teorisinde etkin olarak çalışılacak olan Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır. Bu teoride pozitif lineer operatörler aktif rol oynamaktadır. Konvolüsyon operatörleri çekirdek fonksiyonuna yüklenen çeşitli şartlar altında bu tür operatörler arasında önemli bir grubu temsil eder ve  $C[a, b]$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere

$$H_n(f; x) = \int_a^b f(y)k_n(y-x) dy, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a, b], \quad f \in C[a, b]$$

biçiminde tanımlanır. Burada her  $n \in \mathbb{N}$  için  $k_n$ ,  $[a-b, b-a]$  aralığı üzerinde sürekli ve her  $v \in [a-b, b-a]$  için  $k_n(v) \geq 0$  şartları altında  $(H_n)$  pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir. Srivastava ve Gupta, 2003 yılında bazı toplam-integral formunda operatörlerin yaklaşım özelliklerini klasik yakınsaklık yardımıyla elde etmiştir (Srivastava ve Gupta, 2003: 1307-1315). Daha sonra klasik yakınsaklık yerine  $A = (a_{jn})$  sonsuz matrisi yardımıyla tanımlanan  $A$ -istatistiksel yakınsaklık alınarak integral formunda olan konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri Duman tarafından 2008 yılında elde edilmiştir (Duman, 2008: 523-536). Ayrıca bu operatörler farklı yakınsaklıklar yardımıyla tek ve çok değişkenli durumlarda da birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır ve günümüzde de aktif olarak araştırılmaktadır. Örneğin, 2017 yılında Yurdakadim, Taş ve Atlıhan tarafından çok değişkenli durumda konvolüsyon operatörleri toplam süreçleri yardımıyla ele alınarak yaklaşım özellikleri elde edilmiştir (Yurdakadim vd., 2017). 2022 yılında Çınar ve Yıldız tarafından  $P$ -istatistiksel toplam süreçleri göz önüne alınarak konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri tek değişkenli durumda elde edilmiştir (Çınar ve Yıldız, 2022: 648-659). Diğer yandan seriler ve serilerin karakterinin incelenmesi de matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Genellikle yakınsak serilerle ilgilenilmiş, ıraksak serilerle ilgilenilmeye toplanabilme teorisinin gelişimiyle başlamıştır. Toplanabilmenin temel amacı ıraksak bir seriyi toplamak olup bunun için birçok metot tanımlanmıştır. Bunlardan en dikkat çekici olanları iki boyutlu sonsuz  $A = (a_{jn})$  matrisi yardımıyla tanımlanan  $A$ -istatistiksel yakınsaklık ve  $A$ -toplanabilme metotlarıdır. Ayrıca buradan yola çıkılarak bir kuvvet serisi metoduna dayanarak tanımlanan istatistiksel yakınsaklık, bu metotlar tarafından içerilmediğinden etkili bir biçimde kullanılmaktadır.

Bu tezin amacı, daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık yardımıyla konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özelliklerini tek ve çok değişkenli durumlarda elde etmektir. Literatürde klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen teoremlerin yetersiz kaldığı konvolüsyon operatörleri mevcut olup, bu durumda elde ettiğimiz sonuçların kullanışlı olduğu göz önünde bulundurulursa, bu tezin literatüre önemli bir katkı yapacağını ve bu konuda çalışacak araştırmacılar için bir el kitabı olacağını ifade edebiliriz.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, önemli tanım ve kavramlar, iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

### 2.1. Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda,  $G \subset \mathbb{N}$  olmak üzere,  $G$  kümesinin yoğunluğu ve bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacaktır. Ayrıca klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiden söz edilip çeşitli örnekler verilecektir.

**Tanım 2.1.1.**  $\delta(G) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \#(\{n \leq k : n \in G\})$  limiti mevcutsa bu değere  $G$  kümesinin yoğunluğu denir (Niven ve Zuckerman, 1980: 473). Burada  $\#(G)$ ,  $G$  kümesinin eleman sayısını ifade etmektedir.

**Örnek 2.1.2.**  $G \subset \mathbb{N}$  için eğer  $G$  sonlu ise sıfır yoğunluklu olduğu kolaylıkla görülür.

**Örnek 2.1.3.**  $\{p : p \text{ asal}\}$  ve  $\{1, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots\}$  kümelerinin sıfır yoğunluklu olduğu iyi bilinmektedir.

Ayrıca,  $\delta(G)$  veya  $\delta(G^c)$  mevcutsa  $\delta(G) = 1 - \delta(G^c)$  gerçeklenir.

**Tanım 2.1.4.** Reel veya kompleks sayıların bir  $u = (u_k)$  dizisi verilsin. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(\{k \leq n : |u_k - \ell| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise  $u$  dizisi  $\ell$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir başka deyişle, istatistiksel yakınsaklık her  $\varepsilon > 0$  için

$$G_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |u_k - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$\delta(G_\varepsilon) = 0$  olması anlamına gelir ve bu durumda  $u$  dizisi  $\ell$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st - \lim u = \ell$  veya  $u_k \rightarrow \ell(st)$  şeklinde ifade edilir (Fast, 1951: 241), (Friday, 1985: 302), (Salat, 1980:139).

### 2.2. A-Yoğunluk ve A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda,  $G \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $G$  kümesi için  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler bir matris yardımıyla  $G$  kümesinin  $A$ -yoğunluğu ve bir  $u = (u_n)$  dizisinin  $A$ -istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacaktır.

**Tanım 2.2.1.**  $A = (a_{jn})$   $j, n = 1, 2, \dots$ ; sonsuz bir matris ve her  $j \in \mathbb{N}$  için

$$(Au)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} u_n$$

serisi yakınsak olmak üzere  $u = (u_n)$  dizisinin  $A$ -dönüşüm dizisi olarak adlandırılır ve  $Au := ((Au)_j)$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 2.2.1.** (Silverman-Toeplitz). Bir  $A = (a_{jn})$  matrisinin regülerliği

a.  $\sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty,$

b. her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n := \lim_j a_{jn} = 0,$

c.  $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

şartlarının gerçekleşmesiyle karakterize edilir (Hardy, 1949:43), (Maddox, 1970: 165).

**Tanım 2.2.2.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler matris olmak üzere

$$\delta_A(G) = \lim_j \sum_{n \in G} a_{jn}$$

mevcutsa  $\delta_A(G)$  değerine  $G$  kümesinin  $A$ -yoğunluğu denir (Freedman ve Sember, 1981: 296-297).

**Tanım 2.2.3.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler matris olsun.

Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n: |u_n - M| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0$$

olacak şekilde bir  $M$  sayısı varsa  $u$  dizisi  $M$  sayısına  $A$ -istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir başka deyişle, her  $\varepsilon > 0$  için

$$G_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |u_n - M| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_A(G_\varepsilon) = 0$$

ise  $u$  dizisi  $M$  sayısına  $A$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st_A - \lim u = M$  veya  $u_n \rightarrow M(st_A)$  şeklinde gösterilir (Kolk, 1993:79), (Miller, 1995:1811).

Yukarıdaki tanımda,  $A = I$ , birim matris olması durumunda klasik yakınsaklık;  $A$ , Cesàro matrisi olması durumunda istatistiksel yakınsaklık elde edildiği kolaylıkla görülür. Bir dizi klasik anlamda yakınsak ise aynı değere  $A$ -istatistiksel yakınsak olacaktır ancak  $A$ -istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

### 2.3. Kuvvet Serisi Metodu ve Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, kuvvet serisine dayalı toplanabilme metodu, bu metot anlamında bir dizinin yakınsaklığı ve kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık tanımlararak aralarındaki ilişki verilecektir.

**Tanım 2.3.1.**  $(p_n)$  pozitif reel terimli bir dizi olsun.

$$p(t) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1}$$

ifadesine kuvvet serisi denir ve bu serinin yakınsaklık yarıçapı  $r, r \in (0, \infty]$  olsun.

Ayrıca

$$C_p := \left\{ f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{0 < t \rightarrow r^-} \frac{f(t)}{p(t)} \text{ mevcut} \right\}$$

ve  $u = (u_n)$  dizisi için

$$C_{p_p} := \left\{ u = (u_n) \mid p_u(t) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1} u_n \text{ yakınsaklık yarıçapı} \geq r \text{ ve } p_u \in C_p \right\}$$

olsun.

$P - \lim : C_{p_p} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$P - \lim u = \lim_{0 < t \rightarrow r^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1} u_n$$

kuvvet serisi metodu olarak adlandırılır ve  $u$  dizisi  $P$ -yakınsaktır denir (Boos, 2000: 158), (Kratz ve Stadtmüller, 1989: 362).

Yakınsak her dizi aynı değere  $P$ -yakınsak oluyorsa  $P$  regülerdir denir ve bu durum aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

**Teorem 2.3.1.**  $P$  metodunun regülerliği her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \frac{p_n t^{n-1}}{p(t)} = 0$$

olmasına denktir (Boos, 2000: 160).

**Tanım 2.3.2.**  $P$  regüler ve  $G \subset \mathbb{N}$  olsun. Eğer

$$\delta_P(G) = \lim_{0 < t \rightarrow r^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1}$$

mevcutsa bu değere  $G$  kümesinin  $P$ -yoğunluğu denir ve mevcut olması durumunda  $0 \leq \delta_P(G) \leq 1$  olduğu açıktır (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

**Tanım 2.3.3.**  $P$  regüler ve

$$G_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |u_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere  $u = (u_k)$  dizisi için

$$\lim_{0 < t \rightarrow r^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k \in G_\varepsilon} p_k t^{k-1} = 0, (\varepsilon > 0)$$

ise, yani her  $\varepsilon > 0$  için

$$\delta_P(G_\varepsilon) = 0$$

ise  $u = (u_k)$  dizisi  $M$  sayısına  $P$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_P - \lim x = M$$

olarak gösterilir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

İstatistiksel yakınsaklık ve  $P$ -istatistiksel yakınsaklık birbirini gerektirmez (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

## 2.4. Pozitif Lineer Operatörler

Bu kısımda, pozitif lineer operatörler ile ilgili önemli ifadeler hatırlatılacaktır.

**Tanım 2.4.1.**  $E$  ve  $F$  iki fonksiyon uzayı olsun.  $H : E \rightarrow F$  olacak biçimde bir  $H$  kuralı varsa bu durumda  $F$  uzayında operatör tanımlanmış olur ve  $g(x) = H(f;x)$  ile gösterilir.

$E$  lineer uzay ise operatörün lineerliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 2.4.2.** Her  $f, g \in E$  ve  $\alpha_1, \alpha_2$  keyfi iki reel sabiti için

$$H(\alpha_1 f + \alpha_2 g; x) = \alpha_1 H(f; x) + \alpha_2 H(g; x)$$

oluyorsa  $H : E \rightarrow F$  lineer operatör olarak adlandırılır ve  $f \geq 0$  iken  $Hf \geq 0$  oluyorsa  $H$  pozitif operatör olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

$H$  lineer operatör olmak üzere  $H(0; x) = 0$  olduğu aşikardır.

**Önerme 2.4.3.**  $H : E \rightarrow F$  pozitif lineer operatör ise

- $f \leq g$  olacak biçimde her  $f, g \in E$  için  $Hf \leq Hg$ , (monotonluk)
- her  $f \in E$  için  $|Hf| \leq H|f|$

olur (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

**Tanım 2.4.4.**  $E$  ve  $F$  normlu uzaylar ve  $H : E \rightarrow F$  lineer bir operatör olmak üzere her  $f \in X$  için

$$\|Hf\|_F \leq N \|f\|_E \tag{2.1}$$

sağlanacak şekilde  $N$  sayısı bulunabiliyorsa  $H$  operatörüne sınırlıdır denir ve normu

$$\|H\| = \sup_{f \in E, f \neq \theta} \frac{\|Hf\|_F}{\|f\|_E} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995: 12), (Kreyzig, 2007: 91-92).

Şimdi pozitif lineer operatör dizilerinin birim operatöre yakınsaklığıyla ilgilenen ve "Bohman-Korovkin Teoremi" olarak bilinen teoremi hatırlatalım (Bohman, 1952: 43), (Korovkin, 1953: 961), (Popoviciu, 1951).

**Teorem 2.4.1.** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  pozitif lineer operatör ve  $f_i(t) = t^i$  olsun.  $[a, b]$  üzerinde

$$L_n(f_i(t); x) \Rightarrow f_i(x), i = 0, 1, 2 \quad (2.3)$$

ise her  $f \in C[a, b]$  için

$$L_n(f(t); x) \Rightarrow f(x) \quad (2.4)$$

gerçeklenir.

Ayrıca  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [0, 1]$  ve  $f \in C[0, 1]$  için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanan Bernstein operatörlerinin Teorem 2.4.1'i sağladığı iyi bilinmektedir. Şimdi süreklilik modülünü hatırlatalım.

**Tanım 2.4.5.**  $f$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon ve  $\lambda > 0$  olsun.

$$\omega(f, \lambda) = \omega_f([a, b], \lambda) = \sup_{|x-y| < \lambda, x, y \in [a, b]} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan fonksiyona  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Altomare ve Campiti, 1994: 17).

### 3. KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri  $A$ - istatistiksel yakınsaklık ile ele alınacaktır.

#### 3.1. Konvolüsyon Operatörlerinin $A$ -İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  olmak üzere

$$H_n(f;x) = \int_a^b f(y)k_n(y-x) dy, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a,b] \quad \text{ve} \quad f \in C[a,b] \quad (3.1)$$

ile tanımlanan konvolüsyon operatörlerinin 2008 yılında Duman tarafından  $A$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Burada her  $n \in \mathbb{N}$  için  $k_n$ ,  $[a-b, b-a]$  üzerinde sürekli ve ayrıca her  $v \in [a-b, b-a]$  için  $k_n(v) \geq 0$  olduğu kabul edilecektir.

Eğer  $x, y \in [a, b]$  ise  $v := y - x \in [a-b, b-a]$  olacaktır ve (3.1) ile tanımlanan  $(H_n)$  operatör dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için pozitif ve lineerdir.

Gerçekten de;

$f \geq 0$  olsun. Buradan  $f(y) \geq 0$  ve  $k_n(y-x) \geq 0$  olduğundan

$$H_n(f;x) = \int_a^b f(y)k_n(y-x) dy \geq 0$$

olup  $H_n$  operatörünün pozitifliği elde edilir.

Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , her  $f, g \in C[a, b]$  için

$$H_n(\alpha f + \beta g;x) = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(y)k_n(y-x) dy = \alpha H_n(f;x) + \beta H_n(g;x)$$

olduğundan  $H_n$  operatörü lineerdir.

Öncelikle istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında elde edilen Korovkin tipi teoremi ispatsız olarak verelim.

**Teorem 3.1.1.**  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,  $(L_n)$  pozitif ve lineer operatör dizisi olmak üzere eğer

$$st - \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

ise her  $f \in C[a, b]$  için

$$st - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Orhan, 2002: 129-138).

Yukarıdaki teorem kolaylıkla A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla da elde edilebilir. Hatta bir düzenleme yardımıyla aşağıdaki şekilde verebiliriz.

**Teorem 3.1.2.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler bir matris ve  $(L_n)$ ,  $C[a, b]$  uzayından  $C[a, b]$  uzayına tanımlı pozitif lineer operatör olsun. Eğer,

$$st_A - \lim_n \|L_n(f_0) - f_0\| = 0$$

ve

$$st_A - \lim_n \|L_n(\varphi)\| = 0, \quad \varphi(y) = (y - x)^2$$

oluyorsa her  $f \in C[a, b]$  için

$$st_A - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir (Duman, 2008: 523-536).

**İspat.**  $x \in [a, b]$  ve  $f \in C[a, b]$  olsun.  $[a, b]$  üzerinde sürekli  $f$  fonksiyonu aynı zamanda düzgün sürekli de olacaktır. Keyfi  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu durumda  $|x - y| < \delta$  şartını sağlayan her  $x, y \in [a, b]$  için  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  olacak biçimde  $\delta > 0$  vardır.  $I_\delta = [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b]$  olsun. Kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = C$$

yazılabilir. Bu durumda, her  $x, y \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x)|\chi_{I_\delta}(y) + |f(y) - f(x)|\chi_{[a, b] \setminus I_\delta}(y) \\ &\leq \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2}(y - x)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $L_n$  operatörlerini uygulayarak özelliklerini kullandığımızda

$\theta = \max\left\{\varepsilon + C, \frac{2C}{\delta^2}\right\}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq |L_n(f(y) - f(x) + f(x); x) - f(x)| \\
&\leq L_n(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \\
&= L_n(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq \varepsilon L_n(f_0; x) + \frac{2C}{\delta^2} L_n(\varphi; x) + C |L_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq \varepsilon L_n(f_0; x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} L_n(\varphi; x) + C |L_n(f_0; x) - f_0(x)| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + C) |L_n(f_0; x) - f_0(x)| + \frac{2C}{\delta^2} L_n(\varphi; x), \\
&\leq \varepsilon + \theta \{ |L_n(f_0; x) - f_0(x)| + L_n(\varphi; x) \}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafının  $x \in [a, b]$  üzerinden maksimumu alınırsa

$$||L_n(f) - f|| \leq \varepsilon + \theta \{ ||L_n(f_0) - f_0|| + ||L_n(\varphi)|| \} \quad (3.2)$$

buluruz.

$r > 0$  verildiğinde,  $\varepsilon < r$  sağlanacak şekilde  $\varepsilon > 0$  seçelim ve aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$G := \{n : ||L_n(f) - f|| \geq r\},$$

$$G_1 := \{n : ||L_n(f_0) - f_0|| \geq \frac{r - \varepsilon}{2\theta}\},$$

$$G_2 := \{n : ||L_n(\varphi)|| \geq \frac{r - \varepsilon}{2\theta}\}.$$

Buradan (3.2) eşitsizliği yardımıyla  $G \subseteq G_1 \cup G_2$  olduğu sonucuna ulaşırız. Böylece her  $j \in \mathbb{N}$  için

$$\sum_{n \in G} a_{jn} \leq \sum_{n \in G_1} a_{jn} + \sum_{n \in G_2} a_{jn}$$

olup,  $j \rightarrow \infty$  olmak üzere limit alırsak

$$0 \leq \lim_j \sum_{n \in G} a_{jn} \leq \lim_j \sum_{n \in G_1} a_{jn} + \lim_j \sum_{n \in G_2} a_{jn}$$

elde edilir. Hipotezler yardımıyla

$$\lim_j \sum_{n \in G} a_{jn} = 0$$

buluruz, yani

$$st_A - \lim_n ||L_n(f) - f|| = 0$$

olduğundan ispatı tamamlarız. ■

Şimdi  $\delta > 0$  olmak üzere  $\delta < \frac{b-a}{2}$  ve  $f \in C[a, b]$  için

$$\|f\|_\delta := \sup_{a+\delta \leq x \leq b-\delta} |f(x)|$$

olarak tanımlayalım.

**Lemma 3.1.1.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler matris ve  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  sabit olsun. Eğer

$$st_A - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} k_n(y) dy = 1 \quad (3.3)$$

ve

$$st_A - \lim_n \left( \sup_{|y| \geq \delta} k_n(y) \right) = 0 \quad (3.4)$$

ise (3.1) ile verilen  $(H_n)$  operatör dizisi için

$$st_A - \lim_n \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  ve  $x \in [a + \delta, b - \delta]$  olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$H_n(f_0; x) = \int_a^b k_n(y-x) dy = \int_{a-x}^{b-x} k_n(y) dy \quad (3.5)$$

olur buradan,  $-(b-a) \leq a-x \leq -\delta$  ve  $\delta \leq b-x \leq b-a$  olduğundan

$$\int_{-\delta}^{\delta} k_n(y-x) dy \leq H_n(f_0; x) \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} k_n(y) dy \quad (3.6)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$u_n := \max \left\{ \left| \int_{-\delta}^{\delta} k_n(y) dy - 1 \right|, \left| \int_{-(b-a)}^{b-a} k_n(y) dy - 1 \right| \right\}$$

olmak üzere

$$\|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \leq u_n \quad (3.7)$$

yazabiliriz ve hipotez yardımıyla

$$st_A - \lim_n u_n = 0 \quad (3.8)$$

olacaktır. Şimdi,  $\varepsilon > 0$  için (3.7) eşitsizliğinden

$$G := \{n : \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \geq \varepsilon\} \subseteq \{n : u_n \geq \varepsilon\} =: G'$$

elde edilir ve buradan her  $j \in \mathbb{N}$  için

$$\sum_{n \in G} a_{jn} \leq \sum_{n \in G'} a_{jn} \quad (3.9)$$

bulunur. (3.9) eşitsizliğinde  $j \rightarrow \infty$  olmak üzere limit alındığında istenilen elde edilir.

**Lemma 3.1.2.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler matris olsun. (3.3) ve (3.4) şartları altında

$$st_A - \lim_n \|H_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  sabit ve  $x \in [a + \delta, b - \delta]$  olsun.  $x \in [a + \delta, b - \delta]$  için  $\varphi(y) = y^2 - 2xy + x^2$  olduğundan, her  $x \in [a + \delta, b - \delta]$  için  $\varphi \in C[a, b]$  olduğu açıktır. Dolayısıyla,  $H_n(\varphi; x) = H_n(f_2; x) - 2xH_n(f_1; x) + x^2H_n(f_0; x)$  olup, benzer şekilde her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$H_n(\varphi; x) = \int_{a-x}^{b-x} y^2 k_n(y) dy \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} y^2 k_n(y) dy \quad (3.10)$$

yazılabilir.  $f_2$  fonksiyonu  $y = 0$  noktasında sürekli olduğundan  $\varepsilon > 0$  verildiğinde,  $|y| \leq \eta$  iken  $y^2 < \varepsilon$  olacak şekilde  $\eta > 0$  vardır. Burada  $\eta \geq b - a$  veya  $\eta < b - a$  durumları ortaya çıkar.

**Durum 1.**  $\eta \geq b - a$ :

Bu durumda (3.10) gereğince

$$0 \leq H_n(\varphi; x) \leq \varepsilon^2 \int_{-(b-a)}^{b-a} k_n(y) dy$$

olup, hipotez yardımıyla ispat tamamlanır.

**Durum 2.**  $\eta < b - a$ :

Bu durumda (3.10) gereğince

$$H_n(\varphi; x) \leq \int_{|y| \geq \eta} y^2 k_n(y) dy + \int_{|y| \leq \eta} y^2 k_n(y) dy$$

olup her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|H_n(\varphi)\|_\delta \leq w_n \left( \frac{(b-a)^3 - \eta^3}{3} \right) + \varepsilon^2 z_n \quad (3.11)$$

elde ederiz, burada

$$w_n := \sup_{|y| \geq \eta} k_n(y) \quad \text{ve} \quad z_n := \int_{|y| \leq \eta} k_n(y) dy$$

olarak tanımlanmaktadır.

Hipotez yardımıyla  $st_A - \lim_n w_n = 0$  ve  $st_A - \lim_n z_n = 1$  olduğundan (3.11) eşitsizliğinde

$$W := \max \left\{ \frac{(b-a)^3 - \eta^3}{3}, \varepsilon^2 \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$\|H_n(\varphi)\|_\delta \leq \varepsilon^2 + W(w_n + |z_n - 1|) \quad (3.12)$$

elde edilir.  $r > 0$  verildiğinde,  $\varepsilon^2 < r$  olmak üzere  $\varepsilon > 0$  seçilerek aşağıdaki kümeleri tanımlayabiliriz:

$$G := \{n : \|H_n(\varphi)\|_\delta \geq r\},$$

$$G_1 := \left\{n : w_n \geq \frac{r - \varepsilon^2}{2W}\right\},$$

$$G_2 := \left\{n : |z_n - 1| \geq \frac{r - \varepsilon^2}{2W}\right\}.$$

Ardından, (3.12) eşitsizliğinden  $G \subseteq G_1 \cup G_2$  olduğu sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla her  $j \in \mathbb{N}$  için

$$\sum_{n \in G} a_{jn} \leq \sum_{n \in G_1} a_{jn} + \sum_{n \in G_2} a_{jn} \quad (3.13)$$

elde ederiz.  $st_A - \lim_n w_n = st_A - \lim_n |z_n - 1| = 0$  olduğundan (3.13) eşitsizliğinde  $j \rightarrow \infty$  olmak üzere limit alındığında ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 3.1.1, Lemma 3.1.2 ve Teorem 3.1.2 yardımıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.3.**  $A = (a_{jn})$  negatif olmayan, regüler matris ve  $(H_n)$ , (3.1) ile verilen operatör dizisi olsun. Eğer (3.3) ve (3.4) bir  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  sabiti için gerçekleşiyorsa her  $f \in C[a, b]$  için

$$st_A - \lim_n \|H_n(f) - f\|_\delta = 0 \quad (3.14)$$

olur. ■

Ayrıca  $A = I$ , birim matris olarak alınırsa aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Sonuç 3.1.4.**  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  olacak biçimde  $\delta$  sabiti için

$$\lim_n \int_{-\delta}^{\delta} k_n(y-x) dy = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_n \left( \sup_{|y| \geq \delta} k_n(y) \right) = 0$$

oluyorsa

$$\lim_n \|H_n(f) - f\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

Yani her  $f \in C[a, b]$  için  $(H_n(f))$  dizisi  $[a + \delta, b - \delta]$  aralığında  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

#### 4. KONVOLÜSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KUVVET SERİSİNE DAYALI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA YAKLAŞIM

Bu bölümde, tek değişkenli ve çok değişkenli konvolüsyon operatörlerinin kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde ettiğimiz yaklaşım özelliklerini ifade eden orijinal sonuçlar sunulacaktır (Dinar ve Yurdakadim, 2025: 92-102).

##### 4.1. Tek Değişkenli Durumda Konvolüsyon Operatörlerinin Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, (3.1) ile tanımlanan operatör dizisinin yaklaşım özellikleri kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık yardımıyla tek değişkenli durumda elde edilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki teoremleri verelim.

**Teorem 4.1.1.**  $P$  regüler ve  $(L_n)$ , pozitif lineer operatör dizisi olsun.

Eğer

$$st_P - \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0$$

oluyorsa her  $f \in C[0, 1]$  için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir (Ünver ve Orhan, 2019: 535-547).

Bu teoremin istatistiksel versiyonu Gadjiev ve Orhan tarafından verilmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002: 129-137).

$x \in [a, b]$  için  $\varphi(y) := (y - x)^2$  ve  $L_n(\varphi; x) = L_n(f_2; x) - 2xL_n(f_1; x) + x^2L_n(f_0; x)$  olduğundan yukarıdaki sonuç operatörlerin pozitif lineerliği kullanılarak aşağıdaki şekilde verilmiştir (Söylemez ve Ünver, 2021: 426-434).

**Lemma 4.1.1.**  $P$  regüler ve  $(L_n)$ , pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer

$$st_P - \lim_n \|L_n(f_0) - f_0\| = 0$$

ve

$$st_P - \lim_n \|L_n(\varphi)\| = 0$$

gerçekleniyorsa her  $f \in C[a, b]$  için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

olur (Söylemez ve Ünver, 2021: 426-434).

**Teorem 4.1.2.**  $P$  regüler ve  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  olsun.

Eğer

$$st_P - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} k_n(y) dy = 1 \quad (4.1)$$

ve

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{|y| \geq \delta} k_n(y) \right) = 0 \quad (4.2)$$

oluyorsa (3.1) ile verilen operatör dizisi için

$$st_P - \lim_n \|H_n(f) - f\|_{\delta} = 0 \quad (4.3)$$

gerçeklenir.

Özel olarak  $P$ -istatistiksel toplam sürecine ilişkin verilen bu sonuçlarda  $A = \{a_{kj}^{(n)}\}$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(a_{kj})$  birim matris olarak alınırsa  $P$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri elde edilir (Çınar ve Yıldız, 2022: 648-659).

**Lemma 4.1.2.**  $P$  regüler ve  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  olsun. Ayrıca (4.1) ve (4.2) gerçekleşsin.  $(H_n)$  operatör dizisi için

$$st_P - \lim_n \|H_n(\varphi)\|_{\delta} = 0$$

gerçeklenir (Çınar ve Yıldız, 2022: 648-659).

Şimdi Teorem 4.1.2'yi sağlayan operatör dizisi örnekleri kuralım.

**Örnek 4.1.3.** Aşağıdaki  $(u_n)$  dizisini ve  $(p_n)$  dizisi ile tanımlanan  $P$  metodunu ele alalım:

$$u_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \in \{2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\} \\ 1 & , \quad n \in \{3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots\} \end{cases} , \quad p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n \in \{2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\} \\ 0 & , \quad n \in \{3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots\} \end{cases} .$$

$P$  regüler olup  $st_P - \lim u_n = 0$  gerçekleşir.

O halde  $C[a, b]$  üzerinde tanımlanan  $T_n$  operatörlerini oluşturalım:

$$T_n(f; x) = \frac{n(1+u_n)}{\sqrt{\pi}} \int_a^b f(y) e^{-n^2(y-x)^2} dy. \quad (4.4)$$

Burada

$$k_n(y) = \frac{n(1+u_n)}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 y^2} \quad (4.5)$$

olmak üzere (4.4) ile verilen  $T_n$  operatörleri konvolüsyon operatörleri özelliklerine sahiptir.

Yukarıda verilen  $k_n$  fonksiyonlarının Sonuç 3.1.4 ve Teorem 3.1.3'de yer alan hipotezi sağlamadığı  $(u_n)$  dizisinin yakınsak olmadığından ya da istatistiksel yakınsak olmadığından açıktır. Bununla birlikte Teorem 4.1.2 aşağıdaki sonucu elde etmek için uygulanabilir.

Dolayısıyla  $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$  olmak üzere her  $f \in C[a, b]$  için

$$stP - \lim_n \|T_n(f) - f\|_\delta = 0$$

olur.

Yukarıda verilen standart örnek dışında burada sıra dışı olan aşağıdaki örneği oluşturalım.

**Örnek 4.1.4.** Aşağıdaki  $(u_n)$  dizisini ve  $(p_n)$  dizisi ile tanımlanan  $P$  metodunu ele alalım:

$$u_n = \begin{cases} 1 & , \quad n \in \{2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\} \\ 0 & , \quad n \in \{3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots\} \end{cases} , \quad p_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \in \{2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\} \\ 1 & , \quad n \in \{3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots\} \end{cases} .$$

$P$  regüler ve  $stP - \lim u_n = 1$  olduğu açıktır.

O halde  $C\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  üzerinde tanımlanan  $T_n$  operatörlerini oluşturalım:

$f \in C\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  ve  $(c_n)$  dizisi  $\int_{-1}^1 \lambda_n(y) dy = 1$  olacak şekilde seçilerek

$$T_n(f; x) = u_n \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) \lambda_n(y-x) dy = u_n H_n(f; x) \quad \text{ile} \quad \lambda_n(y) = c_n(1-y^2),$$

tanımlayalım.

$(u_n)$  yakınsak ya da istatistiksel yakınsak olmadığından daha önceki teoremleri kullanarak  $f$  fonksiyonuna yaklaşmak mümkün değildir.

Ancak Teorem 4.1.2 kullanılarak  $(u_n)$  dizisi  $P$ -istatistiksel olarak 1 sayısına yakınsadığından ve  $H_n(f; x)$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  için  $[\frac{-1}{2} + \delta, \frac{1}{2} + \delta]$  üzerinde  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan  $f$  fonksiyonuna yaklaşmak yine de mümkün olacaktır (DeVore, 1993).

Ayrıca bu yaklaşımın oranı, süreklilik modülü ve  $o(a_n)$  oranıyla  $P$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla aşağıdaki şekilde verilebilir. Bunun için 2023 yılında (Atlıhan vd., 2023) tarafından (Fridy vd., 2003) ışığında tanıtılan  $P$ -istatistiksel yakınsaklık oranını hatırlatalım.

**Tanım 4.1.5.**  $P$  regüler ve  $(a_n)$ , reel sayıların pozitif terimli artmayan bir dizisi olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \left[ \frac{1}{p(t)} \sum_{n: |s_n - t| \geq \varepsilon a_n} p_n t^n \right] = 0$$

şartı sağlanıyorsa  $s = (s_n)$  dizisi  $l$  sayısına  $o(a_n)$  oranında  $P$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve  $s_n - l = st_P - o(a_n), (n \rightarrow \infty)$  biçiminde gösterilir (Atlıhan vd., 2023).

**Teorem 4.1.3.**  $P$  regüler ve  $(H_n)$ , (3.1) ile verilen operatör dizisi olsun.  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  reel sayıların pozitif terimli artmayan iki dizisi olmak üzere  $\delta < \frac{b-a}{2}$  olacak şekilde sabit bir  $0 < \delta$  için

$$\|H_n(f_0) - f_0\|_\delta = st_P - o(a_n), \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.6)$$

ve  $\lambda_n := \sqrt{\|H_n(\varphi)\|_\delta}$  olmak üzere

$$\omega(f, \lambda_n) = st_P - o(b_n), \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.7)$$

olsun.

Bu durumda  $\gamma_n := \max\{a_n, b_n, a_n b_n\}$  olmak üzere her  $f \in C[a, b]$  için

$$\|H_n(f) - f\|_\delta = st_P - o(\gamma_n), \quad (n \rightarrow \infty)$$

gerçeklenir.

**İspat.** Daha önce gösterildiği üzere  $W > 0$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|H_n(f) - f\|_\delta \leq W \left\{ \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta + \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \right\}$$

olup  $\gamma_n := \max\{a_n, b_n, a_n b_n\}$  olmak üzere

$$\|H_n(f) - f\|_\delta = st_P - o(\gamma_n)$$

elde edilir. Bu ise istenilen olup ispat tamamlanır. ■

$C^*$  ile  $2\pi$  periyotlu ve  $\mathbb{R}$  üzerinde sürekli periyodik fonksiyonların uzayı gösterilmek üzere bu uzayda  $P$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen yaklaşım sonucunu verelim. Buradaki normun  $\|f\|_{C^*} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  şeklinde verildiğini hatırlatmakta fayda vardır.

$f \in C^*$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $k_n \in C^*$ ,  $k_n(y) \geq 0$  herhangi bir  $y \in [-\pi, \pi]$  için

$$H_n^*(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) k_n(y-x) dy \quad (4.8)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda önceki sonuçlara benzer olarak aşağıdaki yaklaşım teoremini verebiliriz.

**Teorem 4.1.4.**  $P$  regüler ve  $(H_n^*)$ , (4.8) ile verilen operatör dizisi olsun.

Eğer

$$\delta_P \left( \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(y) dy = 1 \right\} \right) = 1$$

ve  $\delta > 0$  için

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{|y| \geq \delta} k_n(y) \right) = 0$$

ise  $f \in C^*$  olmak üzere

$$st_P - \lim_n \|H_n^*(f) - f\|_{C^*} = 0$$

gerçeklenir.

#### 4.2. Çok Değişkenli Durumda Konvolüsyon Operatörlerinin Kuvvet Serisine Dayalı İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Elde Edilen Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, (3.1) ile tanımlanan operatör dizisinin yaklaşım özellikleri kuvvet serisine dayalı istatistiksel yakınsaklık yardımıyla çok değişkenli durumda elde edilecektir.

$(x, y) \in J := [a, b] \times [c, d]$ ,  $f \in C(J)$  ve  $C(J)$ ,  $J$  üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

$$H_n : C(J) \longrightarrow C(J)$$

$$H_n(f; x, y) = \int_c^d \int_a^b f(u, v) k_n(u - x, v - y) dudv \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanan konvolüsyon tipli operatörleri ele alalım. Burada,

i.  $k_n(t, z)$ ,  $[a - b, b - a] \times [c - d, d - c]$  üzerinde sürekli,

ii.  $k_n(t, z) \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [a - b, b - a]$  ve  $z \in [c - d, d - c]$

şeklinde dir.  $f \in C(J)$  olmak üzere  $\|f\| := \sup_{(x,y) \in J} |f(x,y)|$  ile  $C(J)$  normlu uzaydır.

Şimdi teoremlerimizi ispatlarken faydalı olacak aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 4.2.1.**  $P$  regüler ve  $(L_n)$ , pozitif lineer operatör dizisi olsun.

Eğer  $f_0(u, v) = 1$ ,  $f_1(u, v) = u$ ,  $f_2(u, v) = v$ ,  $f_3(u, v) = u^2 + v^2$  olmak üzere

$$st_P - \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

ise her  $f \in C(J)$  için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $f \in C(J)$  olsun. Keyfi  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu durumda  $|u - x| < \delta$  ve  $|v - y| < \delta$  şartını sağlayan her  $(u, v) \in J$  için  $|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon$  olacak biçimde  $\delta > 0$  vardır.

Burada  $\chi_J$ ,  $J$  nin karakteristik fonksiyonu ve  $J_\delta = [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta] \cap J$ ,  $F := \|f\|$  olup

$$\begin{aligned} |f(u, v) - f(x, y)| &= |f(u, v) - f(x, y)|\chi_{J_\delta}(u, v) + |f(u, v) - f(x, y)|\chi_{J \setminus J_\delta}(u, v) \\ &\leq \varepsilon + 2F\chi_{J \setminus J_\delta}(u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\chi_{J \setminus J_\delta}(u, v) \leq \frac{(u-x)^2}{\delta^2} + \frac{(v-y)^2}{\delta^2}$$

olup yukarıdaki eşitsizliklerden her  $u, v, x, y$  için

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq \varepsilon + \frac{2F}{\delta^2} \left\{ (u-x)^2 + (v-y)^2 \right\}$$

elde edilir.

$L_n$ , lineer ve pozitif bir operatör olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} |L_n(f; x, y) - f(x, y)| &\leq L_n \left( |f(u, v) - f(x, y)|; x, y \right) \\ &\quad + |f(x, y)| |L_n(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \end{aligned}$$

ve burada  $h_1 = \max\{|a|, |b|\}$ ,  $h_2 = \max\{|c|, |d|\}$  olup

$$\begin{aligned} |L_n(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \varepsilon + \left( \varepsilon + F + \frac{(h_1^2 + h_2^2)2F}{\delta^2} |L_n(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \right) \\ &\quad + \frac{4h_1F}{\delta^2} |L_n(f_1; x, y) - f_1(x, y)| \\ &\quad + \frac{4h_2F}{\delta^2} |L_n(f_2; x, y) - f_2(x, y)| \\ &\quad + \frac{2F}{\delta^2} |L_n(f_3; x, y) - f_3(x, y)| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$K := \max \left\{ \varepsilon + F + \frac{(h_1^2 + h_2^2)2F}{\delta^2}, \frac{4h_1F}{\delta^2}, \frac{4h_2F}{\delta^2}, \frac{2F}{\delta^2} \right\}$$

olmak üzere  $J$  üzerinden supremum alırsak

$$\|L_n(f) - f\| \leq \varepsilon + K \left\{ \|L_n(f_0) - f_0\| + \|L_n(f_1) - f_1\| + \|L_n(f_2) - f_2\| + \|L_n(f_3) - f_3\| \right\} \quad (4.10)$$

eşitsizliği elde edilir.

$r > 0$  verildiğinde,  $\varepsilon < r$  olmak üzere  $\varepsilon > 0$  seçilerek aşağıdaki kümeleri tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} G &= \{n : \|L_n(f) - f\| \geq r\} \\ G_1 &= \{n : \|L_n(f_0) - f_0\| \geq \frac{r - \varepsilon}{4K}\} \\ G_2 &= \{n : \|L_n(f_1) - f_1\| \geq \frac{r - \varepsilon}{4K}\} \\ G_3 &= \{n : \|L_n(f_2) - f_2\| \geq \frac{r - \varepsilon}{4K}\} \\ G_4 &= \{n : \|L_n(f_3) - f_3\| \geq \frac{r - \varepsilon}{4K}\}. \end{aligned}$$

Buradan (4.10) eşitsizliği yardımıyla  $G \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$  olduğu sonucuna ulaşırız.

Böylece

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \left\{ \sum_{n \in G_1} p_n t^{n-1} + \sum_{n \in G_2} p_n t^{n-1} + \sum_{n \in G_3} p_n t^{n-1} + \sum_{n \in G_4} p_n t^{n-1} \right\}$$

olup limit alınarak hipotezler yardımıyla

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1} = 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

$\Gamma(u, v) = (u - x)^2 + (v - y)^2$  olmak üzere aşağıdaki lemma kolaylıkla elde edilebilir.

**Lemma 4.2.2.**  $P$  regüler ve  $(L_n)$ , pozitif lineer operatör dizisi olsun.

Eğer

$$stp - \lim_n \|L_n(f_0) - f_0\| = 0$$

ve

$$stp - \lim_n \|L_n(\Gamma)\| = 0$$

ise her  $f \in C(J)$  için

$$stp - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

Bu kısımda,  $0 < \delta < \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\}$  ve  $f \in C(J)$  için

$$\|f\|_\delta = \sup_{\substack{a+\delta \leq x \leq b-\delta, \\ c+\delta \leq y \leq d-\delta}} |f(x, y)|$$

olarak tanımlayalım. Herhangi bir  $\gamma > 0$  için  $\gamma < \min\{b-a, d-c\}$  olmak üzere  $B_\gamma := [a-b, b-a] \times [c-d, d-c] \setminus [-\gamma, \gamma] \times [-\gamma, \gamma]$  olsun.

**Lemma 4.2.3.**  $P$  regüler ve  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  olsun.  $(H_n)$ , (4.9) ile tanımlanan operatör dizisi olsun.

Eğer

$$st_P - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv = 1$$

ve herhangi bir  $\gamma > 0$  için

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{(u,v) \in B_\gamma} k_n(u, v) \right) = 0$$

ise

$$st_P - \lim_n \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  ve  $(x, y) \in [a+\delta, b-\delta] \times [c+\delta, d-\delta]$  olsun.

Buradan

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv \leq H_n(f_0; x, y) \leq \int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} k_n(u, v) dudv$$

olup

$$v_n := \max \left\{ \left| \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv - 1 \right|, \left| \int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} k_n(u, v) dudv - 1 \right| \right\}$$

olmak üzere

$$\|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \leq v_n$$

gerçeklenir. Hipotez gereğince  $st_P - \lim_n v_n = 0$  olacaktır.

Ayrıca  $\varepsilon > 0$  için

$$G := \{n : \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \geq \varepsilon\} \subseteq \{n : v_n \geq \varepsilon\} =: G'$$

olup

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G'} p_n t^{n-1}$$

olur ve hipotez gereğince

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1} = 0$$

yani

$$st_P - \lim_n \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

elde edilip ispat tamamlanır. ■

**Lemma 4.2.4.**  $P$  regüler ve  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  olsun.  $(H_n)$ , (4.9) ile tanımlanan operatör dizisi olsun.

Eğer

$$st_P - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv = 1$$

ve herhangi bir  $\gamma > 0$  için

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{(u,v) \in B_\gamma} k_n(u, v) \right) = 0$$

oluyorsa

$$st_P - \lim_n \|H_n(\Gamma)\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  ve  $(x, y) \in [a + \delta, b - \delta] \times [c + \delta, d - \delta]$  olsun.

Buradan  $\Gamma(u, v) = (u - x)^2 + (v - y)^2 \in C(J)$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} H_n(\Gamma; x, y) &= \int_c^d \int_a^b [(u - x)^2 + (v - y)^2] k_n(u - x, v - y) dudv \\ &= \int_{c-y}^{d-y} \int_{a-x}^{b-x} (u^2 + v^2) K_n(u, v) dudv \leq \int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} (u^2 + v^2) k_n(u, v) dudv \end{aligned}$$

gerçeklenir.

$\Gamma$  fonksiyonu  $(0,0)$  noktasında sürekli olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için bir  $(0 < \sqrt{\varepsilon} < \delta)$  vardır ki  $|u| < \sqrt{\varepsilon}$  ve  $|v| < \sqrt{\varepsilon}$  şartını sağlayan  $(u, v)$  için  $\Gamma(u, v) < 2\varepsilon$  gerçekleşir.

Dolayısıyla buradan

$$\mathcal{R} = \int_{c-d}^{d-c} \int_{a-b}^{b-a} (u^2 + v^2) dudv$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
H_n(\Gamma; x, y) &= 2\varepsilon \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} k_n(u, v) dudv + \iint_{B_{\sqrt{\varepsilon}}} (u^2 + v^2) k_n(u, v) dudv \\
&\leq 2\varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv + \iint_{B_{\sqrt{\varepsilon}}} (u^2 + v^2) k_n(u, v) dudv \\
&\leq 2\varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv + \mathcal{R} \sup_{(u, v) \in B_{\sqrt{\varepsilon}}} k_n(u, v)
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

Yukarıdaki sonuçlar ve hipotezler yardımıyla

$$st_P - \lim_n \|H_n(\Gamma)\|_{\delta} = 0$$

olduğu elde edilir. ■

Yukarıdaki sonuçları birleştirerek çok değişkenli durumda konvolüsyon operatörleri için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.2.1.**  $P$  regüler ve  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  olsun.  $(H_n)$ , (4.9) ile tanımlanan operatör dizisi olsun.

Eğer

$$st_P - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv = 1$$

ve herhangi bir  $\gamma > 0$  için

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{(u, v) \in B_{\gamma}} k_n(u, v) \right) = 0$$

oluyorsa her  $f \in C(J)$  için

$$st_P - \lim_n \|H_n(f) - f\|_{\delta} = 0$$

gerçeklenir.

Şimdi Örnek 4.1.3'ü çok değişkenli durum için yeniden düzenleyebiliriz.

**Örnek 4.2.5.** Örnek 4.1.3'de tanımlanan  $(u_n)$  ve  $(p_n)$  dizileri için

$$T_n(f; x, y) = n^2 \frac{(1 + u_n)}{\pi} \int_c^d \int_a^b f(u, v) e^{-n^2(u-x)^2} e^{-n^2(v-y)^2} dudv$$

olarak tanımlayalım. Burada

$$k_n(u, v) = n^2 \frac{(1 + u_n)}{\pi} e^{-n^2 u^2} e^{-n^2 v^2}$$

ve  $\delta \in (0, \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\})$  için  $\mathcal{B}_\delta := \{(u, v) : |u| \geq \delta \text{ veya } |v| \geq \delta\}$  olmak üzere

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv = n^2 \frac{(1 + u_n)}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 u^2} e^{-n^2 v^2} dudv - \iint_{(u,v) \in \mathcal{B}_\delta} e^{-n^2 u^2} e^{-n^2 v^2} dudv \right\}$$

elde edilir.

$$\text{Ayrıca } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 u^2} e^{-n^2 v^2} dudv = \frac{\pi}{n^2} < \infty$$

olduğundan

$$\lim_n \iint_{(u,v) \in \mathcal{B}_\delta} e^{-n^2 u^2} e^{-n^2 v^2} dudv = 0$$

olur ve

$$st_P - \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u, v) dudv = 1$$

gerçeklenir.  $\gamma > 0$  için

$$\sup_{(u,v) \in B_\gamma} k_n(u, v) \leq n^2 \frac{(1 + u_n)}{\pi} \frac{1}{e^{n^2 \gamma^2}}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{n^2}{e^{n^2 \gamma^2}} = 0$$

olup buradan

$$st_P - \lim_n \left( \sup_{(u,v) \in B_\gamma} k_n(u, v) \right) = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla Teorem 4.2.1 bu örnek için sağlanmaktadır,  $(u_n)$  dizisi yakınsak ya da istatistiksel yakınsak olmadığından önceki sonuç ve teoremler uygulanamaz.

Bu yaklaşım oranını vermek için süreklilik modülünü hatırlayalım.

$f : J \longrightarrow \mathbb{R}$  sürekli ve  $\lambda > 0$  olsun.  $f(x, y)$  fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega(f, \lambda) = \max_{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leq \lambda} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|$$

şeklindedir. Ayrıca  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega(f, \lambda) = 0$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\omega(f, \lambda \Upsilon) \leq ([\Upsilon] + 1)\omega(f, \lambda)$  olduğu bilinmektedir (Taşdelen vd., 2007).

**Teorem 4.2.2.**  $P$  regüler ve  $(H_n)$ , (4.9) ile tanımlanan operatör dizisi olsun.  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  reel sayıların pozitif terimli artmayan iki dizisi olmak üzere  $\delta < \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\}$  olacak şekilde sabit bir  $\delta > 0$  olsun.

Eğer

$$\|H_n(f_0) - f_0\|_\delta = st_P - o(a_n), \quad (n \rightarrow \infty),$$

$\lambda_n := \sqrt{\|H_n((u-x)^2 + (v-y)^2; x, y)\|_\delta}$  olmak üzere

$$\omega(f, \lambda_n) = st_P - o(b_n), \quad (n \rightarrow \infty),$$

ise bu durumda  $\gamma_n = \max\{a_n, b_n, a_n b_n\}$  ve her  $f \in C(J)$  için

$$\|H_n(f) - f\|_\delta = st_P - o(\gamma_n), \quad (n \rightarrow \infty)$$

gerçeklenir.

**İspat.**  $0 < \delta < \min\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\}$ ,  $f \in C(J)$  ve  $(x, y) \in [a + \delta, b - \delta] \times [c + \delta, d - \delta]$  olsun.

Herhangi bir  $\lambda > 0$  için  $H_n$  pozitif ve lineer bir operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |H_n(f; x, y) - f(x, y)| &\leq H_n(|f(u, v) - f(x, y)|; x, y) + |f(x, y)| |H_n(f_0) - f_0| \\ &\leq \omega(f, \lambda) H_n\left(1 + \frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{\lambda^2}; x, y\right) + |f(x, y)| |H_n(f_0) - f_0| \\ &\leq \omega(f, \lambda) \left\{ H_n(f_0) + \frac{1}{\lambda^2} H_n((u-x)^2 + (v-y)^2; x, y) \right\} + |f(x, y)| |H_n(f_0) - f_0| \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan  $F_1 := \|f\|_\delta$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda = \lambda_n = \sqrt{\|H_n((u-x)^2 + (v-y)^2; x, y)\|_\delta}$  olarak tanımlayalım.

$$\|H_n(f) - f\|_\delta \leq \omega(f, \lambda) \left\{ \|H_n(f_0)\|_\delta + \frac{1}{\lambda^2} \|H_n((u-x)^2 + (v-y)^2; x, y)\|_\delta \right\} + F_1 \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta$$

gerçeklenir ve

$$\begin{aligned}\|H_n(f) - f\|_\delta &\leq \omega(f, \lambda_n) \left\{ \|H_n(f_0)\|_\delta + 1 \right\} + F_1 \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \\ &\leq 2\omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta + F_1 \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta\end{aligned}$$

$F := \max\{2, F_1\}$  olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|H_n(f) - f\|_\delta \leq F \left\{ \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta + \|H_n(f_0) - f_0\|_\delta \right\}$$

bulunur. Dolayısıyla  $\gamma = \max\{a_n, b_n, a_n b_n\}$  olmak üzere

$$\|H_n(f) - f\|_\delta = st_P - o(\gamma_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

## 5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tezde,  $P$ -istatistiksel yakınsaklık kullanılarak konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri tek ve çok değişkenli durumlarda araştırılmıştır. Öncelikle klasik Korovkin teoremi, istatistiksel ve  $P$ -istatistiksel versiyonu, kuvvet serisi metodu, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık ve pozitif lineer operatörlere ilişkin ihtiyaç duyacağımız temel kavramlar hatırlanmış ve aralarındaki ilişkileri ortaya koyan örnekler sunulmuştur. Weierstrass'ın  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli bir  $f$  fonksiyonuna cebirsel ve trigonometrik fonksiyonlar ile yaklaşımına ilişkin teoremi; Bohman, Popoviciu ve Korovkin tarafından birbirinden bağımsız olarak pozitif lineer operatörler yardımıyla genelleştirilmiştir. Pozitif lineer operatörler arasında çekirdek fonksiyonuna çeşitli şartlar altında kurulan konvolüsyon operatörleri önemli bir grubu temsil eder. 2003 yılında Srivastava ve Gupta tarafından bazı toplam-integral formunda operatörlerin yaklaşım özellikleri klasik yakınsaklık yardımıyla elde edilmiştir. 2008 yılında klasik yakınsaklık yerine  $A = (a_{jn})$  sonsuz matrisi yardımıyla tanımlanan  $A$ -istatistiksel yakınsaklık alınarak integral formunda olan konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özellikleri Duman tarafından elde edilmiştir. 2017 yılında Yurdakadim, Taş ve Atlıhan tarafından çok değişkenli durumda konvolüsyon operatörleri toplam süreçleri yardımıyla ele alınarak yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışmalardan yola çıkarak  $P$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla konvolüsyon operatörleri göz önüne alınarak orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Kurulan operatörler ile literatürde mevcut olan sonuçların yetersiz kaldığı görülmüştür. Dolayısıyla ispatladığımız sonuçların literatüre önemli bir katkı sağladığı açıktır.

Sonuç olarak, klasik yakınsaklığın yokluğunda toplanabilme metotları kullanılarak yine de yaklaşımdan söz edebilmemizi sağlayan teoremler literatür için ilgi çekicidir. Ayrıca ne yazık ki günlük hayattaki problemlerin matematiksel modellemeleri için tek değişkenli durum yetersiz kalmaktadır ve bu durum  $P$ -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla daha önce ele alınmamıştır. Bu tez, bu konuda çalışacak araştırmacılar için bir başucu kaynağı olmakla kalmayıp  $P$ -istatistiksel yakınsaklık kullanılarak konvolüsyon operatörlerinin yaklaşım özelliklerini ifade eden sonuçları ören niteliğindedir.

## KAYNAKÇA

- Altomare, P., & Campiti, M.** (1994). Korovkin-type approximation theory and its applications. *Journal of Approximation Theory*, 1994.
- Atlıhan, Ö. G., Yurdakadim, T., & Taş, E.** (2023). A new approach to the approximation by positive linear operators in weighted spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 74(11), 1649-1657.
- Bernstein, S. N.** (1912). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probablites. *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13, 1-2.
- Bohman, H.** (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat.*, 2, 43-56.
- Boos, J.** (2000). Classical and Modern Methods in Summability. *Oxford University Press*, 13, 1-2.
- Çınar, S., & Yıldız, S.** (2022).  $P$ - statistical summation process of sequences of convolution operators. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53(3), 648-659.
- DeVore, R. A., & Lorentz, G. G.** (1993). Constructive approximation. *Springer-Verlag*.
- Dinar, R., & Yurdakadim, T.** (2025). Approximation properties of convolution operators via statistical convergence based on a power series. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 74(1), 92-102.
- Duman, O.** (2008). A-statistical convergence of sequences of convolution operators. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 12(2), 523-536.
- Fast, H.** (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2, 241-244.
- Freedman, A., & Sember, J.** (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 296-297.
- Fridy, J. A., Miller, H. I., & Orhan, C.** (2003). Statistical rates of convergence. *Acta Sci. Math.*, 69, 147-157.
- Fridy, J. A.** (1985). On statistical convergence. *Analysis* 5, 301-313.
- Gadjiev, A., & Orhan, C.** (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 32, 129-137
- Hardy, G. H.** (1949). Divergent series. *Oxford University Press, London*.
- Hacısalıhoğlu, H. I., & Hacıyev, A.** (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, *A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara*

- Kratz, W., & Stadtmüller, U.** (1989). Tauberian theorems for  $J_p$ -summability. *J. Math. Anal. Appl.*, 139, 362-371.
- Kreyzig, E.** (2007). Introductory to functional analysis with application. *John Wiley, New York.*
- Kolk, E** (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, 13, 77-83.
- Korovkin, P. P.** (1953). On convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R*, 90, 961-964.
- Maddox, I. J.** (1970). Elements of Functional Analysis. *Cambridge University Press.*
- Miller, H. I.** (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(5), 1811-1819.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L.** (2008). An introduction to the theory of numbers. *John Wiley and Sons.*
- Popoviciu, T.** (1950). Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. *Lucrarile Ses. Gen. Șt. Acad. Române din*, 1-4.
- Salat, T.** (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mat. Slovaca.*, 30, 139-150.
- Soylemez, D., & Ünver, M.** (2021). Rates of Power Series Convergence of Positive Linear Operators and Power Series Statistical Convergence of Meyer König and Zeller Operators. *Lo-bachevskii Journal of Mathematics*, 42(2), 426-434.
- Srivastava, H. M. & Gupta, V.** (2003). A certain family of summation-integral type operators. *Math. Comput. Modelling*, 37, 1307-1315.
- Tasdelen, F., Olgun, A., & Tunca, G.B.** (2007). Approximation of functions of two variables by certain linear positive operators. *Proceedings Mathematical Sciences*, 117, 387-399.
- Taş, E., Yurdakadim, T., & Atlhan, Ö. G.** (2017). Summation process of convolution operators for multivariables. *Sarajevo Journal of Mathematics*, 13(2), 207-216.
- Ünver, M. & Orhan, C.** (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation to approximation theory. *Numer. Func. Anal. Opt.*, 40, 535-547.
- Weierstrass, K. G.** (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen. *Veranderlichen. Sitzungsber, Akad. Berlin*, 663-639, 789-805.