



ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ



BİLECİK
ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

**KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ
KODLAMALARIN VE İÇSEL METRİKLERİN
İNCELENMESİ**

Melis GÜNERİ
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mustafa SALTAN

BİLECİK, 2020
Ref.No:10339973



**ESKİŞEHİR
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

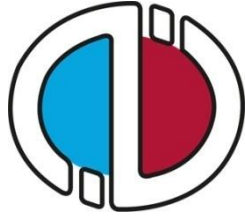
**Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

**KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ
KODLAMALARIN VE İÇSEL METRİKLERİN
İNCELENMESİ**

**Melis GÜNERİ
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mustafa SALTAN**

BİLECİK, 2020



**ESKİSEHIR
ANADOLU UNIVERSITY**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI
ÜNİVERSİTESİ**

**BİLECİK
ŞEYH EDEBALI UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences
Department of Mathematics**

**EXAMINATION OF CODINGS AND INTRINSIC
METRICS ON SELF-SIMILAR SETS**

**Melis GUNERI
Master's Thesis**

**Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Mustafa SALTAN**

BİLECİK, 2020



BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve ... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından tarihinde tez savunma sınavı yapılan Melis GÜNERİ'nin "Kendine Benzer Kümeler Üzerindeki Kodlamaların ve İçsel Metriklerin İncelenmesi" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Mustafa SALTAN

ÜYE : Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN

ÜYE : Doç. Dr. Figen UYSAL

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŐEKKÖR

Hem lisans hem de yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi, birikim ve tecrübelerini benden esirgemeyen her daim bana yol gösterip daha ileriye gitmemi sağlayan kıymetli bir o kadar saygıdeğer danıőman hocam **Doç. Dr. Mustafa SALTAN**'a ve tüm eğitim hayatım boyunca attığım her adımı maddi-manevi destekleyen sevgili aileme emeklerinden dolayı sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bursiyeri olarak görev aldığım ve bu tez ęalıőmasının da bir bölümünü oluőturan 118F356 Numaralı TÜBİTAK-1002 Hızlı Destek Projesindeki desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a özel olarak teşekkür ederim.

BEYANNAME

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

22/06/2020

(İmza)

Melis GÜNERİ

KENDİNE BENZER KÜMELER ÜZERİNDEKİ KODLAMALARIN VE İÇSEL METRİKLERİN İNCELENMESİ

ÖZET

Fraktaller doğayla olan ilişkisinden dolayı son zamanların popüler araştırma konularından biridir. Bütün fraktallerin ortak özelliklerinden biri kendine benzerliktir. Kendine benzer kümeler kuvvetli kendine benzer, zayıf kendine benzer, rastgele kendine benzer kümeler gibi farklı sınıflarda incelenebilir. Kuvvetli kendine benzer kümelerin klasik modellerinin bazıları Cantor kümesi, Cantor toz bulutu, Sierpinski üçgeni, Sierpinski halısı, Koch eğrisi, Kutu fraktalı, Sierpinski dörtyüzlüsü ve Menger süngeridir. Zayıf kendine benzer küme modelleri olarak Sierpinski pervanesi ve komşu Sierpinski üçgeni verilebilir. Julia kümeleri ve Mandelbrot kümesi ise rastgele kendine benzer küme modelleridir. Kendine benzer kümeler yapılarından dolayı farklı kodlamalara ve bu kodlamalar ile uyumlu olan içsel metriklere sahiptir.

Bu tezde ilk olarak, klasik fraktaller üzerindeki kodlamalar araştırılacaktır. Literatürde verilen Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerindeki içsel metrik yapısı incelendikten sonra zayıf kendine benzer bir küme örneği olan Sierpinski pervanesi ve komşu Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik formülleri inşa edilecektir.

Son olarak ekli Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan içsel metrik formülü kullanılarak iki veya daha fazla en kısa yola sahip olan noktalar sınıflandırılacaktır. Ayrıca jeodeziklerinin sayısı $n = 0,1,2,3, \dots$ için 2^n , $3 \cdot 2^n + n$ ve ∞ olan noktaların olduğu gösterilecek ve jeodezik sayısına göre bu noktaların bazı kod temsilleri ifade edilecektir.

Anahtar Sözcükler:

İçsel metrik; Kendine benzer kümeler; Sierpinski üçgeni; Kod kümeleri; Jeodezik.

EXAMINATION OF CODINGS AND INTRINSIC METRICS ON SELF-SIMILAR SETS

ABSTRACT

Fractals are one of the most popular research topics of recent times because of their relationship with the nature. One common feature of all fractals is self-similarity. Self-similar sets can be studied in different classes; strong self-similar sets, weak self-similar sets and randomly self similar sets. Some classical models of strong self-similar sets are Cantor set, Cantor dust, Sierpinski triangle, Sierpinski carpet, Koch curve, Box fractal, Sierpinski tetrahedron and Menger sponge. The Sierpinski propeller and adjacent Sierpinski triangle can be given as examples of weak self-similar sets. Julia sets and Mandelbrot set are some examples of randomly self similar sets. Self-similar sets have different codings and the intrinsic metrics that are compatible these coding due to their structures.

In this thesis, firstly the codings of classical fractals will be investigated. After examining the intrinsic metric formula defined on the code set of Sierpinski gasket in the literature, the intrinsic metric formulas will be constructed on the Sierpinski propeller and adjacent Sierpinski triangle which are some example of weak self-similar set.

Finally, by using the intrinsic metric formula on the added Sierpinski triangle the points which have two or more shortest paths will be classified. The points which have for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ the number of geodesics $2^n, 3 \cdot 2^n + n$ and ∞ have shown and some code representations of these points have been expressed according to the number of geodesics.

Key Words:

Intrinsic metric; Self-similar sets; Sierpinski gasket; Code sets; Geodesic.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR
BEYANNAME
ÖZET.....
ABSTRACT
İÇİNDEKİLER
ŞEKİLLER DİZİNİ
ÇİZELGELER DİZİNİ
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. BAZI FRAKTALLERİN NOKTALARININ KOD TEMSİLLERİ	5
3.1 En Fazla Bir Kod Temsili Olan Bazı Fraktaller	5
3.1.1 Cantor kümesi	5
3.1.2 Cantor toz bulutu	6
3.2 En Fazla İki Kod Temsili Olan Bazı Fraktaller	7
3.2.1 Sierpinski üçgeni.....	7
3.2.2 Sierpinski dörtyüzlüsü	9
3.2.3 Koch eğrisi.....	10
3.2.4 Kutu fraktalı.....	12
3.3 En Fazla Üç Kod Temsili Olan Bir Fraktal Örneği.....	13
3.3.1 Ekli Sierpinski üçgeni.....	13
3.4 En Fazla Dört Kod Temsili Olan Bir Fraktal Örneği.....	16
3.4.1 Sierpinski halısı.....	16
4. SİERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİKLER.....	20
4.1.Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metriğin İnşası	20
4.2.(S, d) İçsel Metrik Uzayının Geometrik Bir Özelliği	23
4.3 Sierpinski Üçgeninin İçsel Metriğe Göre Jeodezikleri	25

4.4 Dik Ve Çeşitkenar Üçgen Üzerindeki İçsel Metriğin Formülizasyonu.....	28
5. SIERPİNSKİ PERVANESİ VE KOMŞU SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK FORMÜLLERİNİN İNŞASI.....	32
5.1 Sierpinski Pervanesi Üzerindeki Noktaların Kod Temsilleri Ve Kod Kümeleri ..	32
5.2 <i>SP</i> 'nin Kod Kümeleri Üzerindeki İçsel Metriğin İnşası	36
5.3 Komşu Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik	42
6. EKLİ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN JEODEZİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI.....	45
6.1 Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik Formülü.....	45
6.2. Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki En Az İki Jeodezikli Noktaların Kod Temsilleri.....	51
6.3 Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Noktaların Jeodeziklerine Göre Sınıflandırılması	87
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	95
KAYNAKLAR	97
ÖZ GEÇMİŞ.....

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Cantor kümesi üzerindeki bazı noktaların kodları.....	6
Şekil 3.2. Cantor toz bulutunun kod kümeleri	7
Şekil 3.3. Sierpinski üçgeninin ilk adımdaki kod kümeleri.....	8
Şekil 3.4. Sierpinski düzgün dörtyüzlüsü	10
Şekil 3.5. Koch eğrisinin ilk seviyedeki kod kümeleri ...	12
Şekil 3.6. Kutu fraktalının ilk seviyedeki kod kümeleri ...	13
Şekil 3.7. Ekli Sierpinski üçgeninin ilk seviyedeki kod kümeleri ...	16
Şekil 3.8. Sierpinski halısının ilk seviyedeki kod kümeleri.....	18
Şekil 4.1. Sırasıyla eşkenar, dik ve çeşitkenar Sierpinski üçgenleri ...	29
Şekil 5.1. Sierpinski pervanesi.....	33
Şekil 5.2. $n = 3$ için Sierpinski üçgeninin ölçekli kopyaları ..	33
Şekil 5.3. Sierpinski pervanesinin bazı kod kümeleri.....	36
Şekil 5.4. $a_0 = \tilde{0}$ ve $b_0 = \tilde{1}$ için Sierpinski pervanesi üzerindeki A ve B noktaları arasındaki en kısa yollardan biri	38
Şekil 5.5. AS 'nin bazı kod kümeleri ve kod temsilleri	43
Şekil 6.1. Ekli Sierpinski üçgeninin inşası.....	46
Şekil 6.2. $T_{k+2} = 0$ için kod temsilleri 12333 ... ile 211333 ... olan noktalar.....	56
Şekil 6.3. $T_i = 1$ ($i \geq k + 2$) için kod temsilleri 1211333 ... ile 2133222 ... olan noktalar	57
Şekil 6.4. $T_{k+2} = 2$ için kod temsilleri 1231222 ... ile 2132333 ... olan noktalar	58
Şekil 6.5. $T_{k+2} = 0$ için kod temsilleri 111333 ... ile 212333 ... olan noktalar.....	62
Şekil 6.6. Kod temsilleri 13323111 ... ve 23331222 ... olan noktalar.....	68
Şekil 6.7. Kod temsilleri 12000 ... ile 23000 ... olan noktalar	73
Şekil 6.8. Kod temsilleri 1223111 ... ile 023222 ... olan noktalar	82
Şekil 6.9. Kod temsilleri 1332111 ... ile 032333 ... olan noktalar	82
Şekil 6.10. Kod temsilleri 1330111 ... ile 0320222 ... olan noktalar	89
Şekil 6.11. 2 jeodezikli noktalar.....	93
Şekil 6.12. Sırasıyla jeodezik sayısı 4 ve 8 olan noktalar	95
Şekil 6.13. 3 jeodezikli noktalar	96

Şekil 6.14. 7 jeodezikli noktalar.....	99
Şekil 6.15. 14 jeodezikli noktalar.	99

ÇİZGELER DİZİNİ**Sayfa No**

Çizelge 6.1. T_i tablosu.....	54
Çizelge 6.2. T_i tablosu.....	61
Çizelge 6.3. T_i' tablosu.....	66

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ**Simgeler**

\in : elemanıdır

\cup : birleşim

\cap : kesişim

\forall : her

$>$: büyük

\geq : büyük veya eşit

$<$: küçük

\leq : küçük veya eşit

\subseteq : alt küme

Δ_n : n. Seviye temel üçgen

Kısaltmalar

AS : Komşu Sierpinski üçgeni

B : Kutu fraktalı

C : Cantor kümesi

D : Cantor toz bulutu

h : Hausdorff metrik

H : Sierpinski halısı

$\mathcal{H}(X)$: X 'in boştan farklı kompakt alt kümelerinin kümesi

K : Koch eğrisi

S : Sierpinski üçgeni

SP : Sierpinski pervanesi

\tilde{S} : Ekli Sierpinski üçgeni

T : Sierpinski dörtyüzlüsü

YFS: Yinelemeli fonksiyon sistemi

1. GİRİŞ

Doğanın geometrisi olarak bilinen fraktal geometri matematiğin yanı sıra fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, coğrafya ve tıp gibi farklı alanlarda birçok uygulamaya sahiptir (Barnsley, 1988; Barnsley, 2006; Burago vd., 2001; Falconer, 2004; Gulick, 1988; Mandelbrot, 1982). Son zamanlarda ise klasik fraktaller üzerindeki içsel metriğin farklı yollardan inşa edilmesi popüler bir araştırma konusudur (Cristea, 2005; Cristea ve Steinsky, 2013; Denker ve Sato, 1999; Grabner, 1998; Hinz ve Schief, 1990; Romik, 2006; Strichartz, 1999; Zhang vd., 2008). Fraktaller üzerindeki noktaların kod temsillerinin kullanılması ile içsel metriğin formüle edilmesi bu araştırmalardan biridir (Saltan vd., 2018; Özdemir, 2019; Özdemir vd., 2018; Güneri ve Saltan, 2018). Klasik, dik ve çeşitkenar Sierpinski üçgeni, Kutu fraktalı, Sierpinski dörtyüzlüsü, mod-3 Sierpinski üçgeni gibi iyi bilinen fraktaller üzerinde içsel metrikler, noktalarının kod temsilleri kullanılarak formüle edilmekte ve bu kümelerin birçok geometrik ve topolojik özelliği araştırılmaktadır (Aslan vd., 2019; Gu vd., 2019; Saltan vd., 2018; Saltan, 2018; Saltan, 2018; Saltan vd., 2019; Saltan, 2018).

Bu fraktallerin hepsinin ortak özelliği kuvvetli kendine benzer kümeler olmasıdır. Bu tez çalışmasında literatürde verilen çalışmalar özetlendikten sonra zayıf kendine benzer fraktal modelleri üzerinde içsel metrikler formüle edilmektedir. Bu metrikleri formüle edebilmek için Bölüm 3'te klasik fraktallerin üzerindeki noktalar kod temsillerinin sayısına göre sınıflandırılmaktadır. Bölüm 5'te ise Sierpinski pervanesi ve komşu Sierpinski üçgenleri üzerinde içsel metrikler noktaların kod temsilleri kullanılarak tekrar formüle edilmektedir. Son bölümde ise yukarıda verilen fraktallerden farklı olarak büzülme katsayılarının hepsi aynı olmayan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan ekli Sierpinski üçgeni ele alınmaktadır. Büzülme katsayılarının farklılığından dolayı bu fraktal üzerindeki içsel metriğin formüle edilmesi diğerlerine göre biraz daha zordur. Bu formülizasyon "Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metriğin Formüle Edilmesi" isimli yüksek lisans çalışması ile 118F356 nolu TÜBİTAK projesinin bir parçası olarak verilmektedir (Şen ve Saltan, 2020). Bu projenin bir parçası olarak bu tezin son bölümde, ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki noktalar jeodeziklerinin sayısına göre sınıflandırılmaktadır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Klasik fraktelleri elde etmenin en önemli yollarından biri yinelemeli fonksiyon sistemleridir. Ayrıca klasik fraktaller kendi yinelemeli fonksiyon sistemleri ile uyumlu kodlamalarla ifade edilebilirler. Bu tez boyunca kullanılan kavramlar, tanımlar ve teoremler aşağıda verilmektedir. (Daha fazla detay için Barsnley, 1988, Edgar, 2008, Falconer K., 2004, Gulick D., 1988, Mandelbrot B.B. 1982, Peitgen, 2004)

Tanım 2.1 (X, d) bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde $0 \leq k < 1$, $k \in \mathbb{R}$ sayısı varsa f ye büzülme katsayısı k olan büzülme dönüşümü denir (Barnsley, 1988).

Tanım 2.2 $X \neq \emptyset$ ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ varsa x^* noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir (Barnsley, 1988).

Teorem 2.1 (X, d) bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Eğer (X, d) metrik uzayı tam ise f nin bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca $\forall x \in X$ için

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$$

dizisi f nin sabit noktasına yakınsar (Barnsley, 1988).

Tanım 2.3 (X, d) metrik uzay olsun. $\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ kompakt ve } A \neq \emptyset\}$ olsun. $A \in \mathcal{H}(X)$, $x \in X$ için $d(x, A) = \min\{d(x, y) \mid y \in A\}$ dir. $A, B \neq \emptyset$ ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için $d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}$ olmak üzere $h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ olacak şekilde tanımlanan $h: \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğine Hausdorff metriği adı verilir.

Tanım 2.4 (X, d) bir tam metrik uzay ve $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow X$ büzülme katsayıları sırasıyla s_1, s_2, \dots, s_n olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda

$$\{X; f_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} = \{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

sistemine büzülme katsayısı $s = \max\{s_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ olan bir yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) denir (Barnsley, 1988).

Teorem 2.2 (X, d) bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ büzülme katsayısı s olan büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $f: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ dönüşümü $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayında büzülme katsayısı s olan büzülme dönüşümüdür (Barnsley, 1988).

Teorem 2.3 (X, d) metrik uzay, f_1 ve f_2 , $\mathcal{H}(X)$ de büzülme katsayıları sırasıyla s_1 ve s_2 olan büzülme dönüşümleri olsun. $A \in \mathcal{H}(X)$ için $F: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, $A \in \mathcal{H}(X)$ için $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$ dönüşümü büzülme katsayısı $s = \max\{s_1, s_2\}$ olan büzülme dönüşümüdür (Barnsley, 1988).

Teorem 2.4 (X, d) metrik uzayı tam ise $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı da tamdır (Barnsley, 1988).

Teorem 2.5 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve (X, d) tam metrik uzay olsun. $F: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, $A \in \mathcal{H}(x)$ için $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$ dönüşümü verilsin. Bu durumda F dönüşümünün

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) = A$$

olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır ve $\forall B \in \mathcal{H}(x)$ için $B, F(B), F^2(B), \dots, F^n(B), \dots$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Barnsley, 1988).

Tanım 2.5 Teorem 2.5'te tanımlı A kümesine $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin sabit noktası, atraktörü veya çekicisi denir. Böyle bir durumda A kendine benzer bir küme olarak adlandırılır (Barnsley, 1988).

Tanım 2.6 Bir geometrik şeklin bir noktasının her bir komşuluğu bütün şeklin bir kopyasını içeriyor ise bu şekle zayıf kendine benzer küme denir. Eğer bir geometrik şeklin her bir noktasının her komşuluğu bütün şeklin kopyasını içeriyor ise bu şekle kuvvetli kendine benzer küme denir (Addison, 1977).

Teorem 2.6 (Cantor Ara kesit Teoremi) (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) (X, d) metrik uzayı tamdır.

b) (D_n) kapalı yuvarlardan oluşan her $n \in \mathbb{N}$ için $D_n \supseteq D_{n+1}$ özelliğine sahip kümelerin bir dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ için r_n sayısı D_n kapalı yuvarının yarı çapı olsun. Bu durumda $r_n \rightarrow 0$ ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$$

olacak şekilde tek bir $x \in X$ noktası vardır.

Tanım 2.7 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bir yinelemeli fonksiyon sistemi olsun. Yinelemeli fonksiyon sistemi ile ilişkili (Σ, d_c) kod uzayı n sembolü $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde her $\omega, \sigma \in \Sigma$ için

$$d_c(\omega, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\omega_i - \sigma_i|}{(n+1)^i}$$

metriği ile ifade edilir. Burada $\Sigma = \{\sigma \mid \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n, \sigma_i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ kümesidir (Barnsley, 1988).

Tanım 2.8 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$, Σ kod uzayı ile ilgili bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve bu YFS'nin atraktörü A olsun. $\varphi: \Sigma \rightarrow A$ olacak şekilde

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\sigma, n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ f_{\sigma_3} \circ \dots \circ f_{\sigma_n}(x)$$

olacak şekilde tanımlı fonksiyon sürekli ve örtendir. $a \in A$ noktasının adresi

$$\varphi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma: \varphi(\omega) = a\}$$

kümesinin elemanlarından oluşur. Eğer atraktörün her noktası tek bir adrese sahipse YFS tamamen bağlantısız olarak adlandırılır (Barnsley, 1988).

Teorem 2.7 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ YFS'nin atraktörü A olsun. YFS tamamen bağlantısızdır ancak ve ancak $i \neq j$ olacak şekildeki her $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$$

dir (Barnsley, 1988).

3. BAZI FRAKTALLERİN NOKTALARININ KOD TEMSİLLERİ

Aşağıda verilen kümeler, Mandelbrot'un fraktal tanımını vermeden önce farklı matematiksel problemleri çözmek için tanımlanmaktadır. Bu tezde, bu kümeler sadece ilişkili yinelemeli fonksiyon sistemleri kullanılarak ifade edilecektir. Ayrıca, bu bölümde bazı klasik fraktaller üzerindeki noktaların adreslerine göre sınıflandırılmaktadır.

3.1 En Fazla Bir Kod Temsili Olan Bazı Fraktaller

3.1.1 Cantor kümesi

$i = 0,2$ için $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_0(x) = \frac{x}{3}$$

$$f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}; f_0, f_2\}$ YFS'nin atraktörü Cantor kümesidir ve kısaca C olarak adlandırılmaktadır. $f_0(C) \cap f_2(C) = \emptyset$ olduğundan Tanım 2.8 ve Teorem 2.7 gereğince YFS tamamen bağlantısız olduğu için atraktörünün her noktasının bir tek adresi vardır. $f_0(C) = C_0$ ve $f_2(C) = C_2$ olarak ifade edilirse Cantor kümesinin kod kümeleri $c_i \in \{0,2\}$ için $\sigma = c_1c_2 \dots c_{n-1}$ olmak üzere

$$C_{\sigma 0} = \{\sigma 0a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \dots : a_i \in \{0,2\}\}$$

$$C_{\sigma 2} = \{\sigma 2a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \dots : a_i \in \{0,2\}\}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada $f_\sigma(C) = C_\sigma$ dır (Barnsley, 1988).

0				2			
00		02		20		22	
000	002	020	022	200	202	220	222
---	---	---	---	---	---	---	---
---	---	---	---	---	---	---	---
⋮							
---	---	---	---	---	---	---	---
□	000222...	□	0222...	□	2002000...	□	222...

Şekil 3.1. Cantor kümesi üzerindeki bazı noktaların kodları.

3.1.2 Cantor toz bulutu

$i = 0, 1, 2, 3$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü Cantor toz bulutudur ve kısaca D olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0, 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $f_i(D) \cap f_j(D) = \emptyset$ olduğundan Tanım 2.8 ve Teorem 2.7 gereğince YFS tamamen bağlantısız olduğundan atraktörünün her noktasının bir tek adresi vardır. $f_0(D) = D_0$, $f_1(D) = D_1$, $f_2(D) = D_2$ ve $f_3(D) = D_3$ olarak ifade edilirse Cantor toz bulutunun kod kümeleri $d_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $\sigma = d_1 d_2 \dots d_{n-1}$ olmak üzere

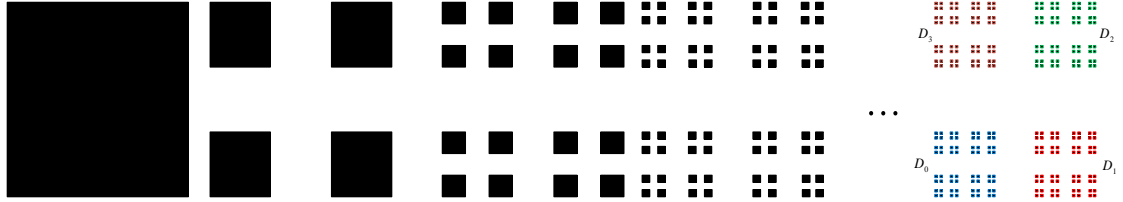
$$D_{\sigma 0} = \{\sigma 0 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$D_{\sigma 1} = \{\sigma 1 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$D_{\sigma 2} = \{\sigma 2 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0,1,2,3\}\}$$

$$D_{\sigma 3} = \{\sigma 3 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0,1,2,3\}\}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada $f_{\sigma}(D) = D_{\sigma}$ dir.



Şekil 3.2. Cantor toz bulutunun kod kümeleri.

3.2 En Fazla İki Kod Temsili Olan Bazı Fraktaller

3.2.1 Sierpinski üçgeni

$i = 0,1,2$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2\}$ YFS'nin atraktörü Sierpinski üçgenidir ve kısaca S olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0,1,2$ ve $i \neq j$ için $f_i(S) \cap f_j(S)$ tek elemanlı olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi ve Tanım 2.8 gereğince bu noktanın birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Eğer S üzerindeki bir nokta aynı seviyedeki iki alt üçgenin ara kesiti değilse bu noktanın bir tek kod temsili vardır. $f_0(S) = S_0$, $f_1(S) = S_1$ ve $f_2(S) = S_2$ olarak ifade edilirse Sierpinski üçgeninin kod kümeleri $s_i \in \{0,1,2\}$ için $\sigma = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ olmak üzere

$$S_{\sigma a_n} = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0,1,2\}\}$$

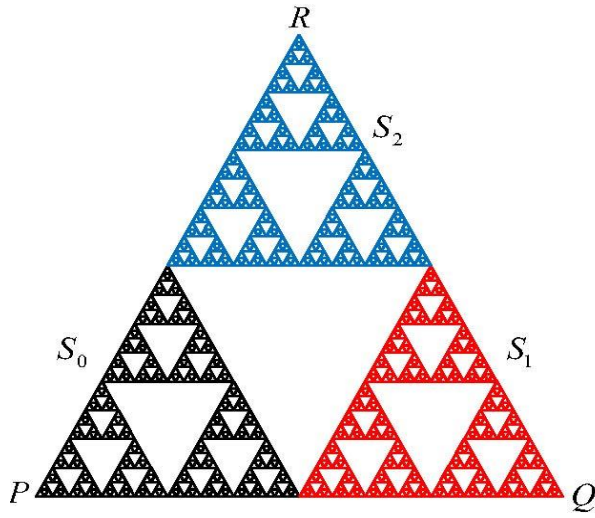
ve kenarlarının kod kümeleri

$$P_{\sigma}Q_{\sigma} = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0,1\}\}$$

$$P_{\sigma}R_{\sigma} = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0,2\}\}$$

$$Q_{\sigma}R_{\sigma} = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{1,2\}\}$$

olarak ifade edilmektedir (Barnsley, 1988).



Şekil 3.3. Sierpinski üçgeninin ilk adımdaki kod kümeleri.

İki kod temsiline sahip noktalar, $s_i \in \{0,1,2\}$ için $\sigma = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma 0111 \dots \equiv \sigma 1000 \dots$$

$$\sigma 1222 \dots \equiv \sigma 2111 \dots$$

$$\sigma 0222 \dots \equiv \sigma 2000 \dots$$

Diğer taraftan bu fraktal $\sigma 000 \dots$, $\sigma 111 \dots$, $\sigma 222, \dots \sigma 1202012021 \dots$ gibi tek kod temsiline sahip noktalar da içermektedir.

3.2.2 Sierpinski dörtyüzlüsü

$i = 0,1,2,3$ için $f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f_0(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right)$$

$$f_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right)$$

$$f_2(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}z \right)$$

$$f_3(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^3; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü Sierpinski dörtyüzlüdür ve kısaca T olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0,1,2,3$ ve $i \neq j$ için $f_i(T) \cap f_j(T)$ tek elemanlı olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi ve Tanım 2.8 gereğince bu noktanın birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Eğer bu nokta aynı seviyedeki hiçbir alt dörtyüzlünün ara kesiti değil ise bu durumda bu nokta tek kodlu olmaktadır. $f_0(T) = T_0$, $f_1(T) = T_1$, $f_2(T) = T_2$ ve $f_3(T) = T_3$ olarak ifade edilmektedir (Aslan N., 2019).



Şekil 3.4. Sierpinski düzgün dörtyüzlüsü (T_0 kırmızı kısım, T_1 mavi kısım, T_2 sarı kısım ve T_3 yeşil kısım).

İki kod temsiline sahip noktalar, $t_i \in \{0,1,2,3\}$ için $\sigma = t_1 t_2 \dots t_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma 0111 \dots \equiv \sigma 1000 \dots$$

$$\sigma 0222 \dots \equiv \sigma 2000 \dots$$

$$\sigma 0333 \dots \equiv \sigma 3000 \dots$$

$$\sigma 1222 \dots \equiv \sigma 2111 \dots$$

$$\sigma 2333 \dots \equiv \sigma 3222 \dots$$

$$\sigma 1333 \dots \equiv \sigma 3111 \dots$$

Kod temsili bunlardan farklı olan tüm noktalar aynı seviyedeki alt üçgenlerin kesişimi olarak yazılamayacağından $\sigma 000 \dots$, $\sigma 111 \dots$, $\sigma 222 \dots$ ve $\sigma 312320123021 \dots$ gibi noktalar tek kod temsiline sahiptir.

3.2.3 Koch eğrisi

$i = 0,1,2,3$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_1(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{6} - \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{x\sqrt{3}}{6} + \frac{y}{6} \end{pmatrix}$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{1}{2} \\ -\frac{x\sqrt{3}}{6} + \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü Koch eğrisidir ve kısaca K olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0, 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $f_i(K) \cap f_j(K)$ tek nokta olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi ve Tanım 2.8 gereğince A noktasının birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Eğer K üzerindeki bir nokta aynı seviyedeki hiçbir alt eğrinin ara kesiti değil ise bu durumda bu noktanın tek kod temsili vardır. $f_0(K) = K_0$, $f_1(K) = K_1$, $f_2(K) = K_2$ ve $f_3(K) = K_3$ olarak ifade edilirse Koch eğrisinin kod kümeleri $k_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $\sigma = k_1 k_2 \dots k_{n-1}$ olmak üzere

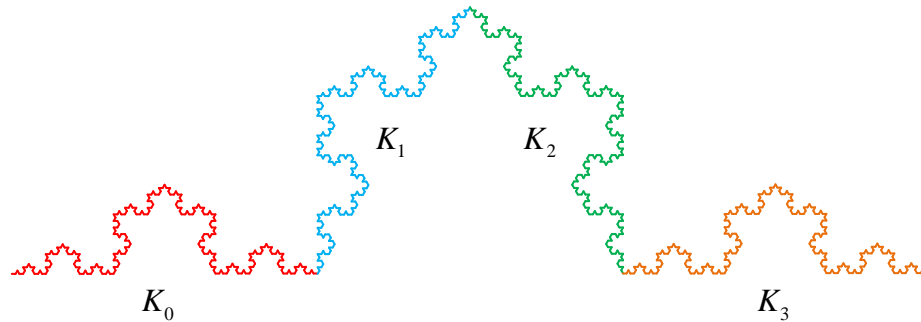
$$K_{\sigma 0} = \{\sigma 0 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$K_{\sigma 1} = \{\sigma 1 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$K_{\sigma 2} = \{\sigma 2 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$K_{\sigma 3} = \{\sigma 3 a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

olarak ifade edilmektedir (Barnsley, 1988).



Şekil 3.5. Koch eğrisinin ilk seviyedeki kod kümeleri.

Bu iki kodlu noktalar, $k_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $\sigma = k_1 k_2 \dots k_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma 0333 \dots \equiv \sigma 1000 \dots$$

$$\sigma 1333 \dots \equiv \sigma 2000 \dots$$

$$\sigma 2333 \dots \equiv \sigma 3000 \dots$$

Diğer taraftan bu fraktal $\sigma 000 \dots$, $\sigma 111 \dots$, $\sigma 13221340 \dots$ gibi tek kodlu noktalara da sahiptir.

3.2.4 Kutu fraktalı

$i = 0,1,2,3,4$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

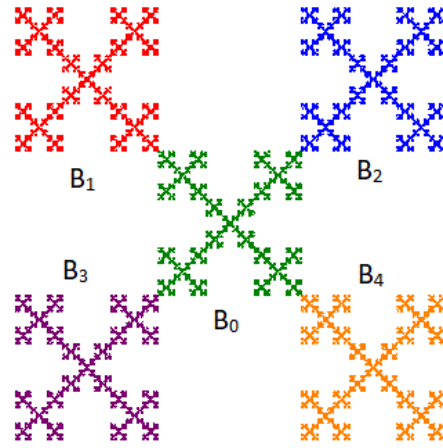
$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ YFS'nin atraktörü Kutu fraktalıdır ve kısaca B olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0,1,2,3,4$ ve $i \neq j$ için $f_i(B) \cap f_j(B)$ tek elemanlı olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi ve Tanım 2.8 gereğince bu noktanın birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Eğer bu nokta aynı seviye hiçbir alt karenin ara kesiti değil ise bu durumda bu nokta tek kodlu olmaktadır. $f_0(B) = B_0$, $f_1(B) = B_1$, $f_2(B) = B_2$, $f_3(B) = B_3$ ve $f_4(B) = B_4$ olarak ifade edilmektedir.



Şekil 3.6. Kutu fraktalının ilk seviyedeki kod kümeleri.

Bu iki kod temsiline sahip noktalar, $b_i \in \{0,1,2,3\}$ için $\sigma = b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma 1444 \dots \equiv \sigma 0111 \dots$$

$$\sigma 2333 \dots \equiv \sigma 0222 \dots$$

$$\sigma 3222 \dots \equiv \sigma 0333 \dots$$

$$\sigma 4111 \dots \equiv \sigma 0444 \dots$$

Diğer taraftan bu fraktal $\sigma 000 \dots$, $\sigma 1222 \dots$, $\sigma 4222 \dots$, $\sigma 0123210234 \dots$ gibi tek kodlu noktalara da sahiptir (Özdemir Y., 2018).

3.3 En Fazla Üç Kod Temsili Olan Bir Fraktal Örneği

3.3.1 Ekli Sierpinski üçgeni

$i = 0,1,2,3$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{8}, \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2, f_3\}$ YFS'nin atraktörü ekli Sierpinski üçgenidir ve kısaca \tilde{S} olarak adlandırılmaktadır (Şen A.İ., 2020). Ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki herhangi noktanın kod temsillerinin sayısı 1, 2 veya 3 tür. Aşağıda bu kod temsilleri detaylı şekilde incelenmektedir:

- i. $a_k \in \{1, 2, 3\}$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ için

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k} = \{A\}$$

olmak üzere A noktası S_σ nın herhangi aynı seviye iki alt üçgeninin kesişim noktası olsun.

- Eğer $a_k = 1$ seçilirse,

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 1} = \tilde{S}_{\sigma 0} \cap (\tilde{S}_{\sigma 12} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}) = \{A\}$$

elde edilmektedir. Şimdi

$$\tilde{S}_{\sigma 0}, \tilde{S}_{\sigma 01}, \tilde{S}_{\sigma 011}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 011\dots 1}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 1}, \tilde{S}_{\sigma 13}, \tilde{S}_{\sigma 0132}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 1322\dots 2}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 1}, \tilde{S}_{\sigma 12}, \tilde{S}_{\sigma 123}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 1233\dots 3}, \dots$$

şeklinde üç tane iç içe geçmiş dizilerin kümesi ele alınsın. Cantor Ara Kesit teoremi gereğince A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0111 \dots$, $\sigma 13222 \dots$ ve $\sigma 12333 \dots$ tür.

- Eğer $a_k = 2$ seçilirse,

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 2} = \tilde{S}_{\sigma 0} \cap (\tilde{S}_{\sigma 21} \cap \tilde{S}_{\sigma 23}) = \{A\}$$

elde edilmektedir. Şimdi

$$\tilde{S}_{\sigma 0}, \tilde{S}_{\sigma 02}, \tilde{S}_{\sigma 022}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 022\dots 2}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 2}, \tilde{S}_{\sigma 21}, \tilde{S}_{\sigma 213}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 2133\dots 3}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma_2}, \tilde{S}_{\sigma_{23}}, \tilde{S}_{\sigma_{231}}, \dots, \tilde{S}_{\sigma_{2311\dots1}}, \dots$$

şeklinde üç tane iç içe geçmiş dizilerin kümesi ele alınsın. A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0222 \dots$, $\sigma 21333 \dots$ ve $\sigma 23111 \dots$ tür.

- Eğer $a_k = 3$ seçilirse,

$$\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_3} = \tilde{S}_{\sigma_0} \cap (\tilde{S}_{\sigma_{31}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{32}}) = \{A\}$$

elde edilmektedir. Şimdi

$$\tilde{S}_{\sigma_0}, \tilde{S}_{\sigma_{03}}, \tilde{S}_{\sigma_{033}}, \dots, \tilde{S}_{\sigma_{033\dots3}}, \dots,$$

$$\tilde{S}_{\sigma_3}, \tilde{S}_{\sigma_{31}}, \tilde{S}_{\sigma_{312}}, \dots, \tilde{S}_{\sigma_{3122\dots2}}, \dots,$$

$$\tilde{S}_{\sigma_3}, \tilde{S}_{\sigma_{32}}, \tilde{S}_{\sigma_{321}}, \dots, \tilde{S}_{\sigma_{3211\dots1}}, \dots$$

şeklinde üç tane iç içe geçmiş dizilerin kümesi ele alınsın. A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0333 \dots$, $\sigma 31222 \dots$ ve $\sigma 32111 \dots$ tür.

Sonuç olarak \tilde{S}_{σ_0} a ait T_σ , V_σ ve W_σ köşe noktalarının farklı üç kod temsili vardır.

- ii. $a_k, b_k \in \{1,2,3\}$, $a_k \neq b_k$, ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ için

$$\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k} = \{A\}$$

olmak üzere A noktası S_σ nın herhangi aynı seviye iki alt üçgeninin kesişim noktası olsun.

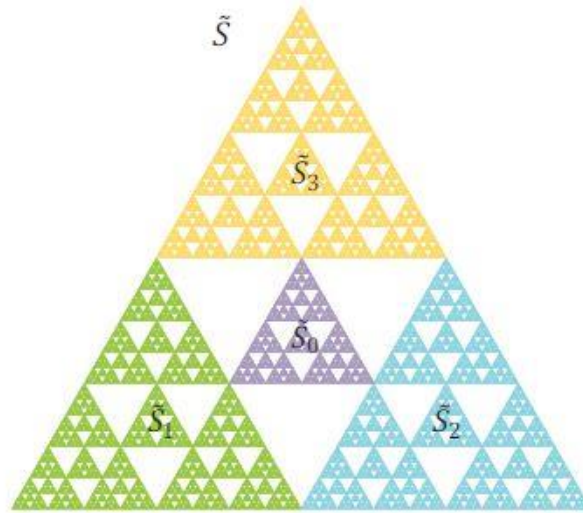
$$\tilde{S}_{\sigma a_k}, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k}, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k b_k}, \dots, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k b_k \dots b_k}, \dots,$$

$$\tilde{S}_{\sigma b_k}, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k}, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k a_k}, \dots, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k a_k \dots a_k}, \dots$$

iç içe geçmiş küme dizileri olsun. Cantor Ara Kesit teoremi gereğince, A nın kod temsilleri sırasıyla $\sigma a_k b_k b_k \dots b_k$ ve $\sigma b_k a_k a_k \dots a_k$ ve A noktası farklı iki kod temsiline sahiptir.

iii. Eğer A noktası S_σ nın herhangi aynı seviye iki aynı seviye alt üçgenin kesişim noktası değil ise A noktası bir tek kod temsiline sahiptir. Yani, tüm kod temsilleri i ve ii

şıkında tanımlanan kod temsillerinden farklıdır. Örneklendirmek gerekirse \tilde{S} 'nin köşe noktaları P, Q, R ve $121212 \dots, 01230123 \dots$ gibi çoğu nokta ve tekrar etmeyen formdaki noktalar bir tek kod temsiline sahiptir.



Şekil 3.7. Ekli Sierpinski üçgeninin ilk seviyedeki kod kümeleri.

3.4 En Fazla Dört Kod Temsili Olan Bir Fraktal Örneği

3.4.1 Sierpinski halısı

$i = 0,1,2,3,4,5,6,7$ için $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

$$f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

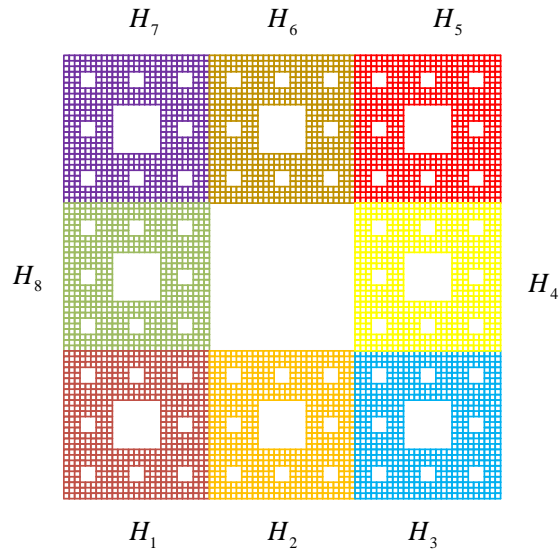
$$f_5(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$f_6(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$f_7(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ YFS'nin atraktörü Sierpinski halısıdır ve kısaca H olarak adlandırılmaktadır. $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ve $i \neq j$ için $f_i(H) \cap f_j(H) \neq \emptyset$ olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi ve Tanım 2.8 gereğince H üzerindeki bir noktanın birbirinden farklı dört kod temsili, üç kod temsili ve iki kod temsili vardır. Eğer H üzerindeki bir nokta aynı seviyedeki hiçbir alt halının ara kesiti değil ise bu durumda bu nokta tek kodlu olmaktadır. Bu noktalar aşağıda detaylıca incelenmektedir.

$f_0(H) = H_0$, $f_1(H) = H_1$, $f_2(H) = H_2$, $f_3(H) = H_3$, $f_4(H) = H_4$, $f_5(H) = H_5$,
 $f_6(H) = H_6$ ve $f_7(H) = H_7$ olarak ifade edilmektedir



Şekil 3.8. Sierpinski halısının ilk seviyedeki kod kümeleri.

Şekil 3.8'de görüldüğü gibi $H_{13} \cap H_{14} \cap H_{21} \cap H_{28} \neq \emptyset$, $H_{14} \cap H_{15} \cap H_{27} \cap H_{28} \neq \emptyset$, $H_{23} \cap H_{24} \cap H_{31} \cap H_{38} \neq \emptyset$, $H_{24} \cap H_{25} \cap H_{37} \cap H_{38} \neq \emptyset$, $H_{73} \cap H_{74} \cap$

$H_{61} \cap H_{68} \neq \emptyset, H_{74} \cap H_{75} \cap H_{67} \cap H_{68} \neq \emptyset, H_{63} \cap H_{64} \cap H_{51} \cap H_{58} \neq \emptyset, H_{64} \cap$
 $H_{65} \cap H_{57} \cap H_{58} \neq \emptyset, H_{37} \cap H_{36} \cap H_{41} \cap H_{42} \neq \emptyset, H_{36} \cap H_{35} \cap H_{42} \cap H_{43} \neq \emptyset,$
 $H_{47} \cap H_{46} \cap H_{51} \cap H_{52} \neq \emptyset, H_{46} \cap H_{45} \cap H_{52} \cap H_{53} \neq \emptyset, H_{87} \cap H_{86} \cap H_{71} \cap H_{72} \neq$
 $\emptyset, H_{86} \cap H_{85} \cap H_{72} \cap H_{73} \neq \emptyset, H_{17} \cap H_{16} \cap H_{81} \cap H_{82} \neq \emptyset, H_{16} \cap H_{15} \cap H_{82} \cap$
 $H_{83} \neq \emptyset$ olup ve bu arakesitler tek elemanlı olduğundan Sierpinski halısı en fazla dört kodlu noktalara sahiptir.

Dört kodlu noktalara örnek olarak, $h_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ için $\sigma = h_1 h_2 \dots h_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki noktalar verilebilir:

$$\sigma 13555 \dots \equiv \sigma 14333 \dots \equiv \sigma 21777 \dots \equiv \sigma 28111 \dots$$

$$\sigma 14555 \dots \equiv \sigma 15333 \dots \equiv \sigma 28777 \dots \equiv \sigma 27111 \dots$$

$$\sigma 23555 \dots \equiv \sigma 24333 \dots \equiv \sigma 31777 \dots \equiv \sigma 38111 \dots$$

$$\sigma 24555 \dots \equiv \sigma 25333 \dots \equiv \sigma 38777 \dots \equiv \sigma 37111 \dots$$

$$\sigma 73555 \dots \equiv \sigma 74333 \dots \equiv \sigma 61777 \dots \equiv \sigma 68111 \dots$$

$$\sigma 74555 \dots \equiv \sigma 75333 \dots \equiv \sigma 68777 \dots \equiv \sigma 67111 \dots$$

$$\sigma 63555 \dots \equiv \sigma 64333 \dots \equiv \sigma 51777 \dots \equiv \sigma 58111 \dots$$

$$\sigma 64555 \dots \equiv \sigma 65333 \dots \equiv \sigma 58777 \dots \equiv \sigma 57111 \dots$$

$$\sigma 37555 \dots \equiv \sigma 36777 \dots \equiv \sigma 41333 \dots \equiv \sigma 42111 \dots$$

$$\sigma 36555 \dots \equiv \sigma 35777 \dots \equiv \sigma 42333 \dots \equiv \sigma 43111 \dots$$

$$\sigma 47555 \dots \equiv \sigma 46777 \dots \equiv \sigma 51333 \dots \equiv \sigma 52111 \dots$$

$$\sigma 46555 \dots \equiv \sigma 45777 \dots \equiv \sigma 52333 \dots \equiv \sigma 53111 \dots$$

$$\sigma 87555 \dots \equiv \sigma 86777 \dots \equiv \sigma 71333 \dots \equiv \sigma 72111 \dots$$

$$\sigma 86555 \dots \equiv \sigma 85777 \dots \equiv \sigma 72333 \dots \equiv \sigma 73111 \dots$$

$$\sigma 17555 \dots \equiv \sigma 16777 \dots \equiv \sigma 81333 \dots \equiv \sigma 82111 \dots$$

$$\sigma 16555 \dots \equiv \sigma 15777 \dots \equiv \sigma 82333 \dots \equiv \sigma 83111 \dots$$

Dahası $H_1 \cap H_2 \cap H_8 \neq \emptyset$, $H_2 \cap H_3 \cap H_4 \neq \emptyset$, $H_4 \cap H_5 \cap H_6 \neq \emptyset$, $H_6 \cap H_7 \cap H_8 \neq \emptyset$ olup bu ara kesitler tek elemanlı olduğundan Sierpinski halısı üzerindeki üç kod temsiline sahip olan noktalar aşağıdaki gibidir:

$\sigma 1555 \dots \equiv \sigma 2777 \dots \equiv \sigma 8333 \dots$, $\sigma 2555 \dots \equiv \sigma 3777 \dots \equiv \sigma 4111 \dots$, $\sigma 4777 \dots \equiv \sigma 5111 \dots \equiv \sigma 6333 \dots$, $\sigma 6111 \dots \equiv \sigma 7333 \dots \equiv \sigma 8555 \dots$

İki kod temsiline sahip olan noktalara örnek olarak $\sigma 1333 \dots \equiv \sigma 2111 \dots, \sigma 2333 \dots \equiv \sigma 3111 \dots$, $\sigma 3555 \dots \equiv \sigma 4333 \dots, \sigma 4555 \dots \equiv \sigma 5333 \dots, \sigma 5777 \dots \equiv \sigma 6555 \dots, \sigma 6777 \dots \equiv \sigma 7555 \dots, \sigma 7111 \dots \equiv \sigma 8777 \dots, \sigma 8111 \dots \equiv \sigma 1777 \dots$ verilebilir.

Tek kod temsiline sahip olan noktalara örnek olarak $\sigma 111 \dots, \sigma 333 \dots, \sigma 555 \dots, \sigma 777 \dots$ ve $\sigma 12356347854215732 \dots$ verilebilir.

4. SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİKLER

Boştan farklı bir küme üzerindeki içsel (jeodezik) metrik Burago vd., (2001)'de aşağıdaki şekilde verilmektedir:

Tanım 4.1 (İçsel Metrik) A boştan farklı bir küme ve $x, y \in A$ olmak üzere

$$d(x, y) = \inf\{\delta \mid \delta, A \text{ da } x \text{ ve } y \text{ noktaları arasındaki yolların uzunluğu}\}$$

olacak şekilde tanımlanan d fonksiyonu A üzerinde bir metrik belirtir. Bu metriğe A üzerindeki içsel metrik denir.

Fraktaller üzerinde içsel metriği formüle etmek son zamanların önemli araştırma konularından biridir. Literatürde yapılan çalışmalarda temel örnek olarak Sierpinski üçgeni ele alınmaktadır. Sierpinski üçgenini inşa etmek için farklı yollar olduğundan dolayı Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik çeşitli şekilde tanımlanabilir. Örneğin Grabner, (1998)'de S üzerindeki içsel metriğin alternatif tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir. $x, y \in S$ ve $\Delta_n(x), \Delta_n(y)$ n .seviyedeki iki temel alt üçgen olsun ve her $n \geq 0$ için $x \in \Delta_n(x)$ ve $y \in \Delta_n(y)$ olsun. Ayrıca her $n \geq 0$ için x_n ve y_n sırasıyla $\Delta_n(x)$ ve $\Delta_n(y)$ nin sol alt köşeleri olsun. d_n ; x_n ile y_n ni birleştiren bir eğrinin minimal uzunluğu olmak üzere S üzerindeki içsel metrik

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Strichartz (1999)'da S üzerindeki içsel metriği barycentric koordinatları kullanarak tanımlamaktadır. Romik (2006)'da ayrık Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metriği kod uzayı kullanarak tanımlamaktadır. Saltan vd.(2018)'de klasik Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik, noktaların kod temsillerini kullanarak inşa edilmektedir. Ayrıca Saltan (2018)'de çeşitkenar ve dik Sierpinski üçgeni üzerinde genel bir içsel metrik formülü elde edilmektedir. Aşağıda kod temsilleri kullanılarak elde edilen içsel metrik formülleri özetlenmektedir.

4.1. Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metriğin İnşası

A, B kod temsilleri $A = a_1 a_2 \dots a_n$ ve $B = b_1 b_2 \dots b_n$ gibi olan birbirinden farklı Sierpinski üçgeni üzerinde iki nokta olsun. Bu durumda $a_s \neq b_s$ olacak şekilde $s \in \mathbb{N}$ vardır. $k = \min\{s \mid a_s \neq b_s, s = 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. O halde $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}$ ve $B \in$

$S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k}$ dir. Genelliği bozmadan $a_k = 0$ ve $b_k = 1$ olduğunu farz edelim. Böylece $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 0}$ ve $B \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1}$ olur. Bundan sonra formülizasyonu basitleştirmek adına $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olarak alınacaktır. Diğer durumlarda yani, A ve B nin S_σ nin bir diğer alt üçgeninde olması durumu aynı prosedür ile incelenmektedir. $P_\sigma, R_\sigma, Q_\sigma$ sırasıyla $S_{\sigma 0}$ ve $S_{\sigma 1}$, $S_{\sigma 0}$ ve $S_{\sigma 2}$, $S_{\sigma 1}$ ve $S_{\sigma 2}$ alt üçgenlerinin kesişim noktaları olsun. A ve B arasındaki uzaklık en kısa yollar ya P_σ noktasından ya da $R_\sigma Q_\sigma$ doğrusundan geçmektedir. Aşağıda bu farklı iki yol araştırılmaktadır.

Durum 1: İlk olarak P_σ noktasından geçen en kısa yol ele alınmaktadır. A ve B arasındaki herhangi bir yol, A ve P_σ arasındaki bir yol ile P_σ ve B arasındaki bir yolun birleşimi olarak ifade edilmektedir. İlk olarak A ve P_σ arasındaki en kısa yollar çalışılmıştır (B ve P_σ arasındaki yollar da benzer şekilde bulunabilmektedir). Eğer $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 00}$ ya da $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 02}$ ise $P_{\sigma'} P_\sigma$ doğru parçasının uzunluğu ya da $Q_{\sigma'} P_\sigma$ doğru parçasının uzunluğu hesaplanmalıdır. Burada $\sigma' = a_1 a_2 \dots a_{k-1} 0$ olmak üzere $P_{\sigma'}$ ve $Q_{\sigma'}$ sırasıyla $S_{\sigma' 0}$ ve $S_{\sigma' 1}$ ile $S_{\sigma' 1}$ ve $S_{\sigma' 2}$ alt üçgenlerinin kesişim noktalarıdır. Her iki durumda A ve P_σ arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\varepsilon \geq 0$ için

$$\mu = \frac{1}{2^{k+1}} + \varepsilon$$

olarak hesaplanmaktadır. $R_{\sigma'}$, $S_{\sigma' 0}$ ve $S_{\sigma' 2}$ alt üçgenlerinin kesişim noktası olmak üzere $A = R_{\sigma'}$ durumu için A ve P_σ arasında en kısa iki yol vardır. Bu yollar $R_{\sigma'} P_{\sigma'}$ ve $P_{\sigma'} P_\sigma$ doğru parçalarının birleşimi ya da $R_{\sigma'} Q_{\sigma'}$ ve $Q_{\sigma'} P_\sigma$ doğru parçalarının birleşimidir. Bu yolların uzunluğu μ cinsinden kolaylıkla $\mu = \frac{1}{2^k}$ olarak hesaplanmaktadır.

$A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 01}$ olsun. Eğer $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 010}$ ya da $A \in S_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} 012}$ ise $P_{\sigma''} P_\sigma$ doğru parçasının uzunluğunu ya da $Q_{\sigma''} P_\sigma$ doğru parçasının uzunluğunu hesaplamak gerekmektedir. Burada $\sigma'' = a_1 a_2 \dots a_{k-1} 01$ olmak üzere $P_{\sigma''}$ ve $Q_{\sigma''}$, sırasıyla $S_{\sigma'' 0}$ ve $S_{\sigma'' 1}$ alt üçgenlerinin ve $S_{\sigma'' 1}$ ve $S_{\sigma'' 2}$ alt üçgenlerinin kesişim noktasıdır. Her iki durumda $\varepsilon \geq 0$ için

$$\mu = \frac{1}{2^{k+2}} + \varepsilon$$

elde edilmektedir. $R_{\sigma''}$, $S_{\sigma''_0}$ ve $S_{\sigma''_2}$ alt üçgenlerinin kesişim noktası olmak üzere $A = R_{\sigma''}$ durumu için daha önceki gibi A ve P_{σ} arasındaki en kısa yolların uzaklığını veren iki yol vardır. Bu yollar $R_{\sigma''}P_{\sigma''}$ ve $P_{\sigma''}P_{\sigma}$ doğru parçalarının birleşimi ya da $R_{\sigma''}Q_{\sigma''}$ ve $Q_{\sigma''}P_{\sigma}$ doğru parçalarının birleşimidir. Bu yolların uzunluğu μ cinsinden kolaylıkla $\mu = \frac{1}{2^{k+1}}$ olarak hesaplanmaktadır. Küçük üçgenler için aynı prosedür kullanılarak A ve P_{σ} arasındaki en kısa yollar ve bu yolların uzunluğu hesaplanabilmektedir. Benzer şekilde P_{σ} ve B arasındaki en kısa yollar da ifade edilebilmektedir. ‘ A ile P_{σ} ’ ve ‘ P_{σ} ile B ’ arasındaki en kısa yolları uç uca ekleyerek A ile B arasındaki P_{σ} noktasından geçen en kısa yolların uzunluğu bulunabilmektedir.

Durum 2: $R_{\sigma}Q_{\sigma}$ doğru parçasından geçen en kısa yollar düşünülmektedir. Benzer bir yolla, ‘ A ile R_{σ} ’ arasındaki ve ‘ Q_{σ} ile B ’ arasındaki en kısa yollar saptanabilmektedir. Bu yolların uzunluğuna $R_{\sigma}Q_{\sigma}$ nın uzunluğu olan $\frac{1}{2^k}$ yı eklenerek $R_{\sigma}Q_{\sigma}$ dan geçen en kısa yolun uzunluğu hesaplanabilmektedir.

Sonuç olarak, A ve B arasındaki en kısa yolların uzunluğu Durum 1’de ve Durum 2’de hesaplanan uzunlukların minimumudur. Bu uzunluk d metriği ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

Tanım 4.1.1 $a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1b_2 \dots b_{k-1}b_k b_{k+1} \dots$ sırasıyla $A \in S$ ve $B \in S$ noktalarının kod temsilleri olsun. Farz edelim ki $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olsun. $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ metriği

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \text{ ise} \\ 1, & a_i \neq b_k \text{ ise} \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq a_k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i \neq a_k, a_i \neq b_k \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i \neq b_k, b_i \neq a_k \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\}$$

olarak ifade edilmektedir.

Uyarı 4.1.1 İlk değer olan

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$$

P_σ noktasından geçen en kısa yolların uzunluğu iken ikinci değer olan

$$\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}$$

$\frac{1}{2^k} R_\sigma Q_\sigma$ doğru parçasının uzunluğu olmak üzere $R_\sigma Q_\sigma$ doğru parçasından geçen en kısa yolların uzunluğu olduğu unutulmamalıdır.

Önerme 4.1.1 Tanım 4.1.1’de verilen d metriği noktaların kod temsillerinin seçiminden bağımsızdır (Saltan vd., 2018).

4.2. (S, d) İçsel Metrik Uzayının Geometrik Bir Özelliği

Bu bölümde Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik kullanılarak elde edilen dikkate değer geometrik bir özellik verilmektedir. Herhangi bir $P \in S$ noktası için Cristea ve Steinsky, (2013)’de

$$d(P, P_0) + d(P, P_1) + d(P, P_2) = 2$$

olduğunu Viviani teoremi kullanarak göstermektedir. Saltan vd.,(2018)’de bu sonucu noktaların kod temsilleri kullanılarak aşağıdaki gibi genellemektedir:

Önerme 4.2.1 S_σ , S nin bir alt üçgeni olsun. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ olmak üzere P_{σ_0} , P_{σ_1} ve P_{σ_2} S_σ nin köşeleri olsun. Eğer P_σ , S_σ nin keyfi bir noktası ise

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilmektedir.

İspat İlk olarak

$$P_{\sigma_0} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n 000 \dots$$

$$P_{\sigma_1} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n 111 \dots$$

$$P_{\sigma_2} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n 222 \dots$$

olacak şekilde gösterilmektedir. $P_\sigma = a_1 a_2 a_3 \dots a_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots$ noktası ve x_{n+1} , $\{0,1,2\}$ kümesinin elemanlarından birisi olmak üzere S_σ nin verilen keyfi noktası olsun (diğer durumlar benzer şekilde yapılmaktadır). Bu durumda, ($i = 1,2, \dots$ için) P_{σ_1} ve P_{σ_2} nin $(n + i)$. terimlerinin P_σ nin x_{n+1} teriminden farklı olmasından dolayı

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

eşitsizlikleri elde edilmektedir. Şimdi P_σ nin x_{n+2} terimi ele alınmaktadır. Benzer bir yolla, eğer $x_{n+2} = 0$ ise P_σ nin x_{n+2} terimi P_{σ_1} ve P_{σ_2} nin $(n + 1)$. terimlerinden farklı olduğu için

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}, \quad d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}$$

eşitsizlikleri elde edilmektedir. Eğer bu yolla devam edilirse yani, $i = 1,2,3,4, \dots$ için $x_{n+i} = 0$ ise

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) = 0$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) = \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \frac{1+1}{2^{n+4}} + \dots = \frac{1}{2^n}$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) = \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \frac{1+1}{2^{n+4}} + \dots = \frac{1}{2^n}$$

eşitlikleri elde edilmektedir. Böylece istenen sonuca ulaşılmaktadır. $s = 1,2,3, \dots$ için $x_{n+s} \neq 0$ olacak şekilde en az bir s var olsun. Genelliği bozmadan $x_{n+s} = 1$ seçilsin. Açıkça, P_σ nin x_{n+s} terimi $\forall i = 1,2,3, \dots$ için P_{σ_0} ın $(n + s + i)$. teriminden farklıdır. Bu durumda aşağıdakiler elde dilmektedir:

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) \geq \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \frac{1}{2^{n+s+3}} + \dots = A$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) \geq \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1+1}{2^{n+s-1}} + \frac{0+1}{2^{n+s}} + \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \dots = B$$

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) \geq \frac{1+1}{2^{n+2}} + \frac{1+1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1+1}{2^{n+s-1}} + \frac{1+1}{2^{n+s}} + \frac{1}{2^{n+s+1}} + \frac{1}{2^{n+s+2}} + \dots = C$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere her $n + s + i$ indeksi için $P_{\sigma_0}, P_{\sigma_1}$ ve P_{σ_2} nin iki terimi kesinlikle P_σ nin x_{n+s+i} teriminden farklıdır. Bir örnek verilmesi gerekirse, $x_{n+s+1} = 2$ olsun. P_{σ_0} ve P_{σ_1} in $(n + s + 1)$. terimleri sırasıyla 0 ve 1 olduğu için A ya $\frac{1}{2^{n+s+1}}$, B ye $\frac{1}{2^{n+s+1}}$ ve C ye 0 eklenmektedir. Bu hesaplama $k \geq n + s + 1$ olmak üzere $x_k \in \{0, 1, 2\}$ için benzerdir. $d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2})$, A, B, C nin toplamıdır ve basit bir hesaplamayla

$$d(P_\sigma, P_{\sigma_0}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_1}) + d(P_\sigma, P_{\sigma_2}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

olduğu bulunmaktadır ve bu ispatı tamamlamaktadır.

4.3 Sierpinski Üçgeninin İçsel Metriğe Göre Jeodezikleri

Saltan vd., (2018)'de Sierpinski üçgeni üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki içsel metrikle ilgili jeodeziklerinin sayısının 1,2,3,4 ve en fazla 5 olduğu gösterilmektedir. Noktaların kod temsilleri aşağıdaki verilen önermelerde jeodeziklerine göre sınıflandırılmaktadır:

$i = k + 1, k + 2, \dots$ için $\mu_i = \alpha_i + \beta_i - (\gamma_i + \delta_i)$ olmak üzere

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i} = \frac{1}{2^k} \quad (4.1)$$

olsun.

Önerme 4.3.1 Denklem 4.1'i sağlayan iki nokta arasında en az iki jeodezik vardır.

Önerme 4.3.2 $A, B \in S$ ve $a_k \neq b_k$, $c = 3 - a_k - b_k$ olmak üzere

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+m-1} a_k c c \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} b_{k+m+1} b_{k+m+2} \dots$$

veya

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+m-1} a_k b_k b_k \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} b_{k+m+1} b_{k+m+2} \dots$$

formundaki noktalar için

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}$$

toplamı sırasıyla $\frac{1}{2^k}$ dan büyüktür. Bu durumda A ve B noktalarının arasındaki jeodezik sayısı en az ikidir.

Önerme 4.3.3 $A, B \in S$ olmak üzere bu noktalar Önerme 4.3.2'deki formda olmasın ve

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i} \neq \frac{1}{2^k}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda A ve B noktaları arasındaki jeodezik sayısı birdir.

Önerme 4.3.4 $A, B \in S$ ve $a_k \neq b_k$, $c = 3 - a_k - b_k$ olmak üzere

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+m-1} a_k c c \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} b_{k+m+1} b_{k+m+2} \dots$$

veya

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+m-1} a_k b_k b_k \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} b_{k+m+1} b_{k+m+2} \dots$$

formundaki noktalar için

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i} = \frac{1}{2^k}$$

olsun. Bu durumda A ve B noktalarının arasındaki jeodezik sayısı en az üçtür.

Önerme 4.3.5 $A, B \in S$ ve $a_k \neq b_k$, $c = 3 - a_k - b_k$ olmak üzere

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+m-1} a_k c c c c c \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} \dots b_k c c c \dots$$

veya

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+m-1} a_k b_k b_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} \dots b_{k+m-1} b_{k+m} \dots b_k a_k a_k a_k \dots$$

formundaki noktalar için A ve B noktalarının arasındaki jeodezik sayısı bir veya en az dördür.

Teorem 4.3.1 $i < k$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olmak üzere $A, B \in S$ noktalarının kod temsilleri sırasıyla $A = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $B = b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olsun. Bu A ve B noktaları arasındaki maksimum jeodezik sayısı beştir. Dahası, $c = 3 - a_k - b_k$ ve her bir $\mu_i = \alpha_i + \beta_i - (\gamma_i + \delta_i)$ gibi bir sayı olmak üzere ancak ve ancak sırasıyla

$$\frac{\mu_{k+1}}{2^{k+1}} + \frac{\mu_{k+2}}{2^{k+2}} + \dots + \frac{\mu_{k+m-1}}{2^{k+m-1}} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^{k+m-1}}$$

olmak üzere

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+m-1} a_k c c c \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+m-1} b_k c c c \dots$$

ve

$$\frac{\mu_{k+1}}{2^{k+1}} + \frac{\mu_{k+2}}{2^{k+2}} + \dots + \frac{\mu_{k+m-1}}{2^{k+m-1}} = \frac{2^{m-1} + 1}{2^{k+m-1}}$$

olmak üzere

$$A = a_1 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+m-1} a_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = a_1 \dots a_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_{k+m-1} b_k a_k a_k a_k \dots$$

gibi formda olan noktalar arasında beş jeodezik vardır.

4.4 Dik Ve Çeşitkenar Üçgen Üzerindeki İçsel Metriğin Formülizasyonu

Bu kısımda, eşkenar Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan içsel metrik formülünün genel bir durumu verilmektedir. $P = (p_0, p_1)$, $Q = (q_0, q_1)$ ve $R = (r_0, r_1)$ köşeleri ile inşa edilen Sierpinski üçgeni

$$f_0(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{p_0}{2}, \frac{y}{2} + \frac{p_1}{2} \right)$$

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{q_0}{2}, \frac{y}{2} + \frac{q_1}{2} \right) \quad (4.2)$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{r_0}{2}, \frac{y}{2} + \frac{r_1}{2} \right)$$

olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_0, f_1, f_2\}$ YFS'sinin atraktörüdür.



Şekil 4.1. Sırasıyla eşkenar, dik ve çeşitkenar Sierpinski üçgenleri.

Bu katsayılar $p_0 = p_1 = q_1 = 0, q_0 = 1, r_0 = \frac{1}{2}$ ve $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak alınıp bu YFS'nin atraktörü klasik Sierpinski üçgeni olarak tanımlanmaktadır. $p_0 = p_1 = q_1 = r_0 = 0, q_0 = 1,$ ve $r_1 = 1$ durumunda dik Sierpinski üçgeni yukarıda bahsedilen yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak tanımlanmaktadır. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olsun. Eğer bu küme üzerindeki A ve B noktalarının kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olmak üzere köşeleri $P = (p_0, p_1), Q = (q_0, q_1)$ ve $R = (r_0, r_1)$

olan eşkenar olmayan üçgenin kod kümeleri üzerindeki içsel metrik formülü aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

Teorem 4.4.1 $a_k \neq c_k \neq b_k$ ve $c_k \in \{0,1,2\}$ ve

$$\kappa = \begin{cases} |PQ|, & (a_k = 0, b_k = 1) \text{ ya da } (a_k = 1, b_k = 0) \text{ ise} \\ |PR|, & (a_k = 0, b_k = 2) \text{ ya da } (a_k = 2, b_k = 0) \text{ ise} \\ |QR|, & (a_k = 1, b_k = 2) \text{ ya da } (a_k = 2, b_k = 1) \text{ ise} \end{cases}$$

olsun.

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \text{ ise} \\ |PQ|, & (a_i = 0, b_k = 1) \text{ ya da } (a_i = 1, b_k = 0) \text{ ise} \\ |PR|, & (a_i = 0, b_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, b_k = 0) \text{ ise} \\ |QR|, & (a_i = 1, b_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, b_k = 1) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ |PQ|, & (b_i = 0, a_k = 1) \text{ ya da } (b_i = 1, a_k = 0) \text{ ise} \\ |PR|, & (b_i = 0, a_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, a_k = 0) \text{ ise} \\ |QR|, & (b_i = 1, a_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, a_k = 1) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \text{ ise} \\ |PQ|, & (a_i = 0, c_k = 1) \text{ ya da } (a_i = 1, c_k = 0) \text{ ise} \\ |PR|, & (a_i = 0, c_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, c_k = 0) \text{ ise} \\ |QR|, & (a_i = 1, c_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, c_k = 1) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \text{ ise} \\ |PQ|, & (b_i = 0, c_k = 1) \text{ ya da } (b_i = 1, c_k = 0) \text{ ise} \\ |PR|, & (b_i = 0, c_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, c_k = 0) \text{ ise} \\ |QR|, & (b_i = 1, c_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, c_k = 1) \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{\kappa}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\} \quad (4.3)$$

formülizasyonu eşkenar olmayan Sierpinski üçgeni üzerindeki A ve B noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğunu vermektedir (Saltan M., 2018).

Uyarı 4.4.1 Eğer $p_0 = p_1 = q_1 = r_0 = 0, q_0 = 1$ ve $r_1 = 1$ ise dik Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik formülü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \text{ ise} \\ \sqrt{2}, & (a_i = 1, b_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, b_k = 1) \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ \sqrt{2}, & (b_i = 1, a_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, a_k = 1) \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \text{ ise} \\ \sqrt{2}, & (a_i = 1, c_k = 2) \text{ ya da } (a_i = 2, c_k = 1) \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \text{ ise} \\ \sqrt{2}, & (b_i = 1, c_k = 2) \text{ ya da } (b_i = 2, c_k = 1) \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} \sqrt{2}, & (a_k = 1, b_k = 2) \text{ ya da } (a_k = 2, b_k = 1) \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{\kappa}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\} \quad (4.4)$$

eşitliği elde edilmektedir.

$p_0 = p_1 = q_1 = 0, q_0 = 1, r_0 = \frac{1}{2}$ ve $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olması durumunda klasik Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \text{ ise} \\ 1, & a_i \neq b_k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq a_k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i \neq a_k \text{ ve } a_i \neq b_k \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i \neq b_k \text{ ve } b_i \neq a_k \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\} \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilmektedir (Saltan M., 2018).

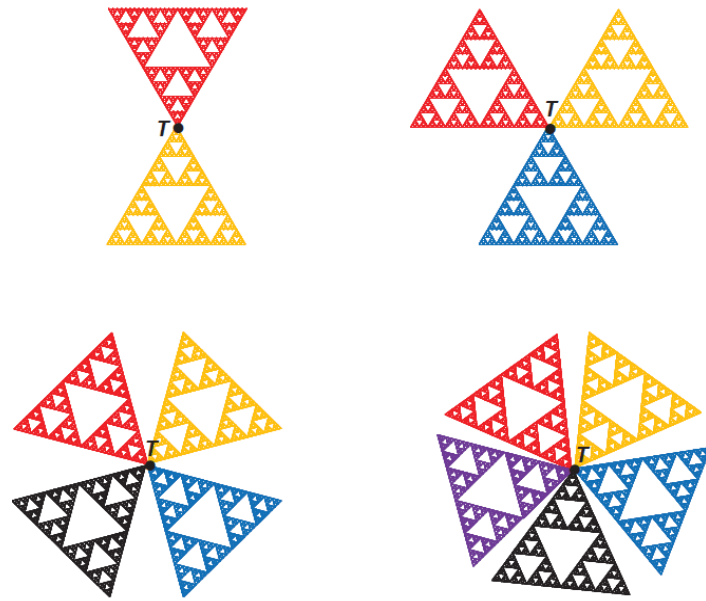
5. SIERPİNSKİ PERVANESİ VE KOMŞU SIERPİNSKİ ÜÇGENİ

ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİK FORMÜLLERİNİN İNŞASI

Bu bölümde ilk olarak klasik Sierpinski üçgenleri belirli bir değme noktasından birbirleri ile birleştirilerek Sierpinski pervanesi oluşturulmaktadır. Oluşan bu yeni yapıya ait birkaç özellik verildikten sonra Sierpinski pervanesinin üzerindeki noktaların kod temsilleri ve kod kümeleri tanımlanmaktadır. Tanımlanan kod kümeleri üzerinde Sierpinski pervanesinin içsel metrik formülü inşa edilmektedir. Son olarak benzer yolla komşu dik Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik kod kümeleri yardımıyla inşa edilmektedir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar (Güneri M., 2019) makalesinde yayınlanmıştır.

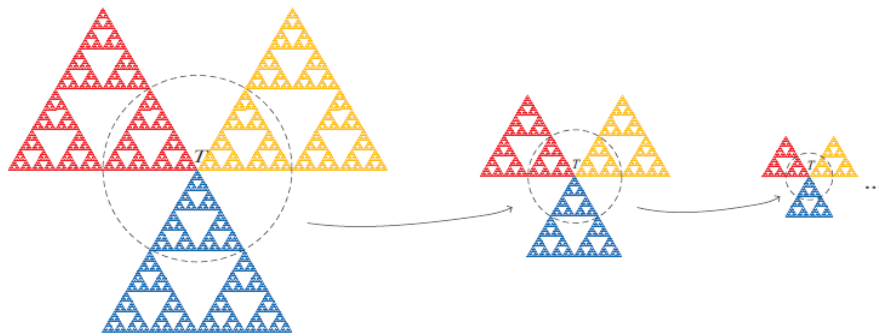
5.1 Sierpinski Pervanesi Üzerindeki Noktaların Kod Temsilleri Ve Kod Kümeleri

İlk olarak renkleri sırasıyla kırmızı, sarı, mavi, siyah ve mor olan özdeş Sierpinski üçgenleri ele alınmaktadır. Şekil 5.1’de görüldüğü gibi özdeş Sierpinski üçgenlerinin sırasıyla $n = 2,3,4,5$ için n tane kopyasının tek bir T değme noktasında birleştirilmesiyle oluşan yeni yapı pervaneye benzemektedir. Bu nedenle oluşan yeni yapıya Sierpinski pervanesi adı verilmektedir ve kısaca SP ile gösterilmektedir. Sierpinski üçgeninin fraktal boyutu $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ olduğundan Sierpinski pervanesinin de fraktal boyutu $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ dir. Dahası, Sierpinski üçgeninde olduğu gibi bu kümenin de alanı sıfırdır.



Şekil 5.1. Sierpinski pervanesi.

Sierpinski üçgeni kuvvetli kendine benzerdir. Tanım 2.6'dan hareketle Şekil 5.2'de görüldüğü gibi T noktasının her komşuluğu SP nin bir kopyasını içerdiğinden fakat T noktası dışında herhangi bir noktanın her komşuluğunda SP nin bir kopyasını içermediğinden SP zayıf kendine benzer kümedir. Sözü geçen bu T noktasının da özel bir nokta olduğu gözden kaçırılmamalıdır.



Şekil 5.2. $n = 3$ için Sierpinski üçgeninin ölçekli kopyaları.

Bu bölümde sadece $n = 3$ için Sierpinski pervanesi üzerindeki noktaların kod temsilleri ifade edilip bu fraktalın kod kümesi üzerinde içsel metrik tanımlanmaktadır. $n = 2,4,5$ için içsel metrik formülleri ve Sierpinski pervanesinin kod kümeleri benzer

şekilde hesaplanabilmektedir. Farklı bir kod temsili kullanıldığında $n = 3$ için içsel metrik formülünün daha basit olduğu Uyarı 5.2.3'te gösterilmektedir. Aşağıdaki metot $n = 4$ ve $n = 5$ için uygulanabilmektedir.

$SP_{\tilde{0}}, SP_{\tilde{1}}, SP_{\tilde{2}}$ Sierpinski pervanesinin sırasıyla kırmızı, sarı ve mavi Sierpinski üçgeni olarak belirtilsin.

$$SP_{\tilde{0}} \cap SP_{\tilde{1}} \cap SP_{\tilde{2}} = T$$

ve

$$SP_{\tilde{0}} \cup SP_{\tilde{1}} \cup SP_{\tilde{2}} = SP$$

olmaktadır. $a_0 \in \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$ olmak üzere SP_{a_0} in sol alt kısmını $SP_{a_0 0}$, sağ alt kısmını $SP_{a_0 1}$ ve üst kısmını $SP_{a_0 2}$ olarak belirtilsin. $i = 1, 2, \dots, k$ ve $a_i \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere SP 'nin küçük üçgensel parçaları $SP_{a_0 a_1 a_2 \dots a_k}$ olarak ifade edilsin. Böylece

$$SP_{a_0} \supset SP_{a_0 a_1} \supset SP_{a_0 a_1 a_2} \supset SP_{a_0 a_1 a_2 a_3} \supset \dots \supset SP_{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} \supset \dots$$

olduğu ve iç içe geçmiş $SP_{a_0}, SP_{a_0 a_1}, SP_{a_0 a_1 a_2}, SP_{a_0 a_1 a_2 a_3} \dots$ kümelerin bir dizisi için $A = a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots \in SP$, $a_0 \in \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $a_n \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere A noktasının

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} S_{a_0 a_1 a_2 \dots a_k} = \{A\}$$

olduğu yani; bu kümelerin sonsuz ara kesiti sadece bir nokta içerdiği Cantor Ara Kesit teoremi tarafından ifade edilmektedir. Önerme 5.1.1 Sierpinski pervanesi üzerindeki noktaların, Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsillerinden farklı kod temsillere sahip olduğunu göstermektedir.

Önerme 5.1.1 Sierpinski pervanesi üzerindeki noktaların kod temsillerinin sayısı 1, 2 ve 3 tür. Ayrıca T noktası kod temsilinin sayısı üç olan tek noktadır.

İspat

$$SP_{\tilde{0}}, SP_{\tilde{0}1}, SP_{\tilde{0}11}, SP_{\tilde{0}111}, \dots$$

$$SP_{\tilde{1}}, SP_{\tilde{1}0}, SP_{\tilde{1}00}, SP_{\tilde{1}000}, \dots$$

$$SP_{\tilde{2}}, SP_{\tilde{2}2}, SP_{\tilde{2}22}, SP_{\tilde{2}222}, \dots$$

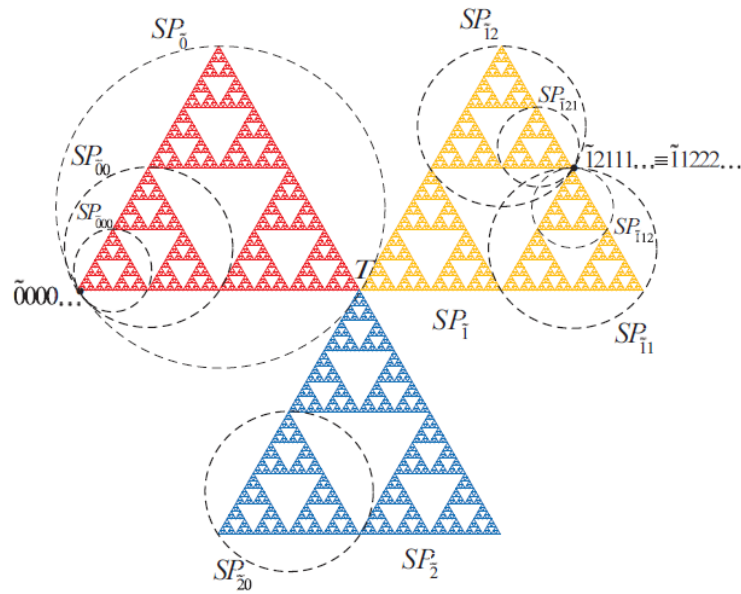
bütün küme dizileri T noktasını içerdiğinden T noktası, $\tilde{0}111 \dots, \tilde{1}000 \dots$ ve $\tilde{2}222 \dots$ olacak şekilde üç farklı kod temsiline sahip tek noktadır. $A \neq T$ için eğer $A \in SP$ noktası $S_{a_0 a_1 a_2 \dots a_k}$ nın aynı seviye herhangi iki alt üçgenlerin kesişim noktası ise A noktasının $\alpha, \beta \in \{0,1,2\}$ olmak üzere $a_0 a_1 a_2 \dots a_k \beta \alpha \alpha \alpha \dots$ ve $a_0 a_1 a_2 \dots a_k \alpha \beta \beta \beta \dots$ olacak şekilde birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Aksi takdirde A noktasının kod temsili tektir.

Şekil 5.3'te görüldüğü gibi kırmızı Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod kümesi $SP_{\tilde{0}} = \{\tilde{0}a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$, sarı Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod kümesi $SP_{\tilde{1}} = \{\tilde{1}a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$ ve mavi Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod kümesi $SP_{\tilde{2}} = \{\tilde{2}a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$ olarak tanımlanmaktadır. Genellikle $\sigma = a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ için SP_{σ} nın alt üçgeni

$$SP_{\sigma} = \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}, i = k, k+1, k+2, \dots\}$$

olarak ifade edilmektedir. Dahası $k = 1, 2, 3, \dots$ için $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ olmak üzere Sierpinski pervanesinin kod kümesi aşağıdaki gibi bu kümelerin birleşimi olarak ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} & \{\tilde{0}1 \dots 1a_{k+1} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\} \cup \{\tilde{1}0 \dots 0a_{k+1} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\} \\ & \cup \{\tilde{2}2 \dots 2a_{k+1} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\} \end{aligned}$$



Şekil 5.3. Sierpinski pervanesinin bazı kod kümeleri.

5.2 SP 'nin Kod Kümeleri Üzerindeki İçsel Metriğin İnşası

Teorem 5.2.1 ile SP üzerindeki içsel metrik SP 'nin noktalarının kod temsilleri kullanılarak aşağıdaki gibi formülize edilmektedir:

Teorem 5.2.1 Sierpinski pervanesi üzerindeki A ve B noktalarının kod temsilleri sırasıyla $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$ ve $a_0, b_0 \in \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ olması şartıyla $a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_0 b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olsun.

i. $a_0 \neq b_0$ olsun.

$$\text{eğer } (a_0 = \tilde{0}, b_0 = \tilde{1}) \text{ ise } \tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 0, & a_i = 1 \\ 1, & a_i \neq 1 \end{cases}, \tilde{\beta}_i = \begin{cases} 0, & b_i = 0 \\ 1, & b_i \neq 0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$\text{eğer } (a_0 = \tilde{0}, b_0 = \tilde{2}) \text{ ise } \tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 0, & a_i = 1 \\ 1, & a_i \neq 1 \end{cases}, \tilde{\beta}_i = \begin{cases} 0, & b_i = 2 \\ 1, & b_i \neq 2 \end{cases}, \quad (5.2)$$

$$\text{eğer } (a_0 = \tilde{1}, b_0 = \tilde{2}) \text{ ise } \tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 0, & a_i = 0 \\ 1, & a_i \neq 0 \end{cases}, \tilde{\beta}_i = \begin{cases} 0, & b_i = 2 \\ 1, & b_i \neq 2 \end{cases}, \quad (5.3)$$

olmak üzere A ve B arasındaki en kısa mesafe

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} \quad (5.4)$$

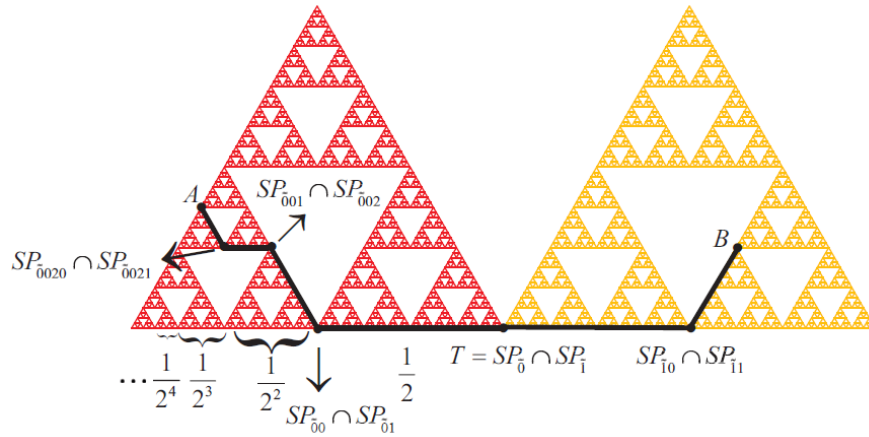
olarak ifade edilmektedir.

ii. $a_0 = b_0$ olsun. Bu durumda Denklem (4.5) istenen uzaklığı vermektedir.

İspat $a_0 \neq b_0$ olmak üzere sırasıyla $a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ve $b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots$ Sierpinski pervanesi üzerindeki farklı A ve B noktalarının kod temsilleri olsun. $SP_{a_0} \cap SP_{b_0} = \{T\}$ olduğundan A ve B noktaları arasındaki en kısa yol T noktasından geçmelidir.

İlk olarak $a_0 = \tilde{0}$ ve $b_0 = \tilde{1}$ durumu ele alınmaktadır (diğer durumlar benzer şekilde yapılmaktadır). Eğer $a_1 = 0$ ya da $a_1 = 2$ ise A ve T arasındaki en kısa yol sırasıyla $SP_{\tilde{0}0} \cap SP_{\tilde{0}1}$ ya da $SP_{\tilde{0}1} \cap SP_{\tilde{0}2}$ den geçmelidir. Bu noktaların kod temsilleri sırasıyla $\tilde{0}1000 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}0111 \dots$) ya da $\tilde{0}1222 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}2111 \dots$)'dir. Dahası T ve $SP_{\tilde{0}0} \cap SP_{\tilde{0}1}$ (benzer olarak T ve $SP_{\tilde{0}1} \cap SP_{\tilde{0}2}$) Sierpinski üçgeninin $SP_{\tilde{0}1}$ alt üçgeninin köşe noktalarıdır. Bu durumda bu noktalar arasındaki en kısa yolun uzunluğu $\frac{1}{2}$ dir. Eğer A noktasının kod temsilleri $\tilde{0}1000 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}0111 \dots$) ya da $\tilde{0}1222 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}2111 \dots$) ise A ve T arasındaki en kısa yolun uzunluğu $\frac{1}{2}$ olarak belirlenmektedir. Eğer $a_1 = 1$ ve A noktasının kod temsili $\tilde{0}1000 \dots$ ve $\tilde{0}1222 \dots$ değil ise A ve T arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçüktür. Denklem (5.4)'ten $a_1 = 0$ ya da $a_1 = 2$ ise $\tilde{\alpha}_1 = 1$ ve $a_1 = 1$ ise $\tilde{\alpha}_1 = 0$ elde edilmektedir.

Şimdi $a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ ya da $a_2 = 2$ olsun. A noktası ile $SP_{\tilde{0}0} \cap SP_{\tilde{0}1}$ arasındaki en kısa yol sırasıyla $SP_{\tilde{0}00} \cap SP_{\tilde{0}01}$ ya da $SP_{\tilde{0}01} \cap SP_{\tilde{0}02}$ geçmek zorundadır. Bu ara kesitlerin kod temsilleri sırasıyla $\tilde{0}01000 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}00111 \dots$) ya da $\tilde{0}01222 \dots$ (denk olarak $\tilde{0}02111 \dots$) dir. $\tilde{0}0111 \dots$ ve $SP_{\tilde{0}00} \cap SP_{\tilde{0}01}$ (benzer şekilde $\tilde{0}0111 \dots$ ve $SP_{\tilde{0}01} \cap SP_{\tilde{0}02}$) Sierpinski üçgeninin $SP_{\tilde{0}01}$ alt üçgeninin köşe noktalarıdır. Böylece bu noktalar arasındaki en kısa yolun uzunluğu $\frac{1}{2^2}$ dir. Eğer A noktasının kod temsilleri $\tilde{0}00111 \dots$ ya da $\tilde{0}02111 \dots$ ise A ve T arasındaki en kısa yolun uzunluğu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ olarak bulunmaktadır. Eğer $a_2 = 1$ ve A noktasının kod temsili $\tilde{0}01000 \dots$ ve $\tilde{0}01222 \dots$ değil ise A ve T arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ den küçüktür. Sonuç olarak Denklem (5.4)'ten $a_2 = 0$ ya da $a_2 = 2$ ise $\tilde{\alpha}_2 = 1$ ve $a_2 = 1$ ise $\tilde{\alpha}_2 = 0$ elde edilmektedir. Genellersek $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_i = 0$ ya da $a_i = 2$ ise $\tilde{\alpha}_i = 1$ ve $a_i = 1$ ise $\tilde{\alpha}_i = 0$. Benzer bir prosedür T ve B noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğunun belirlenmesinde de kullanılmaktadır.



Şekil 5.4. $a_0 = \tilde{0}$ ve $b_0 = \tilde{1}$ için Sierpinski pervanesi üzerindeki A ve B noktaları arasındaki en kısa yollardan biri.

Uyarı 5.2.1 T noktası, $\tilde{0}111\dots, \tilde{1}000\dots$ ve $\tilde{2}222\dots$ olacak şekilde üç kod temsiline sahiptir. Denklem (5.4)'ten dolayı bu noktanın farklı kodları kullanılarak bulunan mesafenin sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Önerme 5.2.1, Saltan vd., (2018)'de verilen metotta benzer şekilde ispatlanabilmektedir.

Önerme 5.2.1 Teorem 5.2.1'de tanımlanan d metriği noktaların kod temsillerinin seçiminden bağımsızdır.

Örnek 5.2.1 A ve B kod temsilleri sırasıyla $\tilde{1}010202\dots$ ve $\tilde{2}010101\dots$ olan Sierpinski pervanesinin iki noktası olsun. $d(A, B)$ yi hesaplamak için verilen A ve B noktaların kod temsillerinin ilk terimi sırasıyla $\tilde{1}$ ve $\tilde{2}$ olduğundan Denklem (5.3) kullanılmalıdır. Bu durumda $i = 2, 4, 6, \dots$ için $\tilde{\alpha}_i = 0$, $i = 1, 3, 5, \dots$ için $\tilde{\alpha}_i = 1$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\tilde{\beta}_i = 1$ elde edilmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} = \frac{0+1}{2} + \frac{1+1}{2^2} + \frac{0+1}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \dots \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilmektedir.

Önerme 5.2.2 Denklem (5.4)'te tanımlanan d metriği SP üzerinde içsel metrik ise

$$\text{cap}(SP) = \max\{d(A, B) \mid A, B \in SP\} = 2$$

elde edilmektedir. Dahası $d(A, B) = 2$ olması için gerek ve yeter şart A nın kod temsilleri $\{\tilde{0}a_1a_2a_3 \dots \mid a_i \in \{0, 2\}\}$ kümesinin bir elemanı, B nin kod temsilleri $\{\tilde{1}b_1b_2b_3 \dots \mid b_i \in \{1, 2\}\}$ ya da $\{\tilde{2}b_1b_2b_3 \dots \mid b_i \in \{0, 1\}\}$ kümelerinin bir elemanı ya da A nın kod temsilleri $\{\tilde{1}a_1a_2a_3 \dots \mid a_i \in \{1, 2\}\}$ kümesinin bir elemanı, B nin kod temsilleri $\{\tilde{0}b_1b_2b_3 \dots \mid b_i \in \{0, 2\}\}$ ya da $\{\tilde{2}b_1b_2b_3 \dots \mid b_i \in \{0, 1\}\}$ kümesinin bir elemanıdır.

İspat Denklem (5.4)'ten hareket ile SP üzerindeki herhangi iki A ve B noktaları arasındaki uzaklıkların maksimum değerini hesaplamak için $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\tilde{\alpha}_i = 1$ ve $\tilde{\beta}_i = 1$ olmalıdır. Bu nedenle Denklem (5.2) ve Denklem (5.4) kullanılarak eğer $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_0 = \tilde{0}$ ve $b_0 = \tilde{1}$ ise $a_i \neq 1$ ve $b_i \neq 0$ ya da eğer $a_0 = \tilde{0}$ ve $b_0 = \tilde{2}$ ise $a_i \neq 1$ ve $b_i \neq 2$ elde edilmektedir. Denklem (5.3)'ten eğer $a_0 = \tilde{1}$ ve $b_0 = \tilde{2}$ ise $a_i \neq 0$ ve $b_i \neq 2$ elde edilmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} = \frac{1+1}{2} + \frac{1+1}{2^2} + \frac{1+1}{2^3} + \frac{1+1}{2^4} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &= 2 \end{aligned}$$

sonucu elde edilmektedir.

Önerme 5.2.3 $n = 1, 2, 3, \dots$ için T merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı kapalı disk (D), SP nin bir kopyasıdır. Özellikle eğer $n = 0$ ise $D(T, 1) = SP$. T merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı çemberlerin kod kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \{\tilde{0}1 \dots 1a_{n+1} \dots \mid a_i \in \{0,2\}\} \cup \{\tilde{1}0 \dots 0a_{n+1} \dots \mid a_i \in \{1,2\}\} \\ & \cup \{\tilde{2}2 \dots 2a_{n+1} \dots \mid a_i \in \{0,1\}\} \end{aligned}$$

İspat Öncelikle $d(A, T) = \frac{1}{2^n}$ denklemini sağlayan A noktalarının kod temsilleri hesaplanmaktadır. Genelliği bozmadan T nin kod temsili $\tilde{2}222 \dots$ olarak alınmaktadır. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_i \in \{0, 1, 2\}$ ve $a_0 = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$ olmak üzere A noktasının kod temsili $a_0 a_1 a_2 \dots$ olsun.

İlk olarak $a_0 = \tilde{0}$ olsun. Denklem (5.2.2)'den $i = 1, 2, 3, \dots$ için T nin kod temsilinin terimleri 2 olduğundan $\tilde{\beta}_i = 0$ olmaktadır. $i \leq n - 1$ için $a_i = 1$ olmalıdır. Diğer taraftan $d(A, T) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğu hesaplanmaktadır. Şimdi $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_i = 1$ olsun. Bu $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\tilde{\alpha}_i = 0$ olması demektir. Eğer $i = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ için $a_i \neq 1$ ise $\tilde{\alpha}_i = 1$ dir. Böylece

$$d(A, T) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1+0}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

olup bu $a_0 = \tilde{0}$ için $d(A, T) = \frac{1}{2^n}$ yi sağlayan A noktasının kod temsili kümesinin $\{\tilde{0}1 \dots 1a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0, 2\}\}$ kümesinin bir parçası olduğunu göstermektedir. Yukarıdaki inşadan eğer $a_0 = \tilde{0}$ için $d(A, T) \leq \frac{1}{2^n}$ ise $\{\tilde{0}1 \dots 1a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\}\}$ kümesinin A noktasının kod temsili kümesinin bir parçası olduğu kolaylıkla görülmektedir.

İkinci olarak $a_0 = \tilde{1}$ olsun. İlk durumdaki benzer metot ve Denklem (5.3) kullanılarak $\{\tilde{1}0 \dots 0a_{n+1}, a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{1, 2\}\}$ kümesi $d(A, T) = \frac{1}{2^n}$ yi sağlayan A noktasının kod temsilleri kümesinin parçalarından biridir. Dahası $a_0 = \tilde{1}$ için $d(A, T) \leq \frac{1}{2^n}$ ise $\{\tilde{0}1 \dots 0a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\}\}$ kümesinin A noktasının kod temsili kümesinin bir parçası olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Son olarak $a_0 = \tilde{2}$ olsun. Bu durumda A ve T noktaları aynı Sierpinski üçgeni üzerindedir. Denklem (4.5) uygulanarak, $\{\tilde{2}2 \dots 2a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0, 1\}\}$ ve

$\{\tilde{2}2 \dots 2a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$ kümelerinin sırasıyla $d(A, T) = \frac{1}{2^n}$ ve $d(A, T) \leq \frac{1}{2^n}$ yi sağlayan A noktasının kod temsili kümesinin bir parçası olduğu bulunmaktadır. Böylece yukarıda sırasıyla bulunan kümelerin birleşimi $d(A, T) = \frac{1}{2^n}$ ve $d(A, T) \leq \frac{1}{2^n}$ yi sağlayan A noktasının kod temsilini vermektedir. Yani,

$$SP(A, T) = \{\tilde{0}1 \dots 1a_{n+1}, a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,2\}\} \cup \{\tilde{1}0 \dots 0a_{n+1}, a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{1,2\}\} \\ \cup \{\tilde{2}2 \dots 2a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,1\}\}$$

ve

$$D(A, T) = \{\tilde{0}1 \dots 1a_{n+1}, a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\} \cup \{\tilde{1}0 \dots 0a_{n+1}, a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\} \\ \cup \{\tilde{2}2 \dots 2a_{n+1}a_{n+2} \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$$

elde edilmektedir.

Örnek 5.2.2 A noktası kod temsili $\tilde{0}000 \dots$ olan Sierpinski pervanesinin bir noktası olsun. A merkezli $\frac{1}{2}$ yarıçaplı kapalı diskin kod kümesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$D\left(\tilde{0}000 \dots, \frac{1}{2}\right) = \{\tilde{0}0a_2a_3a_4 \dots \mid a_i \in \{0,1,2\}\}$$

Uyarı 5.2.2 Önerme 5.2.3 ve Örnek 5.2.2 Sierpinski pervanesinin kendine benzer bir küme olduğunu fakat kuvvetli kendine benzer bir küme olmadığını göstermektedir.

Uyarı 5.2.3 $n = 3$ için Sierpinski pervanesinde eğer kırmızı Sierpinski üçgeni $SP_{\tilde{1}}$ ve sarı Sierpinski üçgeni $SP_{\tilde{0}}$ olarak kodlanmak üzere T noktasının kod temsilleri $w \in \{0,1,2\}$ olmak üzere $\tilde{w}www \dots$ dir. Böylece içsel metrik formülü $a_0 \neq b_0$ için

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_0 \\ 1, & a_i \neq a_0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tilde{\beta}_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_0 \\ 1, & b_i \neq b_0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i}$$

olarak ifade edilmektedir. Dahası T merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı çemberlerin kod kümeleri

$$\{\tilde{\alpha}_0 a_0 a_0 \dots a_0 a_{n+1} \dots \mid a_i \neq a_0, \quad i \geq n + 1\}$$

olarak ifade edilmektedir.

5.3 Komşu Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik

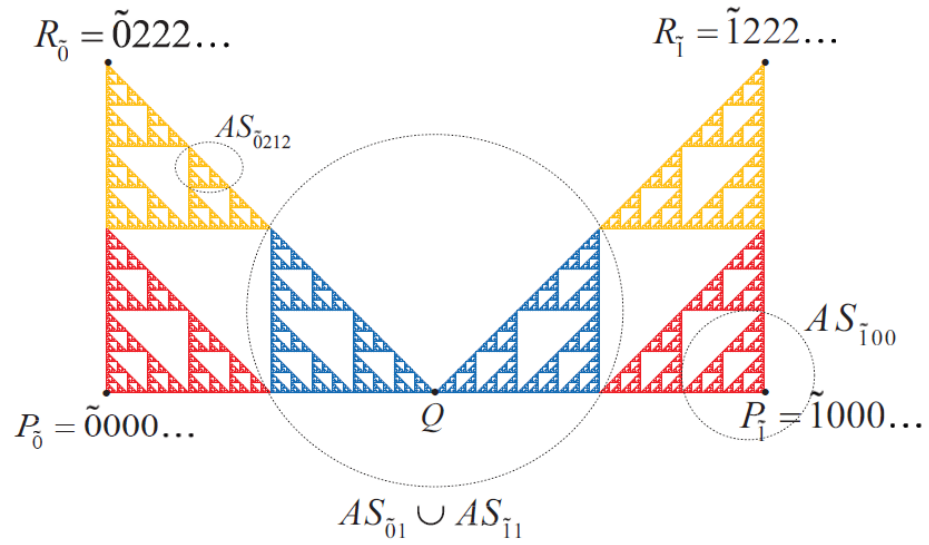
Bu bölümde, köşeleri sırasıyla P , Q , R olan ve $|PR| = |QR| = 1$, $|PQ| = \sqrt{2}$ özelliğindeki iki dik Sierpinski üçgeni kullanılarak kendine benzer fakat kuvvetli kendine benzer olmayan bir başka fraktal tanımlanmaktadır. Alt üçgenlerinin renkleri sırasıyla kırmızı, mavi ve sarı olan iki özdeş dik Sierpinski üçgeni Şekil 5.5'deki gibi Q noktasında birleştirilmektedir. Oluşan bu yeni yapı komşu Sierpinski üçgeni olarak adlandırılmaktadır (AS). Q noktasının solundaki üçgen $AS_{\tilde{0}}$, sağındaki üçgen $AS_{\tilde{1}}$ olarak adlandırılmaktadır. Aynı zamanda kırmızı Sierpinski üçgenleri sırasıyla $AS_{\tilde{0}0}$ ve $AS_{\tilde{1}0}$ olarak ve mavi Sierpinski üçgenleri sırasıyla $AS_{\tilde{0}1}$ ve $AS_{\tilde{1}1}$ olarak ve sarı Sierpinski üçgenleri sırasıyla $AS_{\tilde{0}2}$ ve $AS_{\tilde{1}2}$ olarak ifade edilmektedir. Böylece,

$$AS_{\tilde{0}1} \cap AS_{\tilde{1}1} = Q$$

ve

$$AS_{\tilde{0}} \cup AS_{\tilde{1}} = AS$$

olduğu açıktır. Böylece Q nun farklı iki kod temsili $\tilde{0}111 \dots$ ve $\tilde{1}111 \dots$ dir. AS 'nin bir noktasının ya 1 kod temsili ya da 2 kod temsili olduğu kolaylıkla görülmektedir.



Şekil 5.5. AS 'nin bazı kod kümeleri ve bazı noktaların kod temsilleri.

Aşağıda Önerme 5.3.1 ile AS 'nin kod kümeleri üzerindeki içsel metrik tanımlanmaktadır:

Önerme 5.3.1 $i = 1, 2, 3, \dots$ için $a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$ ve $a_0, b_0 \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ olmak üzere $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $a_k \neq b_k$ ve $a_i = b_i$ olmak üzere A ve B noktaları kod temsilleri sırasıyla $a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_0 b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan AS üzerinde iki nokta olsun.

- i. Eğer $a_0 \neq b_0$ ise A ve B arasındaki en kısa uzaklık

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 0, & a_i = 1 \\ 1, & a_i = 0 \\ \sqrt{2}, & a_i = 2 \end{cases} \text{ ve } \tilde{\beta}_i = \begin{cases} 0, & b_i = 1 \\ 1, & b_i = 0 \\ \sqrt{2}, & b_i = 2 \end{cases} \quad (5.5)$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} \quad (5.6)$$

olarak tanımlanmaktadır.

- ii. Eğer $a_0 = b_0$ ise Formül (4.4) istenilen sonucu vermektedir.

İspat Teorem 5.2.1'in ispatıyla benzer şekilde yapılmaktadır.

Örnek 5.3.1 A ve B noktalarının kod temsilleri sırasıyla $\tilde{0}020202 \dots$ ve $\tilde{1}101010 \dots$ olsun. A ve B noktalarının kod temsillerinin ilk terimleri farklı olduğundan $d(A, B)$ yi hesaplamak için Formül (5.6) kullanılmaktadır. $i = 1, 3, 5, \dots$ için $\tilde{\alpha}_i = 1$, $i = 2, 4, 6, \dots$ için $\tilde{\alpha}_i = \sqrt{2}$, $i = 1, 3, 5, \dots$ için $\tilde{\beta}_i = 0$ ve $i = 2, 4, 6, \dots$ için $\tilde{\beta}_i = 1$ elde edilmektedir. Buradan

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} = \frac{1+0}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2^2} + \frac{1+0}{2^3} + \frac{\sqrt{2}+1}{2^4} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots \right) + (\sqrt{2}+1) \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılmaktadır.

Önerme 5.3.2 d, AS üzerinde Formül (5.6)'da tanımlanan içsel metrik olmak üzere

$$\text{çap}(AS) = \max\{d(A, B) \mid A, B \in AS\} = 2\sqrt{2} \quad (5.7)$$

olup dahası $d(A, B) = 2\sqrt{2}$ yi sağlayan A ve B noktalarının kod temsilleri sırasıyla $\tilde{0}222 \dots$ ve $\tilde{1}222 \dots$ dir.

İspat Denklem (5.6)'da görüldüğü gibi AS nin A ve B herhangi iki noktası arasındaki maksimum değerini hesaplamak için $i = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\tilde{\alpha}_i = \sqrt{2}$ ve $\tilde{\beta}_i = \sqrt{2}$ olmalıdır. Bu durumda $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\tilde{\alpha}_0 = 0, \tilde{\beta}_0 = 1, a_i = 2$ ve $b_i = 2$ olmaktadır. Böylece

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i}{2^i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2^3} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2^4} + \dots \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} + \dots \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

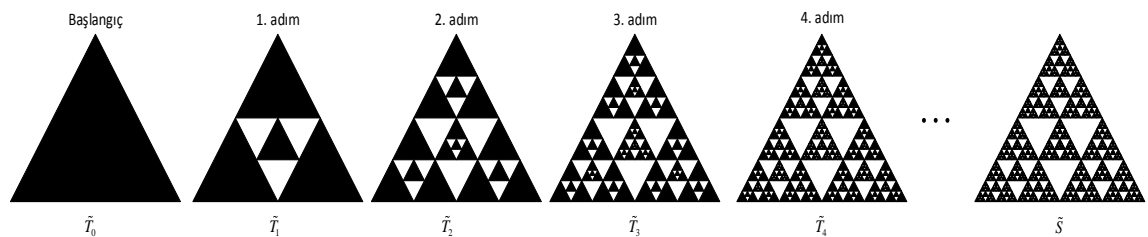
elde edilmektedir.

6. EKLI SIERPİNSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN JEODEZİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde, ilk olarak Şen ve Saltan (2020)'de ekli Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan içsel metrik formülü verilmektedir. Tezin şimdiki kısmında ise bu içsel metrikten yararlanılarak ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsilleri yardımıyla farklı noktaların birbirine olan en kısa yolları yani jeodezik sayıları araştırılmaktadır.

6.1 Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik Formülü

Başlangıç olarak köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ olan eşkenar üçgeni alınmaktadır. Bu eşkenar üçgeni üç eşit parçaya bölünmektedir. 1. adımda, Sierpinski üçgeninin inşasından farklı olarak atılan orta kısma dörtte bir oranında bir üçgen eklenmekte ve diğer adımlardada kalan parçalar için aynı işlem uygulanmaktadır.



Şekil 6.1. Ekli Sierpinski üçgeninin inşası.

Bu durumda, ekli Sierpinski üçgeni

$$\tilde{S} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_i$$

olarak tanımlanmaktadır (Şekil 6.1). Bu fraktalın yinelemeli fonksiyon sistemi ve kod kümeleri Bölüm 3'te ayrıntılı olarak verilmektedir.

Sierpinski üçgeninin inşasından farklı olarak ekli Sierpinski üçgeninde her bir adımda tam ortada küçük üçgenler eklenmektedir. Ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metriği formüle etmek farklı büzülme katsayıları ve artan kısa yollar nedeniyle oldukça karmaşıktır. Aşağıda bu inşa için ilk gözlemler ifade edilmektedir:

A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan farklı iki nokta olmak üzere bu kod temsillerinin bir indisteki terimleri farklı olmalıdır. $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olsun. Noktaların kod temsillerini kullanarak içsel metriği tanımlamak için bazı gösterimler ve ifadelere ihtiyaç duyulmaktadır.

$$K = \{i \mid a_i = b_i = 0, i < k\}$$

kümesinin eleman sayısı t olsun. Ayrıca,

$$M = \{i + 1 \mid a_i = 0, i > k\} = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$$

$$L = \{i + 1 \mid b_i = 0, i > k\} = \{l_1, l_2, l_3, \dots\}$$

olmak üzere $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ ve $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$ olarak tanımlansın.

• $a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ olsun. A ve B noktaları arasındaki en kısa yollar $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ kesişim noktasından veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}) (\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğrusundan veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}) (\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğrusundan geçmelidir (Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 sırasıyla bu noktalar arasındaki en kısa yollar için gerekli formülleri ifade etmektedir). Dolayısıyla bu üç yolun uzunluğu hesaplanmalı ve minimum değeri alınarak bu iki nokta arasındaki en kısa mesafe bulunmalıdır.

Durum 1:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \text{ ise} \\ 1, & a_i \neq b_k \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq a_k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktası arasındaki en kısa uzaklık ve B ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktası arasındaki en kısa uzaklık sırasıyla,

$$\mathcal{A} = \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots$$

$$\mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak formüle edilmektedir. Bu durumda $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen A ile B noktaları arasındaki en kısa yol $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ toplamı olarak bulunmaktadır. Eğer $M = \emptyset$ ve $L = \emptyset$ ise bu uzunluk

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^{i+t}}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Durum 2: $c_k \neq a_k$ ve $c_k \neq b_k$ için $c_k \in \{1,2,3\}$ olsun.

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \text{ ise} \\ 1, & a_i \neq c_k \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq c_k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktası arasındaki en kısa uzaklık ve B ile $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktası arasındaki en kısa uzaklık sırasıyla,

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots$$

$$\mathcal{B}' = \sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak formüle edilmektedir. Ayrıca, $\tilde{S}_{\sigma c_k}$ alt üçgenin $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ $(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasının uzunluğu $\frac{1}{2^{t+k}}$ olduğundan, A ile B arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ $(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yolun uzunluğu $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \frac{1}{2^{t+k}}$ olarak bulunmaktadır.

Eğer $M = \emptyset$ ve $L = \emptyset$ ise bu uzaklık,

$$\frac{1}{2^{t+k}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^{i+t}}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Durum 3: A ile B arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ $(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yolun uzunluğunu hesaplamak için aşağıdaki durumlar dikkate alınmalıdır:

i) $a_{k+1} \neq a_k$ ve $a_{k+1} \neq 0$ olsun. $a_\mu \neq a_{k+1}$, $a_\mu \neq a_k$, $a_\mu \neq 0$ ve

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_\mu \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

olmak üzere A noktası ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktası arasındaki en kısa yolun uzunluğu

$$\mathcal{A}'' = \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak hesaplanmaktadır.

ii) $a_{k+1} = 0$ olsun. $r = \min\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\}$ ve

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+2}} + \sum_{i=k+2}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

olarak elde edilmektedir. Eğer $i = k + 2, k + 3, k + 4, \dots$ için

$$\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k + 2\} = \emptyset$$

ise $\varphi_i = 1$ olur.

iii) Bu durumda aşağıda verilen üç farklı koşul dikkate alınmalıdır:

a) $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{s-1} \neq a_s \neq 0$ ($s > k + 1$) olsun.

$$r = \min\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i > s\}$$

olarak tanımlansın. Böylece $i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

ve $i = s$ ise $\varphi_s = 0$ olur. Eğer

$$\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i > s\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = 0$ elde edilir.

b) $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{s-1}$ ve $a_s = 0$ ($s > k + 1$) olsun. Bu durumda,

$i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \text{ ise} \\ 1, & \text{d. d.} \end{cases}$$

ve $i = s$ için $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanmaktadır. Eğer

$$\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k + 2\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanmaktadır.

c) Eğer $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_i = \cdots$ ise $i = k + 2, k + 3, k + 3, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olmaktadır.

a, b ve c durumları için A noktası ile $\tilde{S}\sigma_{a_k} \cap \tilde{S}\sigma_0$ noktası arasındaki en kısa uzaklık,

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak hesaplanmaktadır.

Not: B noktası ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktası arasındaki en kısa uzaklık için benzer hesaplar yapılmaktadır (Böyle bir durumda, karışıklık olmaması için φ_i yerine θ_i kullanılmalıdır). Ayrıca $\tilde{S}_{\sigma 0}$ alt üçgeninde $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ $(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ kenarının uzunluğu $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ olarak hesaplanmaktadır. Bu durumda $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ $(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu

$$\mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' + \frac{1}{2^{t+k+1}}$$

olarak elde edilmektedir.

- $a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ olsun. Bu durumda A ve B noktaları arasındaki en kısa uzaklık $\tilde{S}_{\sigma 0}$ alt üçgenin köşe noktalarının birinden geçmelidir. Dolayısıyla en kısa yol $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ veya $\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ veya $\tilde{S}_{\sigma b'_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktalarından birinden geçmelidir (en kısa yolların uzunlukları Durum 4, Durum 5 ve Durum 6'da sırasıyla formüle edilmektedir). En kısa yolun uzunluğunun hesabı için bu üç durum içinden minimumu alınmalıdır.

Durum 4: $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa uzaklık için A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı ile B noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına olan uzaklığı toplanmalıdır. A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı için Durum 3'te verilen \mathcal{A}'' değeri kullanılmalıdır. B ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktası arasındaki en kısa yolun uzunluğu ise

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq a_k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \mathcal{B}$$

olarak hesaplanmaktadır. Böylece \mathcal{A}'' ile $\frac{1}{2} \mathcal{B}$ toplamı $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğunu vermektedir.

Durum 5: $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}) (\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğunu bulmak için öncelikle B noktasının $\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu hesaplanmalıdır.

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq c_k \text{ ise} \end{cases}$$

ve $c_k \in \{1,2,3\}$ için $c_k \neq a_k$ olmak üzere bu en kısa uzunluk

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \mathcal{B}'$$

olarak elde edilmektedir. Ayrıca A noktası ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktası arasındaki en kısa yolların uzunluğu Durum 2 verilen \mathcal{A}' değeridir. Böylece,

$$\frac{1}{2^{t+k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}'$$

toplamı $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}) (\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğudur.

Durum 6: $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b'_k}) (\tilde{S}_{\sigma b'_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğunu bulmak için öncelikle A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b'_k}$ noktasına olan en kısa uzaklığı hesaplanmalıdır. Bu uzaklık Durum 1'de verilen \mathcal{A} değeridir (b_k yerine b'_k kullanılmalıdır). Buna ek olarak,

$$\beta'_i = \begin{cases} 0, & b_i = b'_k \text{ ise} \\ 1, & b_i \neq b'_k \text{ ise} \end{cases}$$

ve $b'_k \neq a_k, b'_k \neq c_k, b'_k \in \{1,2,3\}$ olmak üzere B noktasının $\tilde{S}_{\sigma b'_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu;

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} + \dots \right)$$

olarak hesaplanmaktadır. Böylece, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b'_k}) (\tilde{S}_{\sigma b'_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ve B noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\frac{1}{2^{t+k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}$ olarak bulunmaktadır.

Teorem 6.1.1 $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$, $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan iki nokta olsun. A ve B noktalarının kod temsilleri arasındaki içsel metrik;

- $a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ ise

$$d(A, B) = \min \left\{ \mathcal{A} + \mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' \right\}$$

- $a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ ise

$$d(A, B) = \min \left\{ \mathcal{A}'' + \frac{1}{2} \mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} \right\}$$

olarak formüle edilmektedir.

6.2. Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki En Az İki Jeodezikli Noktaların Kod Temsilleri

$a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k, a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan farklı iki nokta olsun. İlk olarak $K = \emptyset$, $M = \emptyset$ ve $L = \emptyset$ olarak alınmaktadır.

Bu durumda $i \geq k + 1$ için

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_\mu \\ 1, & a_i \neq a_\mu \end{cases}, \quad \theta_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_\mu \\ 1, & b_i \neq b_\mu \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \mathcal{A} + \mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'', \frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' \right\}$$

elde edilmektedir. Bu metriği kullanarak Bölüm 6.1’de ifade edilen Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 ikişer ikişer birbirlerine eşitlenerek farklı formadaki noktalar aşağıda bulunmaktadır.

$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ Eşitliği

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$$

ve

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i}$$

olmak üzere $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ olsun. Böylece

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i}$$

eşitliğinden

$$\frac{\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

elde edilmektedir. Bundan sonra eşitlikte kısaltma olarak $i \geq k + 2$ için $\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i) = T_i$ olarak alınacaktır. Dikkat edilirse $\alpha_i, \beta_i, \varphi_i$ ve θ_i 'nin durumlarından dolayı $T_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmaktadır. Aşağıda T_i nin durumları detaylıca incelenmektedir.

$T_i = -2$ ise $\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i) = -2$ olup bu durum sadece $\alpha_i = \beta_i = 0$ iken $\varphi_i + \theta_i = 2$ olmak üzere $\varphi_i = \theta_i = 1$ durumunda sağlanmaktadır. Bundan sonraki tüm T_i tabloları benzer yolla oluşturulmaktadır.

Çizelge 6.1. T_i tablosu.

$T_i = -2$
$a_i = b_k$
$b_i = a_k$
$a_i \neq a_\mu$
$b_i \neq b_\mu$

$T_i = -1$			
$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i = a_k$
$a_i \neq a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$

$T_i = 1$			
$a_i \neq b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$
$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i = b_\mu$

$T_i = 2$
$a_i \neq b_k$
$b_i \neq a_k$
$a_i = a_\mu$
$b_i = b_\mu$

$T_i = 0$					
$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$
$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$

i. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = b_k$ ve $b_{k+1} = a_k$ olup

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6.1)$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitliğin sağlanması için aşağıdaki durumlardan en az biri kullanılmalıdır.

a) $T_{k+2} = -2$ ise (6.1) eşitliği elde edilemez.

b) $T_{k+2} = -1$ ise (6.1) eşitliği elde edilemez.

c) $T_{k+2} = 0$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 2$ olmalıdır. Bu durumda elde edilen noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A = \sigma a_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

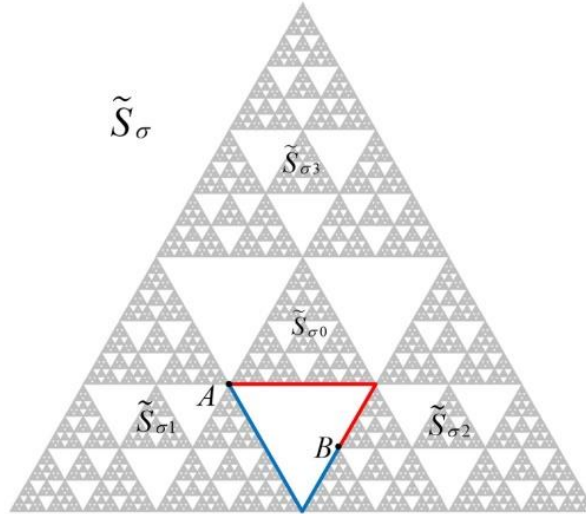
$$A = \sigma a_k b_k b_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

$$\text{veya } B = \sigma b_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

$$A = \sigma a_k b_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k b_k c_k c_k c_k \dots$$



Şekil 6.2. $T_{k+2} = 0$ için kod temsilleri 12333 ... ile 211333 ... olan noktalar.

Dikkat edilirse bu noktaların başlangıç durumları farklı olduğundan farklı kombinasyonlarının olamayacağı kolaylıkla görülebilir.

d) $\forall i \geq k + 2$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda elde edilen noktalar aşağıdaki formda olacaktır.

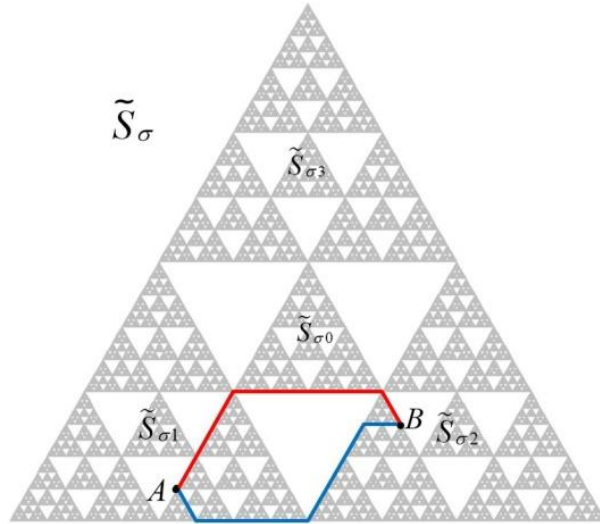
$$A = \sigma a_k b_k c_k c_k c_k \dots$$

$$A = \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots$$

$$\text{veya } B = \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k b_k a_k c_k a_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k a_k c_k b_k c_k b_k \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar da göz ardı edilmemelidir.



Şekil 6.3. $T_i = 1$ ($i \geq k + 2$) için kod temsilleri 1211333 ... ile 2133222 ... olan noktalar.

e) $\forall n \geq k + 2$ için $T_n = 1$, $T_{n+1} = 0$ ve $\forall j > n$ olmak üzere $T_{n+j} = 2$ veya $\forall n \geq k + 2$ için $T_n = 1$, $T_{n+1} = 2$ ve $\forall j > n$ olmak üzere $T_{n+j} = 0$ olacak şekilde sonsuz sayıda birçok farklı kombinasyon yazılabilmektedir.

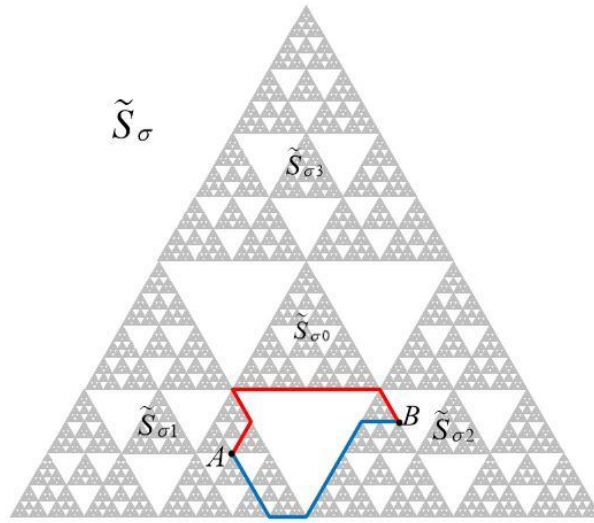
f) $T_{k+2} = 2$ olmak üzere

$$\sum_{i=k+3}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = 0$$

olmalıdır. Verilen toplama dikkat edilirse $i \geq k + 3$ için $T_i = 0$ eşitliğinden ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & & B &= \sigma b_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ & & & & A &= \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ & & & & B &= \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \end{aligned}$$

Verilen noktaların $A = a_k b_k c_k c_k b_k a_k \dots$, $B = b_k a_k c_k a_k c_k b_k \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından da elde edilebilen noktalar gözden kaçırılmamalıdır.



Şekil 6.4. $T_{k+2} = 2$ için kod temsilleri 1231222 ... ile 2132333 ... olan noktalar.

Bu noktalara ek olarak aşağıda $k + 3$. adımdan sonra toplamın sıfır çıktığı durumlardan elde edilen noktaların birkaçı detaylı olarak incelenmiştir. $T_{k+3} = -2$ olmak üzere $i \geq k + 4$ için $T_i = 2$ olabilir. Bu durumda ortaya çıkan nokta aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A = \sigma a_k b_k c_k b_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

$T_{k+3} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 4$ için $T_i = -2$ olabilir. Bu durumda yeni nokta aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A = \sigma a_k b_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$T_{k+3} = 1$ olmak üzere $i \geq k + 4$ için $T_i = -1$ olabilir. Bu durumda yeni noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A = \sigma a_k b_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots$$

$$A = \sigma a_k b_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k b_k \dots$$

$$\text{veya } B = \sigma b_k a_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots$$

$$A = \sigma a_k b_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$$A = \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma b_k a_k c_k b_k a_k a_k a_k \dots$$

$$\text{veya } B = \sigma b_k a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$T_{k+3} = -1$ olmak üzere $i \geq k + 4$ için $T_i = 1$ olabilir. Bu durumda yeni noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{array}{ll}
A = \sigma a_k b_k c_k b_k c_k c_k c_k \dots & A = \sigma a_k b_k c_k b_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k c_k b_k c_k c_k c_k \dots \\
A = \sigma a_k b_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots & A = \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k a_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots
\end{array}$$

Bu noktaların sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından ortaya çıkan noktalar da göz ardı edilmemelidir.

$n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_{k+(2n+1)} = -1, T_{k+(2n)} = 2$ ve $T_{k+(2n+1)} = -2, T_{k+(2n)} = 1$ olacak şekilde daha birçok farklı sıfırı veren sonsuz sayıda farklı kombinasyonlar yazılabilmektedir.

ii. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq b_k, b_{k+1} = a_k$ veya $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} \neq a_k$ olup

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = 0 \quad (6.2)$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitliğin sağlanması için aşağıdaki durumlardan en az biri kullanılmalıdır. Dikkat edilirse $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = a_k$ ve $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} = b_k$ durumları için farklı bir formül kullanılmalıdır. Bu durum daha sonra değerlendirilecektir.

a) $T_{k+2} = -2$ ise (6.2) eşitliği elde edilemez.

b) $T_{k+2} = -1$ ise (6.2) eşitliği elde edilemez.

c) $i \geq k + 2$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{array}{ll}
A = \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots \\
A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A = \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k a_k a_k a_k \dots \\
A = \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots
\end{array}$$

Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından ortaya çıkan yeni noktalar da gözden kaçırılmamalıdır. Verilen toplama dikkat edilirse $i \geq k + 2$ için $T_i = 0$ eşitliğinin yanı sıra sıfırı veren kombinasyonların bazıları aşağıda

incelenmektedir. $T_{k+2} = 1$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = -1$ olabilir. Bu durumda 18 farklı nokta ve $k + 2$. blokları aynı olan noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonları da ortaya çıkmaktadır. $T_{k+2} = -1$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 1$ olabilir. Bu durumda yine 18 farklı nokta ve $k + 2$. blokları aynı olan noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonları ortaya çıkmaktadır. Yapılan çalışmalarda iki farklı kombinasyondan elde edilen 36 nokta aslında aynı noktalarlardır. İlk kombinasyonda çıkan noktanın diğer kod temsili nedeniyle ikinci kombinasyonda farkı bir nokta gibi karşımıza çıkmaktadır. Bunun nedeni ortaya çıkan noktaların çift kodlu olmasıdır.

$T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = -2$ olabilir. Bu durumda ortaya çıkan herhangi bir nokta yoktur. Böyle bir durumda çelişki elde ederiz. Aynı şekilde $T_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 2$ durumu da çelişkili elde edeceğimizden herhangi bir nokta elde edilememektedir. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_{k+(2n+1)} = -1$, $T_{k+(2n)} = 2$ ve $T_{k+(2n+1)} = -2$, $T_{k+(2n)} = 1$ olacak şekilde daha birçok sıfırı veren sonsuz sayıda farklı kombinasyonlar yazılabilmektedir.

Aşağıda i 'nin özel bir hali olan $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = a_k$ ve $a_{k+1} = b_k$, $b_{k+1} = b_k$ durumu incelenmektedir. Bu durum için

$$\frac{\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} \tag{6.3}$$

olacak şekildeki metrik formülü kullanılmalıdır. Bu durumda $i \geq k + 1$ için T_i tablosu da aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

Çizelge 6.2. T_i tablosu.

$T_i = -2$
$a_i = b_k$
$b_i = a_k$
$a_i \neq a_r$
$b_i \neq b_r$

$T_i = -1$			
$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i = a_k$
$a_i \neq a_r$	$a_i = a_r$	$a_i \neq a_r$	$a_i \neq a_r$
$b_i = b_r$	$b_i \neq b_r$	$b_i \neq b_r$	$b_i \neq b_r$

$T_i = 2$
$a_i \neq b_k$
$b_i \neq a_k$
$a_i = a_r$
$b_i = b_r$

$T_i = 1$			
$a_i \neq b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$
$a_i = a_r$	$a_i = a_r$	$a_i = a_r$	$a_i \neq a_r$
$b_i = b_r$	$b_i = b_r$	$b_i \neq b_r$	$b_i = b_r$

$T_i = 0$					
$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i \neq b_k$	$a_i = b_k$	$a_i = b_k$	$a_i \neq b_k$
$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i = a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$	$b_i \neq a_k$
$a_i = a_r$	$a_i \neq a_r$	$a_i = a_r$	$a_i = a_r$	$a_i \neq a_r$	$a_i \neq a_r$
$b_i = b_r$	$b_i = b_r$	$b_i \neq b_r$	$b_i \neq b_r$	$b_i = b_r$	$b_i \neq b_r$

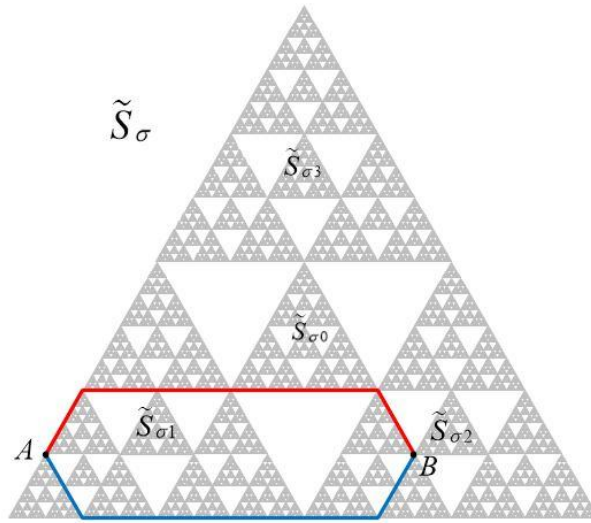
a) $T_{k+2} = -2$ ise (6.3) eşitliği elde edilemez.

b) $T_{k+2} = -1$ ise (6.3) eşitliği elde edilemez.

c) $T_{k+2} = 0$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 2$ olmalıdır. Bu durumda noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
A &= \sigma a_k b_k b_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k b_k a_k c_k c_k c_k \dots \\
B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k b_k b_k c_k c_k c_k \dots \\
A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k c_k c_k c_k \dots \\
B &= \sigma b_k a_k a_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k a_k b_k c_k c_k c_k \dots
\end{aligned}$$

Bu noktaların başlangıç durumları farklı olduğundan birbirileri ile değişik kombinasyonlarının gelemeyeceği açıktır.



Şekil 6.5. $T_{k+2} = 0$ için kod temsilleri 111333 ... ile 212333 ... olan noktalar.

d) $i \geq k + 2$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda noktalar,

$$\begin{aligned}
A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k \dots \\
B &= \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \\
A &= \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots \\
B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots \\
A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\
B &= \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots
\end{aligned}$$

Yukarıdaki noktaların $A = \sigma a_k b_k c_k a_k c_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k b_k b_k c_k a_k \dots$ veya $A = \sigma a_k a_k b_k a_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k a_k c_k c_k b_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır. Kombinasyonlar yapılırken φ_i ve θ_i nin durumları mutlaka göz önüne alınmalıdır.

e) $\forall n \geq k + 2$ için $T_n = 1, T_{n+1} = 0$ ve $\forall j > n$ olmak üzere $T_{n+j} = 2$ veya $\forall n \geq k + 2$ için $T_n = 1, T_{n+1} = 2$ ve $\forall j > n$ olmak üzere $T_{n+j} = 0$ olacak şekilde sonsuz sayıda birçok farklı kombinasyon yazılabilmektedir.

f) $T_{k+2} = 2$ olmak üzere

$$\sum_{i=k+3}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{array}{ll} A = \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B = \sigma b_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ A = \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B = \sigma b_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \end{array}$$

Yukarıdaki noktaların $A = \sigma a_k b_k c_k b_k a_k b_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k b_k c_k c_k b_k c_k b_k \dots$ veya $A = \sigma a_k a_k c_k b_k a_k b_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır. Kombinasyonlar yapılırken φ_i ve θ_i nin durumları mutlaka göz önüne alınmalıdır. Bu noktalara ek olarak $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için T_i yi sıfır yapan i şikkındaki sonsuz sayıda farklı kombinasyonların hepsi burada da geçerli olacaktır. Aşağıda görüleceği üzere bu kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar elde edilmektedir.

$$\begin{array}{ll} A = \sigma a_k b_k c_k a_k b_k a_k b_k \dots & A = \sigma a_k b_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots \\ B = \sigma b_k b_k c_k c_k a_k c_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k c_k c_k a_k c_k c_k \dots \end{array}$$

iii. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 2$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq b_k, b_{k+1} \neq a_k$ olacak şekilde 4 farklı formda başlangıç durumu vardır. $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = c_k$ başlangıcı için

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği kullanılmalıdır. Bu eşitliği sağlayan durumlardan herhangi bir nokta gelmemektedir. Geometrik olarak da kolayca görülebilir. $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ başlangıcı için uygun metrik formülü kullanılacağından

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = 0$$

eşitliği göz önüne alınmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{array}{ll}
A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots \\
B = \sigma b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots \\
A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots \\
A = \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\
B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots \\
A = \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\
B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \\
A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A = \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\
B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots
\end{array}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k a_k b_k b_k a_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k c_k a_k b_k b_k c_k \dots$ ve $A = \sigma a_k c_k b_k a_k a_k c_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k b_k a_k a_k b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından sonsuz sayıda farklı noktalar da ortaya çıkmaktadır. Bu noktalara ek olarak $i \geq k + 2$ için T_i yi sıfır yapan i ve ii şıklarındaki sonsuz sayıda farklı kombinasyonlar aynen geçerli olacaktır. Bu kombinasyonlardan ortaya çıkacak olan sonsuz sayıda farklı noktaların varlığı da göz ardı edilmemelidir.

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = b_k$ başlangıcı için uygun metrik formülü kullanılacağından

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T_i}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6.4)$$

eşitliği göz önüne alınmalıdır. Bu durumda

- $T_{k+2} = -2$ ise (6.4) eşitliği elde edilemez.
- $T_{k+2} = -1$ ise (6.4) eşitliği elde edilemez.
- $T_{k+2} = 0$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 2$ olmalıdır. Bu durumda

$$A = \sigma a_k a_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k b_k c_k c_k c_k \dots$$

olacak şekilde bir tek nokta elde edilmektedir.

d) $i \geq k + 2$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda çıkan noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots \\ A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

Bu noktaların $A = a_k a_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots$ $B = \sigma b_k b_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır.

e) $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda sadece T_i yi sıfır yapan i ve ii şıklarındaki kombinasyonların aynıları kullanılarak

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k a_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k b_k c_k c_k a_k a_k a_k a_k \dots \end{aligned}$$

şeklinde birçok sonsuz sayıda farklı nokta elde edilmektedir.

$$\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' \text{Eşitliği}$$

$$\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}$$

ve

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i}$$

olmak üzere $\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ olsun.

$$\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i}$$

$$\frac{\gamma_{k+1} + \delta_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

elde edilmektedir. Denklemden bundan sonra kısaltma olarak $i \geq k + 2$ için $\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i) = T'_i$ olarak alınacaktır. Dikkat edilirse $\gamma_i, \delta_i, \varphi_i$ ve θ_i nin durumlarından

dolay \textit{i} $T'_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmaktadır. Aşağıda T'_i nin durumları detaylıca incelenmektedir.

$T'_i = -2$ ise $\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i) = -2$ olup bu durum sadece $\gamma_i = \delta_i = 0$ iken $\varphi_i + \theta_i = 2$ olmak üzere $\varphi_i = \theta_i = 1$ durumunda sağlanmaktadır. Bundan sonraki tüm T'_i tabloları benzer yolla oluşturulmaktadır.

Çizelge 6.3. T'_i tablosu.

$T'_i = -2$
$a_i = c_k$
$b_i = c_k$
$a_i \neq a_\mu$
$b_i \neq b_\mu$

$T'_i = -1$			
$a_i = c_k$	$a_i = c_k$	$a_i = c_k$	$a_i \neq c_k$
$b_i = c_k$	$b_i = c_k$	$b_i \neq c_k$	$b_i = c_k$
$a_i \neq a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$

$T'_i = 1$			
$a_i \neq c_k$	$a_i = c_k$	$a_i \neq c_k$	$a_i \neq c_k$
$b_i = c_k$	$b_i \neq c_k$	$b_i \neq c_k$	$b_i \neq c_k$
$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i = b_\mu$

$T'_i = 2$
$a_i \neq c_k$
$b_i \neq c_k$
$a_i = a_\mu$

$$b_i = b_\mu$$

$T'_i = 0$					
$a_i = c_k$	$a_i \neq c_k$	$a_i \neq c_k$	$a_i = c_k$	$a_i = c_k$	$a_i \neq c_k$
$b_i = c_k$	$b_i = c_k$	$b_i = c_k$	$b_i \neq c_k$	$b_i \neq c_k$	$b_i \neq c_k$
$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i = a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$	$a_i \neq a_\mu$
$b_i = b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$	$b_i = b_\mu$	$b_i \neq b_\mu$

i. $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1}=c_k$ ve $b_{k+1} = c_k$ olup

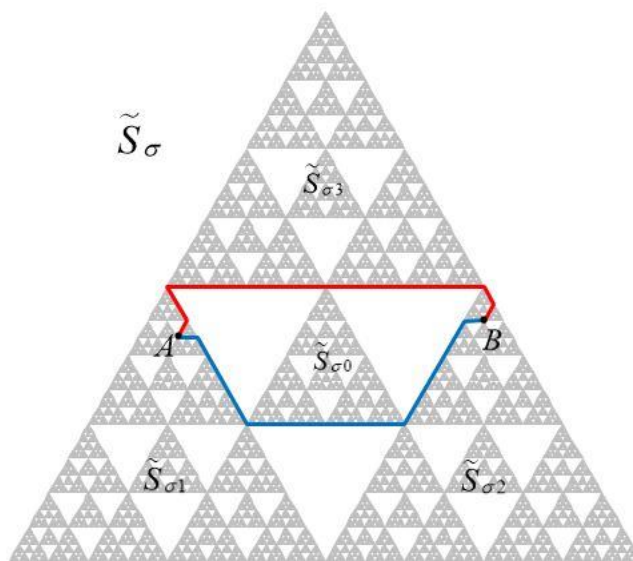
$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T'_i}{2^i} = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitlik altında aşağıdaki durumlardan en az biri geçerlidir.

a) $\forall i \geq k+2$ için $T'_i = -1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k c_k c_k a_k c_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k c_k b_k c_k b_k c_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır.



Şekil 6.6. Kod temsilleri 13323111 ... ve 23331222 ... olan noktalar.

b) $T'_{k+2} = 0$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T'_i = -2$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k b_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots \\ A &= \sigma a_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k b_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

c) $T'_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T'_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ A &= \sigma a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots \end{aligned}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k c_k c_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k c_k c_k c_k a_k b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır.

Bu noktalara ek olarak $T'_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için T'_i yi sıfır yapan sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktaların bazıları aşağıda gösterilmektedir:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k c_k c_k b_k c_k b_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k a_k b_k a_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k b_k a_k c_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k c_k c_k a_k c_k a_k \dots \\ A &= \sigma a_k c_k c_k b_k c_k b_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k a_k c_k a_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k b_k c_k b_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k c_k a_k c_k a_k c_k \dots \end{aligned}$$

ii. $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq c_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} \neq c_k$ olmaktadır. Dikkat edilirse aşağıdaki toplam altında $a_{k+1} = b_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} = a_k$ durumu incelenmelidir. Bu incelemeden herhangi bir nokta elde edilememektedir.

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T'_i}{2^i} = -\frac{1}{2^k}$$

olsun. $a_{k+1} = a_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} = b_k$ olmak üzere noktaları bulabilmek için

$$\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{T'_i}{2^i} = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği kullanılmalıdır.

$\forall i \geq k + 2$ için $T'_i = -1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots \quad A = \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots \quad A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots$ ve $A = \sigma a_k a_k a_k c_k c_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da farklı noktalar ortaya çıkmaktadır.

iii. $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = 2$ olması durumunda i ve ii durumlarındaki benzer bir inceleme yapıldığında bu durumdan herhangi bir nokta elde edilememektedir.

$a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ olsun.

$i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$, $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan farklı iki nokta olsun. İkinci olarak $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ ve $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$ için $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ ve $L = \{l_1, l_2, l_3, \dots\}$ olmak üzere $M \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olarak alınmaktadır. Bu durum değerlendirilirken sıfırların aynı sayıda ve aynı blokta olmasına dikkat edilmektedir. Yani aşağıda $M = L$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $m_n = l_n$ durumu ayrıntılı olarak incelenmektedir.

Bu durumda $i \geq k + 1$ için

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_\mu \\ 1, & a_i \neq a_\mu \end{cases}, \quad \theta_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_\mu \\ 1, & b_i \neq b_\mu \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \mathcal{A} + \mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'', \frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' \right\}$$

elde edilmektedir. Bu metrikten hareketle aşağıda Bölüm 6.1’de ifade edilen Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 ikişer ikişer birbirlerine eşitlenerek farklı formda noktalar bulunmaktadır.

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' \text{ Eşitliği}$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \dots$$

ve

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \dots$$

olmak üzere $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ olsun.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} + \dots \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \dots \\ & \frac{\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} \\ & \quad + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} + \dots = \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmektedir. Eşitlikte kısaltma olarak ilk gösterimle benzer şekilde $i \geq k + 2$ için $\alpha_i + \beta_i - (\varphi_i + \theta_i) = T_i$ olarak alınmaktadır. Dikkat edilirse $\alpha_i, \beta_i, \varphi_i$ ve θ_i nin

durumlarından dolayı $T_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olup Tablo 6.1 T_i tablosu aynı şekilde kullanılacaktır.

i. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = b_k$ ve $b_{k+1} = a_k$ olup

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = \frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir. $\forall i \geq k+1$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Fakat bu eşitliği sağlayan durumlardan herhangi bir nokta gelmemektedir. Geometrik olarak da kolayca görülebilir. $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k+3$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda elde edilen noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k b_k c_k 000 \dots \\ B &= \sigma b_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k 000 \dots \end{aligned}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k b_k c_k c_k 0 a_k b_k 000 \dots$ $B = \sigma b_k a_k c_k a_k 0 b_k c_k 000 \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar da gözden kaçırılmamalıdır. Bu noktalara ek olarak aşağıda $k+3$. adımdan sonra toplamın sıfır çıktığı kombinasyonlar da verilmektedir. $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_{k+(2n+1)} = -1$ ve $T_{k+(2n)} = 2$ veya $T_{k+(2n+1)} = 1$ ve $T_{k+(2n)} = -2$ olacak şekilde birçok farklı sıfırı veren kombinasyonlar yazılabilmektedir.

ii. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} \neq a_k$ ve $a_{k+1} \neq b_k, b_{k+1} = a_k$ olup

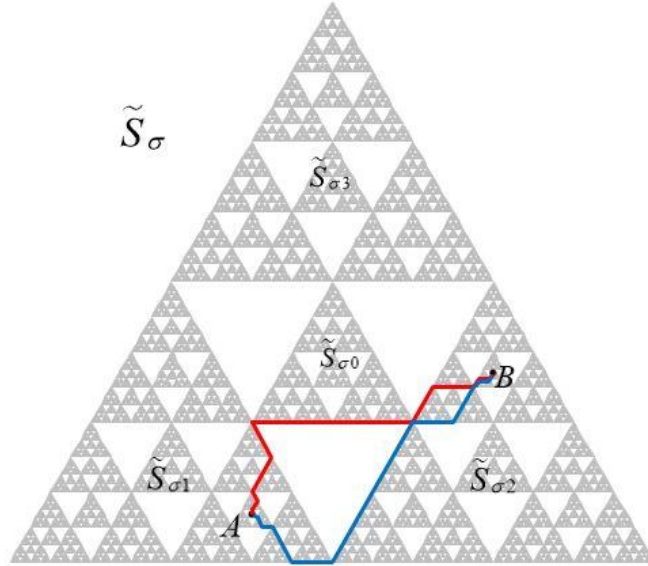
$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = 0$$

eşitliği elde edilmektedir. Dikkat edilirse $a_{k+1} = b_k$ iken b_{k+1} ya b_k ya da c_k ve $b_{k+1} = a_k$ iken a_{k+1} ya a_k ya da c_k olabilir. $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = a_k$ ve $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} = b_k$ durumları için farklı bir eşitlik kullanılmalıdır. Bu durum daha sonra değerlendirilecektir.

$a_{k+1} = b_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ olmak üzere $\forall i \geq k+2$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda çıkan noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
A &= \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots \\
B &= \sigma b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots \\
A &= \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k b_k 000 \dots \\
B &= \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k c_k 000 \dots
\end{aligned}$$

Bu noktaların $A = a_k b_k a_k a_k 0 a_k a_k a_k \dots$ $B = b_k c_k a_k c_k 0 b_k b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar da gözden kaçırılmamalıdır.



Şekil 6.7. Kod temsilleri 12000 ... ile 23000 ... olan noktalar.

$b_{k+1} = a_k$ iken $a_{k+1} = c_k$ olmak üzere $\forall i \geq k + 2$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda çıkan noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
A &= \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\
B &= \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots \\
A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k 000 \dots \\
B &= \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B &= \sigma b_k a_k 000 \dots
\end{aligned}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k c_k b_k 0 0 c_k a_k \dots$ $B = \sigma b_k a_k b_k 0 0 b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar da gözden kaçırılmamalıdır.

Bu kombinasyonların yanı sıra $T_{k+2} = 1$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = -2$, $T_{k+2} = -1$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 2$ ve $T_{k+2} = 0$ olmak üzere $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_{k+(2n+1)} = -1$ ve $T_{k+(2n)} = 2$ veya $T_{k+(2n+1)} = 1$ ve $T_{k+(2n)} = -2$ olacak şekilde birçok sıfırı veren farklı kombinasyonlar ve bu kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar yazılabilmektedir.

$a_{k+1} = b_k$, $b_{k+1} = b_k$ ve $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = a_k$ durumları için uygun metrik kullanılacağından

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = \frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği göz önüne alınmalıdır.

a) $i \geq k + 2$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

$T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ A &= \sigma a_k b_k c_k 0 0 0 \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k 0 0 0 \dots \end{aligned}$$

$$B = \sigma b_k b_k c_k 000 \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k c_k 000 \dots$$

Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar ve bu noktaların yanı sıra $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için T_i yi sıfır yapan $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_{k+(2n+1)} = -1$ ve $T_{k+(2n)} = 2$ veya $T_{k+(2n+1)} = 1$ ve $T_{k+(2n)} = -2$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından elde edilen farklı noktalarda gözden kaçırılmamalıdır.

iii. $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 2$ olsun. Bu durumda $\alpha_{k+1} \neq b_k$ ve $b_{k+1} \neq a_k$ olup

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği elde edilir. Dikkat edilirse $\alpha_{k+1} \neq b_k$ ise $\alpha_{k+1} a_k, c_k$ ve 0 olabilirken $b_{k+1} \neq a_k$ ise $b_{k+1} b_k, c_k$ ve 0 olabilir. Bu durumda $k + 1$. adıma bağlı dokuz farklı nokta oluşmaktadır. Bu eşitliği sağlayan $T_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 0$ ve $i \geq k + 2$ için $T_i = -1$ durumlarından herhangi bir nokta elde edilemeyeceği görülmüştür.

$\alpha_{k+1} = a_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $\alpha_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} = b_k$ durumu için

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = 0$$

eşitliği kullanarak elde edilen noktalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{ll} A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots & A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k c_k b_k b_k b_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots & A = \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \\ A = \sigma a_k a_k 000 \dots & A = \sigma a_k c_k 000 \dots \end{array}$$

$$B = \sigma b_k c_k 000 \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma b_k b_k 000 \dots$$

Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından ortaya çıkan sonsuz sayıdaki noktalar da göz ardı edilmemelidir. Yine bu noktalara ek olarak sıfırı veren kombinasyonlar da gözden kaçırılmamalıdır.

$$a_{k+1} = a_k \text{ iken } b_{k+1} = b_k \text{ durumunu incelersek}$$

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = \frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği kullanılmalıdır. Bu eşitliği sağlayan durumlar aşağıda incelenmektedir.

a) $\forall i \geq k + 2$ için $T_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda noktalar

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots \\ A &= \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k b_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

gibi olacaktır. Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonları da olacaktır.

b) $T_{k+2} = 2$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $T_i = 0$ elde edilir. Bu durumda noktalar

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k a_k c_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k a_k c_k 000 \dots \\ B &= \sigma b_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k b_k c_k 000 \dots \end{aligned}$$

gibi olacaktır. Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonları da olacaktır. Ayrıca yine sıfırı veren sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar da gözden kaçırılmamalıdır.

$$a_{k+1} = 0 \text{ iken } b_{k+1} = 0 \text{ durumunun incelenmesi için}$$

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T_i}{2^i} + \dots = 0$$

eşitliği kullanılmalıdır. $\forall i \geq k + 2$ için $T_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k 0 b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k 0 a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k 0 a_k a_k a_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k 0 a_k a_k a_k \dots \\ A &= \sigma a_k 0 a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k 0 b_k b_k b_k \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \sigma b_k 0 b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & & B &= \sigma b_k 0 b_k b_k b_k \dots \\
A &= \sigma a_k 0000 \dots \\
B &= \sigma b_k 0000 \dots
\end{aligned}$$

Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından elde edilen sonsuz sayıda farklı noktalar da göz önünde bulundurulmalıdır.

$$\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' \text{ Eşitliği}$$

$$\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \dots$$

ve

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \dots$$

olmak üzere $\frac{1}{2^k} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ olsun.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} + \dots \\
&= \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i + \theta_i}{2^i} + \dots \\
& \frac{\gamma_{k+1} + \delta_{k+1}}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} \\
& \quad + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i)}{2^i} + \dots = -\frac{1}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmektedir. Eşitlikte kısaltma olarak ilk durumdaki gibi $i \geq k+2$ için $\gamma_i + \delta_i - (\varphi_i + \theta_i) = T'_i$ olarak alınmaktadır. Dikkat edilirse $\gamma_i, \delta_i, \varphi_i$ ve θ_i nin durumlarından dolayı $T'_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmaktadır. Bu sebeple Tablo 6.2 T'_i tablosu benzer şekilde kullanılacaktır.

i. $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = c_k$ ve $b_{k+1} = c_k$ olup

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T'_i}{2^i} + \dots = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği kullanılmalıdır.

- a) $\forall i \geq k+2$ için $T'_i = -1$ olmalıdır. Bu durumda noktalar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

Bu noktaların $A = \sigma a_k c_k c_k a_k c_k c_k c_k \dots$ $B = \sigma b_k c_k b_k c_k b_k b_k b_k \dots$ gibi sonsuz çeşitlilikte farklı kombinasyonlarından elde edilebilen noktalar da göz önünde bulundurulmalıdır.

- b) $T'_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k+3$ için $T'_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda noktalar

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots \\ A &= \sigma a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots & A &= \sigma a_k c_k c_k 000 \dots \\ B &= \sigma b_k c_k c_k b_k b_k b_k \dots & \text{veya} & B = \sigma b_k c_k c_k 000 \dots \end{aligned}$$

gibi olacaktır. Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından da sonsuz sayıda farklı noktaların elde edilebileceği gözden kaçırılmamalıdır. Örnek olarak $A = \sigma a_k c_k c_k b_k 0 c_k c_k c_k \dots$ ve $B = \sigma b_k c_k c_k c_k 0 a_k a_k a_k \dots$ nokta çifti verilebilir. Bu noktaların yanı sıra $T'_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k+3$ için T'_i yi sıfır yapan $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T'_{k+(2n+1)} = -1$ ve $T'_{k+(2n)} = 2$ veya $T'_{k+(2n+1)} = 1$ ve $T'_{k+(2n)} = -2$ gibi sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından elde edilen farklı noktaların varlığı da göz ardı edilmemelidir.

- ii. $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq c_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} \neq c_k$ olmaktadır. Dikkat edilirse

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T'_i}{2^i} + \dots = -\frac{1}{2^k}$$

eşitliği altında $a_{k+1} = b_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} = a_k$ durumu incelenmelidir. Bu durumdan herhangi bir nokta elde edilememektedir.

$a_{k+1} = a_k$ iken $b_{k+1} = c_k$ ve $a_{k+1} = c_k$ iken $b_{k+1} = b_k$ olmak üzere noktaları belirleyebilmek için

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{T'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{T'_i}{2^i} + \dots = -\frac{1}{2^{k+1}}$$

eşitliği kullanılmalıdır. $T'_{k+2} = -2$ olmak üzere $i \geq k+3$ için $T'_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots \quad A = \sigma a_k a_k c_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k c_k a_k a_k a_k \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma b_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

Bu noktaların sonsuz sayıda farklı kombinasyonlarından gelen sonsuz sayıda farklı noktaların varlığı da gözden kaçırılmamalıdır.

$a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ olsun.

$i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ ($a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$) olmak üzere A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} 0 b_{k+1} \dots$ olan farklı iki nokta olsun. İlk olarak $K = \emptyset$, $M = \emptyset$ ve $L = \emptyset$ olarak alınmaktadır.

Bu durumda $i \geq k+1$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & a_i \neq a_r \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

$$\beta'_i = \begin{cases} 0, & b_i = b'_k \\ 1, & b_i \neq b'_k \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}, \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}', \mathcal{A}'' + \frac{1}{2} \mathcal{B} \right\}$$

elde edilmektedir. Bu formülden hareketle aşağıda Bölüm 6.1’de ifade edilen Durum 4, Durum 5 ve Durum 6 ikişer ikişer birbirlerine eşitlenerek farklı formda noktalar bulunmaktadır.

$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ Eşitliği

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta'_i}{2^i} \right)$$

ve

$$\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} \right)$$

olmak üzere $\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ olsun.

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i - \alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i - \beta'_i}{2^i} \right) - \frac{\alpha_{k+1}}{2^{k+1}}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bundan sonra eşitliği kolaylaştırmak adına $i \geq k + 2$ için $\varphi_i - \alpha_i = M_i$ ve $i \geq k + 1$ için $\beta_i - \beta'_i = K_i$ kullanılacak olup dikkat edilirse $M_i, K_i \in \{-1, 0, 1\}$ ’dir.

i. $\alpha_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right)$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu toplam altında aşağıdaki durumlardan en az biri geçerli olacaktır.

a) $\alpha_{k+1} = b'_k$ olup $i \geq k + 2$ için $M_i = 0$ iken $i \geq k + 1$ için $K_i = 1$ olmalıdır.

Bu durumda çıkan nokta

$$A = \sigma a_k b'_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

gibi olacaktır. Bu kombinasyona ek olarak M_i ve K_i için sıfırı veren sonsuz sayıda farklı kombinasyondan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktaların varlığı da incelenmelidir.

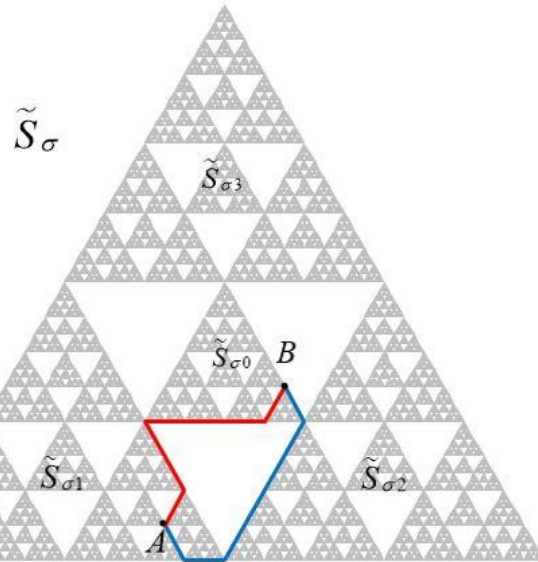
Örneğin $M_{k+2} = 1$, $M_{k+3} = -1$ olmak üzere $i \geq k + 4$ için $M_i = 0$ veya $K_{k+1} = 1$,

$K_{k+1} = 0$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $K_i = 1$ verilebilir. Bu durumda ortaya çıkan nokta Şekil 6.2.7'de de görüldüğü gibi

$$A = \sigma a_k b'_k b'_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

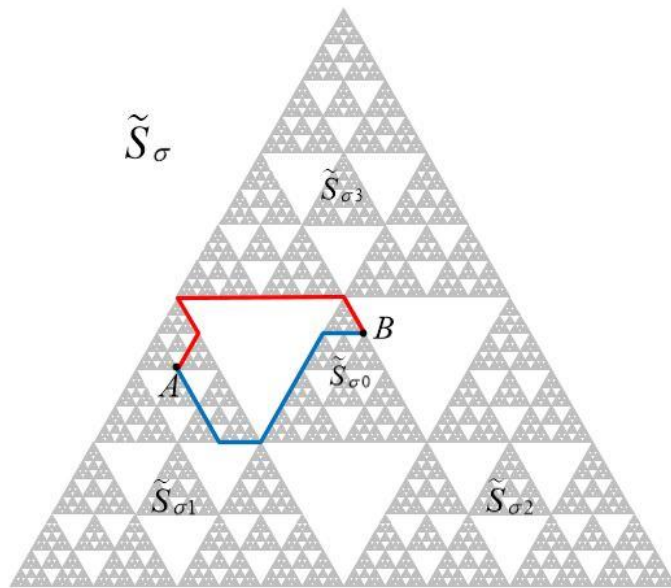
$$B = \sigma 0 b'_k c_k b'_k b'_k \dots$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 6.8. Kod temsilleri 1223111 ... ile 023222 ... olan noktalar.

Bu durum için genel bir formülizasyon olarak $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $M_{k+i} = 0$ olsun. $M_{k+n+1} = 1$ için $j = n + 2, n + 3, n + 4, \dots$ olmak üzere $M_{k+n+j} = -1$ verilebilir.



Şekil 6.9. Kod temsilleri 1332111 ... ile 032333 ... olan noktalar.

b) $a_{k+1} = b'_k$ olup $i \geq k + 2$ için $M_i = 1$ iken $i \geq k + 1$ için $K_i = 0$ olmalıdır.

Bu durumda çıkan nokta

$$A = \sigma a_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

$$B = \sigma 0 c_k c_k c_k \dots$$

gibi olacaktır. Bu kombinasyona ek olarak M_i ve K_i için sıfırı veren sonsuz sayıda farklı kombinasyondan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktaların varlığı da gözden kaçırılmamalıdır. Örneğin $i \geq k + 2$ için $M_i = 1$ olmak üzere $K_{k+1} = 1$ $i \geq k + 2$ için $K_i = -1$ verilebilir. Bu durumda ortaya çıkan nokta aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A = \sigma a_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k a_k a_k a_k \dots$$

ii. $\alpha_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = c_k$ veya $a_{k+1} = a_k$ olabilir. $a_{k+1} = a_k$ için farklı bir toplamla noktalar daha sonra bulunacaktır. $a_{k+1} = c_k$ olsun.

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right)$$

olup bu toplamı altında $i \geq k + 2$ için $M_i = 1$ ve $i \geq k + 1$ için $K_i = 1$ durumunda herhangi bir nokta elde edilememektedir. $a_{k+1} = a_k$ olsun. Bu durumda formül

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right)$$

olarak kullanılmalıdır. Bu durumda $i \geq k + 2$ için $M_i = 0$ iken $i \geq k + 1$ için $K_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda çıkan noktalar

$$A = \sigma a_k a_k a_k a_k \dots$$

$$A = \sigma a_k a_k b_k b_k b_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

$$\text{veya } B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

gibi olacaktır.

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}' = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2} \mathcal{B} \text{ Eşitliği}$$

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} \right)$$

ve

$$\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} \right)$$

olmak üzere $\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ olsun.

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i - \gamma_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i - \delta_i}{2^i} \right) - \frac{\gamma_{k+1}}{2^{k+1}}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bundan sonra eşitliği kolaylaştırmak adına $i \geq k+2$ için $\varphi_i - \gamma_i = M_i$ ve $i \geq k+1$ için $\beta_i - \delta_i = K_i$ kullanılacak olup dikkat edilirse $\varphi_i, \gamma_i, \beta_i, \delta_i$ nin durumlarından dolayı $M_i, K_i \in \{-1, 0, 1\}$ olmaktadır.

i. $\gamma_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = c_k$ olup

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right)$$

eşitliği elde edilmektedir.

a) $i \geq k+2$ için $M_i = 0$ iken $i \geq k+1$ için $K_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Burada $i \geq k+2$ için M_i yi sıfır yapan sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar da göz ardı edilmemelidir. Bahsedilen sonsuz sayıda farklı kombinasyonlara bir örnek olarak $M_{k+2} = 1, M_{k+3} = -1$ olmak üzere $i \geq k+4$ için $M_i = 0$ ve $K_{k+1} = 1, K_{k+2} = 0$ olmak üzere $i \geq k+3$ için $K_i = 1$ verilebilir. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k b'_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 c_k b'_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Bu durum için genel bir formülizasyon olarak $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $M_{k+i} = 0$ olsun. $M_{k+n+1} = 1$ için $j = n+2, n+3, n+4, \dots$ olmak üzere $M_{k+n+j} = -1$ verilebilir.

b) $M_{k+2} = 1$ ve $K_{k+1} = 0$ olmak üzere $i \geq k+3$ için $M_i = 0$ iken $i \geq k+2$ için $K_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

olacaktır. Yine ek olarak $i \geq k + 3$ için M_i yi sıfır yapan sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkacak noktalar da göz ardı edilmemelidir.

c) $i \geq k + 2$ için $M_i = 1$ iken $i \geq k + 1$ için $K_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Burada $i \geq k + 2$ için K_i yi sıfır yapan sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar da gözden kaçırılmamalıdır. Bahsedilen sonsuz sayıda farklı kombinasyonlara bir örnek olarak $K_{k+1} = -1$ olmak üzere $i \geq k + 2$ için $K_i = 1$ verilebilir.

Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma 0 a_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Bu durum için genel bir formülizasyon olarak $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $K_{k+i} = 0$ olsun. $K_{k+n+1} = 1$ için $j = n + 2, n + 3, n + 4, \dots$ olmak üzere $K_{k+n+j} = -1$ verilebilir.

d) $n = 1, 2, 3, \dots$ için $M_{k+(2n+1)} = 0$, $M_{k+(2n)} = 1$ ve $K_{k+(2n+1)} = 0$, $K_{k+(2n)} = 1$ olabilir. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k a_k c_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Bu kombinasyonun da farklı çeşitleri olduğu gözden kaçırılmamalıdır.

ii. $\gamma_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq c_k$ olup $a_{k+1} = b_k$ için

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right)$$

eşitliği kullanılmalıdır. Fakat inceleme yapıldığında bu eşitlik altında herhangi bir nokta elde edilememiştir. $a_{k+1} = a_k$ için aşağıdaki eşitlik kullanılmalıdır.

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{M_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{K_i}{2^i} \right).$$

$i \geq k + 2$ için $M_i = 0$ iken $i \geq k + 1$ için $K_i = 1$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan noktalar

$$\begin{aligned} A &= \sigma a_k a_k c_k c_k c_k \dots & A &= \sigma a_k a_k a_k a_k a_k \dots \\ B &= \sigma 0 c_k c_k c_k c_k \dots & \text{Veya } B &= \sigma 0 c_k c_k c_k c_k c_k \dots \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Burada $i \geq k + 2$ için M_i yi sıfır yapan sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar da gözden kaçırılmamalıdır. Bahsedilen sonsuz sayıda farklı kombinasyonlara bir örnek olarak $M_{k+2} = 1$ olmak üzere $i \geq k + 3$ için $M_i = -1$ verilebilir. Dikkat edilirse i şıkında geçerli olan tüm kombinasyonlar bu eşitlik altında da geçerli olacaktır.

$a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ olsun.

$i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$, $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere A ve B ; \tilde{S} üzerinde kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} 0 b_{k+1} \dots$ olan farklı iki nokta olsun. İkinci olarak $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ ve $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$ için $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ ve $L = \{l_1, l_2, l_3, \dots\}$ olmak üzere $M \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olsun. Bu durum değerlendirilirken $k + 1$. adımdan sonra sıfırların aynı sayıda ve aynı blokta olmasına dikkat edilmiştir. Yani aşağıda $M = L$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $m_n = l_n$ durumu ayrıntılı olarak incelenmektedir.

Bu durumda $i \geq k + 1$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & a_i \neq a_r \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

$$\beta'_i = \begin{cases} 0, & b_i = b'_k \\ 1, & b_i \neq b'_k \end{cases}$$

olmak üzere

$$d(A, B) = \min \left\{ \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}, \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2} \mathcal{B}', \mathcal{A}'' + \frac{1}{2} \mathcal{B} \right\}$$

elde edilmektedir. Bu metrikten hareketle aşağıda Bölüm 6.1’de ifade edilen Durum 4, Durum 5 ve Durum 6 ikişer ikişer birbirlerine eşitlenerek farklı formda noktalar bulunmaktadır.

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} \text{ Eşitliği}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' &= \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \dots \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots \\ &+ \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots \right. \\ &\left. + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots \right) \end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i - \gamma_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i - \gamma_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i - \gamma_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{\varphi_i - \gamma_i}{2^i} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\beta_i - \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\beta_i - \delta_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{\beta_i - \delta_i}{2^i} + \dots \right) - \frac{\gamma_{k+1}}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Eşitlikte kısaltma olarak bundan sonra $i \geq k + 2$ için $\varphi_i - \gamma_i = M'_i$ ve $i \geq k + 1$ için $\beta_i - \delta_i = K'_i$ olarak alınacaktır. Dikkat edilirse $\gamma_i, \delta_i, \varphi_i$ ve β_i nin durumlarından dolayı $M'_i, K'_i \in \{-1, 0, 1\}$ olmaktadır.

i. $\gamma_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda. $a_{k+1} = c_k$ olup

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right)$$

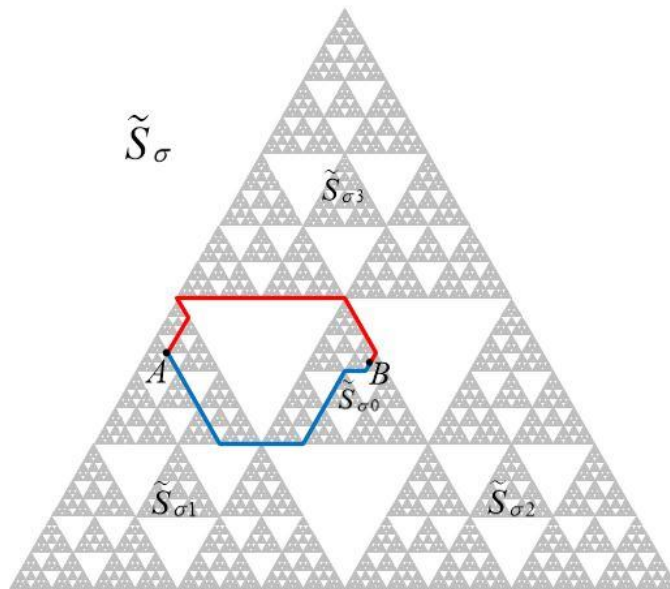
eşitliği elde edilir. $i = k + 2$ için $M'_i = 1$ iken $i \geq k + 3$ için $M'_i = 0$ olmak üzere $i = k + 1$ için $K'_i = 1$ iken $i \geq k + 2$ için $K'_i = 0$ olmalıdır. Bu durumda ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k c_k c_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 c_k b'_k b'_k b'_k \dots$$

gibi olacaktır. Bu noktaya ek olarak M'_i ve K'_i yi sıfır yapacak sonsuz sayıda farklı kombinasyonlardan ortaya çıkan sonsuz sayıda farklı noktalar da gözden kaçırılmamalıdır. Bu noktalara örnek olarak aşağıdaki nokta çiftleri verilebilir:

$$A = \sigma a_k c_k c_k 0 a_k a_k a_k \dots \quad A = \sigma a_k c_k c_k 0 c_k a_k a_k \dots \\ B = 0 \sigma c_k b'_k 0 b'_k b'_k b'_k \dots \quad \text{veya} \quad B = \sigma 0 c_k b'_k 0 a_k a_k a_k \dots$$



Şekil 6.10. Kod temsilleri 1330111 ... ile 0320222 ...olan noktalar.

ii. $\gamma_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq c_k$ olup $a_{k+1} = b'_k$ olabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+!}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu eşitliği sağlayan herhangi bir kombinasyon olmadığından bu eşitlik altında herhangi bir nokta elde edilememektedir. $a_{k+1} = a_k$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+!}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik altında herhangi bir nokta elde edilememektedir.

$a_{k+1} = 0$ durumunda ise ortaya çıkan

$$\begin{aligned} \frac{3}{2^{k+2}} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+!}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right) \end{aligned}$$

eşitliği sağlayan herhangi bir kombinasyon olmadığından bu eşitlik altında herhangi bir nokta elde edilememektedir.

$\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2} \mathcal{B}$ Eşitliği

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} &= \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots \\ &+ \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\beta'_i}{2^{i+t}} + \dots \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots \right) \end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i - \alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i - \alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i - \alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{\varphi_i - \alpha_i}{2^i} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\beta_i - \beta'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\beta_i - \beta'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{\beta_i - \beta'_i}{2^i} + \dots \right) - \frac{\alpha_{k+1}}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Eşitlikte kısaltma olarak $i \geq k + 2$ için $\varphi_i - \alpha_i = M'_i$ ve $i \geq k + 1$ için $\beta_i - \beta'_i = K'_i$ olarak alınacaktır. Dikkat edilirse $\alpha_i, \beta'_i, \varphi_i$ ve β_i nin durumlarından dolayı $M'_i, K'_i \in \{-1, 0, 1\}$ 'dir.

i. $\alpha_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} = b_k$ olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $i = k + 2$ için $M'_i = 1$, $i \geq k + 3$ için $M'_i = 0$ olmak üzere $i = k + 1$ için $K'_i = 1$, $i \geq k + 2$ için $K'_i = 0$ ortaya çıkan nokta

$$A = \sigma a_k b_k b_k a_k a_k a_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k c_k c_k c_k c_k c_k \dots$$

şeklinde olacaktır. Buna ek olarak $\frac{1}{2^{k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ eşitliğinin i şıkkındaki kombinasyonun da bu eşitlik altında geçerli olduğu göz ardı edilmemelidir.

ii. $\alpha_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda $a_{k+1} \neq b_k$ olup $a_{k+1} = a_k$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} &= \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{M'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_4-1} \frac{M'_i}{2^i} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{K'_i}{2^i} + \frac{1}{2^2} \sum_{i=m_3}^{m_3-1} \frac{K'_i}{2^i} + \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda herhangi bir nokta bulunamamaktadır.

6.3 Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki Noktaların Jeodeziklerine Göre Sınıflandırılması

Bu bölümde, ekli Sierpinski üçgeni üzerinde jeodeziklerinin sayısı 2^n , $3 \cdot 2^n + n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) ve sonsuz olan noktalar olduğu gösterilmekte ve bu jeodezik sayısına göre noktaların kod temsilleri sınıflandırılmaktadır.

Aynı seviyedeki alt üçgenlerin aynı kenarı üzerinde bulunan noktaların jeodeziklerinin sayısı bir olduğu aşıkardır. Örneğin,

$$A, B \in \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_k \in \{0, 1, 2, 3\}, a_{k+i} \in \{1, 2\}, i = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$A, B \in \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_k \in \{0, 1, 2, 3\}, a_{k+i} \in \{1, 3\}, i = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$A, B \in \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_k \in \{0, 1, 2, 3\}, a_{k+i} \in \{2, 3\}, i = 1, 2, 3, \dots\}$$

nokta çiftlerinin jeodeziklerinin sayısı birdir. Ama jeodezik sayısı bir olan noktalar sadece aynı seviyenin aynı kenarları üzerinde bulunan noktalardan oluşmazlar. Örneğin, aynı alt üçgende bulunmayan kod temsilleri sırasıyla $\sigma 11333 \dots$ ve $\sigma 22333 \dots$ olan nokta çiftlerinin de jeodezik sayısı birdir ve bu şekilde birçok nokta bulunur. Şimdi, diğer durumların varlığını sağlayan bazı nokta çiftleri araştırılacaktır.

Teorem 6.3.1 $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$; $i < k$ için $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $a_k, c_k \in \{1, 2, 3\}$, $b_k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $a_k \neq b_k$, $c_k \neq a_k$ ve $c_k \neq b_k$ olmak üzere A ve B noktalarını kod temsilleri sırasıyla $\sigma a_k c_k c_k \dots$ ve $\sigma b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ olsun. Eğer $q \geq k$ olacak şekilde bir q için $b_q = 0$ ve $q \neq i$ için $b_i = b_k$ ise A ve B noktaları arasındaki jeodezik sayısı 2^{q-k+1} dir.

İspat İlk olarak $k = q$ özel durumu ile başlansın. Yani;

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma 0 b'_k b'_k b'_k \dots \quad (6.5)$$

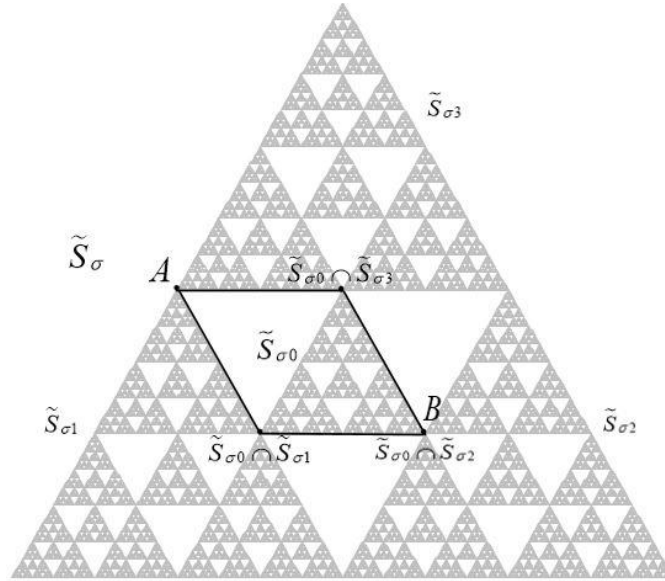
olsun. (Burada $b_k = 0$ olduğundan karışıklık olmaması adına b_k yerine b'_k kullanılmaktadır.) $b_k = 0$ olduğundan Durum 4, Durum 5 ve Durum 6 hesaplanıp en kısa yollar bulunmalıdır.

$$\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{t+k+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' = \frac{1}{2^{t+k}}$$

ve

$$\frac{1}{2^{t+k+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C} = \frac{1}{2^{t+k+1}} + \frac{1}{2^{t+k}}$$

olduğundan dolayı en kısa yollar Durum 4 ve Durum 5'te verilen sırayla $A(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})B$ yolu ve $A(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})B$ yoludur. Böylece bu noktalar arasındaki jeodezik sayısı 2 dir.



Şekil 6.11. 2 jeodezikli noktalar.

Şimdi

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k \dots c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k b_k b_k \dots b_k 0 b_k \dots \quad (6.6)$$

olsun. $a_k \neq b_k$ ve $a_k \neq 0 \neq b_k$ olduğundan Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'te verilen formüller hesaplanmalı ve en kısa yol bulunmalıdır. Böylece,

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t-1}} - \frac{1}{2^{q+t+1+k}}$$

$$\frac{1}{2^{t+k}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+t-1}} - \frac{1}{2^{q+t+1+k}}$$

$$\frac{1}{2^{t+k+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+t-1}} - \frac{1}{2^{q+t+k}}$$

elde edilmektedir. Buradan en kısa yollardan birinin \tilde{S}_{σ_0} in $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ kenarından geçtiği sonucu elde edilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken bir hususta A noktasının kod temsilinin $A = \sigma c_k a_k a_k a_k \dots$ olmasıdır. Bu kod temsili alınıp benzer hesaplamalar yapıldığında en kısa yollardan diğerinin ise \tilde{S}_{σ_0} in $(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ kenarından geçmesidir. Böylece en kısa yollarının $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}$ noktasından geçmesi gerektiği sonucuna varılır. $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0} = B_1$ noktasının kod temsillerinden biri $\sigma 0 b_k b_k b_k \dots$ olduğundan A ile $\sigma 0 b_k b_k b_k \dots$ arasında iki en kısa yolun olduğu $k = q$ durumundan elde edilmektedir. B_1 noktasının diğer bir kod temsili $\sigma b_k a_k c_k c_k \dots$ dir. Şimdi B_1 noktasının bu kod temsilini kullanarak B_1 ve B arasındaki jeodeziklerin sayısı bulunacaktır.

$$B_1 = \sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k b_k b_k b_k \dots b_k 0 b_k \dots$$

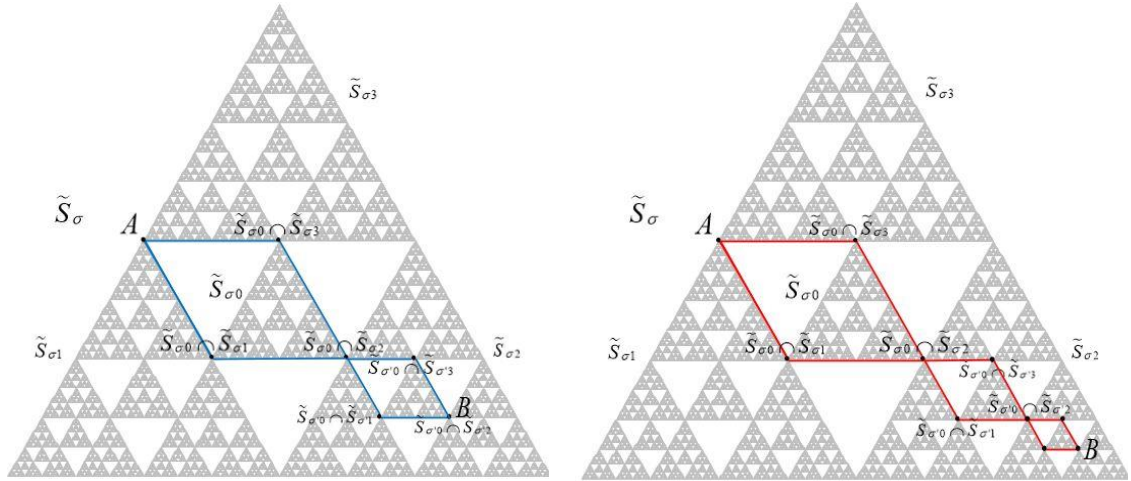
olduğundan $\sigma b_k = \sigma'$ denilirse,

$$B_1 = \sigma' a_k c_k c_k c_k \dots c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma' b_k b_k b_k b_k \dots b_k 0 b_k \dots \quad (6.7)$$

formuna dönüşmektedir. (6.6) ve (6.7) ile verilen noktaların kod temsilleri benzer olduğundan (6.6)'daki noktaların jeodezik sayısını hesaplamak için kullanılan yöntem (6.7)'de de geçerli olacaktır. Böylece B ve B_1 arasındaki en kısa yol kod temsili $B_2 = \sigma b_k 0 b_k b_k b_k \dots$ noktasından geçmeli ve B_1 ile B_2 arasındaki jeodezik sayısı 2 olmalıdır.

Böylece A ile B_2 arasındaki jeodezik sayısı 4 olmaktadır. Bu şekilde devam edilirse B_{q-k+1} noktasının kod temsili $\sigma b_k b_k b_k \dots b_k 0 b_k \dots$ olmak üzere B_{q-1} noktası ve $B_q = B$ arasındaki jeodezik sayısı 2 olduğundan dolayı A ile B arasındaki jeodezik sayısı 2^{q-k+1} olmaktadır.



Şekil 6.12. Sırasıyla jeodezik sayısı 4 ve 8 olan noktalar.

Sonuç 6.3.1 Eğer $q \rightarrow \infty$ ise B noktasının kod temsili $B = \sigma b_k b_k b_k \dots b_k \dots$ olur.

Bu durumda A ile B arasındaki jeodezik sayısı

$$\lim_{q \rightarrow \infty} 2^{q-k+1} = \infty$$

olarak elde edilmektedir.

Teorem 6.3.2 $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$, $i < k$ için $a_i \in \{0,1,2,3\}$; $a_k, b_k, c_k \in \{1,2,3\}$ $a_k \neq b_k$, $b_k \neq c_k$, $a_k \neq c_k$ olsun. A ve B noktalarını kod temsilleri sırasıyla $\sigma a_k c_k c_k c_k \dots$ ve $\sigma b_k a_k b_k b_k b_k \dots$ ise A ve B noktaları arasında 3 jeodezik vardır.

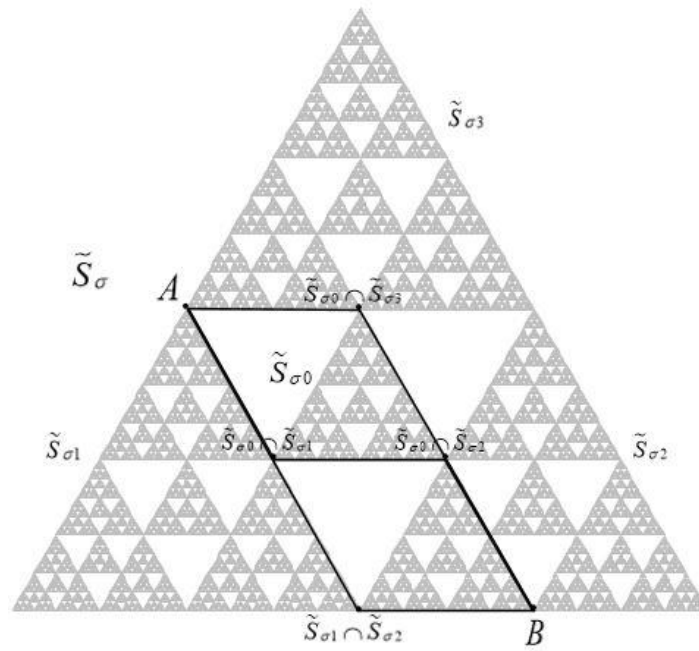
İspat $a_k \neq b_k$ ve $a_k \neq 0 \neq b_k$ olduğundan Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'teki formüller hesaplanıp en kısa yollar bulunmalıdır.

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} = \frac{3}{2^{k+t+1}}$$

$$\frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+t}} + 0 + \frac{1}{2^{k+t}} = \frac{1}{2^{k+t-1}}$$

$$\frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} = \frac{3}{2^{k+t+1}}$$

olduğundan en kısa yollar sırasıyla Durum 1 ve Durum 3'te verilen $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen $A(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}) \cup (\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})B$ yolu ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen $A(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})B$ yoludur. Ayrıca A noktasının diğer bir kod temsili $\sigma c_k a_k a_k a_k \dots$ olduğundan ve bu kod temsilini kullanarak A ve B noktaları arasındaki en kısa yol diğerlerinden farklı olarak $(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen uzunluğu $\frac{3}{2^{k+t+1}}$ olan $A(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})B$ yolu da eklenmelidir. Bu durumda A ile B noktaları arasındaki jeodezik sayısı 3 olduğu sonucu elde edilmektedir.



Şekil 6.13. 3 jeodezikli noktalar.

Teorem 6.3.3 $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$; $i < k$ için $a_i \in \{0,1,2,3\}$, $a_k \neq b_k$, $b_k \neq c_k$, $c_k \neq a_k$ ve $a_k, b_k, c_k \in \{1,2,3\}$ olsun. A ve B noktalarının kod temsilleri sırasıyla $\sigma a_k c_k c_k \dots$ ve $\sigma b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ olsun. Eğer $q \geq k + 1$ olacak şekilde bir q için $b_q = a_k$

ve $q \neq i$ için $b_i = b_k$ $m = q - k - 1$ olmak üzere A ve B noktaları arasındaki jeodezik sayısı $3 \cdot 2^m + m$ dir.

İspat $q = k + 1$ durumu Teorem 6.3.1'den ispatlanmaktadır.

$q \geq k + 2$ olsun.

$$A = \sigma a_k c_k c_k c_k \dots c_k c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma b_k b_k b_k b_k \dots b_k a_k b_k b_k \dots$$

olsun. $a_k \neq b_k$ ve $a_k \neq 0 \neq b_k$ olduğundan Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'teki formüller hesaplanarak en kısa yollar bulunmalıdır.

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t}} + \frac{2^{q-1} - 1}{2^{q+t-1+k}} + \frac{1}{2^{q+t+k}}$$

$$\frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+t}} + 0 + \frac{1}{2^{k+t}} = \frac{1}{2^{k+t-1}}$$

$$\frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} + \left(\frac{2^{q-1} - 1}{2^{q+t-1+k}} + \frac{1}{2^{q+t+k}} \right)$$

olup

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' \leq \frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$$

elde edilmektedir. Yani, A ve B noktaları arasındaki en kısa yollar sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçer. Ayrıca A noktasının diğer bir kod temsili $\sigma c_k a_k a_k a_k \dots$ olup bu kod temsili ile hesaplamalar yapılırsa diğer kısa yolun $(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçtiği görülmektedir. Böylece A ve B noktaları arasındaki en kısa yollar $\tilde{S}_{\sigma a_k}$ nın $A(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})$ kenarından veya $A(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ yolundan veya $A(\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}) \cup (\tilde{S}_{\sigma c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ yolundan geçmelidir. $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0} = B_1$ noktasının kod temsillerinden biri $\sigma b_k a_k c_k c_k c_k \dots$ dir. A ve B noktaları arasındaki en kısa yolu bulmak için B ve B_1 noktaları arasında 2 jeodezik olduğu dikkate alınmalıdır. Ayrıca $A_1 = \tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasının kod temsillerinden biri $\sigma b_k a_k a_k a_k \dots$ olduğundan

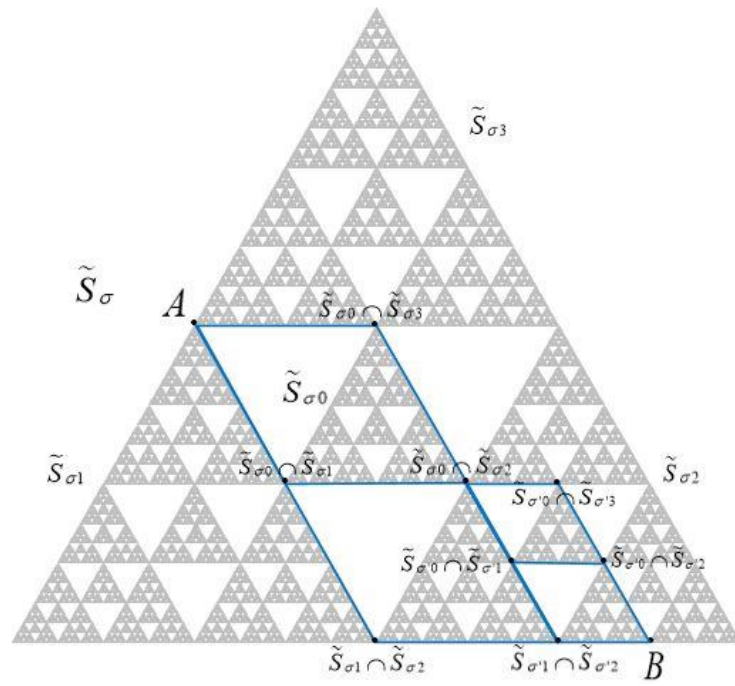
ve B nin kod temsili $\sigma b_k b_k b_k \dots$ olduğundan A_1 ile A noktaları $\tilde{S}_{\sigma a_k}$ alt üçgeninin bir kenarı üzerinde olup A_1 ile A arasında tek jeodezik ve A_1 ile B , $\tilde{S}_{\sigma b_k}$ alt üçgeninin bir kenarı üzerinde olup A_1 ile B arasında tek jeodezik vardır. Sonuç olarak A ve B arasında $A_1 = \tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen tek jeodezik olur.

Şimdi B_1 ile B arasındaki en kısa yollar bulunacaktır. $\sigma' = \sigma b_k$ olmak üzere,

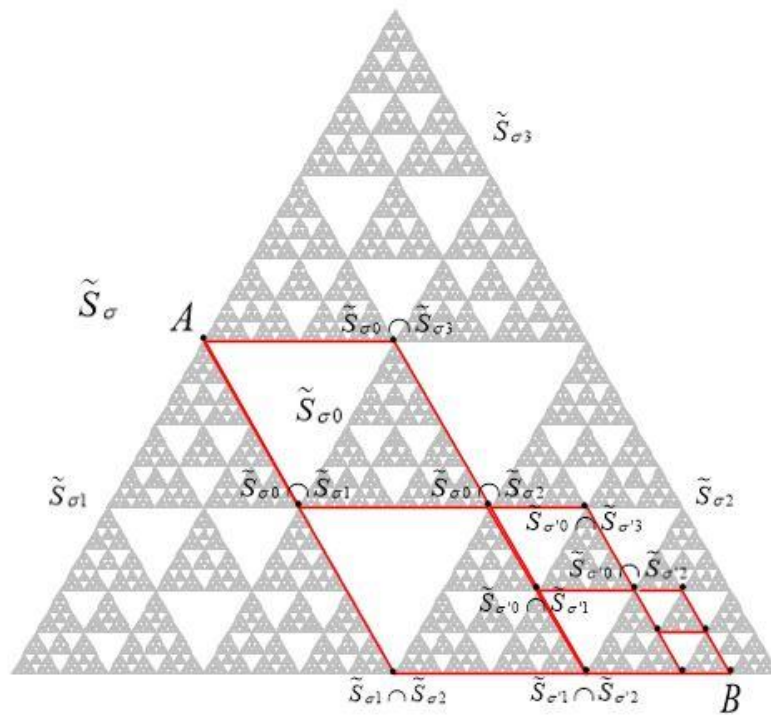
$$B_1 = \sigma' a_k c_k c_k \dots c_k c_k c_k \dots$$

$$B = \sigma' b_k b_k b_k \dots b_k a_k b_k \dots$$

olduğu için benzer durumlar burada da geçerlidir. Yani B_1 ile B noktaları arasındaki en kısa yollar bulunacaktır. $A_2 = (\tilde{S}_{\sigma' a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' b_k})$ veya $(\tilde{S}_{\sigma' a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' 0})(\tilde{S}_{\sigma' b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' 0})$ doğru parçasından veya $(\tilde{S}_{\sigma' c_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' 0})(\tilde{S}_{\sigma' b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' 0})$ doğru parçasından geçer. Böylece $B_2 = \tilde{S}_{\sigma' b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma' 0}$ olmak üzere B_1 ve B arasında B_2 den geçen en kısa 2 yol ve B_1 ve B arasında A_2 den geçen en kısa 1 yol vardır. Eğer $q = k + 2$ ise Teorem 6.3.2'den dolayı B_1 ve B arasında tam olarak 3 jeodezik olur. A ile B_1 arasında 2 tane jeodezik olduğundan A ile B arasında B_1 den geçen 3.2 tane jeodezik elde edilmektedir. Ayrıca A ile B arasında A_1 den geçen tek bir jeodezik olduğundan $q = k + 2$ ($m = 1$) ise $3.2 + 1$ tane jeodezik vardır. Eğer $q > k + 2$ ise benzer durumlar geçerlidir. Böylece A ile B arasındaki jeodezik sayısı $3.2^m + m$ olarak elde edilmektedir.



Şekil 6.14. 7 jeodezikli noktalar.



Şekil 6.15. 14 jeodezikli noktalar.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik formülleri farklı yoldan tanımlanmaktadır. Bu tezde, Sierpinski üçgeni üzerindeki noktaların kod temsilleri kullanılarak elde edilen içsel metrik formülünün inşası model alınmaktadır. Benzer bir yöntem kullanılarak, zayıf kendine benzer küme modelleri olan Sierpinski üçgeni ve komşu Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik formülü inşa edilmiştir. Son olarak büzülme dönüşümleri katsayısı farklı kuvvetli kendine benzer küme modeli olan ekli Sierpinski üçgeninde (Şen, 2020) tanımlanan içsel metrik formülü kullanılarak jeodeziklerin sayılarının bazıları elde edilmekte ve bu jeodeziklerinin sayısına göre bazı noktaların kod temsilleri verilmektedir.

Sierpinski üçgeninde 1,2,3,4 ve en fazla 5 olan jeodeziklerin sayısı ekli Sierpinski üçgeninde de vardır. Ama jeodezik sayısı 5 olan nokta çiftlerinin var olup olmadığı ayrı bir araştırma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

- Addison, P.S. (1997). *Fractals and Chaos. An Illustrated Course*, Institute of Physics Publishing, London, UK.
- Aslan, N., Saltan, M., & Demir, B. (2019). *The Intrinsic Metric Formula and a Chaotic Dynamical System on the Code Set of the Sierpinski Tetrahedron*. *Chaos, Solitons and Fractals*, 123, 422-428.
- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. Academic Press, San Diego, CA, USA.
- Barnsley, M.F. (2006). *Superfractals*. Cambridge University Press, New York.
- Burago, D., Burago, Y., & Ivanov, S. (2001). *A Course in Metric Geometry*, AMS: Providence, RI, USA.
- Cristea, L.L. (2005). *A Geometric Property of the Sierpinski Carpet*. *Quaestiones Mathematicae*, 28, 251-262.
- Cristea, L.L., & Steinsky, B. (2013). *Distances in Sierpinski graphs and on the Sierpinski gasket*. *Aequationes Math*, 85, 201–219.
- Denker, M., & Sato, H. (1999). *Sierpinski gasket as a Martin boundary II* (the intrinsic metric). *Publ. Res. Inst. Math.Sci.*, 35, 769–794.
- Edgar, G. (2008). *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, New York, NY, USA.
- Falconer, K. (2004). *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Hoboken, NJ, USA.
- Grabner, P., & Tichy, R.F. (1998). *Equidistribution and Brownian motion on the Sierpinski gasket*. *Monatshefte für Mathematik* 125, 147–164.
- Gu, J., Ye, Q., & Xi, L. (2019). *Geodesics of Higher-Dimensional Sierpinski Gasket*. *Fractals*, doi:10.1142/S0218348X1950049X.
- Gulick, D. (1988). *Encounters with Chaos and Fractals*. Academic Press, Boston,

- Guneri, M., & Saltan, M. (2019). *Intrinsic Metric Formulas on Some Self-Similar Sets via the Code Representation*. *Fractal Fractional*, 3 (1), 1-13.
- Hinz, A.M., & Schief, A. (1990). *The average distance on the Sierpinski gasket*. *Probab. Theory Relat. Fields* 87, 129–138.
- Mandelbrot, BB. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Ozdemir, Y. (2019). *The Intrinsic Metric and Geodesics on the Sierpinski Gasket SG(3)*. *Turk J Math*, doi:10.3906/mat-1907-18.
- Ozdemir, Y., Saltan, M., & Demir, B. (2018). *The Intrinsic Metric on the Box Fractal*. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, doi:10.1007/s41980-018-00197-w.
- Peitgen, H.O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals*. New Frontiers of Science, Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- Romik, D. (2006). *Shortestpaths in the Tower of Hanoi graph and finite automata*. *SIAM J. Discret. Math*, 20,610–622.
- Sen, A.I., & Saltan, M. (2020). *The Formulization of the Intrinsic Metric on the Added Sierpinski Triangle by Using the Code Representation*. *Turk. J. Math*, Doi:10.3906/mat-1909-68.
- Saltan, M., Özdemir, Y., & Demir, B. (2018). *An Explicit Formula of the Intrinsic Metric on the Sierpinski Gasket via Code Representation*. *Turk. J. Math*. 42, 716–725.
- Saltan, M., Özdemir, Y., & Demir, B. (2018). *Geodesics of the Sierpinski Gasket*. *Fractals* 26, 1850024.
- Saltan, M. (2018). *Some Interesting Code Sets of the Sierpinski Triangle Equipped with the Intrinsic Metric*. *IJAMAS* 57, 152–160.

- Saltan, M. (2019). *The Relation Between Binary Tree and the Sierpinski Triangle which is Equipped with the Intrinsic Metric*. University Journal of Science and Technology B – Theoretical Sciences, 7 (1),34,1-12.
- Saltan, M., Aslan, N., & Demir, B. (2019). *A Discrete Chaotic Dynamical System on the Sierpinski Gasket*. Turk J Math, 43 (1), 361-372.
- Saltan, M. (2018). *Intrinsic Metrics on Sierpinski-Like Triangles and Their Geometric Properties*. Symmetry 10, 204, Doi:10.3390/sym10060204.
- Strichartz, R.S. (1999). *Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals*. Trans. Am. Math. Soc. 351,1705–1752.
- Zhang, Z., Zhou, S., Chen, L., Yin, M., & Guan, J. (2008). *The Exact Solution of the Mean Geodesic Distance for Vicsek Fractals*. J Phys A: Math Theor, 41, 485102.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Melis GÜNERİ
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul, 15.11.1993



Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Anadolu Üniversitesi, 2017
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyetleri :

İş Deneyimi

Stajlar : Melahat Ünügür Orta Okulu, 2017.
Projeler : TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Projesi(118F356), 2019.
Çalıştığı Kurumlar : Bil Özel Öğretim Kurumu, 2018-halen

İletişim

Adres : Deniz köşkler mahallesi Sait Faik sokak Altıntaş Akıncı Er sitesi
C.blok no.18/1 Avcılar/İSTANBUL
E-Posta Adresi : mguneri3.mg@gmail.com

Akademik Çalışmaları

- A Classification According To The Addresses Of Points Of Some Fractals, 7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2018, Gelişim Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

- International Woerkshop on Elliptic Curves, Modular Forms and Langlands Funtoriality, 2018, Katılımcı, Şeyh Edebalı Üniversitesi, Bilecik, Türkiye.
- Intrinsic Metric Formulas on Some Self-Similar Sets via the Code Representation, 2019, Fractal and Fractional.
- Topolojik Ve Geometrik Özellikleriyle Ekli Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik Uzay, 2019, TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Projesi.

Tarih:...../...../.....